Das kann man auch schreiben als

$$AS \cdot MS^2 = AH \cdot OS^2$$

Aber eigentlich sind alles „Scheiben", also

$$AS \cdot (\pi \cdot MS^2) = AH \cdot (\pi \cdot OS^2)$$

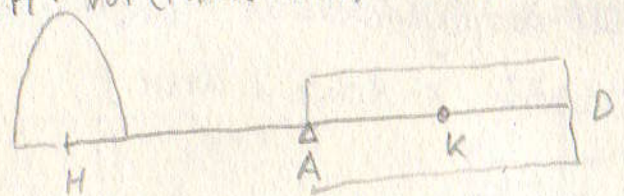
Interpretation: $\uparrow$ $\uparrow$

Der Querschnitt des Zylinders bei S balanziert den Querschnitt des Paraboloiden bei H

Das kann man für jeden Querschnitt machen („Indivisiblen" = (Scheiben mit einer Dim. = 0))

Wenn man jetzt „glaubt", dass die Körper aus den Indivisiblen zusammengesetzt sind, dann hat man

$$AH \cdot \mathrm{Vol}(\text{Paraboloid}) = AK \cdot \mathrm{Vol}(\text{Zylinder})$$



Nun ist $AK = \frac{1}{2} AD$ und $AH = AD$

$\Rightarrow AD \cdot \mathrm{Vol}(\text{Paraboloid}) = \frac{1}{2} AD \cdot \mathrm{Vol}(\text{Zylinder})$

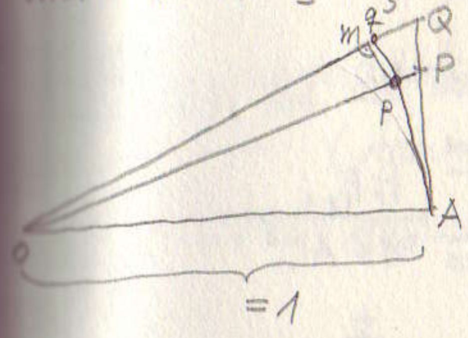
$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\text{Paraboloid}) = \frac{1}{2} \mathrm{Vol}(\text{Zylinder})$

Hindu-Mathematik

Aus der Schrift „Yukti-Bhāsa" ca. 1500 n. Chr.

Herleitung der Reihendarstellung

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots$$



Sei $\widehat{Apq}$ Kreisbogen mit Radius $OA = 1$.
Die Radien Op, Oq treffen die Tangente in A in P und Q. Sei pm das Lot von p auf OQ.

Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{\sin \widehat{QOP}}{\sin \widehat{OQP}}$$

und wegen $\sin \widehat{OQP} = \frac{OA}{OQ} = \frac{1}{OQ}$

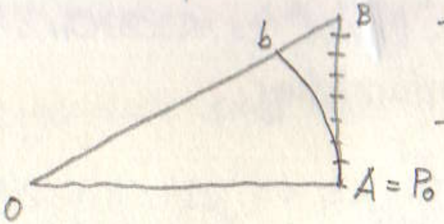
$$\sin \widehat{QOP} = \frac{pm}{Op} = pm$$

folgt $\frac{PQ}{OP} = \frac{pm}{\frac{1}{OQ}} = pm \cdot OQ$ und damit

$$pm = \frac{PQ}{OP \cdot OQ}.$$

Für PQ „klein" ist $pm \doteq \operatorname{arc} pq = \frac{PQ}{OP^2} \overset{\text{Pythagoras}}{=} \frac{PQ}{1+AP^2}$.

Sei $\widehat{BOA} < \frac{\pi}{4}$ und $\tan \widehat{AOB} = t$.



Teile Strecke AB in n äquidistante Teile bei $P_0, P_1, \dots, P_n$

b sei der Schnittpunkt von OB mit dem Kreisbogen. Dann gilt

$$\text{arc } Ab = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{P_r P_{r+1}}{1 + AP_r^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{rt}{n}\right)^2}$$

geom. Reihe

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{t}{n}\left(1 - \left(\frac{rt}{n}\right)^2 + \left(\frac{rt}{n}\right)^4 - + \dots\right)$$

Also:

$$\text{arc} Ab = \lim_{n\to\infty}\left(t \cdot \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} 1 - t^3 \frac{1}{n^3}\sum_{r=0}^{n-1} r^2 + t^5 \frac{1}{n^5}\sum_{r=0}^{n+1} r^4 - + \dots\right)$$

Nun: $\frac{1}{n} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{r=0}^{n-1} r^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)\cdot(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

usw.

Allgemein: $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{r=0}^{n-1} r^p\right) = \frac{1}{p+1} \qquad (*)$$

Damit ergibt sich:

$$\text{arc } Ab = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - + \dots .$$

Besonders bemerkenswert ist dabei die Verwendung von (*)!

Bis ins 17te Jahrhunderte konnte man nur

$\sum r, \sum r^2$ (Archimedes)

$\sum r^3, \sum r^4$ (Arabische Mathematik um 1000 n. Chr.)