also $\dfrac{a(P_1)}{a(P_2)} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} = \dfrac{a(C_1)}{S} \left(= \dfrac{a(C_1)}{\frac{a(C_1)\, r_2^2}{r_1^2}} \right)$

Daraus folgt:

$$\frac{S}{a(P_2)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1,$$

also $S > a(P_2)$ ↯ Widerspruch

Neue Annahme:

$\dfrac{a(C_1)}{a(C_2)} > \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ führt genau so auf einen Widerspruch

(doppeltes reductio ad absurdum !)

Damit bleibt nur noch

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

übrig! ■

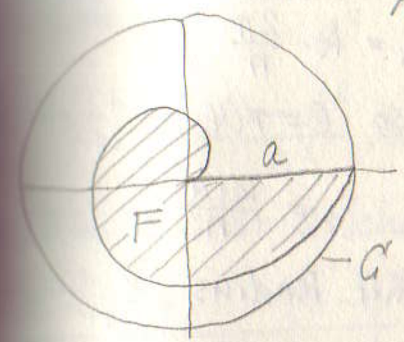
2. Archimedes

„Über Spiralen"

Archimedische Spirale:

$$r = \frac{a}{2\pi}\varphi$$

Wie groß ist die Fläche F?

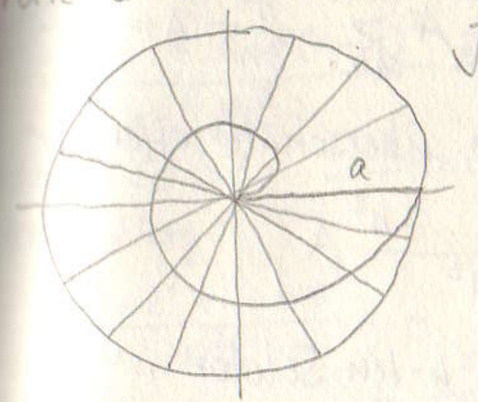


Fläche des äußeren Kreises mit Radius a : A

Fläche eines Kreises mit Radius b : B

Satz 1,3 $\Rightarrow \dfrac{A}{B} = \dfrac{a^2}{b^2}$

Teile C in n Sektoren:



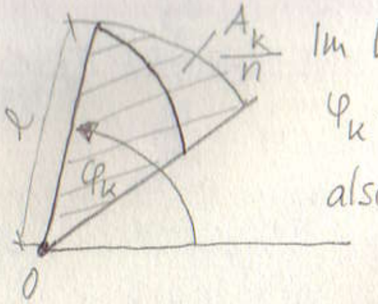
Jeder Sektor hat Fläche $\dfrac{A}{n}$.

Hilfssatz:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

Beweis (modern) Vollständige Induktion. ■

Bild in einem Sektor:



Im k-ten Sektor ist

$$\varphi_k = k \cdot \frac{2\pi}{n},$$

also $\ell = r(\varphi_k) = \frac{a}{2\pi} \cdot k \cdot \frac{2\pi}{n}$

$$= \frac{k \cdot a}{n}$$

$A_k =$ Fläche des Kreises mit Radius $\frac{k \cdot a}{n}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{A_k}{A} = \frac{\left(\frac{ka}{n}\right)^2}{a^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_k = \frac{k^2}{n^2} A \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} A_k = \frac{k^2}{n^3} A$$

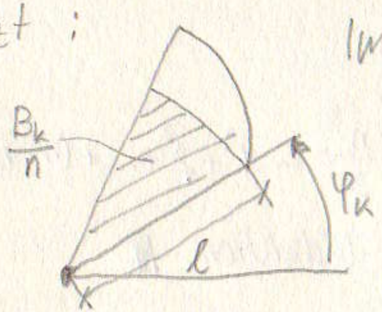
Die Fläche aller solcher Sektoren ist demnach

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} A \underset{\text{satz}}{\overset{\text{Hilfs-}}{>}} \frac{n^3}{3n^3} A = \frac{1}{3} A$$

Die Fläche der Sektoren überschätzt offenbar F:

$$\frac{1}{3} A < \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} A$$

Jetzt:



Im k-ten Sektor ist

$$\varphi_k = (k-1) \frac{2\pi}{n},$$

also $\ell = \frac{a}{2\pi} (k-1) \frac{2\pi}{n}$

$$= \frac{(k-1)a}{n}$$

$B_k =$ Fläche des Kreises mit Radius $\frac{(k-1)a}{n}$

$$\Rightarrow \quad \frac{B_k}{A} = \frac{\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2}{a^2} = \frac{(k-1)^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad B_k = \frac{(k-1)^2}{n^2} A \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} B_k = \frac{(k-1)^2}{n^3} A$$

Die Fläche aller solcher Sektoren ist demnach

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} A \underset{\text{satz}}{\overset{\text{Hilfs-}}{<}} \frac{n^3}{3n^3} A = \frac{1}{3} A$$

Die Fläche dieser Sektoren unterschätzt offenbar F:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} A < F < \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n)^2}{n^3} A$$

und

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} A < \frac{1}{3} A < \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} A$$

Moderner Schluß: Differenz zwischen Über- und Unterschätzung:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} A - \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} A$$

$$= \frac{n^2}{n^3} A = \frac{1}{n} A.$$

Für $n \to \infty$ wird diese Differenz 0

$$\Rightarrow \quad F = \frac{1}{3} A.$$

Nicht so Archimedes:

(i) Annahme: $F > \frac{1}{3}A$

$$\Rightarrow \quad F - \frac{1}{3}A > 0$$

Wähle n so groß, dass

$$F - \frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}A < F - \frac{1}{3}A$$

[Das geht, weil Differenz zw. Über- und Unterschätzung $\frac{1}{n}A$ ist.]

Dann wäre aber $\frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}A > \frac{1}{3}A$

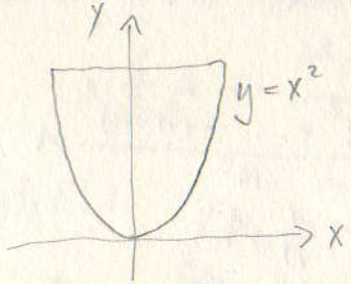
was ein Widerspruch ist!

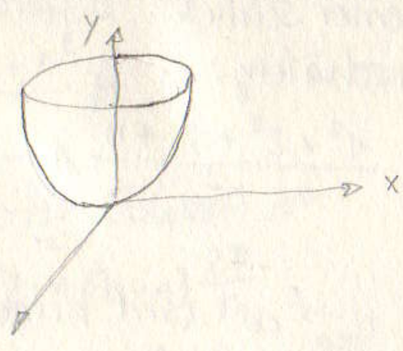
(ii) Annahme: $F < \frac{1}{3}A$

führt analog auf einen Widerspruch

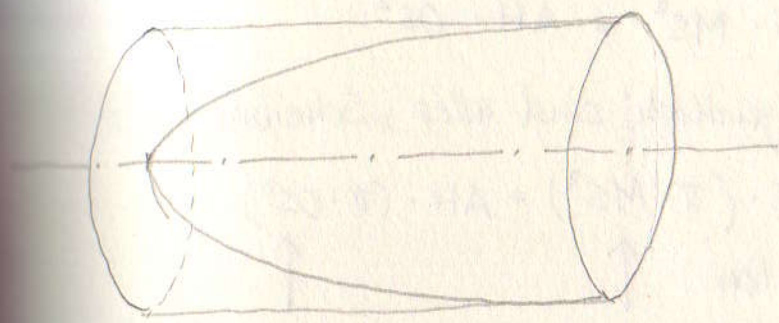
$$\Rightarrow \quad F = \frac{1}{3}A. \quad \blacksquare$$

„Methodenlehre": Volumen eines Rotationsparaboloiden

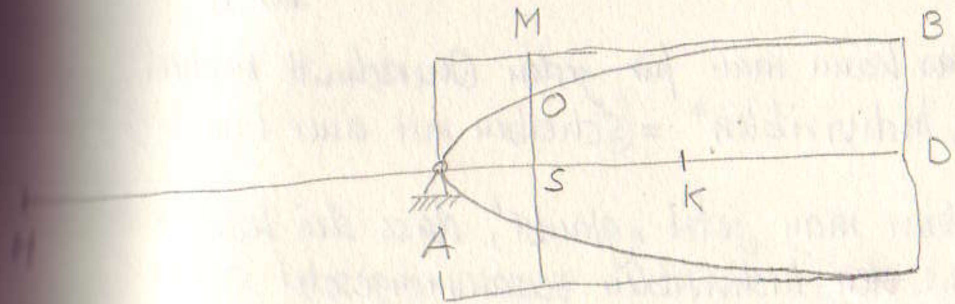




Betrachte Paraboloiden im Zylinder:



und setze alles auf den Hebel:



$AH = AD$

K – Schwerpunkt des Zylinders = Mittelpkt. von AD

[y-Achse ist jetzt AD, x-Achse $\perp$ dazu.]

$$\frac{BD^2}{OS^2} = \frac{AD}{AS},$$

also $\frac{MS^2}{OS^2} = \frac{AD}{AS}$ und daher

$$AS \cdot MS^2 = AD \cdot OS^2$$

Das kann man auch schreiben als

$$AS \cdot MS^2 = AH \cdot OS^2$$

Aber eigentlich sind alles „Scheiben", also

$$AS \cdot (\pi \cdot MS^2) = AH \cdot (\pi \cdot OS^2)$$

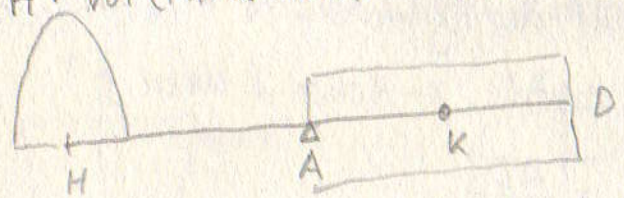
Interpretation:

Der Querschnitt des Zylinders bei S balanciert den Querschnitt des Paraboloiden bei H

Das kann man für jeden Querschnitt machen („Indivisiblen" = (Scheiben mit einer Dim. = 0))

Wenn man jetzt „glaubt", dass die Körper aus den Indivisiblen zusammengesetzt sind, dann hat man

$$AH \cdot \text{Vol}(\text{Paraboloid}) = AK \cdot \text{Vol}(\text{Zylinder})$$

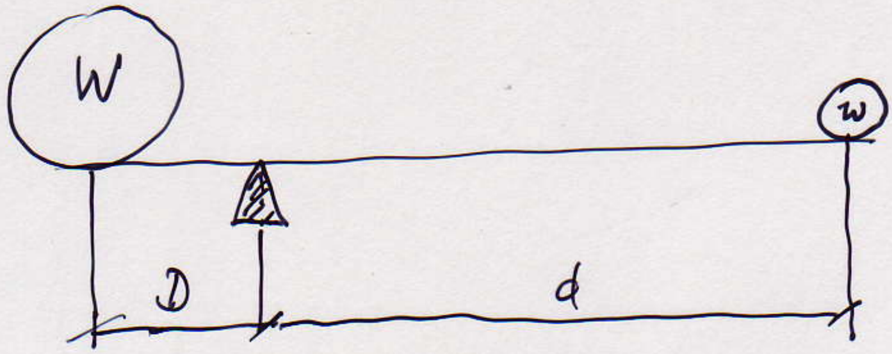


Nun ist $AK = \frac{1}{2} AD$ und $AH = AD$

$$\Rightarrow AD \cdot \text{Vol}(\text{Paraboloid}) = \frac{1}{2} AD \cdot \text{Vol}(\text{Zylinder})$$

$$\Rightarrow \text{Vol}(\text{Paraboloid}) = \frac{1}{2} \text{Vol}(\text{Zylinder})$$

Das Hebelgesetz des Archimedes



Hebel ist im Gleichgewicht $\Leftrightarrow$ $D \cdot W = d \cdot w$

Archimedes' Argumentationskette

Axiom 1: Gleiche Gewichte an gleichen Abständen sind im Gleichgewicht. Gleiche Gewichte an ungleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht und immer wird sich der Hebel auf der Seite des größeren Abstandes senken.

Axiom 2: Sind zwei Gewichte im Gleichgewicht und fügt man auf einer Seite ein Gewicht dazu, dann ist der Hebel nicht mehr im Gleichgewicht. Der Hebel wird sich immer zur Seite des höheren Gewichts senken.

Axiom 3: Sind zwei Gewichte im Gleichgewicht und nimmt man von einem Gewicht etwas weg, dann ist der Hebel nicht mehr im Gleichgewicht. Der Hebel wird sich immer zur Seite des unveränderten (= größeren) Gewichts senken.

Proposition 1: Gewichte, die den Hebel bei gleichen Abständen im Gleichgewicht halten, sind gleich.

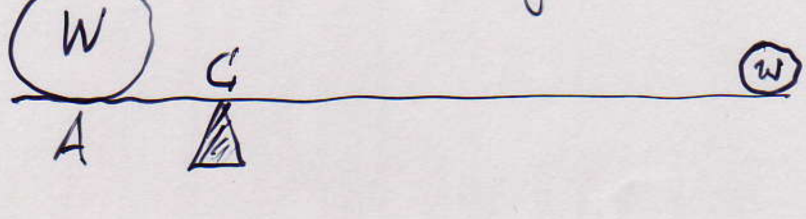
Beweis: Nimm an, die Gewichte seien nicht gleich. Nimm vom größeren Gewicht das Differenzgewicht zum kleineren Gewicht weg. Damit: 2 gleiche Gewichte an 2 gleichen Abständen. Axiom 3 ⇒ Der Hebel ist nicht mehr im Gleichgewicht. ↯ zu Axiom 1 !

Proposition 2: Ungleiche Gewichte an gleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht. Der Hebel senkt sich zur Seite des größeren Gewichts.

Beweis: Nimm vom größeren Gewicht die Gewichtsdifferenz zum kleineren Gewicht weg. Axiom 1 ⇒ Der Hebel ist im Gleichgewicht. Nun lege Gewichtsdifferenz zurück. Axiom 2 ⇒ Hebel nicht im Gleichgewicht und neigt sich zur schwereren Seite.

Proposition 3: Ungleiche Gewichte sind im Gleichgewicht nur an ungleichen Abständen. Das größere Gewicht hat immer einen kleineren Abstand als das kleinere Gewicht.

Beweis: Sei W das schwerere Gewicht am Punkt A, w das leichtere Gewicht bei B, die den Hebel um C im Gleichgewicht halten.



Nimm $W-w$ von W weg. Axiom 3 $\Rightarrow$ Hebel nicht im Gleichgewicht und w senkt sich.
Wann senkt sich w nicht?

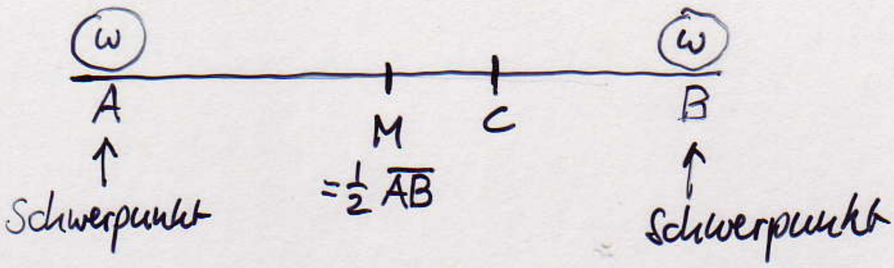
Entweder ist $AC = BC$ oder $AC > BC$

(i) $AC = BC$. Axiom 1 $\Rightarrow$ Hebel im Gleichgewicht.
(ii) $AC > BC$. Axiom 1 $\Rightarrow$ Gewicht in A senkt sich

$\Rightarrow$ Es muß $AC < BC$ gelten.

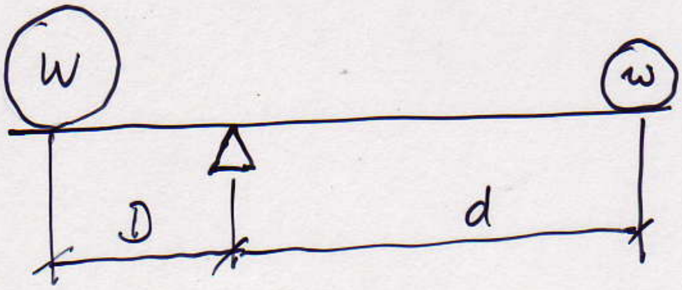
<u>Proposition 4:</u> Haben zwei gleiche Gewichte unterschiedliche Schwerpunkte, dann liegt ihr gemeinsamer Schwerpunkt im Mittelpunkt der Strecke, die die beiden Schwerpunkte verbindet.

<u>Beweis:</u>



Annahme: Hebel ist bei $C \neq M$ im Gleichgewicht.
$\Rightarrow AC \neq CB$. Axiom 1 $\Rightarrow$ Hebel nicht im Gleichgewicht. ↯
Verlege C nach M $\Rightarrow$ Hebel im Gleichgewicht.

<u>Proposition 5</u>: W und w seien kommensurable Gewichte. ($:\Leftrightarrow \frac{W}{w}$ ist rational) an Abständen D und d.

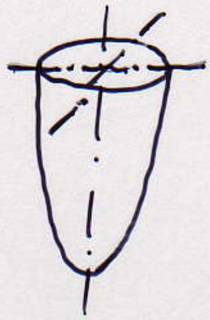


Dann gilt
$$\frac{D}{d} = \frac{\frac{1}{W}}{\frac{1}{w}} = \frac{w}{W}$$

<u>Proposition 6</u> = Prop. 5 für inkommensurable Gewichte.

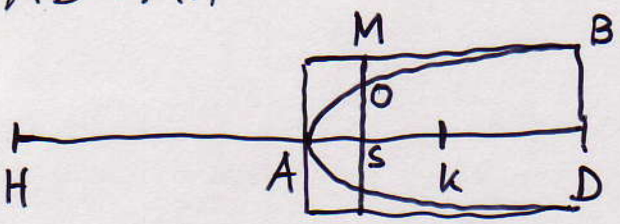
<u>Beispiel</u> für die „mechanische Methode"

Finde das Volumen des durch $y = x^2$ erzeugten Rotations-paraboloids.



<u>Idee</u>: Schreibe Paraboloid in Zylinder ein:

$AD = AH$



K – Schwerpunkt des Zylinders

y-Achse ist HD

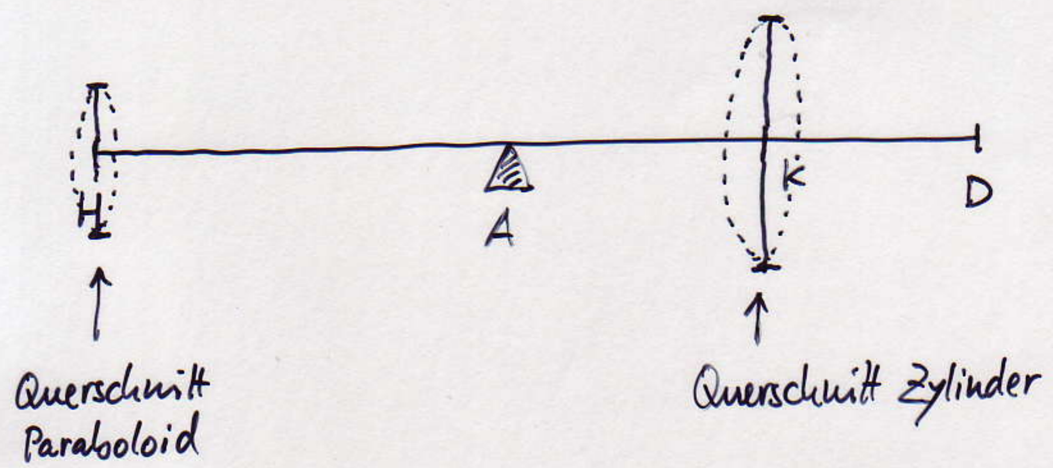
x-Achse ist Senkrechte durch A

$$\frac{BD^2}{OS^2} = \frac{AD}{AS} \Rightarrow \frac{MS^2}{OS^2} = \frac{AD}{AS} \Rightarrow AS \cdot MS^2 = AD \cdot OS^2$$

$$\Rightarrow AS \cdot MS^2 = AH \cdot OS^2 \Rightarrow AS \cdot (\pi MS^2) = AH \cdot (\pi OS^2)$$

$$AS \cdot (\pi MS^2) = AH \cdot (\pi OS^2)$$

$\Rightarrow$ „Der Querschnitt des Zylinders bei S ist im Gleichgewicht mit dem Querschnitt des Paraboloids in H



Man (Archimedes!) denke sich alle Masse im Schwerpunkt vereinigt $\Rightarrow$

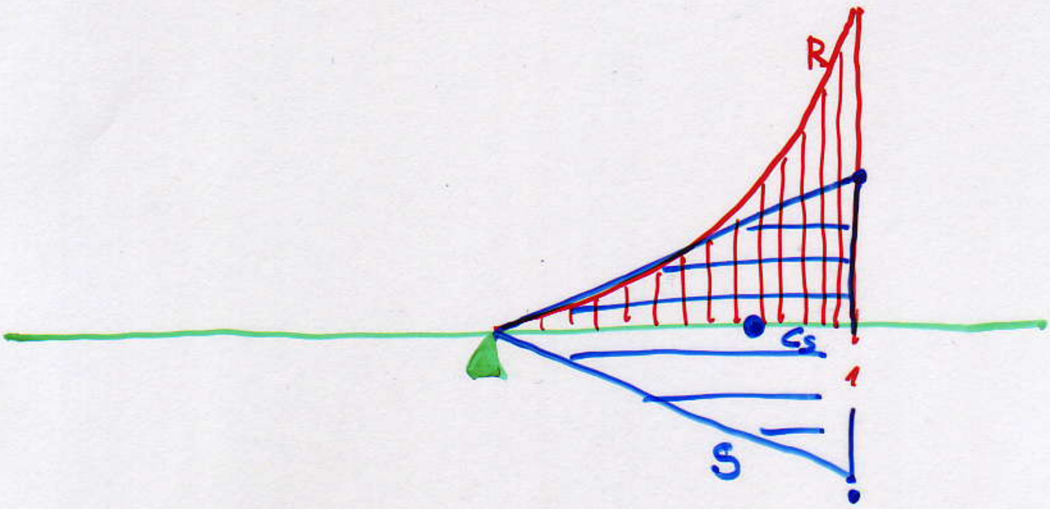
$$\begin{aligned} AH \cdot \mathrm{Vol}(\text{Paraboloid}) &= AK \cdot \mathrm{Vol}(\text{Zylinder}) \\ &= \tfrac{1}{2} AH \cdot \mathrm{Vol}(\text{Zylinder}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Vol}(\text{Paraboloid}) = \tfrac{1}{2} \mathrm{Vol}(\text{Zylinder})$$

Beispiel: R durch $y = x^2$ begrenzt

S Dreieck $(0,0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(1, -\frac{1}{2})$

$a(S) = \frac{1}{2}$, $c_S = (\frac{2}{3}, 0)$



$l' = x$, $l = x^2$

$$\Rightarrow \quad k \cdot l = x \cdot l'$$

$$k \cdot x^2 = x \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = 1}}$$

Damit

$$a(R) \cdot k = a(S) \cdot \bar{x}_S$$

$$a(R) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$