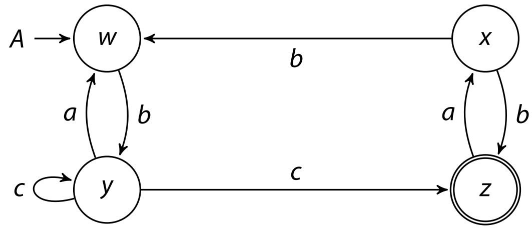
Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli
TU Braunschweig
Wintersemester 2025/26

Ausgabe: 2025-12-08 Abgabe: 2025-12-18 23:45

Hausaufgabe 4.1: Homomorphismen [3 Punkte]

Gegeben sei der folgende NFA A über Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie Homomorphismen h, g mit



$$h : \Sigma \to \{0, 1\}$$
$$h(a) = \varepsilon \quad h(b) = 10 \quad h(c) = 01$$
$$g : \{d, e, f\} \to \Sigma$$
$$g(d) = bab \quad g(e) = cca \quad g(f) = \varepsilon\,.$$

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $1001011010100110 \in h(\mathcal{L}(A))$ und $dfedf \in g^{-1}(\mathcal{L}(A))$ gelten, indem Sie jeweils einen entsprechenden Lauf durch A angeben.

b) [1 Punkt] Konstruieren Sie den Bild-Automaten $h(A)$ mit $\mathcal{L}(h(A)) = h(\mathcal{L}(A))$.

c) [1 Punkt] Konstruieren Sie den Urbild-Automaten $g^{-1}(A)$ mit $\mathcal{L}(g^{-1}(A)) = g^{-1}(\mathcal{L}(A))$.

Hausaufgabe 4.2: Satz von Myhill & Nerode [6 Punkte]

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $\equiv_L$ die aus der Vorlesung bekannte Nerode-Rechtskongruenz mit

$$u \equiv_L v \quad \text{gdw.} \quad \forall w \in \Sigma^*\colon u.w \in L \Leftrightarrow v.w \in L\,.$$

a) [2 Punkte] Beweisen Sie, dass $\equiv_L$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation und Rechtskongruenz ist. Letzteres bedeutet, dass für alle u, v mit $u \equiv_L v$ und alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $u.x \equiv_L v.x$.

Es seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit $\text{Index}(\equiv_L) = k \in \mathbb{N}$ und $A = \langle Q, q_0, \to, Q_F\rangle$ ein DFA mit $L = \mathcal{L}(A)$ und $|Q| = k$. Es sei $A_L = \langle Q_L, q_{0L}, \to_L, Q_{FL}\rangle$ der Äquivalenzklassenautomat zu L mit $\mathcal{L}(A_L) = L$ und $u_1, \ldots, u_k$ die Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von $\equiv_L$.
Im Folgenden sollen Sie Satz 6.11 aus der Vorlesung zeigen: A und A_L sind isomorph. Der Isomorphismus $\beta : Q_L \to Q$ sei dabei wie folgt gewählt: $\beta([u_i]_{\equiv_L}) = q$ mit $q_0 \xrightarrow{u_i} q$ in A.

b) [1 Punkt] Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\equiv_A$. Zeigen Sie, dass $\text{Index}(\equiv_A) = \text{Index}(\equiv_L)$ gilt. Zusammen mit $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ aus der Vorlesung wäre damit $\equiv_A = \equiv_L$ gezeigt.

c) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass β wohldefiniert ist.

Hinweis: Die Abbildung β wurde auf Äquivalenzklassen definiert. Man muss zeigen, dass β unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $u_1, \ldots, u_k$ ist. Dazu nimmt man $\hat{u}_i \equiv_L u_i$ an und zeigt, dass $\beta([\hat{u}_i]_{\equiv_L}) = \beta([u_i]_{\equiv_L})$ folgt.

d) [1 Punkt] Beweisen Sie, dass β eine Bijektion zwischen Q_L und Q ist.

e) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass β ein Isomorphismus ist. Man muss noch zeigen, dass $\beta(q_{0L}) = q_0$, $\beta(Q_{FL}) = Q_F$ und für alle $p, p' \in Q_L$ und $a \in \Sigma$ gilt: $p \xrightarrow{a}_L p'$ gdw. $\beta(p) \xrightarrow{a} \beta(p')$.

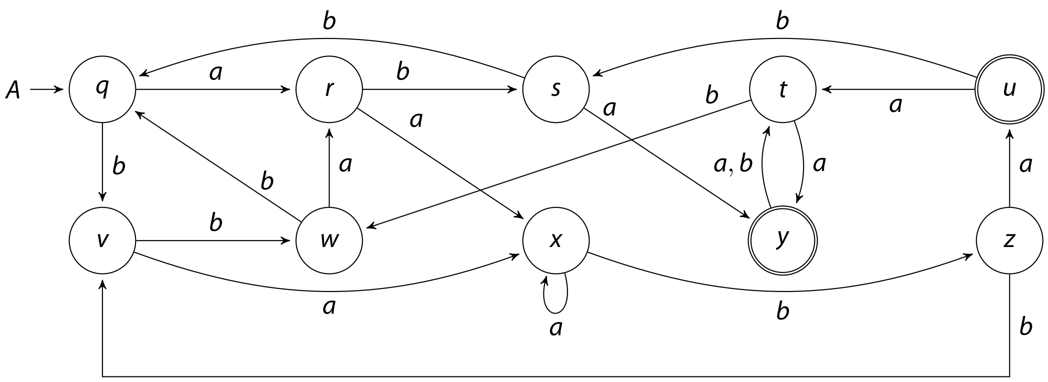
Hausaufgabe 4.3: Nerode-Rechtskongruenz mit nicht-reguläre Sprachen [3 Punkte]
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie $L = \{ a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \}$. Beweisen Sie, dass

$$[a^n]_{\equiv_L} = \{a^n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$[a^n.b]_{\equiv_L} = \left\{ a^{n+\ell}.b.a^{\ell} \;\middle|\; \ell \in \mathbb{N} \right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Mit unendlich vielen Klassen ist L nach dem Satz von Myhill & Nerode nicht regulär.

Geben Sie alle weiteren Äquvialenzklassen bezüglich $\equiv_L$ an.

Hausaufgabe 4.4: Table-Filling-Algorithmus [3 Punkte]
Betrachten Sie den folgenden DFA A.



a) [2 Punkte] Nutzen Sie den Table-Filling-Algorithmus, um den minimalen DFA A_{min} mit $\mathcal{L}(A_{\text{min}}) = \mathcal{L}(A)$ zu finden. Zeichnen Sie den Zustandsgraphen von A_{min}.

Hinweis: Notieren Sie in jeder Zelle die Nummer der Iteration, in der Sie das Paar zuerst unterschieden haben.

b) [1 Punkt] Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Rechtskongruenz von $\mathcal{L}(A)$ mit jeweils mindestens einem Repräsentanten an.

Hausaufgabe 4.5: Pumping-Lemma für reguläre Sprachen [3 Punkte]
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) $L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau 3 a's mehr als b's} \}$

b) $L_2 = \{ a^n b^m \mid n < 42 \text{ oder } m < n \}$

c) $L_3 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält nicht genau so viele a's wie b's} \}$

Hinweis zu c): Überlegen Sie sich folgendes: für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$, welche Zahl ist durch jede Zahl $\leq n$ teilbar?

Definition: Endlicher Transduktor: Ein endlicher Transduktor $T = \langle Q, q_0, \rightarrow, Q_F \rangle$ über einem endlichen Eingabe-Alphabet Σ und einem endlichen Ausgabe-Alphabet Γ besteht aus

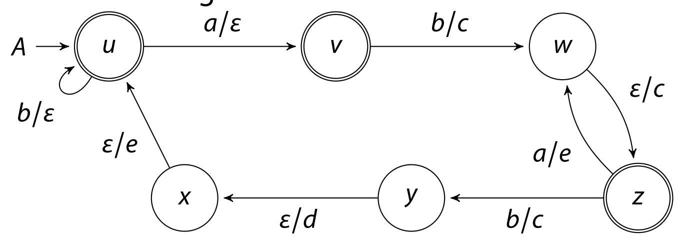
1. einer endlicher Menge an Zuständen Q,
2. einen initialen Zustand $q_0 \in Q$,
3. eine Transitionsrelation $\rightarrow \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$,
4. und eine Menge akzeptierender Zustände $Q_F \subseteq Q$.

Im Folgenden werden weitere Notationen und wichtige Definitionen aufgelistet:

1. $\langle p, a, x, q \rangle \in \rightarrow$ wird durch $p \xrightarrow{a/x} q$ ausgedrückt. Wenn im Zustand p ein a gelesen wird, gibt der Transduktor ein x aus und wechselt in Zustand q. Intuitiv konsumieren die Transitionen mit a=ε kein Eingabesymbol und die Transitionen mit x=ε erzeugen keine Ausgabe.
2. Eine Berechnung $q_0 \xrightarrow{w_1/o_1} q_1 \xrightarrow{w_2/o_2} \cdots \xrightarrow{w_{n-1}/o_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{w_n/o_n} q_n$ können wir auch schreiben als $q_0 \xrightarrow{w/o} q_n$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $o \in \Gamma^*$ die jeweiligen Konkatenationen ohne ε darstellen.
3. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei die Übersetzung unter T definiert als
$T(L) = \{\, o \in \Gamma^* \mid \exists w \in L, q_f \in Q_F : q_0 \xrightarrow{w/o} q_f \,\}$.

Übungsaufgabe 4.6:

Man kann sich einen Transduktor als einen NFA mit spontanen Transitionen vorstellen, welcher nicht nur Eingabewörter akzeptiert, sondern dabei auch Wörter in einer Ausgabe hinterlässt. Es übersetzt die Eingaben aus Σ^* in Ausgaben aus Γ^*.



a) Betrachten Sie den obigen Transduktor A über $\Sigma = \{a, b\}$ und $\Gamma = \{c, d, e\}$. Finden Sie jeweils einen regulären Ausdruck für $A(\Sigma^*)$, $A((ab)^*)$, $A(a^*b^*)$ und $A((abbab^*)^*)$.

b) Konstruieren Sie einen Transduktor T, der in einem Wort $w \in \{a, b, c\}^*$ ein b vor jedes Vorkommen von a vorhängt und jedes zweite c löscht. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $T((ac)^*)$ an. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht nötig.

c) Konstruieren Sie einen Transduktor U, der in einem Wort $w \in \{a, b\}^*$ jedes Vorkommen von der Teilsequenz aba löscht und b's, die nicht in solch einer Sequenz auftauchen, beliebig vervielfachen (aber nicht löschen!) kann. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $U(a^+(ba)^*)$ an. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht nötig.

d) Wir nennen einen Transduktor deterministisch, wenn es in jedem Zustand zu jeder Eingabe genau eine mögliche, und damit auch eindeutige, Transition gibt; diese darf auch spontan sein. Beispielsweise darf ein Zustand mit einer a-Transition keine weitere a-Transition oder spontane Transition besitzen. In beiden Fällen würde es 2 mögliche Transitionen geben, die der Transduktor beim Lesen eines a's nehmen könnte.
Zeigen Sie, dass es **nicht** möglich ist Transduktoren zu determinisieren, d.h. es gibt nicht zu jedem Transduktor T einen deterministischen T' mit $T(L) = T'(L)$ für alle Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$.

Übungsaufgabe 4.7:

Zeigen Sie, dass jede Sprachklasse genau dann unter Übersetzungen unter Transduktoren abgeschlossen ist, wenn sie unter Schnitten mit regulären Sprachen, Homomorphismus-Bildern und -Urbildern abgeschlossen ist.

a) Sei $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus zwischen Sprachen. Konstruieren Sie einen Transduktor T_h, sodass $T_h(L) = h(L)$ für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Konstruktion.

b) Zeigen Sie nun, dass es auch einen Transduktor $T_{h^{-1}}$ gibt, sodass $T_{h^{-1}}(L) = h^{-1}(L)$ für alle $L \subseteq \Gamma^*$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Konstruktion.

c) Zeigen Sie, dass es zu jeder regulären Sprachen M einen Transduktor T_M gibt mit $T_M(L) = L \cap M$.

d) Zeigen Sie nun, dass die Übersetzung unter eines Transduktor T als Kombination der drei oben beschriebenen Operationen dargestellt werden kann.

Übungsaufgabe 4.8:

Es sei $\equiv \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ eine Äquivalenzrelation auf Wörtern. Wie üblich schreiben wir $u \equiv v$ (statt $\langle u, v \rangle \in \equiv$), um auszudrücken, dass u und v gemäß $\equiv$ äquivalent sind. Beweisen Sie formal die folgenden grundlegenden Eigenschaften von Äquivalenzrelationen:

- Jedes Wort ist in seiner Äquivalenzklasse enthalten: $u \in [u]_\equiv$.
- Die Äquivalenzklassen von äquivalenten Wörtern sind gleich: $u \equiv v \implies [u]_\equiv = [v]_\equiv$.
- Die Äquivalenzklassen von nicht-äquivalenten Wörtern sind disjunkt: $u \not\equiv v \implies [u]_\equiv \cap [v]_\equiv = \emptyset$.

Übungsaufgabe 4.9:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie die Sprache $L = \Sigma^*.\{aab, abb\}.\Sigma^*$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_L$ und geben Sie den Äquvialenzklassenautomaten A_L an.

Übungsaufgabe 4.10:

Hier wollen wir zeigen, dass sich manche Sprachen mit einem kleinen NFA beschreiben lassen, jeder DFA dafür jedoch zwangsweise riesig ist.

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachte für jede Zahl $k \in \mathbb{N}, k > 0$ die Sprache $L_k = \Sigma^*.a.\Sigma^{k-1}$ der Wörter, deren k-ter Buchstabe von rechts ein a ist.

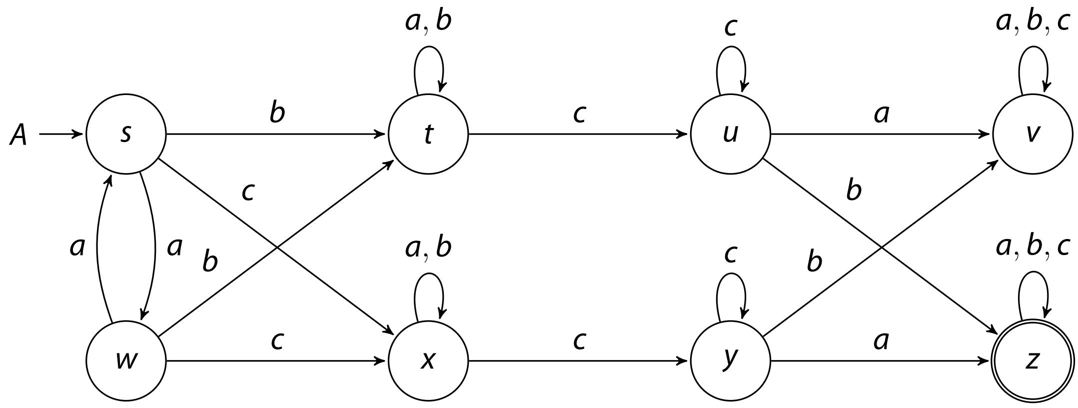
a) Zeigen Sie, wie man zu jedem $k \in \mathbb{N}, k > 0$ einen NFA $A_k = \langle Q_k, q_0, \to, F_k \rangle$ mit $\mathcal{L}(A_k) = L_k$ und $|Q_k| = k + 1$ konstruiert. Geben Sie diesen Automaten formal als Tupel an.
Sie müssen die Sprachgleichheit nicht beweisen.

b) Zeichnen Sie A_3 und seine Determinisierung $\mathcal{P}(A_3)$ nach Rabin & Scott.

c) Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}, k > 0$ und $u, v \in \Sigma^k$ mit $u \neq v$ die Aussage $u \not\equiv_{L_k} v$.
Welche Konsequenz können Sie für die Größe jedes DEAs für L_k schließen?

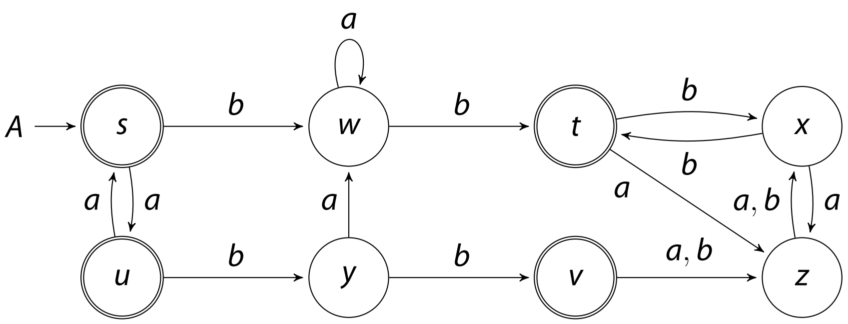
Übungsaufgabe 4.11:

Betrachten Sie den folgenden DFA A. Bestimmen Sie dessen Äquivalenzklassen-Automat $A_{\mathcal{L}(A)}$ nach Myhill & Nerode mit dem Table-Filling-Algorithmus und geben Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Rechtskongruenz an.



Übungsaufgabe 4.12:

Betrachten Sie den folgenden DFA A.



Zeigen Sie, dass A minimal ist, indem Sie den Table-Filling-Algorithmus anwenden. Füllen Sie Zellen mit 0, wenn das jeweilige Zustandspaar initial zu trennen ist, und ansonsten mit der Nummer der Iteration, in welcher das Paar erstmals getrennt wird.

Hinweis: Notieren Sie, während Sie Ihre Tabelle füllen, in welcher Reihenfolge Sie Zustände unterscheiden, z.B. werden zu Beginn finale Zustände abgetrennt: $\{s, t, u, v\} \not\sim_A \{w, x, y, z\}$, und in Iteration 1 können deshalb $\{s, u\} \not\sim_A \{t, v\}$ getrennt werden, usw.

Übungsaufgabe 4.13:

Zeigen Sie unter Benutzung des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) $L_0 := \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq |w|_b \}$

b) $L_1 := \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b$ oder $2|w|_b \leq |w|_a \}$

c) $L_2 := \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}$ und $(n \neq 1$ oder $\exists \ell \in \mathbb{N}\colon m = \ell^2) \}$.