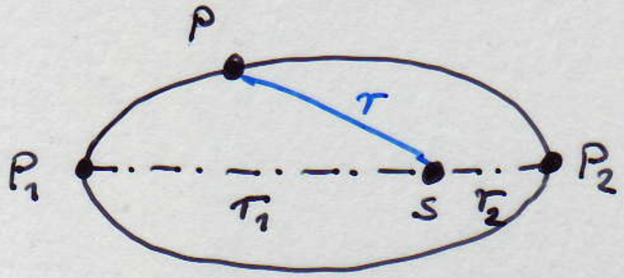
Keplers steiniger Weg zum 2ten Planetengesetz

„Fahrstrahlen überstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächen“



P_2 - Perihel
P_1 - Aphel } „Apsiden“
P - Planet
S - Sonne

Beobachtungen ⇨ In den Apsiden gilt für die Geschwind.:

$$v_1 = \frac{k}{r_1}\ , \quad v_2 = \frac{k}{r_2} \qquad k = \text{const.}$$

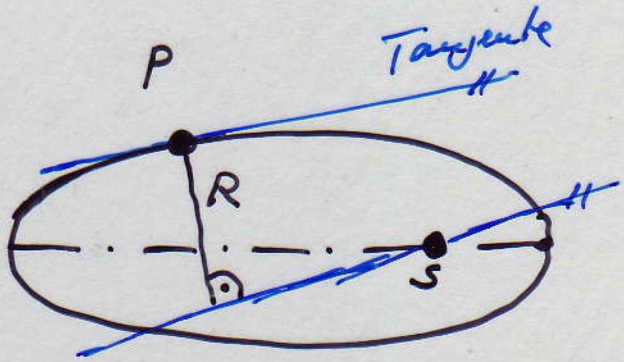
Keplers Annahme: überall auf der Bahn gilt:
(die er als „Theorem“ verkauft!)

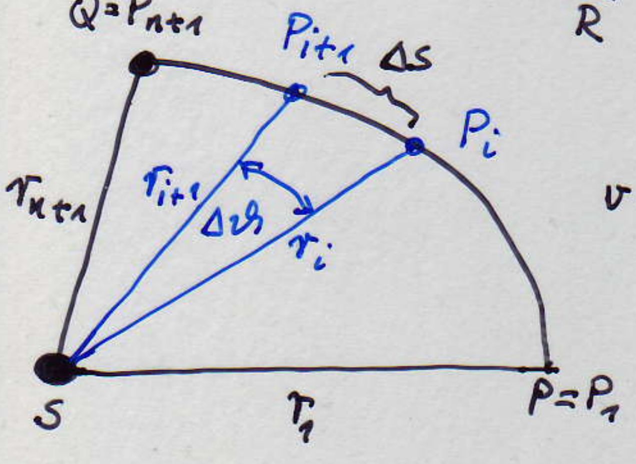
$$v = \frac{k}{r}$$

Die Annahme ist falsch!

Richtig wäre gewesen:

$$v = \frac{k}{R}$$



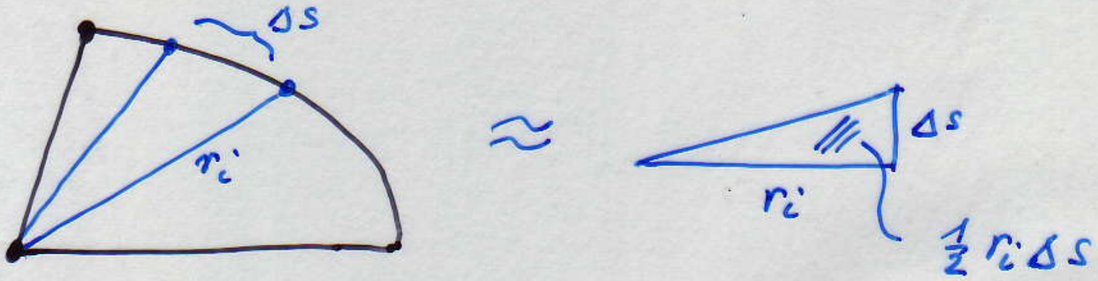


$$v = \frac{k}{r} \Rightarrow t = \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s}{v_i}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s$$

$$\Rightarrow t \cong \sum_{i=1}^{n} r_i$$

Kepler: „Da ich mir über die unendliche Anzahl von Punkten auf dem Orbit und somit der unendlichen Anzahl von Abständen [zur Sonne] bewußt war erschien mir die Summe dieser Abstände in der <u>Fläche</u> des Orbits zu liegen. Ich erinnerte mich daran, daß Archimedes auf die gleiche Weise den Kreis in eine unendliche Anzahl von Dreiecken zerteilt hatte.



⇒ „Fläche des Orbits":

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \qquad (*)$$

Zusammen mit $t \sim \sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s$

ergibt das:

$$t = \frac{1}{k} \cdot 2A = \frac{A}{h} \quad , h = \frac{k}{2}$$

⇒ $\boxed{A = h \cdot t}$ 2tes Keplersches Gesetz

Aber: auch (*) ist i. allg. falsch!!

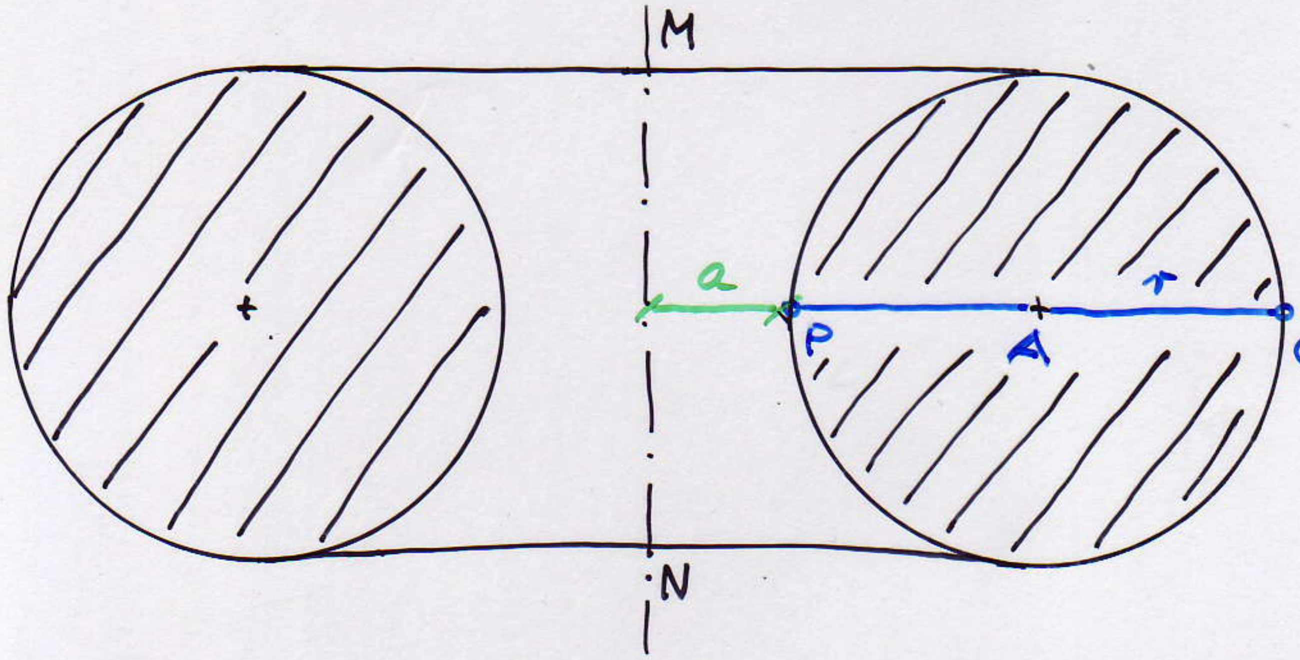
$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s \xrightarrow{n \to \infty} A = \frac{1}{2} \int r \, ds$$

Richtig ist jedoch: $A = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\vartheta$

„zum Glück" ist aber $s = r \cdot \vartheta$ und damit für kleine Winkel $\Delta s = r \cdot \Delta \vartheta$

Keplers Beitrag zur Volumenberechnung

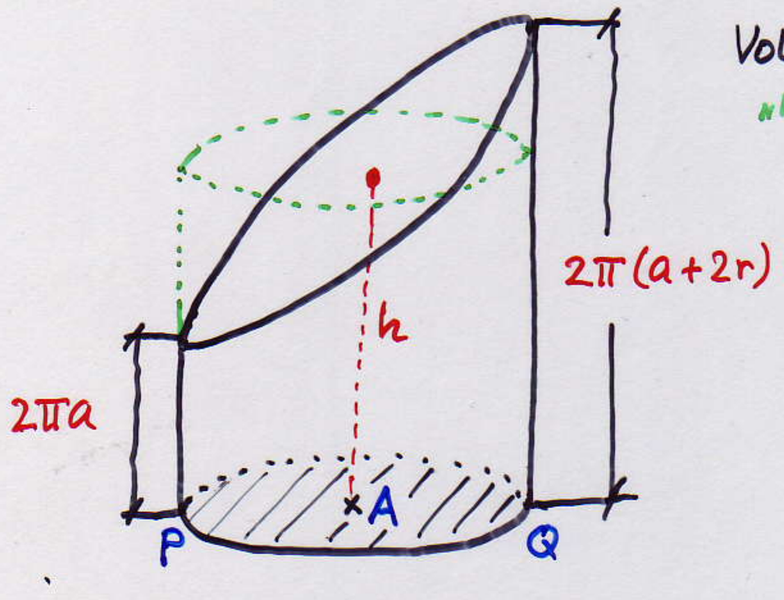
I. Volumen eines Torus



Idee: Punkt P legt bei Rotation der Kreisscheibe um $\overline{MN}$ den Weg: $2\pi a$ zurück.

Punkt Q legt bei Rotation der Kreisscheibe um $\overline{MN}$ den Weg: $2\pi(a+2r)$ zurück.

$\Rightarrow$ Volumen entspricht einem schräg geschnittenen Zylinder:

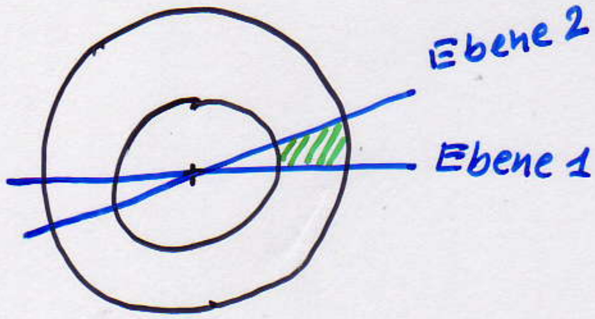


Vol = Volumen des „mittleren" Zylinders mit Höhe

$h = 2\pi(a+r)$

$\left(= \frac{1}{2}\left(2\pi a + 2\pi(a+2r)\right)\right)$

Keplers Herleitung:



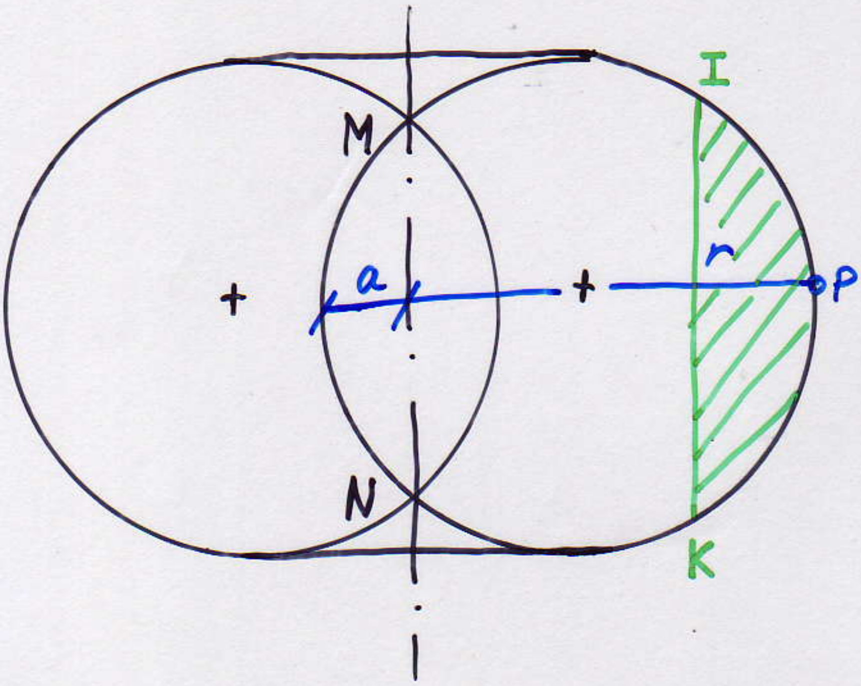
Bei Schnitt des Torus mit zwei infinitesimal benachbarten Ebenen entstehen Zylinderstückchen:

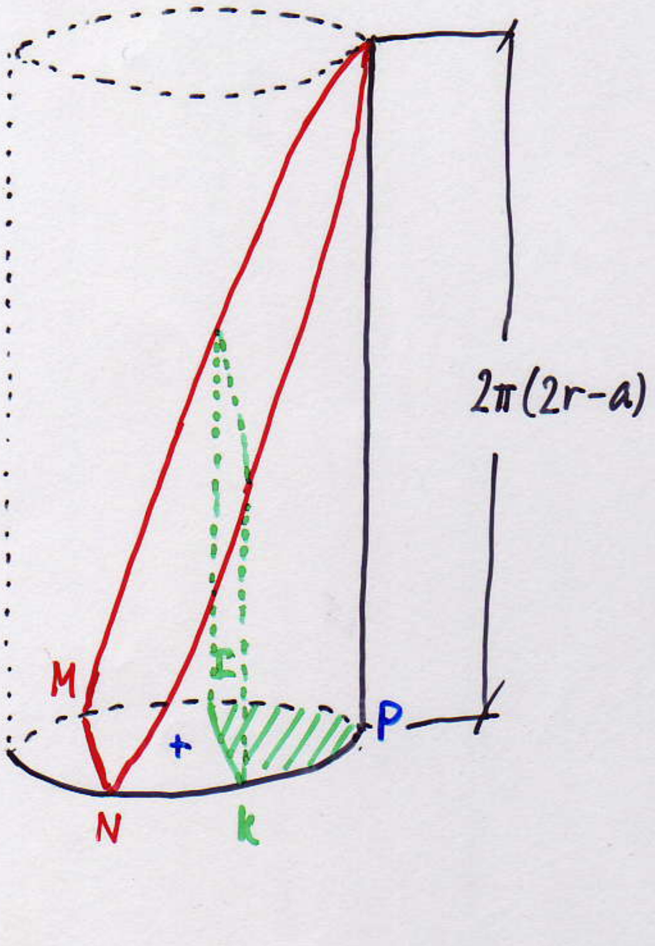
Vol = Grundfläche $\times \frac{1}{2}(t_1+t_2)$

„Gesamtsumme" $\sum \frac{1}{2}(t_1+t_2)$ über alle infinitesimalen Scheiben ist Weg des Mittelpunktes, d.h.

$2\pi(a+r)$

II. Volumen eines „Apfels"





Pierre Fermat (1601–1665)

„Vater der modernen Zahlentheorie"

„Großer Fermatscher Satz": Es gibt keine ganzen Zahlen x, y, z und n mit

$$x^n + y^n = z^n$$

wenn $n > 2$.

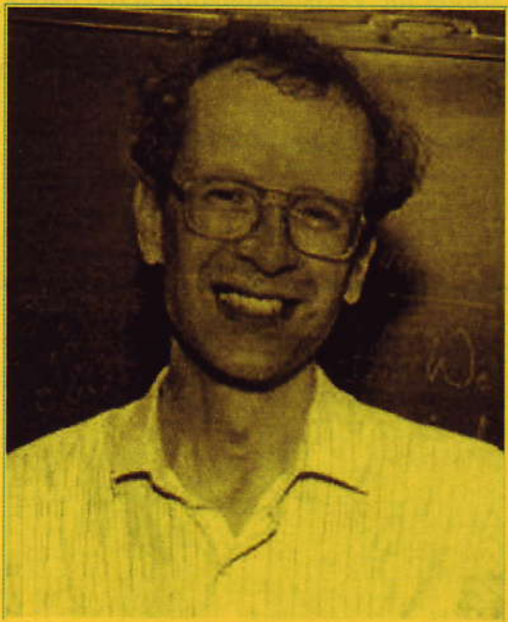
This is taken from a French stamp
You can see a bigger picture of this stamp at this site.

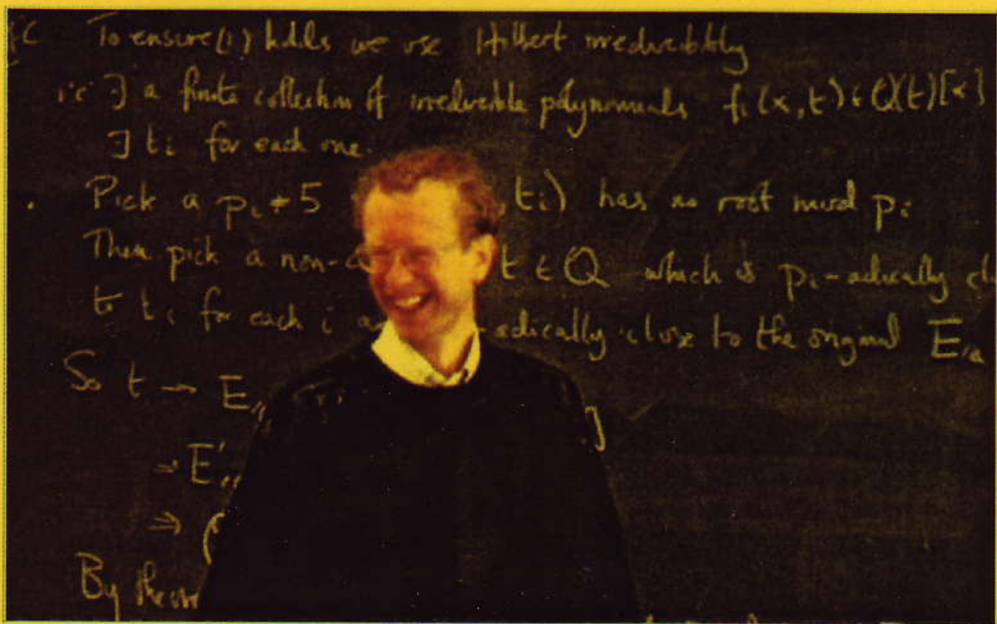
Close this window

Randbemerkung einem Buch:

„Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen."

Andrew Wiles





Close this window

JOC/EFR August 2001

The URL of this page is:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Wiles.html

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

- Jura-Studium in Toulouse
- 1631 Abgeordneter im Parlament von Toulouse

Freizeitbeschäftigung : Mathematik

Lebt ein ruhiges, unspektakuläres und nicht-~~agressives~~ agressives Leben.

Hinterläßt seine Spuren auf jedem Gebiet, das damals bekannt ist.

„Großer" Beitrag : „De Maximis et Minimis"

Kepler hatte bemerkt:

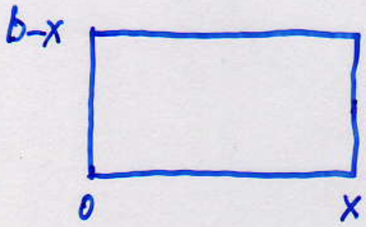
Bei Extrema:

kleine Änderungen ändern den Funktionswert „fast nicht"

Fermat: Teile Strecke der b so in x und $b-x$, daß

$$x(b-x) \stackrel{!}{=} \max$$

$\Leftrightarrow$ Maximiere Inhalt eines Rechteckes mit Umfang



$2(b-x) + 2x = 2b.$

Fermat „stört" x um e („klein"!) :

$$y = f(x) = x(b-x) = bx - x^2$$
$$f(x+e) \qquad = b(x+e) - (x+e)^2$$

Nun muß nach Kepler $f(x+e) \approx f(x)$ gelten; bei F: $f(x+e) \sim f(x)$

$$f(x+e) = b(x+e) - (x+e)^2 \sim bx - x^2 = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad be - 2xe - e^2 \sim 0 \quad \Big| :e$$

$$b - 2x - e \sim 0$$

$$\Rightarrow \quad b \sim 2x + e$$

e „klein" $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = \frac{b}{2}}}$

Heutige Interpretation:

$$f(x+e) \sim f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x+e) - f(x) \sim 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x+e) - f(x)}{e} \sim 0 \quad , \quad e \neq 0$$

Fermat kannte diese „Technik" ca. 1629.

F. wird sofort von Descartes angegriffen! Rückendeckung von Roberval, Pascal (Vater!)

Lagrange, Laplace, Fourier wollten daher auch Fermat als den eigentlichen Erfinder der Differentialrechnung sehen!