Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli
TU Braunschweig
Wintersemester 2025/26

Ausgabe: 2025-11-10 Abgabe: 2025-11-20 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 20.11.2025 23:59 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie **alle** Gruppenmitglieder mit **Matrikelnummer, Namen und Studiengang** an.

Hausaufgabe 2.1: Join-Meet-Stetigkeit [4 Punkte]
Beweisen oder widerlegen Sie, ob die folgenden Aussagen stimmen.

a) [1 Punkt] Sei M eine endliche Menge, $R \subseteq M \times M$ eine binäre Relation über M. Betrachte den vollständigen Verband $\langle \mathcal{P}(M), \subseteq \rangle$. Zeigen Sie, dass post : $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ $\sqcup$-stetig ist.
$$\mathrm{post}(X) := \{\, y \in M \mid \forall x \in M : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow x \in X \,\}$$

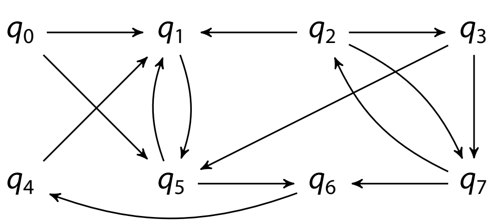
b) [2 Punkte] Sei $\langle B, E, F \rangle$ ein Kontrollflussgraph. Betrachte den Verband $\langle \mathcal{P}(\mathrm{Vars})^B, \subseteq^B \rangle$, wobei jedes Paar $f, g : B \to \mathcal{P}(\mathrm{Vars})$ geordnet ist nach $f \subseteq^B g$ gdw. $\forall b \in B : f(b) \subseteq g(b)$. Wir schreiben, ein Block *benutze* eine Variable, wenn diese Variable in einem Ausdruck des Blocks (außer dem Ziel einer Zuweisung) vorkommt. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathcal{P}(\mathrm{Vars})^B \to \mathcal{P}(\mathrm{Vars})^B$ $\sqcup$-stetig ist.
$$G(X)(b) = \left\{ x \in \mathrm{Vars} \;\middle|\; \exists b' \in B : b \; F \; b' \text{ und } (b' \text{ benutzt } x \text{ oder } (b' \neq [x := e]^{\ell} \text{ und } x \in X_{b'})) \right\}$$

c) [1 Punkt] Betrachten Sie die totale Ordnung $\omega + 2 := \langle D, \leq_{\omega+2} \rangle$ mit $D := \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega{+}1\}$ und
$$\leq_{\omega+2} := \leq \cup \{\, \langle n, \omega \rangle \mid n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \,\} \cup \{\, \langle n, \omega{+}1 \rangle \mid n \in D \,\}.$$
Zeigen Sie, dass die Funktion succ : $D \to D$ mit $\mathrm{succ}(n) := \begin{cases} \omega{+}1 & \text{falls } n = \omega{+}1 \\ n + 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $\sqcap$-stetig ist.

Hausaufgabe 2.2: Unerreichbarkeit in Graphen [2 Punkte]
Es sei $\langle V, E \rangle$ ein Graph, d.h. V endlich und $E \subseteq V \times V$. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ mit
$$f(X) = \{\, v \in V \mid v \neq q_0 \text{ und } (\forall x \in V \setminus X : \langle x, v \rangle \notin E) \,\}.$$

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass f im Verband $\langle \mathcal{P}(V), \subseteq \rangle$ monoton und $\sqcap$-stetig ist.

b) [1 Punkt] Nutzen Sie die Konstruktion aus a), um alle Knoten des folgenden Graphen $G = \langle V, E \rangle$ zu finden, welche **nicht** vom Startknoten q_0 erreichbar sind. Geben Sie alle Elemente bis zur Stabilität an. Berechnen Sie gfp(f) unter Verwendung des Kleene'schen Fixpunktsatzes.

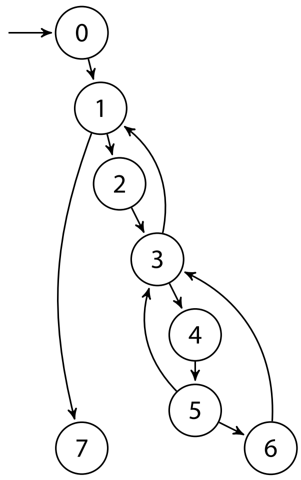


Hausaufgabe 2.3: Reaching Definitions [5 Punkte]

Gegeben sind die folgenden Programme mit Variablen Vars $:= \{x, y, z\}$ und Datenfluss-Graphen $G = \langle B, E, F\rangle$ wie daneben angegeben. Ziel ist es, für jeden Block b die Menge an Blöcken zu finden, die vorher eine Variable als letztes überschrieben haben könnten, wenn der Kontrollfluss b erreicht.

if $[\neg(x = y)]^0$ **then**
  $[z := 3 \cdot x \cdot x + 2]^1$
  if $[x < y]^2$ **then**
    $[y := y - z]^3$
  else
    $[x := x - z]^4$
  end if
else
  while $[y \cdot x > 64]^5$ **do**
    $[y := y - 1]^6$
  end while
end if
$[x := x + y]^7$

$[x := 0]^0$
while $[x < 2^4]^1$ **do**
  $[y := 3x + 2]^2$
  while $[y < 5x]^3$ **do**
    $[y := y + 2]^4$
    if $[3x < y]^5$ **then**
      $[x := x + 1]^6$
    end if
  end while
end while
$[x := x - 14]^7$



a) [1 Punkt] Betrachten Sie das Programm auf der linken Seite. Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen $G = \langle B, E, F\rangle$. Markieren Sie insbesondere die Extremal-Blöcke.

b) [1 Punkt] Betrachten Sie nun das Programm auf der rechten Seite, sowie den Verband $\langle D, \subseteq\rangle$ über der Domäne $D = \mathcal{P}(\text{Vars} \times (B + \{?\}))$. Geben Sie für jeden Block $b \in B$ Elemente $\text{kill}(b), \text{gen}(b) \in D$ an, sodass sich die monotone Transferfunktionen $f_b : D \to D$ für die Analyse eignen: $f_b(X) = (X \setminus \text{kill}(b)) \cup \text{gen}(b)$.

c) [3 Punkte] Lösen Sie das induzierte Gleichungssystem aus b), indem Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene bestimmen.

Hausaufgabe 2.4: Live Variables [5 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Programm. Weisen Sie jedem Block des Programms die Menge an Variablen zu, die nach diesem Block noch benutzt werden könnten.

$[x := 24 \cdot y \cdot z \cdot z + 12 \cdot y \cdot y \cdot z + 2]^0$
if $[y < z]^1$ **then**
  $[x := 16 \cdot y \cdot y]^2$
else
  while $[y < z]^3$ **do**
    $[x := 2 \cdot y \cdot y - y + 1]^4$
    $[y := y + x]^5$
  end while
end if
$[\text{skip}]^6$

a) [1 Punkt] Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G. Markieren Sie die Extremal-Blöcke. Beachten Sie, dass es sich hier um eine Rückwärts-Analyse handelt.

b) [1 Punkt] Betrachten Sie den Verband $D = \langle \mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subseteq\rangle$. Geben Sie für jeden Block $b \in B$ eine geeignete monotone Transferfunktion f_b über diesem Verband an.

c) [3 Punkte] Betrachten Sie das Datenflusssystem $S := \langle G, D, \{x, y, z\}, (f_b)_{b\in B}\rangle$. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene.

Übungsaufgabe 2.5:

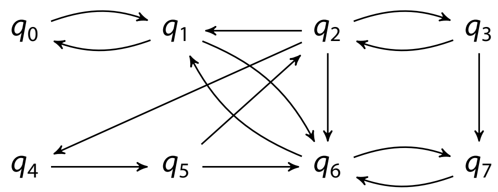
Seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positive ganze Zahlen und $D := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \mid n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \}$ die Menge der Teiler des Produkts $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$. Betrachte den Verband $\langle D, \mid \rangle$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f_a : D \to D$ $\sqcap$-stetig ist.

$$f_a(x) := \mathrm{ggt}(n_1, \mathrm{kgv}(n_2, n_3 \cdot x))$$

Übungsaufgabe 2.6:

Gegeben ist der Graph $G = \langle V, E \rangle$ rechts, sowie der Potenzmengen-Verband $\langle \mathcal{P}(V), \subseteq \rangle$. Betrachten Sie für jeden Knoten $v \in V$ die Funktion $f_v : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ mit

$$f_v(X) := \{ y \mid y = v \text{ oder } \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in E \} .$$



Geben Sie die Folge aus Kleene's Fixpunktsatz für jeweils $\mathrm{lfp}(f_{q_0})$ und $\mathrm{lfp}(f_{q_2})$ bis zur Stabilierung an.

Übungsaufgabe 2.7:

Betrachten Sie einen Verband $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ und beliebige Elemente $\mathrm{keep}, \mathrm{get} \in D$. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = (x \sqcap \mathrm{keep}) \sqcup \mathrm{get}$ monoton ist.

Übungsaufgabe 2.8:

Sei $S = \langle \langle B, E, F \rangle, \langle D, \sqsubseteq \rangle, i, (f_b)_{b \in B} \rangle$ das Datenfluss-System einer May-Analyse, mit Kontrollfluss-Graphen $\langle B, E, F \rangle$, vollständigen Verband $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ mit ACC, initialem Datenflusswert $i \in D$ für Extremalblöcke und monotonen Transferfunktionen $f_b : D \to D$ für jeden Block $b \in B$.

Betrachte den Verband $\langle D^B, \sqsubseteq^B \rangle$ aus Funktionen $f \in D^B$, die jedem Block b ein Element $f(b) \in D$ zuordnen. Jedes Paar $f_1, f_2 \in D^B$ sei genau dann geordnet (sprich $f_1 \sqsubseteq^B f_2$), wenn für alle Blöcke $b \in B$, $f_1(b) \sqsubseteq f_2(b)$ gilt.

Zeigen Sie, dass die Funktion $g_S : D^B \to D^B$ monoton und $\sqcup$-stetig ist:

$$g_S(f)(b) = \bigsqcup_{\langle b', b \rangle \in F} f(b') \sqcup \begin{cases} i & \text{falls } b \in E \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$