Theoretische Informatik 1
Große Übung 1

Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli

TU Braunschweig
Wintersemester 2025/26

Lemma: ACC impliziert Maxima in Ketten

Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ eine partielle Ordnung und $K \subseteq D$ eine nichtleere Kette. Falls die Aufsteigende-Kettenbedingung gilt, hat K ein maximales Element. Falls die Absteigende-Kettenbedingung gilt, hat K ein minimales Element.

Beweis

Zeige die Existenz des Maximums indirekt, der Beweis für das Minimum ist analog.
Es gelte die Aufsteigende-Kettenbedingung und K habe **kein** maximales Element.
Das heißt jedes Element $x \in K$ ist nicht maximal, also gibt es immer ein Element $y_x \in K$ mit $y_x \not\sqsubseteq x$.
Da beide Elemente der Kette sind, folgt stattdessen $x \sqsubseteq y_x$.
Daraus lässt sich nun induktiv mindestends eine aufsteigende Kette konstruieren:
Da K nicht leer ist, gibt es ein $x_0 \in K$.
Da x_i nicht maximal ist, wähle $x_{i+1} := y_{x_i}$.
Nach ACC muss $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ stabil werden.
Da dies der Konstruktion widerspricht, muss K ein maximales Element besitzen. □

Theorem: 1.15

Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein Verband. Der Verband hat genau dann endliche Höhe, wenn ACC und DCC gelten.

Beweis

„⇒": Es sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein Verband mit endlicher Höhe.
Zeige ACC, der Beweis für DCC ist analog.
Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette.
Ihr Wertebereich $X := \{ x_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ ist eine Kette.
Nach Annahme ist diese Menge endlich, also existiert $\max X \in X$.
Betrachte den ersten Index $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = \max X$.
Sei $j \in \mathbb{N}$.
Es gilt $x_k \sqsubseteq x_{k+j}$, weil die Kette aufsteigend ist.
Gleichzeitig ist $x_{k+j} \sqsubseteq x_k$, da x_k maximal ist.
Es folgt $x_k = x_{k+j}$ nach Antisymmetrie.
Da dies für alle j gilt, wird $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ an Stelle k stabil.
Da dies für alle $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt, ist die ACC erfüllt.

„⇐": Es sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein Verband mit ACC und DCC.
Sei $K \subseteq D$ eine Kette. Falls K leer ist, ist K endlich. Sonst hat K wegen der ACC ein Maximum x_0 und $K \setminus \{x_0\}$ ist wieder eine Kette. Induktiv konstruieren wir so eine absteigende Kette $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} \max(K \setminus \{x_0, \ldots, x_i\}) & \text{falls } \{x_0, \ldots, x_i\} \subset K \\ x_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach DCC wird diese Kette bei einer Stelle $j \in \mathbb{N}$ stationär: $\forall i \in \mathbb{N} : x_j = x_{j+i}$.
Es muss noch gezeigt werden, dass das ganze K abgedeckt ist: Betrachte $K_{\text{rest}} := K \setminus \{x_0, \ldots, x_j\}$.
Wäre es nicht leer, hätte es ein Maximum $y \in K_{\text{rest}}$.
Per Definition der absteigenden Kette hätte $y = x_{j+1}$ und somit $y \notin K_{\text{rest}}$ sein müssen.
Daraus folgt $K_{\text{rest}} = \varnothing$, oder anders dargestellt $K = \{x_0, \ldots, x_j\}$.
Da dies für alle Ketten K gilt, ist die Höhe von $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ endlich. $\square$

Theorem: 1.17, Monotonie impliziert Stetigkeit
Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband und $f : D \to D$ eine monotone Funktion. Falls die Aufsteigende-Kettenbedingung erfüllt ist, ist f $\sqcup$-stetig. Falls die Absteigende-Kettenbedingung erfüllt ist, ist f $\sqcap$-stetig.

Beweis
Zeige erste Aussage, die Zweite ist analog.
Annahme: Es sei die Aufsteigende-Kettenbedingung in $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ erfüllt.
Sei $K \subseteq D$ eine nichtleere Kette.
Zeige $\bigsqcup f(K) = f(\bigsqcup K)$ mittels Antisymmetrie.
Sei $y \in f(K)$.
Es gibt also ein $x \in K$ mit $y = f(x)$.
Weiterhin gilt $x \sqsubseteq \bigsqcup K$, weil $\bigsqcup K$ obere Schranke ist.
Es folgt $y \sqsubseteq f(\bigsqcup K)$, da f monoton ist.
Da dies für alle y gilt, ist $f(\bigsqcup K)$ obere Schranke von $f(K)$.
Es folgt $\bigsqcup f(K) \sqsubseteq f(\bigsqcup K)$, da $\bigsqcup f(K)$ kleinste obere Schranke ist.
Weiterhin ist $\bigsqcup K \in K$, wie im Lemma oben gezeigt, weil die ACC gilt.
Dann gilt $f(\bigsqcup K) \in f(K)$.
Es folgt $f(\bigsqcup K) \sqsubseteq \bigsqcup f(K)$, weil $\bigsqcup f(K)$ obere Schranke ist.
Da dies für alle K gilt, ist f $\sqcup$-stetig. $\square$

Definition 1

Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ eine partielle Ordnung und M eine Menge. Dann ist die **Funktions- oder Bild-Ordnung** definiert als $\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle$, wobei D^M die Menge der Funktionen $f : M \to D$ sind und $\sqsubseteq^M := \{ \langle f, g \rangle \mid \forall m \in M\colon f(m) \sqsubseteq g(m) \}$ die punktweise aus $\sqsubseteq$ abgeleitete Ordnung ist.

Lemma

$\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle$ ist partiell geordnet.

Beweis

Reflexivität:

Sei $f \in D^M$.

Sei $m \in M$.

Dann ist $f(m) \sqsubseteq f(m)$, da $\sqsubseteq$ selbst reflexiv ist.

Das gilt für alle m, also folgt $f \sqsubseteq^M f$.

Antisymmetrie:

Seien $f, g \in D^M$ mit $f \sqsubseteq^M g$ und $g \sqsubseteq^M f$.

Sei $m \in M$.

Dann ist $f(m) \sqsubseteq g(m)$ und $g(m) \sqsubseteq f(m)$.

Es folgt $f(m) = g(m)$, da $\sqsubseteq$ antisymmetrisch ist.

Da dies für alle m gilt, folgt $f = g$.

Transitivität:

Seien $f, g, h \in D^M$ mit $f \sqsubseteq^M g$ und $g \sqsubseteq^M h$.

Sei $m \in M$.

Dann ist $f(m) \sqsubseteq g(m)$ und $g(m) \sqsubseteq h(m)$.

Es folgt $f(m) \sqsubseteq h(m)$, da $\sqsubseteq$ transitiv ist.

Da dies für alle m gilt, folgt $f \sqsubseteq^M h$. $\square$

Lemma

$\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle$ ist genau dann ein Verband, wenn $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein Verband oder M leer ist.

(Analog zum Beweis folgender Aussage.)

Lemma
$\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle$ ist genau dann ein vollständiger Verband, wenn $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband oder M leer ist.

Beweis
Falls M leer ist, ist $\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle = \langle \{\varnothing\}, \{\langle \varnothing, \varnothing \rangle\} \rangle$ ein vollständiger Verband.
Anderenfalls sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband.
Sei $X \subseteq D^M$.
Betrachte $j_X := m \mapsto \bigsqcup \{ g(m) \mid g \in X \} \in D^M$.
Sei $f \in X$.
Sei $m \in M$.
Dann gilt $f(m) \in \{ g(m) \mid g \in X \}$.
Es folgt $f(m) \sqsubseteq j_X(m)$, da $j_X(m)$ obere Schranke von $\{ g(m) \mid g \in X \}$ ist.
Da dies für alle m gilt, folgt $f \sqsubseteq^M j_X$.
Da dies für alle f gilt, ist j_X obere Schranke von X.
Sei $s \in D^M$ obere Schranke von X.
Sei $m \in M$.
Dann ist $s(m)$ obere Schranke von $\{ g(m) \mid g \in X \}$.
Es folgt $j_X(m) \subseteq s(m)$, da $j_X(m)$ kleinste obere Schranke ist.
Da dies für alle m gilt, folgt $j_X \sqsubseteq^M s$.
Da dies für alle s gilt, ist j_X Join von X.
Analog ist $m \mapsto \bigsqcap \{ f(m) \mid f \in X \}$ der Meet. □

Lemma
$\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle$ erfüllt genau dann ACC, wenn $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ die ACC erfüllt und M endlich ist.

Beweis
Es sei die ACC in $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ erfüllt und M endlich.
Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette in D^M.
Sei $m \in M$.
Dann ist $(f_i(m))_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette in D.
Nach ACC gibt es ein $i_m \in \mathbb{N}$ mit $\forall j \in \mathbb{N}\colon f_{i_m}(m) = f_{i_m + j}(m)$.
Da dies für alle m gilt, betrachte $k := \max\{ i_m \mid m \in M \}$. k existiert, weil M endlich ist.
Wir zeigen nun $\forall j \in \mathbb{N} : f_k = f_{k+j}$.
Sei $j \in \mathbb{N}$.
Sei $m \in M$.
Es gilt $i_m \leq k$ und $i_m \leq k + j$.
Also folgt $f_k(m) = f_{i_m}(m) = f_{k+j}(m)$.
Da dies für alle m gilt, folgt $f_k = f_{k+j}$.
Da dies für alle j gilt, stabilisiert sich $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bei Stelle k.
Da dies für alle $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt, ist die ACC in $\langle D^M, \sqsubseteq^M \rangle$ erfüllt. □