

Theoretische Informatik 1

Übungsblatt 3

Prof. Dr. Roland Meyer

René Maseli

TU Braunschweig

Wintersemester 2025/26

Ausgabe: 2025-11-24

Abgabe: 2025-12-04 23:59

Hausaufgabe 3.1: Reguläre Sprachen und endliche Automaten [5 Punkte]

Es seien A und B endliche Automaten über dem Alphabet Σ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Es gibt einen endlichen Automaten C über Σ mit $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(A) \cdot \mathcal{L}(B)$.

Hinweis: Geben Sie dazu eine Konstruktion an, die unabhängig der Wahl von A und B funktioniert, und zeigen Sie, dass die entsprechenden Sprachen übereinstimmen.

b) [2 Punkte] Es gibt einen NFA D mit $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(A)^{re} := \{ a_n \dots a_1 \mid a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}(A) \}$.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Kleene-Stern tatsächlich ein Hüllen-Operator ist: $(L^*)^* = L^*$.

Hinweis: Zeigen und nutzen Sie jeweils die folgenden Lemmata:

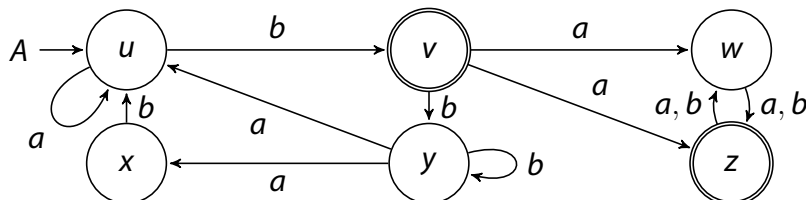
$$\text{i) } \forall i \in \mathbb{N} : L^* \cdot L^i \subseteq L^*$$

$$\text{ii) } L^* \cdot L^* \subseteq L^*$$

$$\text{iii) } \forall i \in \mathbb{N} : (L^*)^i \subseteq L^*.$$

Hausaufgabe 3.2: Automat zu Regulären Ausdruck [4 Punkte]

Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\{a, b\}$.



a) [1 Punkt] Geben Sie das zu A gehörige Gleichungssystem an.

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für $\mathcal{L}(A)$, indem Sie das Gleichungssystem unter Verwendung von Ardens Lemma lösen. Geben Sie insbesondere einen Ausdruck für jede Variable an.

c) [1 Punkt] Beschreiben Sie, was bei diesem Verfahren passiert, falls kein akzeptierender Zustand erreichbar ist. Wie hängt der Lösungsraum mit der Sprache solch eines Automaten zusammen?

Hausaufgabe 3.3: Rabin & Scott [3 Punkte]

Es sei $A = \langle Q, q_0, \rightarrow, Q_F \rangle$ ein NFA über Σ , und $\mathcal{P}(A) = \langle \mathcal{P}(Q), Q_0, \rightarrow_{\mathcal{P}(A)}, Q'_F \rangle$ die Potenzmengenkonstruktion nach Rabin & Scott mit $Q_0 := \{q_0\}$, $X \xrightarrow{a}_{\mathcal{P}(A)} \{q \in Q \mid \exists p \in X: p \xrightarrow{a} q\}$ für alle $X \subseteq Q$ und $a \in \Sigma$, und $Q'_F = \{X \subseteq Q \mid X \cap Q_F \neq \emptyset\}$.

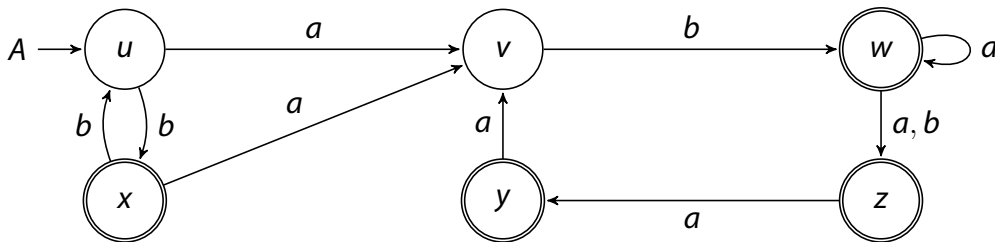
Ziel dieser Aufgabe ist es, Satz 3.18 zu beweisen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- [1 Punkt] Zeigen Sie durch Induktion nach i : Zu jedem Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A gilt für den (eindeutigen) Lauf $Q_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{P}(A)} Q_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{P}(A)} \dots \xrightarrow{a_i}_{\mathcal{P}(A)} Q_i$ von $\mathcal{P}(A)$, der das selbe Wort liest, $q_i \in Q_i$.
- [1 Punkt] Zeigen Sie durch Induktion nach i : Zu jedem Lauf $Q_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{P}(A)} Q_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{P}(A)} \dots \xrightarrow{a_i}_{\mathcal{P}(A)} Q_i$ von $\mathcal{P}(A)$ und jedem Zustand $q_i \in Q_i$ gibt es einen Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A , der das selbe Wort liest und in q_i endet.
- [1 Punkt] Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b), dass $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{P}(A))$ gilt.

Hausaufgabe 3.4: Potenzmengen-Konstruktion [5 Punkte]

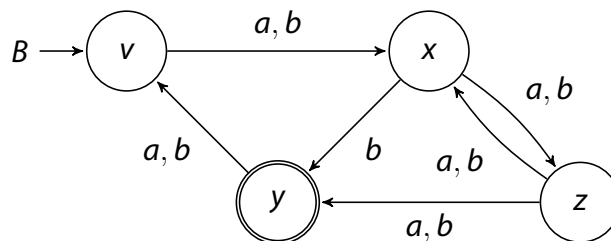
Betrachten Sie die folgenden endlichen Automaten A und B über $\Sigma = \{a, b\}$.

- [3 Punkte] Konstruieren Sie einen Automaten $\overline{A_{\text{det}}}$ mit $\mathcal{L}(\overline{A_{\text{det}}}) = \overline{\mathcal{L}(A)}$. Determinisieren Sie dazu A , bestimmen Sie also einen DFA A_{det} mit $\mathcal{L}(A_{\text{det}}) = \mathcal{L}(A)$ unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.



Hinweis: Sie können sich auf die Zustände beschränken, die vom Startzustand $\{q_0\}$ aus erreichbar sind. Konstruieren Sie hierzu zu bereits vorhandenen Zuständen ihre Nachfolger, bis Sie keine neuen Zustände mehr erhalten.

- [2 Punkte] Betrachten Sie die Wörter $w_1 = babab$, $w_2 = abbbbaa$ und $w_3 = bbbbaaa$. Entscheiden Sie, ob $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{L}(B)$ gilt, oder nicht, indem Sie die jeweiligen Läufe des Potenzmengen-Automaten explizit angeben.



Hinweis: Sie müssen den Potenzmengen-Automaten hier nicht konstruieren.

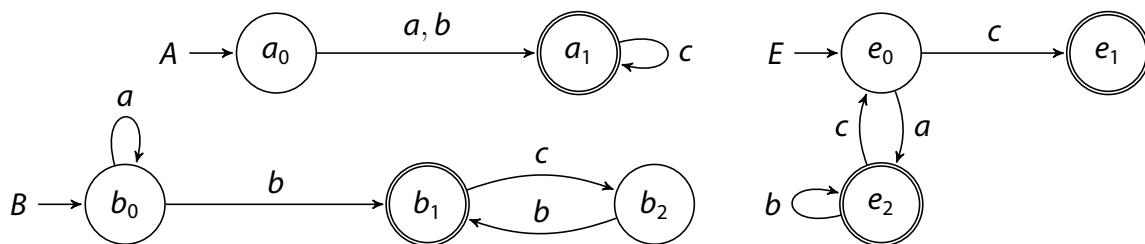
Übungsaufgabe 3.5:

Ziel ist ein endlicher Automat für den folgenden regulären Ausdruck

$$(c + a(b+ca)^*(\varepsilon+cc))((a+b)c^* + a^*b(cb)^*)^* \text{ über } \Sigma = \{a, b, c\}.$$

Bemerkung: Es reicht, jeweils den Zustandsgraphen zu zeichnen. Die Operatoren binden in dieser Vorlesung mit folgender Reihenfolge: $(^*)$, $(.)$, (\cup)

Betrachten Sie die Automaten A für $(a+b)c^*$ und B für $a^*b(cb)^*$. Geben Sie einen Automaten C für $\mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$, als auch einen Automaten D für $\mathcal{L}(C)^*$ an. Betrachten Sie weiter den Automaten E für $c + a(b+ca)^*(\varepsilon+cc)$ und geben Sie einen Automaten F für $\mathcal{L}(E).\mathcal{L}(D)$ an.



Übungsaufgabe 3.6:

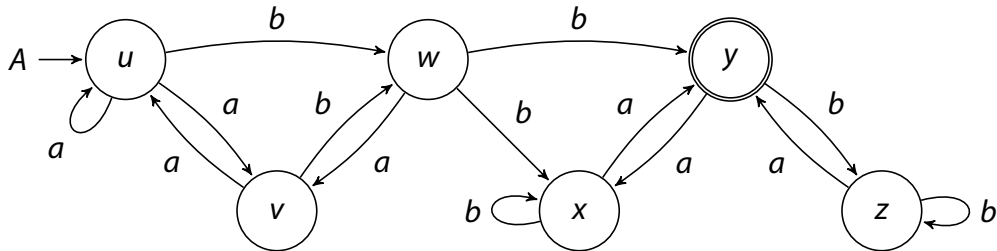
Überprüfen Sie die folgenden Probleme darauf, ob diese sich als Probleme über regulären Sprachen auffassen lassen oder nicht. Begründen Sie ihre Antwort indem Sie einen regulären Ausdruck oder einen Automaten angeben, falls möglich, oder argumentieren, dass die Sprache tatsächlich nicht regulär ist. Korrektheitsbeweise sind nicht gefordert.

Nehmen sie als Alphabet $\Sigma = L \cup U \cup D \cup S \cup W$ an, partitioniert auf Kleinbuchstaben L (lower-case), Großbuchstaben U , Ziffern D , Sonderzeichen S und Leerzeichen W .

- Hat der eingegeben Text mindestens 3 Zeichen und höchstens 18 Zeichen?
- Kommt jede Art von nicht-Leerzeichen (L , U , D und S) mindestens 1 mal vor?
- Parenthesization*: Hat der eingegebene Text eine korrekte Klammerung, d.h. jede öffnende Klammer hat eine passende schließende Klammer und umgekehrt. `(ri)(gh)t`, `R(i(g)h)t` sind korrekt, aber `w(r)on)g` und `W(r)o(n(g` nicht.
- Stringliterals*: Mit `'` $\in S$ sollen Zeichenfolgen umschlossen und mit `\` $\in S$ sollen darin Zeichen *escaped* werden können. Hat jedes öffnende `'` ein schließendes `'`, das nicht *escaped* ist? (z.B. `'no'issue'with'\'\'` oder `'Robert\'');``DROP TABLE Students;--'`)
- Tabellen*: Haben alle Zeilen (getrennt durch Umbrüche `\n` $\in W$) die gleiche Anzahl an Spalten (jeweils getrennt durch Kommata `,` $\in S$)?
- Kommentare*: Sind am Ende alle Kommentare geschlossen?
Kommentare beginnen entweder mit `//` $\in S^2$ oder mit `/*` $\in S^2$. Im ersten Fall endet der Abschnitt mit dem Zeilenende `\n` $\in W$; anderenfalls endet er mit `*/` $\in S^2$. Verschachtelungen gibt es nicht, also sind `///*\n`, `/*/**/` und `/*/**/*/` in der Sprache.

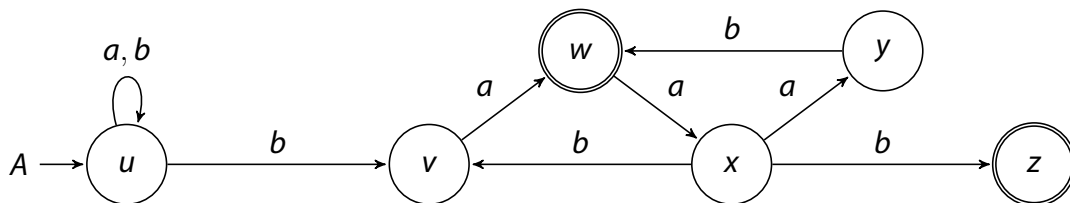
Übungsaufgabe 3.7:

Betrachten Sie nun den folgenden NFA A über dem Alphabet $\{a, b\}$. Finden Sie einen regulären Ausdruck für $\mathcal{L}(A)$, indem Sie das assoziierte Gleichungssystem mit Hilfe von Ardens Lemma lösen.



Übungsaufgabe 3.8:

Betrachten Sie nun den folgenden NFA A über dem Alphabet $\{a, b\}$. Finden Sie einen regulären Ausdruck für $\mathcal{L}(A)$, indem Sie das assoziierte Gleichungssystem mit Hilfe von Ardens Lemma lösen.



Übungsaufgabe 3.9:

Betrachten Sie den Automaten aus Aufgabe 2. Konstruieren Sie den äquivalenten deterministischen Automaten nach Rabin & Scott.

Übungsaufgabe 3.10:

Führen Sie die Konstruktion von Rabin & Scott durch, um einen äquivalenten, deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{P}(A)$ für den folgenden Automaten A zu erhalten: Beschränken Sie sich dabei auf die erreichbaren Zustände von $\mathcal{P}(A)$.

