Euklid: „Die Elemente“ (ca. 300 v.Chr.)
V. Buch (Proportionelehre des Eudoxos)

Definitionen

4. Daß sie [zwei Größen] ein **Verhältnis zueinander haben**, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.

[Das ist das heute sogenannte „Archimedische Axiom“:

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \cdot \varepsilon > N$$

]

5. Man sagt, daß Größen **in demselben Verhältnis stehen**, die erste zur zweiten, wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.

[Das bedeutet:

$$a : b = c : d \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ gilt}$$

$$\text{entweder } n \cdot a > m \cdot b \text{ und } n \cdot c > m \cdot d$$

$$\text{oder } n \cdot a = m \cdot b \text{ und } n \cdot c = m \cdot d$$

$$\text{oder } n \cdot a < m \cdot b \text{ und } n \cdot c < m \cdot d$$

Damit hat Eudoxos bereits eine Konstruktionsvorschrift für irrationale Zahlen gegeben, die im 19ten Jahrhundert von Richard Dedekind als *Dedekindscher Schnitt* verwendet wurde.]

Euklid: „Die Elemente“
X. Buch

§1 (L. 1)

Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.

Geschichte der Analysis

Was ist „Analysis"? $\longrightarrow$ Mathematik „unendlich kleiner" Größen

Beginn der Analysis $\approx$ Entdeckung der irrationalen Zahlen vor ca. 2500 Jahren in Griechenland

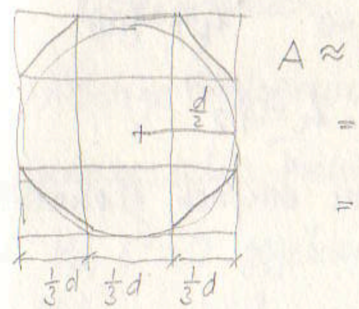
1. Die Anfänge

Ägypten: Papyrus Rhind des Schreibers Ahmes, kopiert ca. 1650 v. Chr. Original ca. 2000 – 1800 v. Chr.

Fläche eines Kreises mit Durchmesser d:

$$A_{Äg} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Idee:



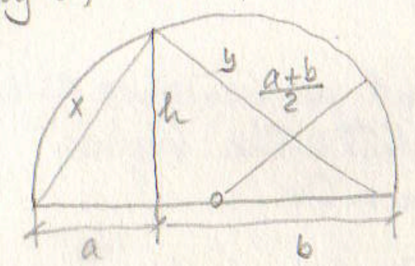
$$A \approx 5\cdot\left(\tfrac{1}{3}d\right)^2 + 4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{3}d\right)^2\right)$$
$$= \frac{5}{9}d^2 + \frac{4}{18}d^2 = \frac{7}{9}d^2$$
$$= \frac{63}{81}d^2 \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Wechsel zur Quadratzahl

Wegen $A = \frac{d^2\pi}{4}$ ist $\pi_{Äg} = \frac{4}{d^2}A_{Äg} = \frac{4\cdot 64}{81} \approx 3.1605$

Babylonien: Folien

Griechenland: Pythagoras ca. 500 v. Chr.
„Alles ist Zahl"; „Zahl" = natürliche Zahl.
Verhältnisse von Strecken (Flächen) kommensurabel,
d.h. rational („zusammen messbar").
Existenz inkommensurabler (irrationaler) Größen
geleugnet, aber:



Pythagoras:
$y^2 = b^2 + h^2$
$x^2 = a^2 + h^2$
$(a+b)^2 = x^2 + y^2$

Einsetzen: $(a+b)^2 = b^2 + h^2 + a^2 + h^2$
$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2h^2 + b^2$
$\Rightarrow h^2 = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab}$

Wähle $a = 1$, $b = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$
$\Rightarrow$ Irrationale Größe kann einfach geometrisch konstruiert werden!
[Weiß jeder, daß $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$?]

Euklid von Alexandrien (ca. 325 v. Chr. – ca. 265 v. Chr.)
schreibt berühmtes Werk „Die Elemente" ca. 300 v. Chr.
Enthält (fast) Theorie irrationaler Zahlen! → Eudoxos
Folie

„Archimedisches Axiom" nach Buch V Def. 4:
$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \varepsilon > N$$
[alternativ:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$]

Fundament der reellen Analysis!
$\Rightarrow$ es gibt keine kleinste positive reelle Zahl!
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ kleinste positive Zahl. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$, also ist $\frac{1}{n}$ kleiner als die kleinste positive Zahl, Widerspruch!

Enorm wichtige Folgerung:
Satz 1.1 (Eudoxossches Prinzip) [Euklid Buch X, §1 (L.1) Folie]
Es seien $M_0, \varepsilon > 0$ gegeben und eine Folge positiver Zahlen $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit
$$M_1 < \tfrac{1}{2} M_0$$
$$M_2 < \tfrac{1}{2} M_1$$
$$\vdots$$
Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $M_n < \varepsilon$.

Beweis: (Schritt 1)

Wähle $N \geq 1$, so daß

$$(N+1)\varepsilon > M_0 .$$

Weil $\varepsilon > 0$ folgt $N\varepsilon \geq \varepsilon$ und $N\varepsilon + \varepsilon \geq 2\varepsilon$, also $\varepsilon \leq \frac{(N+1)\varepsilon}{2}$.

Daher: $N\varepsilon > M_0 - \varepsilon \geq M_0 - \frac{(N+1)\varepsilon}{2} \quad \Big| :2$

$$\Rightarrow \frac{N\varepsilon}{2} \geq \frac{M_0}{2} - \frac{(N+1)\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}N\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{M_0}{2}, \text{ aber } N\varepsilon \geq \varepsilon, \text{ also}$$

$$N\varepsilon \geq \frac{3}{4}N\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{M_0}{2},$$

d.h. $N\varepsilon \geq \frac{1}{2}M_0 > M_1$.

Jetzt ist $N\varepsilon > M_1$. (Schritt 2)

Weil $(N-1)\varepsilon \geq \varepsilon$ gilt $N\varepsilon \geq 2\varepsilon$ oder

$$\varepsilon \leq \frac{N\varepsilon}{2}.$$

Daher: $(N-1)\varepsilon > M_1 - \varepsilon \geq M_1 - \frac{N\varepsilon}{2} \quad \Big| :2$

$$\Rightarrow \frac{(N-1)\varepsilon}{2} \geq \frac{M_1}{2} - \frac{N\varepsilon}{4} = \frac{M_1}{2} - \frac{(N-1)\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(N-1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{M_1}{2}, \text{ aber } (N-1)\varepsilon \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow (N-1)\varepsilon \geq \frac{1}{2}M_1 > M_2$$

usw. bis schließlich in Schritt N:

$$\varepsilon > M_n .$$ ▨

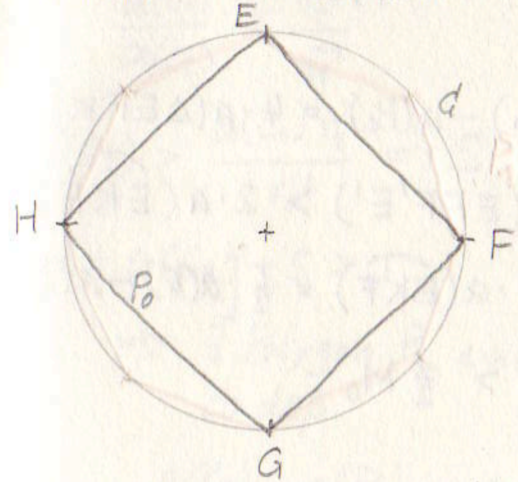
Anwendungen des Eudoxosschen Prinzips

Satz 1.2 Gegeben ein Kreis C mit Fläche $a(C)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein einbeschriebenes reguläres Polygon P, so daß

$$a(C) - a(P) < \varepsilon .$$

[Ausschöpfung (Exhaustion) von innen].

Beweis: Starte mit Quadrat $P_0 = EFGH$



und schreibe $M_0 := a(C) - a(P_0)$. Seitenverdopplung ergibt ein reguläres Oktogon P_1. Weitere Seitenverdopplung ergibt schließlich Folge $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$, wobei P_n genau 2^{n+2} Seiten hat. Mit

$$M_n := a(C) - a(P_n)$$