

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. lässt sich nicht darstellen als $\frac{p}{q}$, $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $q \in \{1, 2, \dots\}$

Beweis (indirekt): Nimm an, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p, q teilerfremd.

Dann: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ ist gerade

Hilfssatz: p^2 gerade $\Rightarrow p$ gerade

Beweis (indirekt): Nimm an, p sei ungerade.

$$\begin{aligned} \text{Dann } p = 2k-1 &\Rightarrow p^2 = 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p^2$ ungerade. Widerspruch zur Voraussetz.

$\Rightarrow p$ muss gerade sein. $\blacksquare$

Also ist p gerade, also $p = 2k$.

Einsetzen in $2 = \frac{p^2}{q^2}$ liefert

$$2 = \frac{4k^2}{q^2} \Leftrightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ gerade} \Rightarrow q \text{ gerade}$$

$\swarrow$ Widerspruch zur Teilerfremdheit! $\blacksquare$

4
Eudoxus:

Zwei Verhältnisse $a:b$
und $c:d$

heißen proportional, wenn für je zwei Zahlen m, n gilt:

entweder

$$na > mb \quad \text{und} \quad nc > md$$

oder

$$na = mb \quad \text{und} \quad nc = md$$

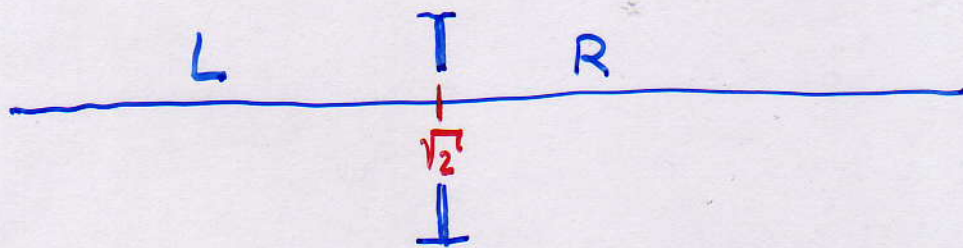
oder

$$na < mb \quad \text{und} \quad nc < md$$

sind a, b inkommensurabel ($a = \sqrt{2}$, $b = 1$); Dann teilt Eudoxus' Definition die rationalen Zahlen in zwei disjunkte (d.h. elementfremde) Mengen:

$$L := \left\{ \frac{m}{n} \mid \frac{m}{n} < \frac{a}{b} \right\}$$

$$R := \left\{ \frac{m}{n} \mid \frac{m}{n} > \frac{a}{b} \right\}$$



Dieser „Schnitt“ definiert sauber eine „neue“ irrationale Zahl!

Über 2000 Jahre später: Richard Dedekind (1831-1916) konstruiert die reellen Zahlen aus den rationalen durch Dedekindsche Schnitte.

Richard Dedekind

6.10.1831 - 12.2.1916



5

Axiom des Eudoxus: (heute bekannt als Archimedisches Axiom)

Zu je zwei Zahlen a, b gibt es eine natürliche Zahl n ($1, 2, 3, 4, \dots$), so daß stets

$$n \cdot a > b$$

gilt.

Bedeutung I: Beweise, dass $a:c = b:c \Rightarrow a=b$

Bedeutung II: Es gibt keine unendlich grosse Zahl (grösste Zahl)
Es gibt keine unendlich kleine Zahl (kleinste positive Zahl)

ω unendlich gross $:\Leftrightarrow a < \omega$ für jede andere Zahl a

ω unendlich klein $:\Leftrightarrow 0 < \omega < a$ für jede andere Zahl a .

Die Eudoxussche Proportionslehre befindet sich im 5.ten Buch der "Elemente" des Euklid.

Die erste Alexandrinische Schule

338 v. Chr. Schlacht von Chaeronea

Philip von Makedonien besiegt die Athener.
Macht Athens für immer gebrochen.

Alexander der Grosse, Sohn Philips, erobert die Welt.
Gründung Alexandrias.

Ptolemäus macht Alexandria zur ägypt. Hauptstadt
und gründet eine Universität und die grosse Bibliothek.

Euklid, geb. ca. 365 v. Chr., wird eingeladen, die math.
Schule Alexandrias zu begründen.

- eingeweihter Jünger der Pythagoräer
- schreibt die „**Elemente**“ zwischen 330 u. 320 v. Chr.
Euklids Elemente bleiben das math. Lehrbuch
(Geometrie) bis ins 19. Jhdt !

Ptolemäus: „**kann man Geometrie nicht einfacher lernen
als durch die „Elemente“ ?**“

Euklid: „**Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie !**“

Junger Schüler: „**Was bekomme ich, wenn ich das lerne ?**“

Euklid (zum Sklaven): „**Gib' ihm ein Geldstück, denn er
muss Profit aus dem machen, was er lernt.**“

Grösster Systematisierer seiner Zeit.

Euklid
(Eukleidos von Alexandria)
ca. 300 v. Chr

