Beweis: (Schritt 1)

Wähle $N \geq 1$, so daß

$$(N+1)\,\varepsilon > M_0 .$$

Weil $\varepsilon > 0$ folgt $N\varepsilon \geq \varepsilon$ und $N\varepsilon + \varepsilon \geq 2\varepsilon$,
also $\varepsilon \leq \frac{(N+1)\varepsilon}{2}$.

Daher: $N\varepsilon > M_0 - \varepsilon \geq M_0 - \frac{(N+1)\varepsilon}{2} \quad \Big|:2$

$$\Rightarrow \frac{N\varepsilon}{2} \geq \frac{M_0}{2} - \frac{(N+1)\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}N\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{M_0}{2}, \quad \text{aber } N\varepsilon \geq \varepsilon, \text{ also}$$

$$N\varepsilon \geq \frac{3}{4}N\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{M_0}{2},$$

d.h. $N\varepsilon \geq \frac{1}{2}M_0 > M_1$.

Jetzt ist $N\varepsilon > M_1$. (Schritt 2)

Weil $(N-1)\,\varepsilon \geq \varepsilon$ gilt $N\varepsilon \geq 2\varepsilon$ oder

$$\varepsilon \leq \frac{N\varepsilon}{2}.$$

Daher: $(N-1)\,\varepsilon > M_1 - \varepsilon \geq M_1 - \frac{N\varepsilon}{2} \quad \Big|:2$

$$\Rightarrow \frac{(N-1)\varepsilon}{2} \geq \frac{M_1}{2} - \frac{N\varepsilon}{4} = \frac{M_1}{2} - \frac{(N-1)\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(N-1)\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{M_1}{2}, \quad \text{aber } (N-1)\,\varepsilon \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow (N-1)\,\varepsilon \geq \frac{1}{2}M_1 > M_2$$

usw. bis schließlich in Schritt N:

$$\varepsilon > M_n .$$

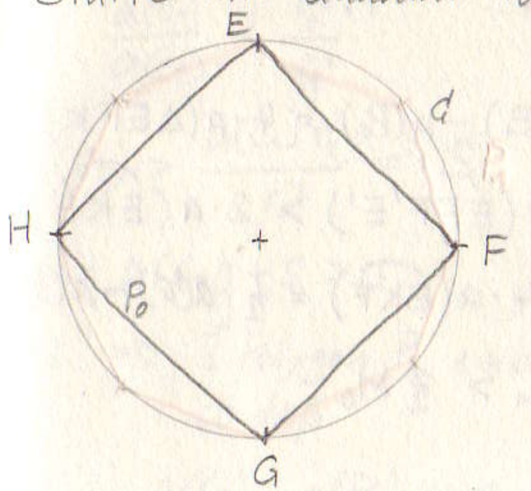
Anwendungen des Eudoxosschen Prinzips

Satz 1.2 Gegeben ein Kreis C mit Fläche $a(C)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein einbeschriebenes reguläres Polygon P, so daß

$$a(C) - a(P) < \varepsilon .$$

[Ausschöpfung (Exhaustion) von innen].

Beweis: Starte mit Quadrat $P_0 = EFGH$



und schreibe $M_0 := a(C) - a(P_0)$. Seitenverdopplung ergibt ein reguläres Oktogon P_1. Weitere Seitenverdopplung ergibt schließlich Folge $P_0, P_1, P_2, \dots P_n, \dots$, wobei P_n genau 2^{n+2} Seiten hat. Mit

$$M_n := a(C) - a(P_n)$$

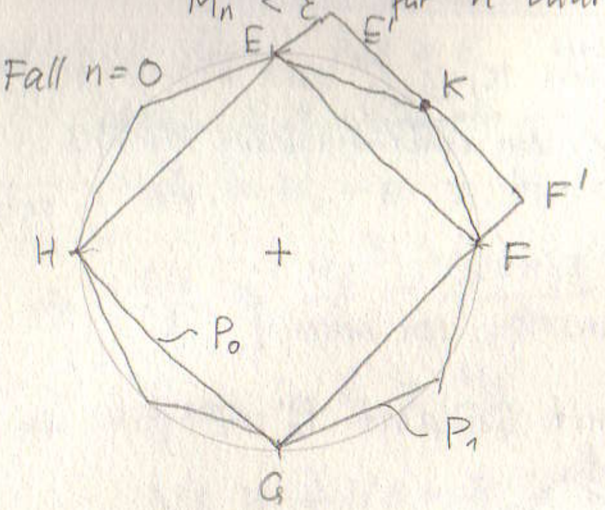
Zeigen wir:

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} M_n . \quad (\Leftrightarrow M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n)$$

Dann folgt nach dem Eudoxosschen Prinzip (Satz 1.1):

$$M_n < \varepsilon \text{ für } n \text{ hinreichend groß.}$$

1. Fall $n=0$



$$M_0 - M_1 = a(P_1) - a(P_0) = 4 \cdot a(\Delta EFK)$$
$$= 2 \cdot a(EFF'E') > 2 \cdot a(\widehat{EKF})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a(\widehat{EKF}) = \frac{1}{2}\left[a(C) - a(P_0)\right]$$

Also: $M_0 - M_1 > \frac{1}{2} M_0$

2. $n > 0$

Ganz analog erhält man

$$M_n - M_{n+1} = a(P_{n+1}) - a(P_n) > \frac{1}{2}\left[a(C) - a(P_n)\right] = \frac{1}{2} M_n ,$$

weil $a(C) - a(P_n)$ die Summe der Flächen der 2^{n+1} kreisförmigen Segmenten ist, die von den Ecken von P_n abgeschnitten werden. ∎

Satz 1.3 (Euklid XII.2)

Sind C_1 und C_2 Kreise mit Radien r_1 und r_2, dann gilt

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} .$$

Beweis: Typisches Beispiel für eine typisch griechische Beweismethode: „doppeltes reductio in absurdum".

Es gilt entweder

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2} .$$

Annahme 1: $\dfrac{a(C_1)}{a(C_2)} < \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

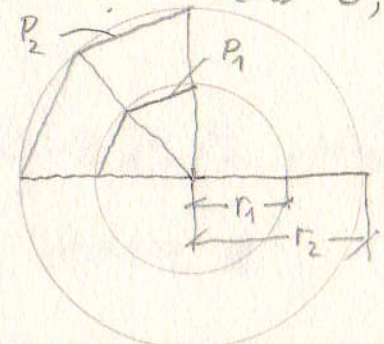
$$\Rightarrow \quad a(C_2) > \frac{a(C_1)\, r_2^2}{r_1^2} =: S$$

Sei $\varepsilon := a(C_2) - S > 0$.

Satz 1.2 $\Rightarrow$ $\exists$ Polygon P_2 einbeschrieben in C_2, so daß

$$a(C_2) - a(P_2) < \varepsilon = a(C_2) - S,$$

also $a(P_2) > S$.



Es gilt:

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{(Strahlensatz)},$$

also $\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{a(C_1)}{S} \cdot \left(= \frac{a(C_1)}{\frac{a(C_1)\, r_2^2}{r_1^2}} \right)$

Daraus folgt:

$$\frac{S}{a(P_2)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1,$$

also $S > a(P_2)$ ↯ Widerspruch

Neue Annahme:

$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ führt genau so auf einen Widerspruch

(doppeltes reductio ad absurdum !)

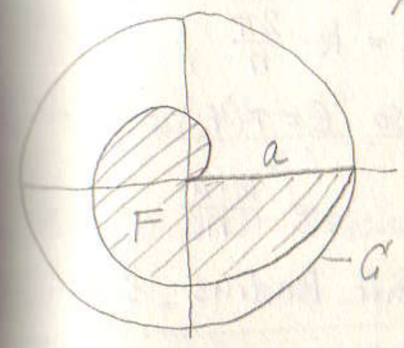
Damit bleibt nur noch

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

übrig! $\blacksquare$

2. Archimedes

„Über Spiralen"



Archimedische Spirale:

$$r = \frac{a}{2\pi}\varphi$$

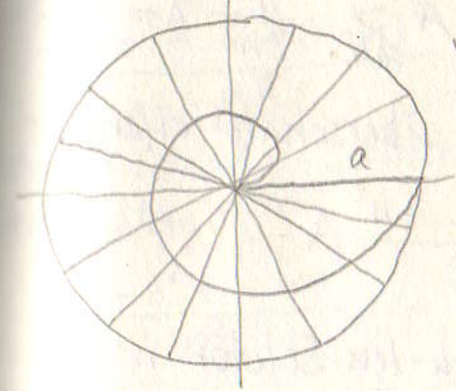
Wie groß ist die Fläche F?

Fläche des äußeren Kreises mit Radius a: A

Fläche eines Kreises mit Radius b: B

Satz 1,3 $\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2}$

Teile C in n Sektoren:



Jeder Sektor hat Fläche $\frac{A}{n}$.

Hilfssatz:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

Beweis (modern) Vollständige Induktion. $\blacksquare$