Theoretische Informatik 1
Übungsblatt

René Maseli
Roland Meyer
TU Braunschweig
Wintersemester 2025/26

Ausgabe: 2025-10-27 Abgabe: 2025-11-06

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 6.11.2025 23:59 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von **drei** Personen ab und geben Sie **alle** Gruppenmitglieder mit **Matrikelnummer, Namen und Studiengang** an.

Hausaufgabe 1: Verbände [4 Punkte]

Betrachten Sie den vollständigen Verband $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$. Hierbei ist $\preceq$ eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt $x \preceq y$ falls $x = 0$, oder $y = 1$ oder $x = y = n$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

a) [1 Punkt] Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$. Beschränken Sie sich auf Zahlen $\leqslant 9$.

b) [1 Punkt] Geben Sie die Werte der folgenden Joins und Meets an:

$$\bigsqcap \mathbb{N} \qquad \bigsqcup \mathbb{N} \qquad \bot \sqcup \top \qquad \bot \sqcap \top \qquad \top \sqcup 5 \qquad 6 \sqcap 7 \qquad \bot \sqcup 4 \qquad \bigsqcup \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \,\}$$

c) [1 Punkt] Ist die Höhe dieses Verbandes endlich? Ist die Höhe beschränkt?

d) [1 Punkt] Geben Sie ein Hasse-Diagramm für einen Verband mit endlicher, aber unbeschränkter Höhe an.

Hausaufgabe 2: Ein spezieller Verband [6 Punkte]

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere endliche Menge und $M' := \{\, \langle a, b \rangle \mid a, b \in M \text{ und } a < b \,\} \cup \{\square\}$ die Menge der aufsteigend sortierten Paare aus M, sowie einem Extra-Element $\square$.

Sei $\preceq$ eine Relation auf M', die wie folgt definiert ist:

$$x \preceq y \quad \text{gdw.} \quad x = \square \quad \text{oder} \quad (x = \langle a, b \rangle \text{ und } y = \langle c, d \rangle \text{ und } c \leq a \text{ und } b \leq d)\,.$$

a) [1 Punkt] Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von $\langle M', \preceq \rangle$ mit $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Im Folgenden sei M wieder beliebig endlich und nicht leer.

b) [2 Punkte] Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
Damit ist gezeigt dass $\langle M', \preceq \rangle$ eine partielle Ordnung ist.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass der Join $\bigsqcup X$ und der Meet $\bigsqcap X$ für jede Teilmenge $X \subseteq M'$ existieren.
Damit ist gezeigt, dass $\langle M', \preceq \rangle$ ein vollständiger Verband ist.

d) [1 Punkt] Geben Sie $\top, \bot$ für $\langle M', \preceq \rangle$ in Abhängigkeit von M an.

Übungsaufgabe 3:
Seien $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{N}$ zwei nichtleere endliche Mengen und $M = M_1 \times M_2$ die Menge aller Tupel $\langle a, b \rangle$ mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$. Sei $\preceq$ eine Relation auf M, die wie folgt definiert ist

$$\langle a_1, b_1 \rangle \preceq \langle a_2, b_2 \rangle \quad \text{gdw.} \quad a_1 \geq a_2 \text{ und } b_1 \geq b_2$$

wobei $\leq$ die gewöhnliche "kleiner gleich" Relation auf den natürlichen Zahlen ist.

Zeigen Sie, dass $\langle M, \preceq \rangle$ ein vollständiger Verband ist.

Ist $\langle M, \preceq \rangle$ immer noch ein vollständiger Verband, wenn $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist?

Übungsaufgabe 4:
Es seien $\langle D_1, \preceq_1 \rangle$ und $\langle D_2, \preceq_2 \rangle$ vollständige Verbände. Der **Produktverband** ist als $\langle D_1 \times D_2, \preceq \rangle$ definiert. Hierbei ist $\preceq$ die **Produktordnung** auf Tupeln mit $\langle d_1, d_2 \rangle \preceq \langle d_1', d_2' \rangle$ gdw. $d_1 \preceq_1 d_1'$ und $d_2 \preceq_2 d_2'$.

Zeigen Sie, dass er seinem Namen entsprechend tatsächlich ein vollständiger Verband ist.

Beweisen Sie: Der Produktverband $\langle D_1 \times D_2, \preceq \rangle$ erfüllt genau dann die ACC, wenn sowohl $\langle D_1, \preceq_1 \rangle$ als auch $\langle D_2, \preceq_2 \rangle$ die ACC erfüllen.

Übungsaufgabe 5:
Seien $\langle D, \leqslant \rangle$ ein Verband und $x, y \in D$.

Zeigen Sie: Ist $f : D \to D$ monoton, so gilt $f(x \sqcup y) \geqslant f(x) \sqcup f(y)$.

$f : D \to D$ heißt **distributiv**, falls $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$.
Zeigen Sie: Falls f distributiv ist, so ist f auch monoton.

Übungsaufgabe 6:
Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein Verband. Beweisen Sie die ersten beiden Aussagen aus Lemma 1.8 aus der Vorlesung: Falls $\bigsqcap D$ definiert ist, so gilt $\bigsqcap D = \bigsqcup \emptyset$. Analog gilt $\bigsqcup D = \bigsqcap \emptyset$, falls $\bigsqcup D$ definiert ist.

Übungsaufgabe 7:
Zeigen Sie die letzte Aussage des Lemmas 1.8: Jeder endliche Verband ist vollständig.

Übungsaufgabe 8:
Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $\langle \mathcal{P}(M), \subseteq \rangle$ ein vollständiger Verband ist.