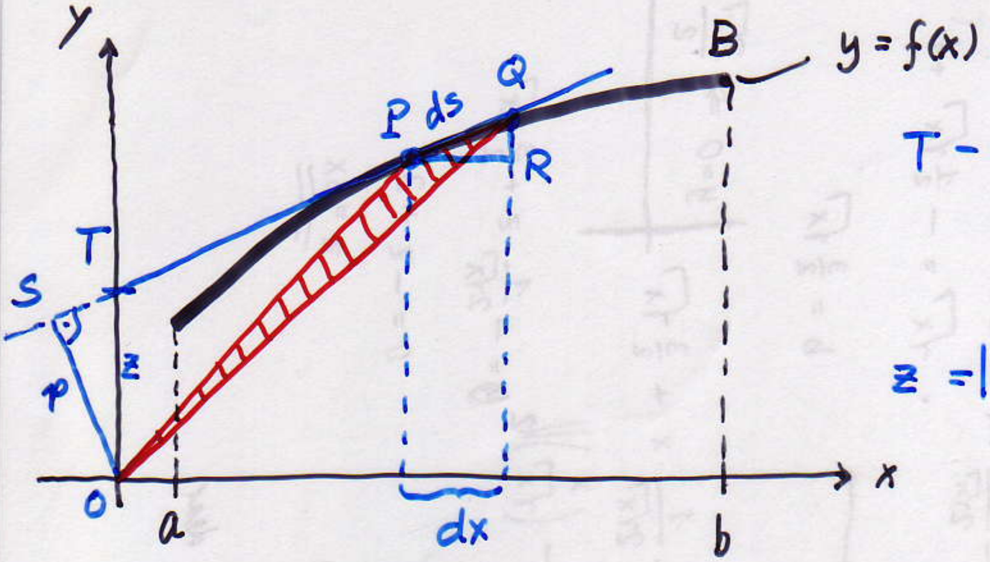
Ende 1673 / Anfang 1674: Leibniz findet das

Transmutationstheorem



T – Schnittpkt. der Tangenten im Punkt P mit der x-Achse.

$z = |OT|$

Gleichung der Tangente: $y = mx + b$

$$y = \frac{dy}{dx} \cdot x + b \iff b = y - x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow z = y - x \cdot \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

$\triangle OST$ ist zum char. Dreieck PQR ähnlich, d.h.

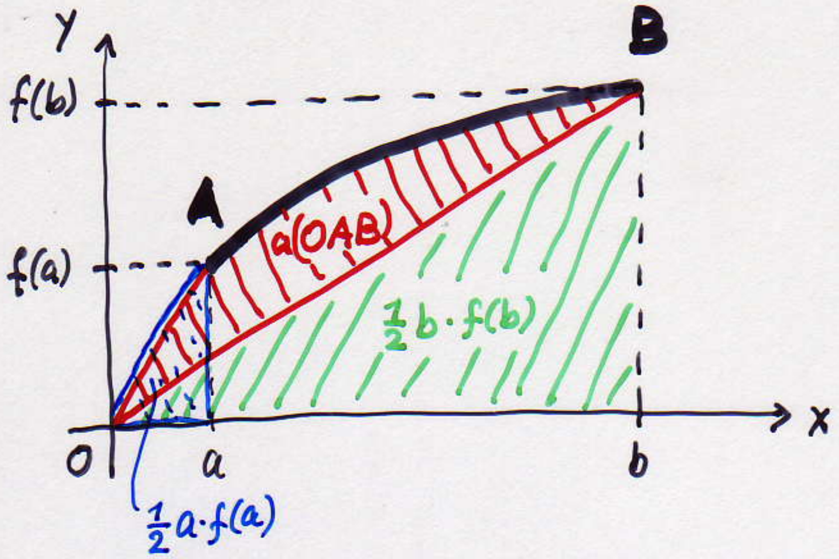
$$\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Fläche des infinitesimalen Δs OPQ:

$$a(OPQ) := \frac{1}{2} \underbrace{p \cdot ds}_{\text{Seite} \times \text{Höhe}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2} z \cdot dx$$

Sektor OAB entsteht aus Summation der infinitesimalen Δe:

$$a(OAB) = \frac{1}{2} \int_a^b z \, dx$$



Offenbar gilt:

$$\int_a^b y\,dx = \underbrace{\tfrac{1}{2} b\cdot f(b) - \tfrac{1}{2} a\cdot f(a)}_{=\frac{1}{2}\left[xy\right]_a^b} + a(OAB)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[xy\right]_a^b + \tfrac{1}{2}\int_a^b z\,dx$$

Das ist das berühmte <u>Transmutationstheorem</u>:

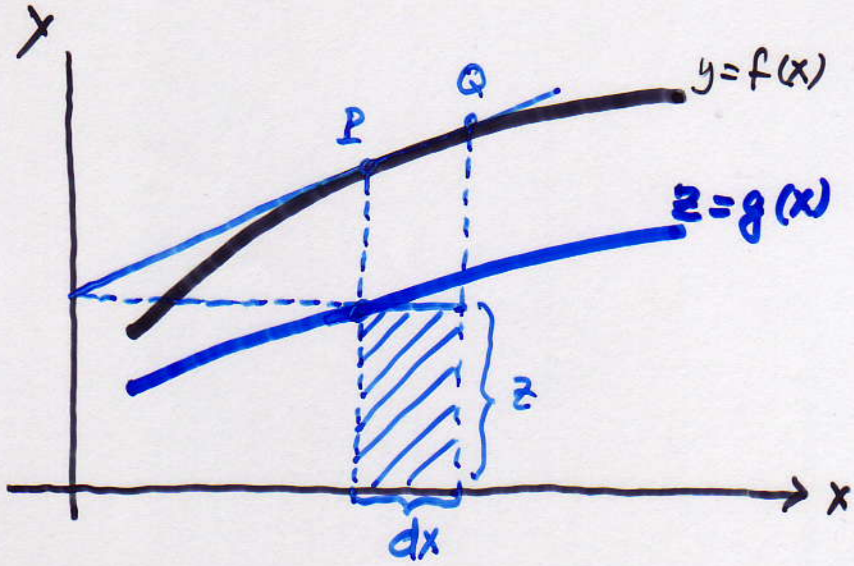
$$\boxed{\int_a^b y\,dx = \tfrac{1}{2}\left[xy\right]_a^b + \tfrac{1}{2}\int_a^b z\,dx}$$

„Fläche" wird in Verbindung gebracht mit „Tangente"

Setzt man (1) für z ein, so folgt

$$\int_a^b y\,dx = \left[xy\right]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} x\,dy$$, d.h. die Formel für die partielle Integration!

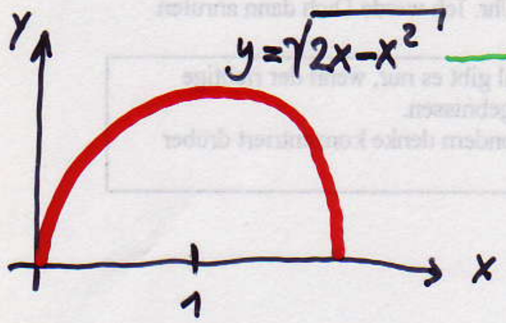
Geometrisch führt man mit $z = g(x)$ eine neue Funktion ein, die man Quadratix nennt.



$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\left[xy\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b z\,dx$$

Mit Hilfe der Quadratix kann das „Quadraturproblem", d.h. die Flächenberechnung, gelöst werden!

Beispiel zur Transmutation :



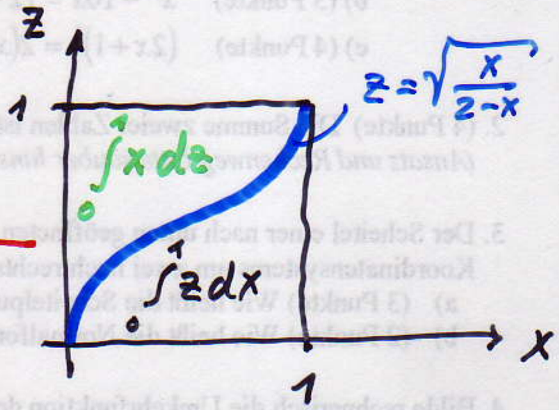
Weil $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{y}$

ist (1): $z = y - x\frac{dy}{dx} = y - x\frac{1-x}{y}$

$= \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ bzw. $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y\,dx \overset{\text{Transmutation}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(\left[x\cdot\sqrt{2x-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 z\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \underbrace{\int_0^1 z\,dx}_{=1-\int_0^1 x\,dz}\right)$$



$$= \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \int_0^1 x\,dz\right)\right)$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\,dz$$

geometrische Reihe $= 1 - \int_0^1 z^2\left(1 - z^2 + z^4 - + \ldots\right)dz$

gliedweise Integration $= 1 - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - + \ldots\right)\Big|_0^1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$$

„Numero deus impari gaudet"

Aus einem Brief an Newton.

My method is but a corollary of a general theory of transformations, by the help of which any given figure whatever, by whatever equation it may be accurately stated, is reduced to another analytically equivalent figure . . . Furthermore, the general method of transformations itself seems to me proper to be counted among the most powerful methods of analysis, for not merely does it serve for infinite series and approximations, but also for geometrical solutions and endless other things that are scarcely manageable otherwise · · · The basis of the transformation is this: that a given figure, with innumerable lines [ordinates] drawn in any way (provided they are drawn according to some rule or law), may be resolved into parts, and that the parts—or others equal to them—when reassembled in another position or another form compose another figure, equivalent to the former or of the same area even if the shape is quite different; whence in many ways the quadratures can be attained · · · These steps are such that they occur at once to anyone who proceeds methodically under the guidance of Nature herself; and they contain the true method of indivisibles as most generally conceived and, as far as I know, not hitherto expounded with sufficient generality. For not merely parallel and convergent straight lines, but any other lines also, straight or curved, that are constructed by a definite law can be applied to the resolution [of the original figure into parts that are to be reassembled to form another figure]; but he who has grasped the universality of the method will judge how great and how abstruse are the results that can thence be obtained: For it is certain that all squarings hitherto known, whether absolute or hypothetical, are but limited specimens of this.

Bemerkungen zur Leibnizschen Notation

Leibniz sucht im Rahmen seiner philosophischen und metaphysischen Studien nach einer „umfassenden Zeichenkunst", der

characteristica universalis

„... wie wichtig angemessene Zeichensysteme für das menschliche Denken sind."

Auf der char. univ. setzt die **ars inveniendi** auf, die „Kunst der Herleitung" („Erfindungskunst").

„Ich habe erkannt, daß die wahre Metaphysik sich kaum von der wahren Logik, d.h. der Erfindungskunst insgesamt, unterscheidet."

$\Rightarrow$ L. sucht auch in Mathe „geniale" Bezeichnungen!

vor 1675: $\quad l$ für infinitesimale Differenzen (dy)

omnia für die Summe infinit. Größen ($\int$)

$$\frac{1}{2}y^2 = \int y\,dy \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\overline{\text{omn.}\,l}^{\,2}}{2} = \text{omn.}\,\overline{\overline{\text{omn.}\,l}\,\frac{l}{a}}$$

$\overline{}$ ist Klammersetzung!

$a = 1$ aus Dimensionsgründen

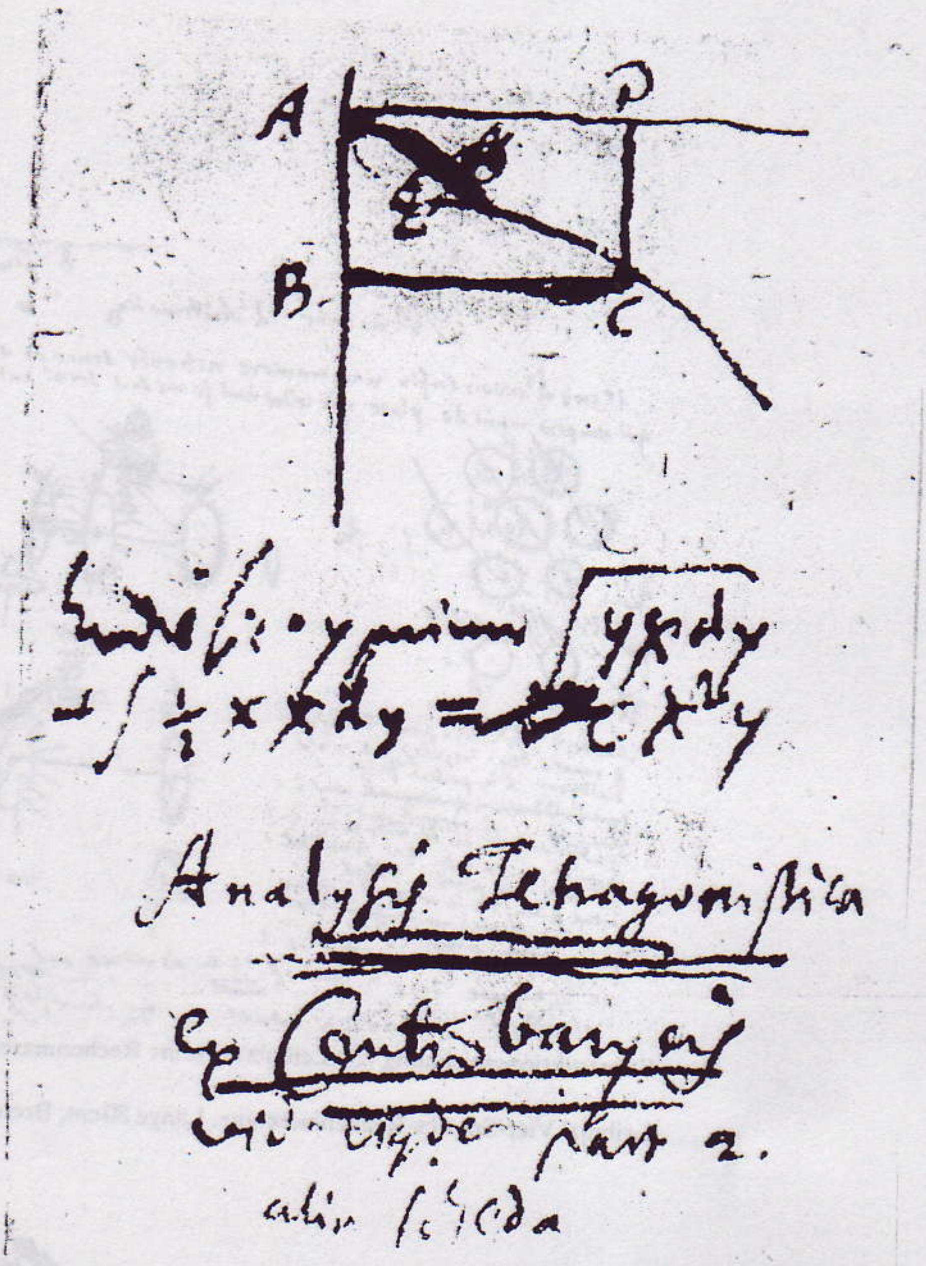
$$\frac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int\left(\int dy\right)dy$$

1675:

„Es wird nützlich sein, von nun an statt « summa omnium » des Cavalieri das Zeichen

$$\int y\,dx$$

zu schreiben"



Randnotiz von Leibniz mit Integralzeichen, 1675

26. Juli 1676 Newton schreibt über Oldenburg einen Brief an Leibniz. Er berichtet über

- allg. Binomische Formel (8 Beispiele)
- Auflösung von Glg. mit Anwendungen auf Reihen sin und arcsin
- Lösung der Keplerschen Gleichung
- Rektifikation von Ellipsen- und Hyperbelbogen durch unendl. Reihen
- Fläche unter Hyperbel durch Logarithmusreihe
- Quadratur der Quadrix und Rektifikation
- Volumen von Segmenten von Drehellipsoiden

Keine Angaben zur Fluxionsrechnung! Resultate alle bekannt!

Leibniz erhält den Brief am 24. August 1676 und antwortet

27. August 1676 : Leibniz schreibt offen über Transmutation, Integration durch Substitution, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$.
Er hoffe, daß nun Newton seine infinitesimalen Methoden offenlegt.

„... Wenn Ihr sagt, die meisten Schwierigkeiten ließen sich durch unendliche Reihen erledigen, so will mir das nicht recht scheinen. Vieles Wunderbare und Verwickelte hängt weder von Gleichungen noch von Quadraturen ab. So zum Beispiel die Aufgaben der umgekehrten Tangentenmethode, von welchen auch Descartes eingestand, daß er sie nicht in seiner Gewalt habe."

Newton ist hochgradig alarmiert! Leibniz kann offenbar mehr als er!

Warum will er dann die Offenlegung der Fluxionsmethode? Warum hat er den Brief so spät beantwortet? (N. weiß nicht, daß L. seinen Brief erst Ende August bekommen hatte!)

26. Okt. 1676 Newton berichtet Oldenburg von Leibnizens „trefflichem Brief"

8. Nov. 1676 Newton schreibt an Collins und beteuert, seine Methoden seien keineswegs weniger allgemein und nicht umständlicher!

24. Okt. 1676 Zweiter Brief Newtons an Leibniz, den Oldenburg erst am 2. Mai 1677 abschickte!

Der Brief enthält 2 Anagramme:

„6a cc d æ 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x"
soll heißen:
„Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire & vice versa."

„5a cc d æ 10e ff h 12i 4l 3m 10n 6o qq r 7s 11t 10v 3x : 11ab 3c dd 10eæ g 10i ll 4m 7n 6o 3p 3q 6r 5s 11t 7v x, 3ac æ 4e gh 6i 4l 4m 5n 8o q 4r 3s 6t 4v, aaddæ eeeee iii mmnnooprrrsssss ttuu" soll heißen:
„Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua

caetera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae seriei."

Leibniz antwortet auf diesen Brief an dem Tag, als er ihn erhielt:

<u>1. Juli 1677</u> – Offenlegung der Leibnizschen Differentialrechnung

– Inverses Tangentenproblem durch Differentialgleichungen (im Gegensatz zu Newtons Reihentechniken)

– L. vermutet, daß Newtons Tangentenmethode nicht von seiner abweichen werde und bittet erneut um Offenlegung.

Newton <u>weiß</u>, daß Leibniz seine Methode bei seinem Besuch bei Collins kennengelernt hat!

Newton antwortet nicht mehr. Der Briefwechsel bricht ab.

Bis zur 2. Auflage der Principia (1713) schreibt Newton in einer Bemerkung (Liber II, Sect. II, Prop. VII): „In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G.W. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, daß ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lassen sich dieselben ebensogut auf irrationale wie auf rationale Größen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte (wenn eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten gegeben ist, die Fluxionen zu finden und umgekehrt), welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen."