## Die pythagoräische Schule

Pythagoras (580? – 500? v. Chr.) aus Samos.

Besucht Thales, der ihm das Studium in Ägypten empfiehlt.

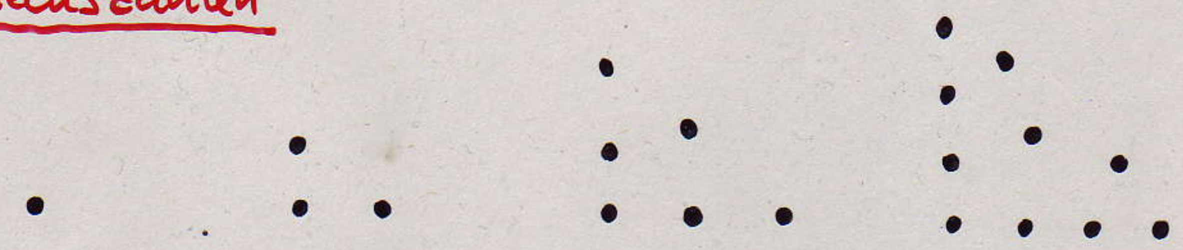
Längerer Aufenthalt in Ägypten (vermutlich auch Babylon).

Gründung eines „Geheimbundes" in Süditalien.

Leitspruch: „Alles ist Zahl"

Mystische Verbindung von Geometrie und Arithmetik („Zahl und Form")

### Dreieckszahlen



#1 #2 #3 #4

$1 = 1$ $1+2 = 3$ $1+2+3 = 6$ $1+2+3+4 = 10$

$$1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n = ?$$

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) beweist:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Pythagoras
† ca. 500 v. Chr.

An einem Schultag des Jahres 1785 ....

Lehrer Büttner möchte in Ruhe Zeitung lesen und lässt seine Schüler die Zahlen 1, 2, ..., 100 addieren.

Der kleine Carl Friedrich liefert nach wenigen Minuten die richtige Lösung!

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

101

101

101

Es gibt 50 Paare mit Summe 101:

$$50 \cdot 101 = 5050$$

$$\frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (101) = 50 \cdot 101$$

Geht das auch für ungerades $n$? Ja!

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 + 101$$

102

102

102

Es gibt 50 Paare mit Summe 102 und die Zahl 51 bleibt übrig:

$$50 \cdot 102 + 51 = 5151$$

$$\frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot (102) = 5151$$

Carl Friedrich Gauß
30.4.1777 – 23.2.1855

Mit den Pythagoräern hält die „Zahlenkunde" Einzug in die Geometrie.

Plato kauft Werke des Pythagoräers Philolaus und war eng mit Archytas befreundet.

→ Die späten Pythagoräer beeinflussen die Wissenschaften in Athen massgeblich!

Die sophistische Schule

Athen steigt nach dem Sieg über Xerxes bei Salamis 480 v. Chr. zum Weltzentrum auf.

→ Die Bedeutung von Lehrern wird erkannt

Lehrer: Sophisten (weise Männer)

Im Gegensatz zu Pythagoräern nehmen Sie Geld für Ihre Lehrtätigkeit.

Pythagoräer: Keine Beschäftigung mit dem Kreis

Sophisten: Drei berühmte Probleme:

(i) Dreiteilung des Winkels

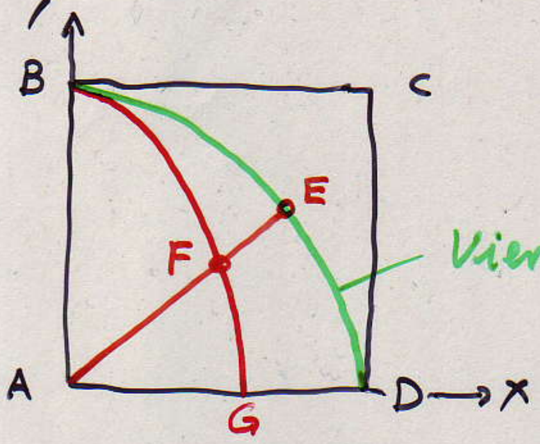
(ii) Verdopplung des Würfels

(iii) Quadratur des Kreises

(i) Dreiteilung des Winkels

Hippias von Elis (ca. 460 v. Chr. – ? )
scheitert an der Konstruktion mit Zirkel und Lineal
und verwendet schwerere Geschütze!

Er erfindet eine transzendente Kurve, die Quadratrix.




B läuft auf Kreis bis D
gleichzeitig bewegt sich BC gleichförmig auf AD zu
Der Schnitt von AB mit BC definiert die Quadratrix.

$$\Rightarrow \quad y = x \cdot \cot \frac{\pi x}{2r}$$

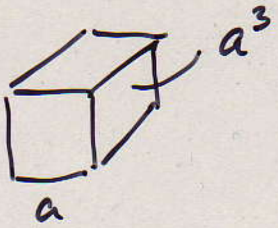
Hippias kann damit Winkel n-teilen!

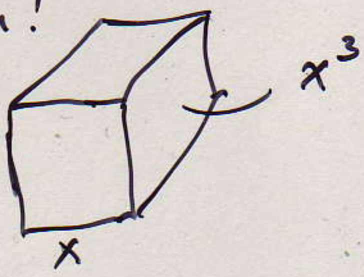
(ii) Verdopplung des Würfels

Delianer litten an der Pest. Orakel: Verdoppelt einen kubischen Altar!
Delianer bauten einen Kubus mit doppelter Kantenlänge, was nicht half!
Platon wurde konsultiert!

Beiträge durch Hippokrates von Chios (ca. 430 v. Chr.)

Hippokrates reduziert das Problem auf ein Problem von Verhältnissen von Strecken!




wenn $x^3 = 2a^3$ sein soll, dann müssen drei Strecken $a, x, y$ im Verhältnis

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

stehen.

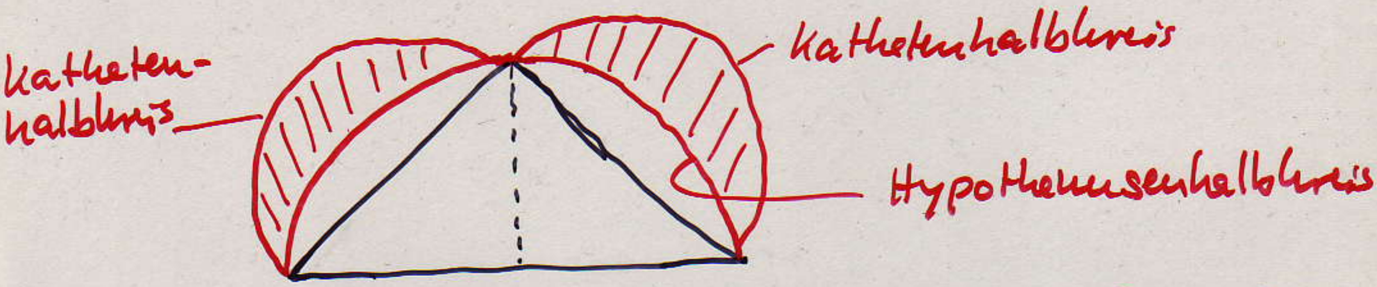
Dann ist nämlich

$$x^2 = ay$$
$$y^2 = 2ax$$
$$x^4 = a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 2a^3x \Leftrightarrow \underline{\underline{x^3 = 2a^3}}$$

Scheitert an der Konstruktion der Strecken mit Zirkel und Lineal.

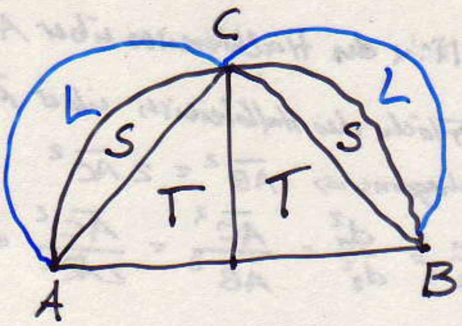
Hippokrates ist berühmt (und in früheren Zeiten in Schulen gefürchtet) durch seine Möndchensätze




Die Fläch der Möndchen = Fläche des Dreiecks

Früheste Lösung einer Quadraturaufgabe!

# Beweis des Möndchensatzes




$$L + S =: C_1$$

$$2S + 2T =: C_2$$

$C_1$ = Fläche des Halbkreises über $\overline{AC}$

$C_2$ = Fläche des Halbkreises über $\overline{AB}$

Pythagoras: $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AC}^2$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}^2 \cdot \frac{\pi}{4}}{\underbrace{\frac{1}{2}\overline{AB}^2 \cdot \frac{\pi}{4}}_{A_{\odot} := d^2 \frac{\pi}{4}}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{2\,\overline{AC}^2} = \frac{1}{2}$$

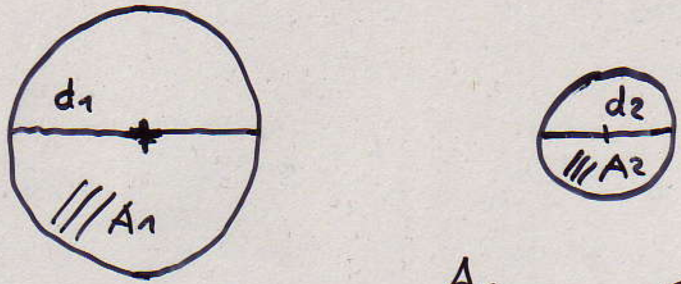
$$\Rightarrow \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{L+S}{2(S+T)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2(S+T) = 2(L+S) = 2C_1$$

$$S + T = L + S \quad \Leftrightarrow \quad T = L. \qquad \blacksquare$$

Hippokrates glaubt: Quadratur der Möndchen ermöglicht <u>Quadratur des Kreises</u>

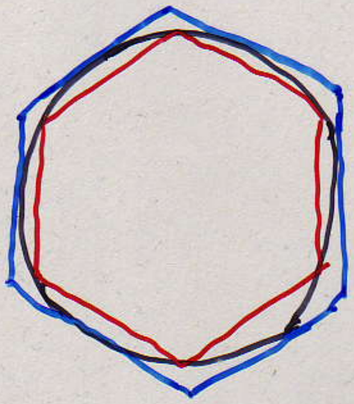
Er „beweist":




$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

durch <u>Exhaustion</u> und <u>Kompression</u>

Kreise werden durch reguläre, ähnliche Polygone (gleiche Seiten, gleiche Winkel, gleiche Eckpunktzahlen) von innen und aussen angenähert.



Er zeigt:

$$A^{Polygon}_{1,innen} : A^{Polygon}_{2,innen} = r_1^2 : r_2^2$$

für <u>jedes</u> Polygon.

Dann folgert er, dass damit dasselbe auch im Grenzwert (Eckenanzahl $\rightarrow \infty$) gilt.