Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli

Probeklausur
Theoretische Informatik 1
27. Januar 2026

TU Braunschweig
Wintersemester 2025/2026

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist `# 1.` Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.

3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (14 Blätter).

4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.

5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.

6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.

7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.

8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben: `tu-bs.de/tcs/tcs1`.

9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.

10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

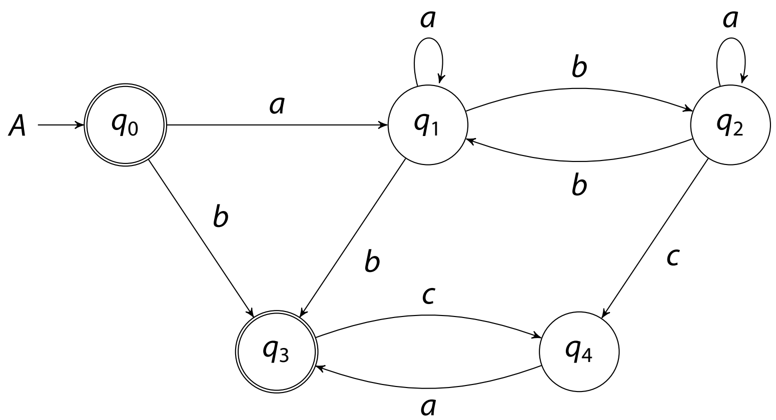
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1 NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



Vorschlag:

Der Automat enthält vier erreichbare Schleifen: $q_1 \xrightarrow{a} q_1, q_2 \xrightarrow{a} q_2, q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_1, q_3 \xrightarrow{c} q_4 \xrightarrow{a} q_3$. Ardens Lemma muss höchstens einmal für jede davon angewandt werden. Da es aber an Gleichungen angewandt wird, könnten einzelne Anwendungen jeweils mehrere Schleifen lösen. Das Gleichungssystem ist eindeutig.

$$X_0 = \varepsilon \cup aX_1 \cup bX_3 \quad X_1 = aX_1 \cup bX_2 \cup bX_3 \quad X_2 = bX_1 \cup aX_2 \cup cX_4 \quad X_3 = \varepsilon \cup cX_4 \quad X_4 = aX_3$$

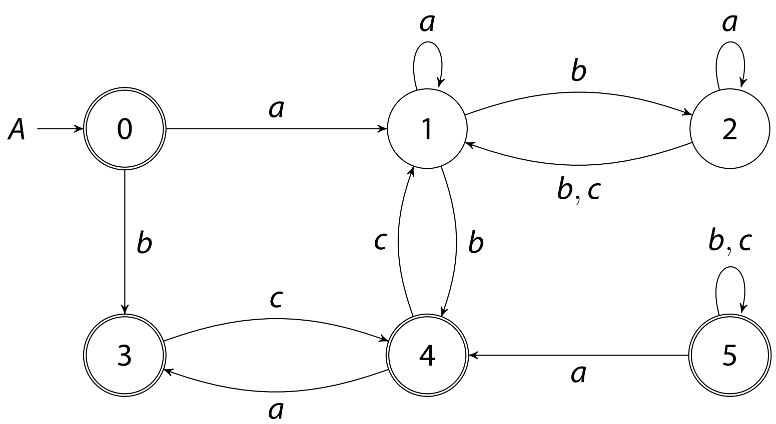
Hinweis: Es genügt einen Ausdruck für den Startzustand zu finden. Zwischenergebnisse sind nur dann anzugeben, wenn die Gleichung wechselt, oder Ardens Lemma angewandt wird. Anwendungen der Assoziativität, Distributivität, Neutralität, usw. müssen nicht genannt werden. Priorität sollten Schleifen haben, die keine anderen Schleifen erreichen.

$$\begin{aligned}
X_3 &= \varepsilon \cup caX_3 && X_4 \text{ eingesetzt}\\
&= (ca)^* && \text{Ardens Lemma}\\
X_4 &= a(ca)^* && X_3 \text{ eingesetzt}\\
X_2 &= a^*(bX_1 \cup cX_4) && \text{Ardens Lemma}\\
&= a^*bX_1 \cup a^*cX_4 && \text{Distributivität}\\
&= a^*bX_1 \cup a^*ca(ca)^* && X_4 \text{ eingesetzt}\\
X_1 &= aX_1 \cup bX_2 \cup b(ca)^* && X_3 \text{ eingesetzt}\\
&= aX_1 \cup b\big(a^*bX_1 \cup a^*ca(ca)^*\big) \cup b(ca)^* && X_2 \text{ eingesetzt}\\
&= \big(a \cup ba^*b\big)X_1 \cup \big(ba^*ca \cup b\big)(ca)^* && \text{Distributivität} \times 3\\
&= \big(a \cup ba^*b\big)^*\big(ba^*ca \cup b\big)(ca)^* && \text{Ardens Lemma}\\
\mathcal{L}(A) = X_0 &= \varepsilon \cup aX_1 \cup b(ca)^* && X_3 \text{ eingesetzt}\\
&= \varepsilon \cup a\big(a \cup ba^*b\big)^*\big(ba^*ca \cup b\big)(ca)^* \cup b(ca)^* && X_1 \text{ eingesetzt}
\end{aligned}$$

2 Determinisierung und Komplementierung

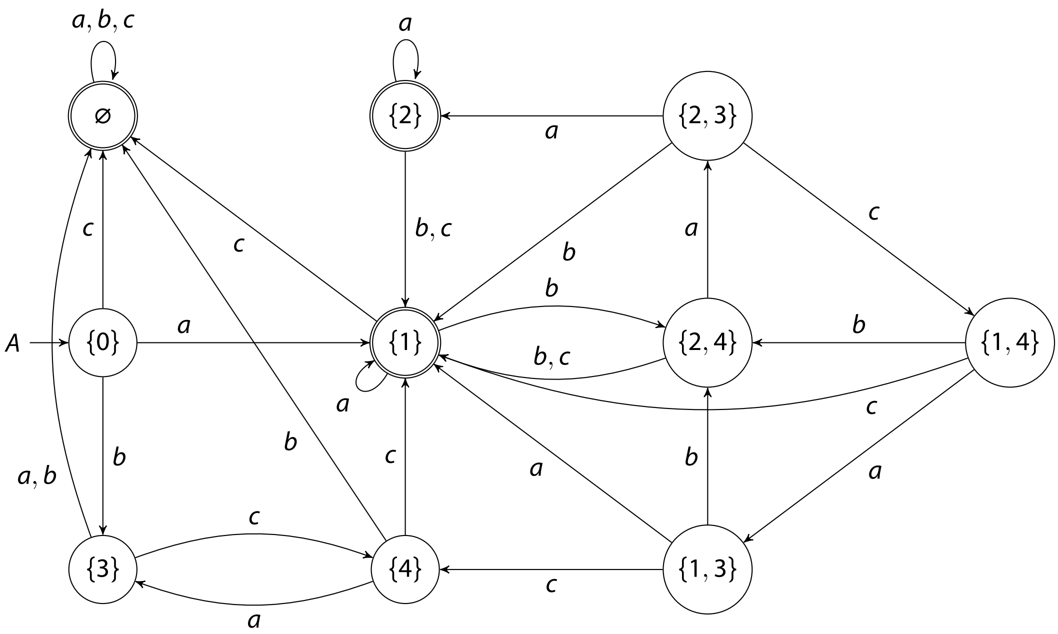
10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



Vorschlag:

(Die Konstruktion nach Rabin & Scott könnte auf bis zu $2^{|Q|}$ (hier 64 Zustände) heranwachsen. Man kann früh erkennen, dass Zustand 5 unerreichbar ist. Die Ziel-Automaten haben bei dieser Aufgabe immer 8 bis 12 Zustände. Akzeptierende Zustände werden invertiert, also nur dann markiert, wenn sie keinen akzeptierenden Zustand aus A enthalten.)



3 CYK

$\boxed{9 + 1 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \langle \{S, A, B, C\}, \Sigma, P, S \rangle$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, mit den folgenden Produktionsregeln.

$$S \to AA \mid BA \mid BB\,,$$
$$A \to a \mid AC \mid BC\,,$$
$$B \to b \mid CS\,,$$
$$C \to b\,.$$

a) Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = bbbaaa$ von der kontextfreien Grammatik G erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

b) Wie viele Präfixe von w liegen in der Sprache von G? Ein Wort $x \in \Sigma^*$ ist ein Präfix von w, wenn w von der Form $w = x.y$ mit $y \in \Sigma^*$ ist.

Vorschlag:

a) Da S in der Zelle für das volle Teilwort enthalten ist, gilt $w \in \mathcal{L}(G)$.

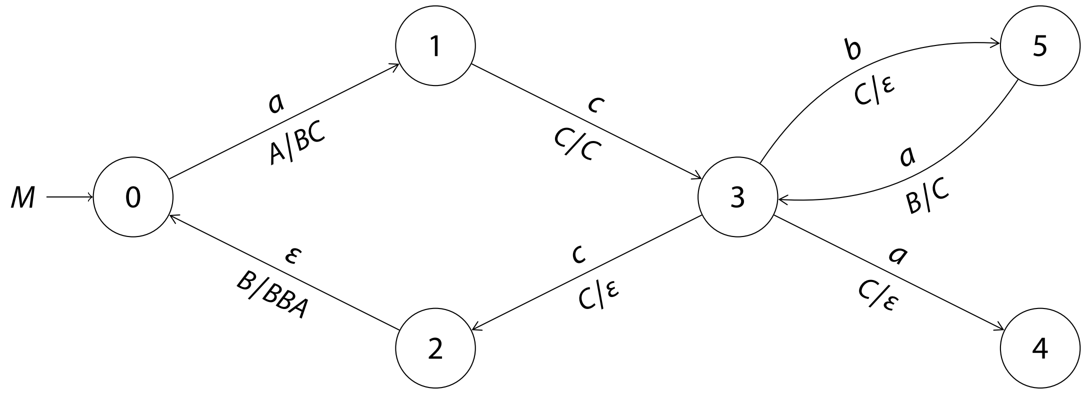
BC	AS	ABS	BS	BS	S
	BC	AS	BS	S	B
		BC	S	B	S
			A	S	
				A	S
					A

b) Zähle wie viele Zellen in der ersten Zeile S enthalten: 5. (Erzeugte Präfixe sind *bb*, *bbb*, *bbba*, *bbbaa* und *bbbaaa* selbst. ε ist auch ein Präfix, kann aber nicht erzeugt werden.)

4 Tripelkonstruktion

$\boxed{2 + 8 + 2 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle\{0,1,2,3,4,5\},\{a,b,c\},\{A,B,C\},q_0,A,\delta\rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ wiefolgt definiert ist.



a) Beschränken Sie Ihren Suchraum für nützliche Nichtterminale. Welche Zustände besitzen kein Verhalten mit bestimmten Stapel-Symbole als Top? Welche Zustände kommen nicht als Ende einer Berechnung in Frage?

b) Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.

c) Entfernen Sie alle unnützlichen Nicht-Terminale aus G.

Vorschlag:

Nützliche Tripel haben höchstens die Formen $\langle 0, A, ?\rangle$, $\langle 1, C, ?\rangle$, $\langle 2, B, ?\rangle$, $\langle 3, C, ?\rangle$, $\langle 5, B, ?\rangle$, sowie $\langle ?, ?, 2\rangle$, $\langle ?, ?, 4\rangle$, $\langle ?, ?, 5\rangle$.

Hinweis:

Die Reihenfolge, in der Tripel hinzugefügt werden, ist irrelevant. Hier wurden jeweils die Tripel in einer Warteschlange organisiert.

Wann immer ein neues Tripel gefunden wurde, wurde es hier unterstrichen. Das ist nicht notwendig, kann aber hilfreich sein.

Entlang der Erreichbaren:

$$
\begin{aligned}
S &\to \underline{0A2} \mid \underline{0A4} \mid \underline{0A5}\\
0A2 &\to a\ \underline{1C2}\ \underline{2B2} \mid a\ \underline{1C5}\ \underline{5B2}\\
0A4 &\to a\ 1C2\ \underline{2B4} \mid a\ 1C5\ \underline{5B4}\\
0A5 &\to a\ 1C2\ \underline{2B5} \mid a\ 1C5\ \underline{5B5}\\
1C2 &\to c\ \underline{3C2}\\
2B2 &\to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B2 \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B2 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B2 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B2\\
1C5 &\to c\ \underline{3C5}\\
5B2 &\to a\ 3C2\\
2B4 &\to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B4 \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B4 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B4 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B4\\
5B4 &\to a\ \underline{3C4}\\
2B5 &\to \varepsilon\ 0A2\ 2B2\ 2B5 \mid \varepsilon\ 0A2\ 2B5\ 5B5 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B2\ 2B5 \mid \varepsilon\ 0A5\ 5B5\ 5B5\\
5B5 &\to a\ 3C5\\
3C2 &\to c\\
3C5 &\to b\\
3C4 &\to a
\end{aligned}
$$

Alle erreichbaren Tripel sind hier produktiv:
(Sei dazu $F : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(N)$ mit
$F(X) = X \cup \{ A \in N \mid A \to \alpha \in (X \cup \Sigma)^* \}$.

$$
\begin{aligned}
F(\varnothing) &= \{3C2, 3C4, 3C5\}\\
F^2(\varnothing) &= F(\varnothing) \cup \{1C2, 1C5, 5B2, 5B4, 5B5\}\\
F^3(\varnothing) &= F^2(\varnothing) \cup \{0A2, 0A4, 0A5\}\\
F^4(\varnothing) &= F^3(\varnothing) \cup \{2B2, 2B4, 2B5, S\}\\
F^5(\varnothing) &= F^4(\varnothing) = N\ .)
\end{aligned}
$$

5 Pumping-Lemma

$\boxed{7 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie die Sprachen

$$L = \left\{\ a^n.b^m \ \middle|\ n, m \in \mathbb{N}, n \text{ ist gerade oder } n = 3m\ \right\} \text{ und}$$

$$L' = \left\{\ w \in \{a, b\}^* \ \middle|\ |w|_a \text{ ist gerade oder } |w|_a = 3|w|_b\ \right\}.$$

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

b) Zeigen Sie, welche Konsequenz sich dadurch für die Sprache L' ergibt.

Vorschlag:

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Konstante.
Betrachte $w = a^{6p+3}b^{2p+1} \in L$.
Jede Zerlegung $w = x.y.z$ mit $|x.y| \leq p$ und $y \neq \varepsilon$ erfüllt $x.y \in a^+$.
Jetzt betrachte $i = 3$. Es gilt $xy^3z = a^{6p+3+2|y|}b^{2p+1} \notin L$, da $6p + 3 + 2|y|$ ungerade und ungleich $3(2p + 1)$ ist.
Da dies für alle Zerlegungen und für alle p gilt, kann L nach dem Pumping-Lemma nicht mehr regulär sein.

b) (Reguläre Sprachen sind unter endlichen Schnitten abgeschlossen.)
Wäre L' regulär, so wäre es auch $L = L' \cap a^*b^*$.
Alternativ kann man auch sagen, das Argument aus a) lässt sich analog, also mit dem gleichen w und i für L' wiederholen.

6 Automatenkonstruktion

$\boxed{5 + 5 = 10 \text{ Punkte}}$

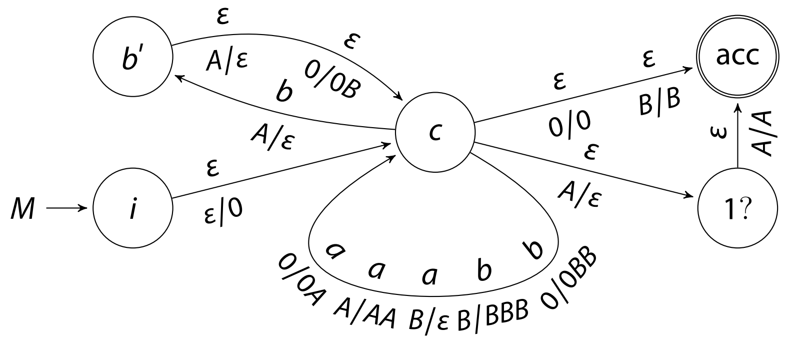
Betrachten Sie die Sprache $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq 2|w|_b + 1 \}$.

a) Konstruieren Sie einen PDA M, der L akzeptiert. Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automaten an.

b) Erklären Sie jeden Zustand und jedes Bandsymbol ihrer Konstruktion.

Vorschlag:

a) (Idee : Führe einen Zähler für $|w|_a - 2|w|_b$, teste am Ende des Wortes, ob dieser 1 ist. Alternativ kann der Zähler bei -1 starten und man vergleicht mit 0.)
Dieser PDA nutzt akzeptierende Zustände.



b) Der Zustand i initialisiert den Zähler auf 0. c und b' erhöhen den Zähler um 1 für jedes a und verringern ihn um 2 für jedes b in der Eingabe. Mit den Zuständen 1? und acc geschieht der Vergleich mit 1: Mit positivem Zählerstand gelangt man in 1?, der nur dann nach acc weiterleitet, wenn der Wert größer als 1 ist.
Um positive von negativen Zählerwerten zu unterscheiden, gibt es A und B. Um zu jeder Zeit die Null zu erkennen, liegt immer genau ein 0 auf dem Bottom.

7 Verband der Quasi-Ordnungen

$\boxed{2 + 4 + 3 + 1 = 10 \text{ Punkte}}$

Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren die Menge $\mathrm{QO}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ aller Quasi-Ordnungen auf X, d.h. reflexive und transitive binäre Relationen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{QO}(X)$ unter beliebigen (potentiell unendlichen) Durchschnitten abgeschlossen ist.

b) Wir definieren den Abschlussoperator $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X \times X) \to \mathrm{QO}(X)$ wie folgt:

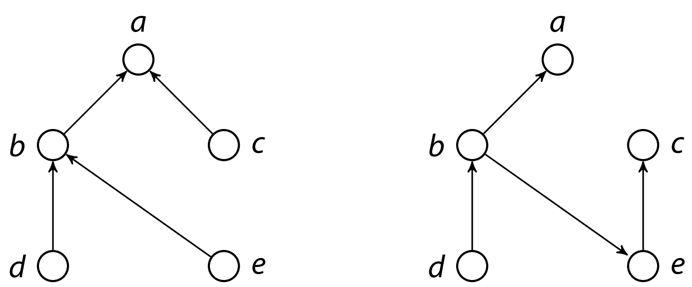
$$\mathrm{cl}(R) = \bigcap \{A \in \mathrm{QO}(X) \mid R \subseteq A\}.$$

Zeigen Sie nun, dass cl folgende Eigenschaften erfüllt:

- cl ist surjektiv, d.h. $\forall$.
- cl ist monoton.
- cl ist idempotent, d.h. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(R)) = \mathrm{cl}(R)$.

c) $\langle \mathrm{QO}(X), \subseteq \rangle$ ist ein vollständiger Verband. Geben Sie dessen Join, Meet, Top und Bottom an.

d) Gegeben sind Hasse-Diagramme zweier Quasi-Ordnungen $R, S \in \mathrm{QO}(\{a, b, c, d, e\})$. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von $R \sqcup S$.



Vorschlag:

a) Sei $M \subseteq \mathrm{QO}(X)$.

Sei $x \in X$. Alle $R \in M$ erfüllen $x\ R\ x$. Es folgt $x \bigcap M\ x$. Da dies für alle x gilt, ist $\bigcap M$ reflexiv.

Seien $x \bigcap M\ y \bigcap M\ z$ und $R \in M$. Per Definition folgt $x\ R\ y\ R\ z$ und weil $R \in \mathrm{QO}(X)$ transitiv ist, auch $x\ R\ z$. Da dies für alle R gilt, folgt auch $x \bigcap M\ z$. Und da dies für alle x, y, z gilt, ist $\bigcap M$ transitiv.

Da für alle M, $\bigcap M$ eine Quasi-Ordnung ist, ist $\mathrm{QO}(X)$ unter beliebigen Durchschnitten abgeschlossen.

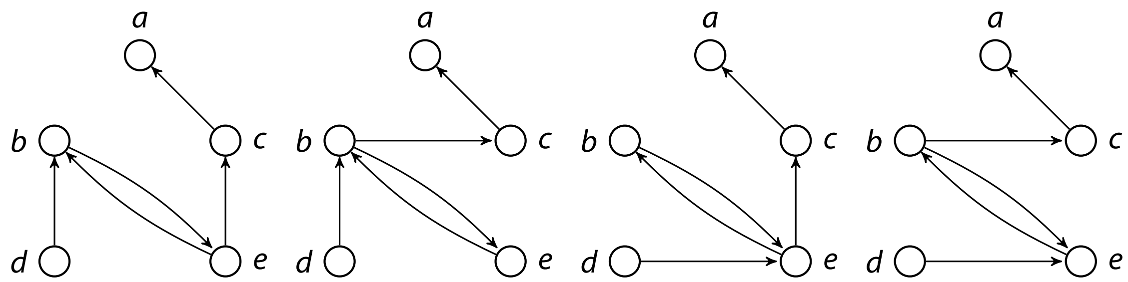
b) Sei $R \in \mathrm{QO}(X)$. Dann ist $\mathrm{cl}(R) = \bigcap\{\, A \in \mathrm{QO}(X) \mid R \subseteq A \,\} = R \cap \bigcap\{\, A \in \mathrm{QO}(X) \mid R \subset A \,\} = R$. (Für jedes $S \in \{\, A \in \mathrm{QO}(X) \mid R \subset A \,\}$ gilt $R \cap S = R$.) Also liegt R im Bild von cl. Da dies für alle R gilt, ist cl surjektiv.

Seien $R \subseteq S \subseteq X \times X$ und $x\ \mathrm{cl}(R)\ y$. $x\ A\ y$ für alle $A \in \{\, A \in \mathrm{QO}(X) \mid R \subseteq A \,\} \Rightarrow x\ R\ y \Rightarrow x\ S\ y$ $\Rightarrow x\ A\ x$ für alle $A \in \{\, A \in \mathrm{QO}(X) \mid R \subseteq A \,\} \Rightarrow x\ \mathrm{cl}(S)\ y$. Da dies für alle x, y gilt, folgt $\mathrm{cl}(R) \subseteq \mathrm{cl}(S)$. Da dies für alle R, S gilt, ist cl monoton.

Sei $R \subseteq X \times X$. Das Bild $\mathrm{cl}(R)$ ist eine Quasi-Ordnung. Wie bereits gezeigt, ist damit $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(R)) = \mathrm{cl}(R)$. Da dies für alle R gilt, ist cl idempotent.

c) Der Join von $M \subseteq \mathrm{QO}(X)$ ist $\mathrm{cl}(\bigcup M)$. Der Meet ist $\bigcap M$. Top ist $X \times X$ und Bottom ist $\mathrm{id}_X = \{\, \langle x, x\rangle \mid x \in X \,\}$.

d) (Hasse-Diagramme sollen alle Beziehungen beschreiben, dürfen aber weder transitive noch reflexive Kanten zeigen. Wegen der „starken Zusammenhangskomponente" $\{b, e\}$ sind vier Diagramme möglich.)



8 Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei L_1 eine kontextfreie Sprache und L_2 regulär. Ist $L_1 \setminus L_2$ immer kontextfrei?

b) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Die Sprachklasse Reg_k enthalte genau die Sprachen von DFA mit bis zu k Zuständen. Ist Reg_k unter Vereinigung abgeschlossen?

c) Sei L_1 kontextfrei. Haben alle Grammatiken für L_1 in Chomsky-Normalform die selbe Anzahl von nützlichen Nichtterminalen?

d) Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband und $f : D \to \mathcal{P}(D)$ mit $f(d) = \{ d' \in D \mid d' \sqsubseteq d \}$. Damit enthält $f(D) = \{ f(d) \mid d \in D \} \subset \mathcal{P}(D)$ die „nach unten geöffneten" Teilmengen von D. Ist $\langle f(D), \subseteq \rangle$ ein vollständiger Verband?

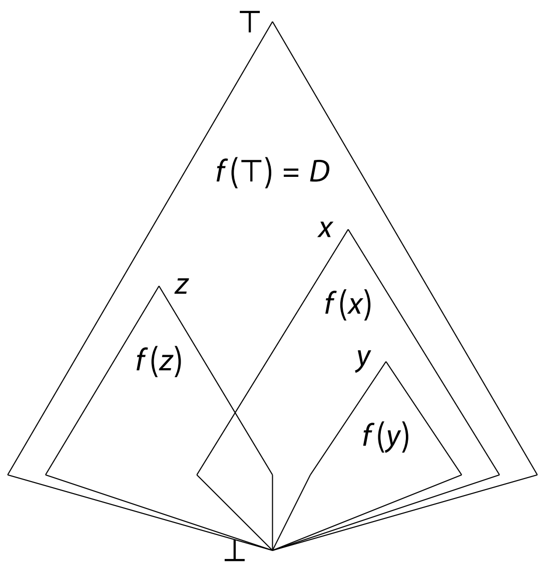
Vorschlag:

Ja, $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ ist der Schnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache, und daher wieder kontextfrei.

Nein, $\{ab\} \in \mathrm{Reg}_4$ und $\{ba\} \in \mathrm{Reg}_4$, aber $\{ab, ba\} \in \mathrm{Reg}_5$.

Nein, $S \to AA \mid AB, A \to a, B \to a$ ist in CNF, aber $S \to AA, A \to a$ ist sprachäquivalent und hat weniger Nichtterminale.

Ja, $\subseteq$ ist eine partielle Ordnung und für jede Teilmenge $Y \subseteq f(D)$ gibt es ein $X \subseteq D$ mit $Y = f(X)$, daher $\bigsqcup Y = f(\bigsqcup X)$ und $\bigsqcap Y = f(\bigsqcap X)$. Hilfreich kann auch eine Zeichnung wie diese sein:



9 Myhill-Nerode

$\boxed{6 + 3 + 1 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b \,\} .$$

Es wird die folgende Gleichung vermutet:

$$[a^n]_{\equiv_L} = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = n + |w|_b \,\} .$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Äquivalenzklasse $[a^n]_{\equiv_L}$ wie oben charakterisiert ist.

b) Nutzen Sie dieses Wissen und den Satz von Myhill & Nerode, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

c) Finden Sie einen Repräsentanten für jede weitere, bisher nicht genannte Klasse.

Vorschlag:

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L_n = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = n + |w|_b \,\}$.

Sei $w \in [a^n]_{\equiv_L}$. Das heißt $w \equiv_L a^n$ bzw. für alle $v \in \{a, b\}^*$ gilt $w.v \in L$ gdw. $a^n.v \in L$.
Insbesondere für $v = b^m$ gilt $a^n b^m \in L$ und damit $w.b^m \in L$.
Per Definition von L folgt $|w|_a = |w.b^n|_a \leq |w.b^n|_b = |w| + n$.
Gleichzeitig gilt für $n > 0$ und $v = b^{n-1}$ auch $a^n b^{n-1} \notin L$ und somit $w.b^{n-1} \notin L$.
Also folgt $|w|_a = |w.b^{n-1}|_a > |w.b^{n-1}|_b = |w|_b + n - 1$ bzw. $|w|_a \geq |w|_b + n$.
Für $n = 0$ und $n > 0$ gilt daher $|w|_a = n + |w|_b$.
Damit ist $w \in L'$ und als Folge $[a^n] \subseteq L_n$ gezeigt.

(Alternativ sei $v \in \{a, b\}^*$.
Es gilt $|w|_a + |v|_a \leq |w|_b + |v|_b$ gdw. $w.v \in L$ gdw. $a^n.v \in L$ gdw. $n + |v|_a \leq |v|_b$.
Stellt man beide Ungleichungen um, erhält man $|w|_a - |w|_b \leq |v|_b - |v|_a$ gdw. $n \leq |v|_b - |v|_a$.
Daraus folgt nun $|w|_a - |w|_b = n$, also $|w|_a = n + |w|_b$.)

Sei $w \in L_n$ und $v \in \{a, b\}^*$.
Es gilt $w.v \in L$ gdw. $n + |w|_b + |v|_a = |w|_a + |v|_a = |w.v|_a \leq |w.v|_b = |w|_b + |v|_b$
gdw. $|a^n.v|_a = n + |v|_a \leq |v|_b = |a^n.v|_b$.
Da dies für alle v gilt, folgt $w \equiv_L a^n$ und somit $w \in [a^n]_{\equiv_L}$.

Für alle n gilt somit $[a^n]_{\equiv_L} = L_n$.

b) Es gilt $a^m \not\equiv_L a^n$ für alle $m \neq n$. Damit sind die obigen Klassen paarweise disjunkt. Diese Teilmenge der Äquivalenzklassen ist unendlich groß, daher ist der Index von $\equiv_L$ unendlich, also ist L nach dem Satz von Myhill & Nerode nicht regulär.

c) Für alle $n > 0$ gibt es noch $[b^n]_{\equiv_L}$ ($= \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a + n = |w|_b \,\}$).

10 Purer Pushdown-Automat

$\boxed{4 + 6 = 10 \text{ Punkte}}$

Ein purer Pushdown-Automat über einem Alphabeten Σ ist ein 3-Tupel $M = \langle \Gamma, \alpha, T \rangle$ mit initialem Stapelinhalt $\alpha \in \Gamma^*$, mitunter auch ein ganzes Wort, und einer endlichen Transitionsrelation $T \subseteq \Gamma^* \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma^*$. Diese Automaten sind in der Lage mit einer einzigen Transition ganze Wörter aus dem Stapel zu entfernen und können daher mehr als nur das Top-Symbol sehen.

Ohne Zustand besteht eine Konfiguration nur aus dem Stapelinhalt Γ^*. Jede Transition $\langle x, s, y \rangle \in T$ liest den Buchstaben s aus der Eingabe und ersetzt den exakten oberen Inhalt $x \in \Gamma^*$ mit $y \in \Gamma^*$, ganz gleich welcher Inhalt $\beta \in \Gamma^*$ weiter unten steht. Dadurch entsteht die Transitionsrelation $\rightarrow_M$ über Konfigurationen. Es gilt $\beta.x \xrightarrow{s}_M \beta.y$ für alle $\langle x, s, y \rangle \in T$ und aus $\beta_1 \xrightarrow{w_1}_M \beta_2$ und $\beta_2 \xrightarrow{w_2}_M \beta_3$ folgt immer $\beta_1 \xrightarrow{w_1 w_2}_M \beta_3$.

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird akzeptiert, sobald es vollständig abgearbeitet und der Stapel geleert wurde. Die Sprache von M ist daher $\mathcal{L}(M) := \{ w \in \Sigma^* \mid \alpha \xrightarrow{w}_M \varepsilon \}$.

a) Zeigen Sie, dass jede kontextfreie Sprache durch einen puren Pushdown akzeptiert wird.

b) Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}(M)$ jedes puren Pushdown-Automaten M kontextfrei ist.

Vorschlag:

a) (Das größte Problem ist hier, dass man keine Zustandsmenge mehr hat. Aber man kann nutzen, dass für jeden PDA nach Tripel-Konstruktion und Greibach-Normalform ein äquivalenter PDA mit einem Zustand entsteht.)
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei und $M = \langle \{q_0\}, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta \rangle$ ein PDA mit $\mathcal{L}(M) = L$, welcher mit leerem Stack akzeptiert. Der pure Pushdown $M' = \langle \Gamma, \#, T \rangle$ mit $T := \{ \langle x, s, y \rangle \mid \langle q_0, x, s, y, q_0 \rangle \in \delta \}$ erfüllt $\mathcal{L}(M') = L$.

Sei $w \in \Sigma^*$. Es gilt $w = s_1 s_2 \dots s_n \in \mathcal{L}(M)$ (wobei für alle $i \leq n \leq |w|$ gilt: $s_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$) gdw. $\# \xrightarrow{s_1}_M \beta_1 \xrightarrow{s_2}_M \cdots \xrightarrow{s_n}_M \beta_n = \varepsilon$ gdw. $\langle q_0, \# \rangle \xrightarrow{s_1}_{M'} \langle q_0, \beta_1 \rangle \xrightarrow{s_2}_{M'} \cdots \xrightarrow{s_n}_{M'} \langle q_0, \beta_n \rangle = \langle q_0, \varepsilon \rangle$ gdw. $w \in \mathcal{L}(M')$. Also gilt Sprachgleichheit.

b) (Zwei Probleme: Der initiale Inhalt und mehrere Pop's pro Transition.)
Sei $M = \langle \Gamma, \alpha, T \rangle$ ein purer Pushdown und $\$ \notin \Gamma$.
Der gewöhnliche Pushdown $M' = \langle Q, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, q_0, \{q_1\}, \delta \rangle$ mit $Q = \{q_0, q_1\} \cup \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x.x', s, y \rangle \in T \}$ und folgendem δ erfüllt $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M)$: $q_0 \xrightarrow[\$/\alpha]{\varepsilon} q_1$ (für Probleme 1 und 3),
$q_1 \xrightarrow[\varepsilon/\varepsilon]{s} \langle x, y \rangle$ und $\langle \varepsilon, y \rangle \xrightarrow[\varepsilon/y]{\varepsilon} q_1$ für alle $\langle x, s, y \rangle \in T$,
sowie $\langle \beta.x, y \rangle \xrightarrow[x/\varepsilon]{\varepsilon} \langle \beta, y \rangle$ für alle $x \in \Gamma$ und $\langle \beta.x.x', s, y \rangle \in T$ (für Problem 2).

Sei $w = s_1 \dots s_n \in \mathcal{L}(M)$ mit Transitionsfolge $\alpha = \beta_0 \xrightarrow{s_1}_M \dots \xrightarrow{s_n}_M \beta_n = \varepsilon$ und $i < n$.
Sei dazu $\langle x_i, s_i, y_i \rangle \in T$ die passende Transition und $\beta_i = \beta.x_i$.
Es gibt $\langle q_1, \beta_i \rangle \xrightarrow{w_i}_{M'} \langle \langle x_i, y_i \rangle, \beta_i \rangle \xrightarrow{\varepsilon}_{M'} \langle \langle \varepsilon, y_i \rangle, \beta \rangle \xrightarrow{\varepsilon}_{M'} \langle q_1, \beta.y_i \rangle = \langle q_1, \beta_{i+1} \rangle$.
Da dies für alle i gilt, folgt zusammen $\langle q_0, \$ \rangle \xrightarrow{\varepsilon} \langle q_1, \alpha \rangle \xrightarrow{s_1} \cdots \xrightarrow{s_n} \langle q_1, \varepsilon \rangle$ und damit $w \in \mathcal{L}(M')$.

Sei $w \in \mathcal{L}(M')$ mit Transitionsfolge $\langle q_0, \$ \rangle \xrightarrow{\varepsilon} \langle q_1, \alpha \rangle \xrightarrow{s_1} \cdots \xrightarrow{s_n} \langle q_1, \varepsilon \rangle$, die nach Konstruktion immer so existiert und q_1 n-mal wiederholt. Jedes Fragment $\langle q_1, \beta_i \rangle \xrightarrow{s_i}_{M'} \langle q_1, \beta_{i+1} \rangle$ entstammt dabei einer einzelnen Transition $\langle x, s_i, y \rangle \in T$. Darum gilt auch $\beta_i \xrightarrow{s_i}_M \beta_{i+1}$ für alle i. Es folgt $\alpha = \beta_0 \xrightarrow{s_1}_M \cdots \xrightarrow{s_n} \beta_n = \varepsilon$, also $w \in \mathcal{L}(M)$.