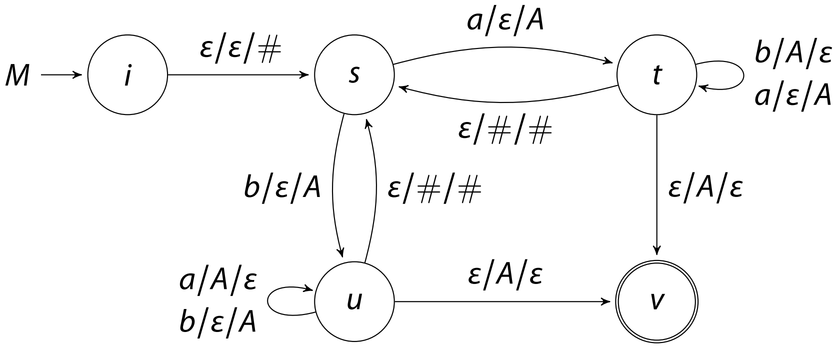
Theoretische Informatik 1
Große Übung 6

Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli
TU Braunschweig
Wintersemester 2025/26

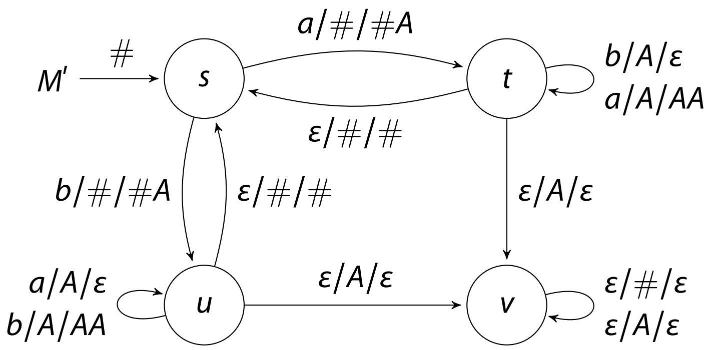
Pushdown-Automaten

Gegeben die Sprache $L = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b \,\}$. Konstruieren Sie einen PDA für L.

Idee: Laufend wird die Differenz $|w|_a - |w|_b$ gezählt. Dabei übernimmt der Stack den absoluten Wert und entsprechende Zustände übernehmen das Vorzeichen. Der PDA akzeptiert in Ziel-Zuständen $Q_F = \{v\}$.



Ein PDA, der mit leerem Stack akzeptiert (und in jeder Transition ein Stacksymbol entfernt), sieht so aus:



Erklärung: Der Automat befindet sich in Zustand t, wenn die Differenz positiv ist. Er ist in u, wenn sie negativ ist. Zustand s steht für neutrale Differenz. s ist gleichzeitig initial und erlaubt spätere Vorzeichenwechel. Akzeptieren kann der Automat nur, indem er den Stack leert, was nur in v passieren kann.

Tripelkonstruktion

Finden Sie eine kontextfreie Grammatik für L.

Wir nutzen M'. Zunächst sollte man versuchen, die Menge produktiver Tripel einzuschränken: Jede Beobachtung erspart uns nachher Regeln, die wir sonst algorithmisch durchlaufen müssten.

1. Zustand s ist nie Ziel einer pop-Transition. xYs ist nie produktiv.
2. Alle ausgehenden Transitionen von s erwarten $\#$ auf dem Top-of-Stack. sYx mit $Y \neq \#$ ist nie produktiv.
3. Zustand v kann Zustände s, t, u nicht mehr erreichen. vYx mit $x \neq v$ ist nie produktiv.
4. Stack-Symbol $\#$ wird in jeder Transition weder ersetzt, noch dupliziert. Alle Transitionen, die es poppen, führen nach v. $x\#y$ mit $y \neq v$ ist nie produktiv.

Nun kann man direkt die Produktionen erzeugen. Das erste Vorkommen jedes Tripels wurde unterstrichen. Nachträglich unproduktive Tripel wurden durchgestrichen. Eine entsprechende Beobachtung wäre

5. Der PDA kann erst dann zwischen t und u wechseln, nachdem alle A's aus dem Stack entfernt wurden. uAt und tAu sind nicht produktiv.

$$
\begin{aligned}
S &\to \underline{\mathtt{s\#v}} \\
\mathtt{s\#v} &\to a\,\underline{\mathtt{tAt}}\;\underline{\mathtt{t\#v}} \mid a\,\underline{\cancel{\mathtt{tAu}}}\;\underline{\mathtt{u\#v}} \mid a\,\underline{\mathtt{tAv}}\;\underline{\mathtt{v\#v}} \mid b\,\underline{\cancel{\mathtt{uAt}}}\;\mathtt{t\#v} \mid b\,\underline{\mathtt{uAu}}\;\mathtt{u\#v} \mid b\,\underline{\mathtt{uAv}}\;\mathtt{v\#v} \\
\mathtt{t\#v} &\to \varepsilon\;\mathtt{s\#v} \\
\mathtt{u\#v} &\to \varepsilon\;\mathtt{s\#v} \\
\mathtt{v\#v} &\to \varepsilon \\
\mathtt{tAt} &\to b \mid a\;\mathtt{tAt}\;\;\mathtt{tAt} \mid a\;\cancel{\mathtt{tAu}}\;\;\cancel{\mathtt{uAt}} \\
\cancel{\mathtt{tAu}} &\to a\;\mathtt{tAt}\;\;\cancel{\mathtt{tAu}} \mid a\;\cancel{\mathtt{tAu}}\;\;\mathtt{uAu} \\
\mathtt{tAv} &\to \varepsilon \mid a\;\mathtt{tAt}\;\;\mathtt{tAv} \mid a\;\cancel{\mathtt{tAu}}\;\;\mathtt{uAv} \mid a\;\mathtt{tAv}\;\;\underline{\mathtt{vAv}} \\
\cancel{\mathtt{uAt}} &\to a\;\cancel{\mathtt{uAt}}\;\;\mathtt{tAt} \mid a\;\mathtt{uAu}\;\;\cancel{\mathtt{uAt}} \\
\mathtt{uAu} &\to a \mid b\;\cancel{\mathtt{uAt}}\;\;\cancel{\mathtt{uAu}} \mid b\;\mathtt{uAu}\;\;\mathtt{uAu} \\
\mathtt{uAv} &\to \varepsilon \mid b\;\cancel{\mathtt{uAt}}\;\;\mathtt{tAv} \mid b\;\mathtt{uAu}\;\;\mathtt{uAv} \mid b\;\mathtt{uAv}\;\;\mathtt{vAv} \\
\mathtt{vAv} &\to \varepsilon
\end{aligned}
$$

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zeigen Sie, dass die folgende Sprache $L = \{\, ww \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$ nicht kontextfrei ist.

Zur Erinnerung: Das Pumping-Lemma nach Bar-Hillel, Perles & Shamir gibt jeder kontextfreien Sprache L eine Pumping-Konstante p_L, sodass jedes längere Wort $z \in L$ innerhalb der Sprache mindestens eine Zerlegung $z = uvwxy$ hat, mit einem kurzen Infix $|vwx| \leq p_L$, echten zu pumpenden Elementen $|vw| \geq 1$ und ohne Möglichkeit, durch Pumpen die Sprache zu verlassen: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$.

Beweis

Nutze das PL in Kontraposition: Sei $p \in \mathbb{N}$.

Betrachte das Wort $z := a^{p_L}b^{p_L}a^{p_L}b^{p_L}$. Es gilt $z \in L$.
Sei $z = uvwxy$ eine Zerlegung mit (1) $|vwx| \le p_L$ und (2) $vx \neq \varepsilon$. (Nach dem Pumping-Lemma gibt es mindestens eine pumpbare Zerlegung.)
Wichtige Beobachtung: Entweder befindet sich das Infix vwx komplett in einer der beiden Hälften von z, oder es enthält einen Suffix der vorderen Hälfte und einen Präfix der hintern Hälfte.
Im ersten Fall betrachte $i := 0$ und $z' := uv^iwx^iy$ ($i \neq 1$ kann hier sogar beliebig gewählt werden). Wegen (2) wird die betroffene Hälfte verändert und stimmt nicht länger mit der anderen Hälfte überein. Es folgt $z' \notin L$. (Detailliertere Rechnung für Infix in vorderer Hälfte: Es gilt $|vx|_a > 0$ oder $|vx|_b > 0$ und daher $z' = a^{p_L+(i-1)\cdot|vx|_a}b^{p_L+(i-1)\cdot|vx|_b}a^{p_L}b^{p_L} \notin L$.
Anderenfalls beachte, dass der Infix wegen (1) weder ein vorderes a, noch ein hinteres b enthalten kann. Betrachte wieder $i := 0$ (oder ein beliebig anderes $i \neq 1$) und $z' := uv^iwx^iy$. Wegen (2) fehlt mindestens ein b der vorderen Hälfte oder ein a der hinteren Hälfte.
Da es keine weiteren Fälle mehr gibt, ist $z \in L$ nicht pumpbar.
Da kein p eine Pumping-Konstante für L sein kann, ist L nicht kontextfrei. $\square$

Bemerkung: Tatsächlich sind diese z jeweils kürzeste Worte, die sich für diesen Beweis eignen.