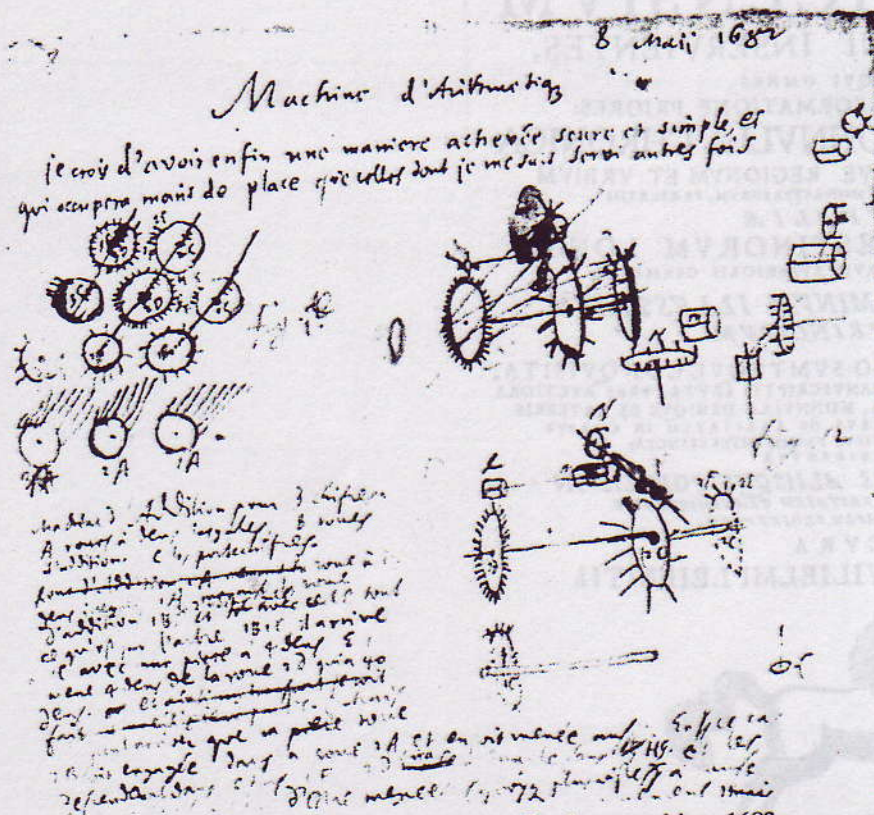
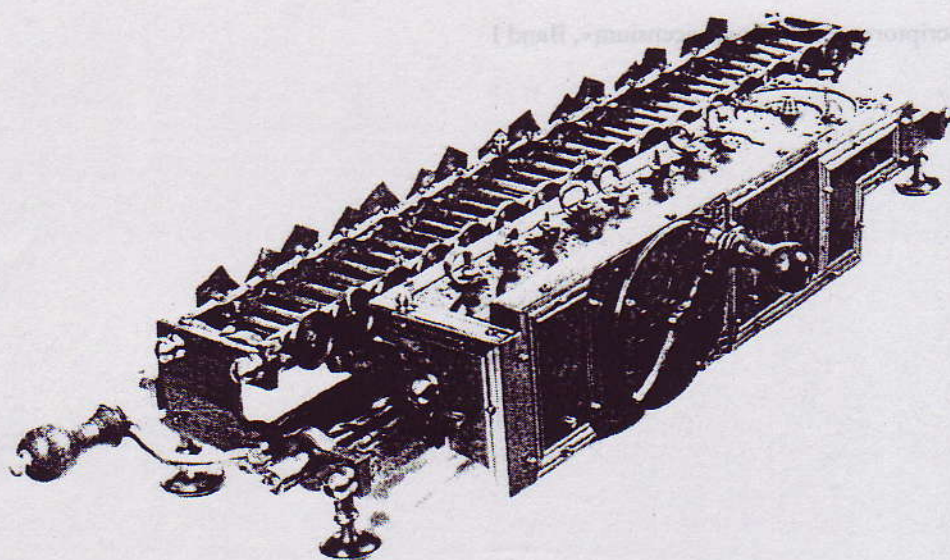
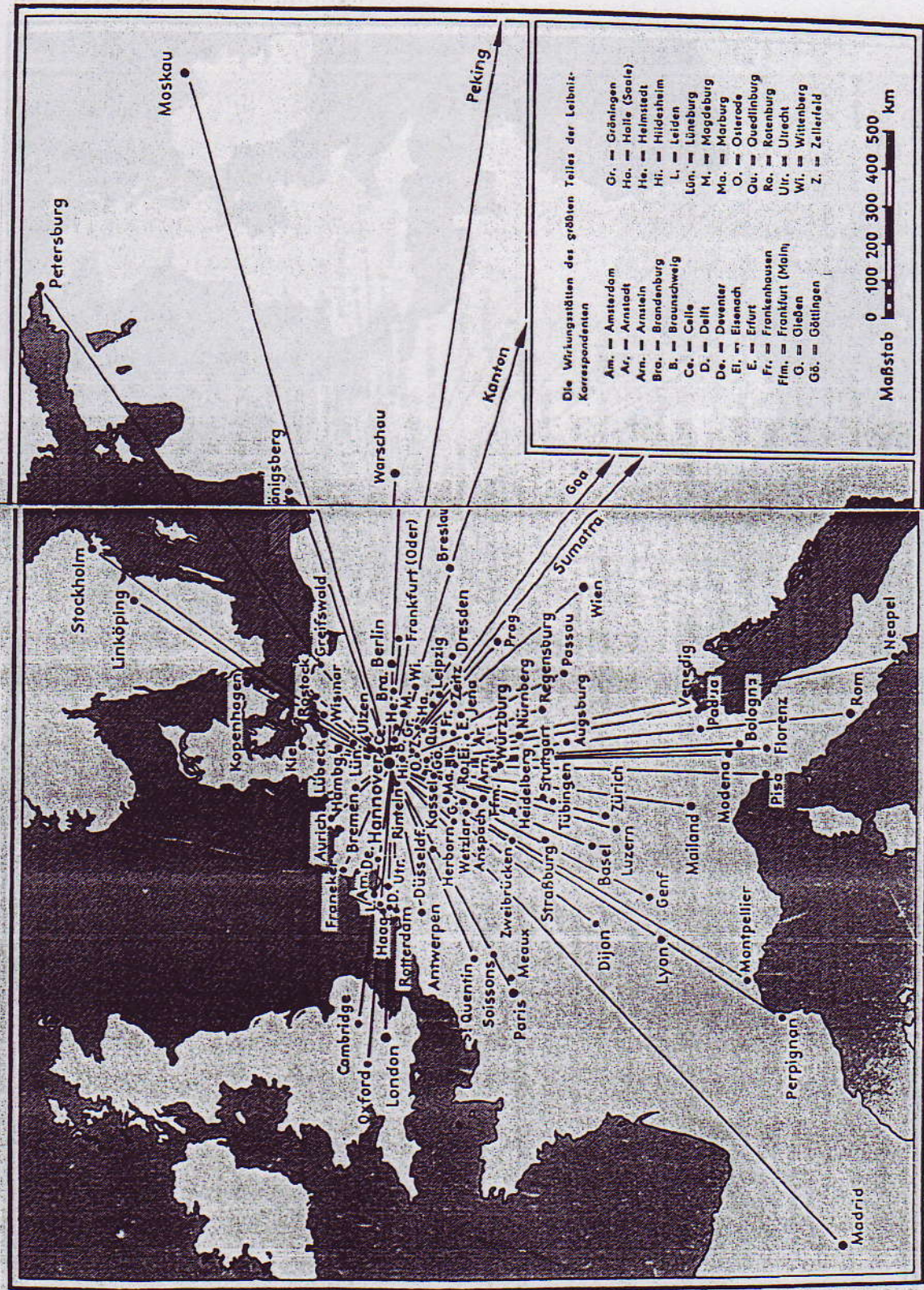




Konstruktionszeichnung von Leibniz für seine Rechenmaschine, 1682

Leibniz' Vier-Spezies-Rechenmaschine. Länge 80 cm, Breite 30 cm, Höhe 15 cm





- L. erhält Einsicht in den neuesten Erkenntnisstand in Mathe und Physik durch den Kreis um **Newton**
- L. nimmt an chemischen Experimenten von **Robert Boyle** teil.

Zurück in Paris lernt L. unter Anleitung von Huygens Mathematik und liest Pascal, Descartes,

Huygens stellt Aufgabe: Was ist der Wert von

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} + \dots = ?$$

L. kennt Pascalsches Dreieck und erfindet „harmonisches Dreieck“:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	...	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$	...	...	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	...	...	...	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Der n -te Eintrag jeder Zeile ist Differenz des n -ten und $(n-1)$ -ten Eintrags der vorherigen Zeile.

Folge: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Differenzen-
folge: $b_1, b_2, b_3, \dots$

$$b_i = (a_{i+1} - a_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1, \text{ wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0!$$

Harmonisches Dreieck, 2. Zeile:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = 1 \quad \swarrow a_1 \text{ in 1. Zeile}$$

3. Zeile:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \dots = \frac{1}{2} \quad \swarrow a_1 \text{ in 2. Zeile}$$

4. Zeile:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \dots = \frac{1}{3} \quad \swarrow a_1 \text{ in 3. Zeile}$$

usw.

x2

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots = \underline{\underline{2}}$$

Ende 1672 : Boineburg stirbt

Anfang 1673 : Der Mainzer Kurfürst stirbt

Der Pariser Mechaniker Olivier baut funktionierende
Rechenmaschine

L. sucht neue Stelle und sondiert Angebote verschiedener Fürstenhäuser.

Es gehe ihm nicht darum, „so viel Geld wie möglich anzuhäufen... sondern meinen Geist zufriedenzustellen, indem ich etwas Greifbares und Nützliches für das allgemeine Wohl leiste. Ich gestehe auch, daß ich einen Fehler habe, der in der Welt als schwerwiegend gilt: nämlich häufig gegen das Zeremoniell zu verstoßen und bei der ersten Begegnung keinen allzu guten Eindruck zu machen. Wenn man auf diese Dinge großes Gewicht legt... und wenn es gilt zu trinken, um zu gelten, so wissen Sie selbst, daß ich dann fehl am Platze bin.“

1673 beginnt in Paris die Entwicklung der Leibnizschen
Infinitesimalrechnung!

In einem Brief an Tschirnhaus berichtet Leibniz 1680 über eine Unterredung mit Huygens im Jahr 1673:

ich schließen könnte, daß er diese [Methode] kannte. Das ist auch der Grund, warum Huygens und Gregory solche [Sätze] auf linienreichen Umwegen bewiesen und dabei die Analyse unterschlagen haben, sie wollten eine so einfache und fruchtbare Methode nicht preisgeben.

Die erste Gelegenheit, bei der ich von mir aus auf die Methode des charakteristischen Dreiecks und anderes dergleichen gekommen bin, ergab sich, als ich kaum ein paar Monate auf das Studium der Geometrie gewendet hatte. Huygens gab mir ein Exemplar seines Buches über die Pendel⁶, das er gerade veröffentlicht hatte. Damals kannte ich die Cartesische Algebra überhaupt nicht, und ebensowenig die Methode der Indivisibeln, ja ich kannte nicht einmal die richtige Definition des Schwerpunkts. Als ich mich nämlich einmal zufällig mit Huygens unterhielt, glaubte ich und äußerte dies auch, daß eine durch den Schwerpunkt gelegte Gerade eine Figur stets in zwei gleiche Teile zerschneide. Da das bei Quadrat, Kreis, Ellipse und andern Figuren, die einen Größenmittelpunkt besitzen, tatsächlich so ist, meinte ich, bei allen übrigen sei dasselbe der Fall. Als Huygens das hörte, lachte er und sagte mir, nichts sei irriger. Hierdurch wie durch einen Stachel angetrieben, begann ich mich in die Geometrie zu vertiefen, obwohl ich [bis dahin] nicht einmal die *Elemente* [Euklids] gelesen hatte. Aber aufgrund [gewonnener] Erfahrung sah ich [bald] ein, daß man die Kenntnis der *Elemente* entbehren kann, wenn einem wenigstens einige Lehrsätze vertraut sind. Huygens, der mich für einen besseren Geometer hielt als ich war, gab mir Briefe zu lesen, die Pascal unter dem Namen Dettonville⁷ veröffentlicht hatte. Aus ihnen erlernte ich die Methode der Indivisibeln und der Schwerpunkte, d. h. die gewöhnliche Methode Cavalieris und Guldinis. Während ich Pascal las, skizzierte ich sogleich auf einem Blatt, was mir an Eigenem in den Sinn kam. Davon erscheint mir inzwischen einiges unbrauchbar, manches aber gefällt mir auch heute noch sehr gut. Unter anderem suchte ich einen neuen Mittelpunktsbegriff. Ich war nämlich der Überzeugung, man könne, wenn man einer beliebigen Figur eine andere ähnliche in ähnlicher Lage einbeschreibe, einen mittleren Punkt finden, in dem die Figur verschwindet, und, wenn dieser Punkt gegeben ist, erhalte man [daraus] die Quadraturen. Aber bald darauf merkte ich, was dieser Methode im Wege steht.

Doch um auf mein Thema zurückzukommen: ich wollte berichten, wie ich auf die Methode des charakteristischen Dreiecks gestoßen bin. Beiläufig berechnete Pascal nach Archimedes die Größe der Kugeloberfläche bzw. das Moment der Kreiskurve in bezug auf die Achse und zeigte, daß der Radius mit der [Länge der] Achse multipliziert dieses Moment ergibt. Als ich den Beweis genauer durchdacht hatte, entdeckte ich, daß man mit Hilfe des unendlich kleinen charakteristischen Dreiecks folgenden allgemeinen Satz für jede beliebige Kurve beweisen kann: Es sei irgendeine Kurve AP gegeben, auf deren Tangente PT die Senkrechte BP errichtet werde, die die Achse in B trifft; PC sei die Ordinate; im Punkt C werde die Senkrechte CD auf der Achse AC errichtet; CD sei gleich PB. Wenn nun die Kurve durch alle Punkte D geführt wird, entsteht eine Figur, deren Fläche das Moment der Kurve in bezug auf die Achse ist, und diese Figur zeigt auch, wie man einen Kreis findet, welcher der Oberfläche der um die Achse gedrehten

⁶ *Horologium oscillatorium*, Paris 1673.

⁷ *Lettres de A. Dettonville contenant quelques unes de ses Inventions de Geometrie*, Paris 1659.

Leibniz erkennt in **Pascals** Arbeiten ein zentrales Werkzeug: Das charakteristische Dreieck !

Juni 1658 : Pascal stellt unter dem Pseudonym **Amos Dettonville** (d. i. ein Anagramm auf Pascals Pseudonym Louis de Montalte) einige Aufgaben um die Zykloide mit "deadline" 1. Oct. 1658.

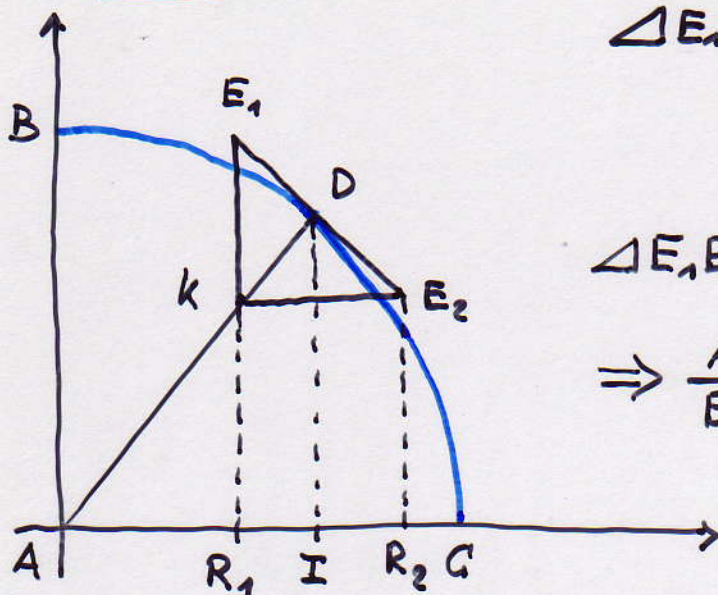
keine eingerichte Lösung ist richtig !

⇒ Pascal publiziert seine Lösungen als "Lettres de A. Dettonville"

In seiner "Historia et origo" beschreibt L. lange Zeit später seine Erkenntnis :

"From one example given by Dettonville, a light suddenly burst upon him [L. schreibt von sich in dritter Person], which strange to say Pascal himself had not perceived in it. For when he proves the theorem of Archimedes for measuring the surface of a sphere or parts of it, he used a method in which the whole surface of the solid formed by a rotation round any axis can be reduced to an equivalent plane figure. From it our young friend made out for himself the following general theorem. Portions of a straight line normal to a curve, intercepted between the curve and an axis, when taken in order and applied at right angles to the axis give rise to a figure equivalent to the moment of the curve about the axis."

PASCALS RESULTAT



$\triangle E_1 E_2 K$ mit $E_1 E_2$ tangiert
Kreis in D.

$\triangle E_1 E_2 K$ und $\triangle ADI$ sind **ähnlich**

$$\Rightarrow \frac{AD}{E_1 E_2} = \frac{DI}{E_2 K}$$

$$\Rightarrow DI \cdot E_1 E_2 = AD \cdot E_2 K = AD \cdot R_1 R_2$$

Setze $y = DI$, $a := AD$, $\Delta s = E_1 E_2$, $\Delta x = R_1 R_2$

$$\Rightarrow y \Delta s = a \Delta x$$

$\Delta s, \Delta x$ infinitesimal klein $\Rightarrow$ Aufsummieren liefert

$$\int y ds = \int a dx$$

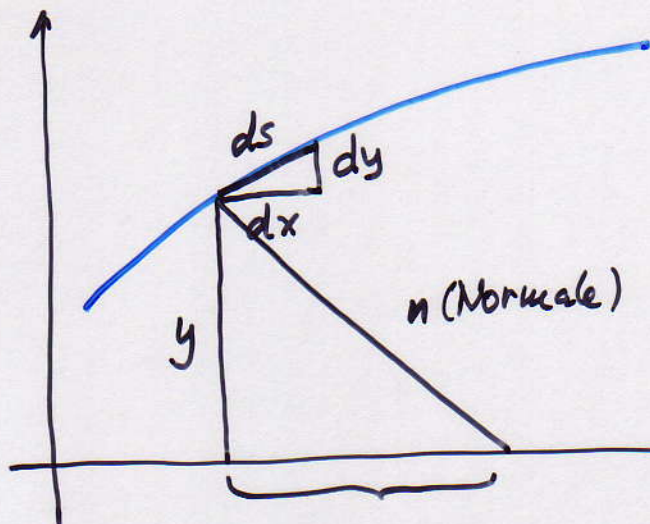
Fläche einer infinitesimalen Zone auf dem Kreis mit Radius a bei Rotation des $\frac{1}{4}$ -Kreises um die x -Achse: $2\pi y \cdot ds$

$\Rightarrow$ Oberfläche des Halbkreises:

$$A = \int 2\pi y ds = 2\pi a \int_0^a dx = 2\pi a^2$$

LEIBNIZENS „BURST OF LIGHT“ :

L. erkennt die allgemeine Anwendbarkeit des „charakteristischen Dreiecks“ :



Ähnlichkeit der Dreiecke :

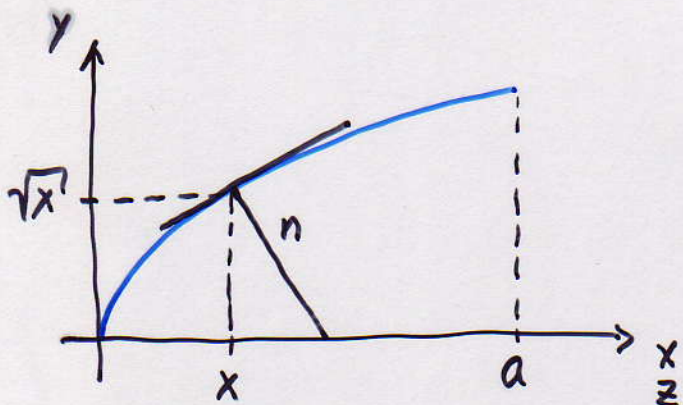
$$\frac{ds}{n} = \frac{dx}{dy} \Leftrightarrow y ds = n dx$$

Summation:

$$\underbrace{\int y ds}_{\text{„Moment“}} = \int n dx$$

$$\Rightarrow \text{Rotationsfläche} \quad \int 2\pi y ds = 2\pi \int n dx$$

Bspl: Berechne Oberfläche des Rotationsparaboloides, das durch $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq a$, erzeugt wird.



$$\text{Steigung der Tangente: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \text{Steigung der Normalen} = -2\sqrt{x}$$

Gleichung der Normalen :

$$y_N = -2\sqrt{x} \cdot z + b$$

$$\sqrt{x} = -2\sqrt{x} \cdot x + b \Leftrightarrow b = \sqrt{x}(1+2x)$$

$$\Rightarrow y_N = -2\sqrt{x} \cdot z + \sqrt{x}(1+2x)$$

$$y_N = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(1+2x)$$

$$\text{Länge } n = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+2x) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x} \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + x} = \frac{1}{2} \sqrt{1+4x}$$

$$\Rightarrow \int 2\pi y ds = 2\pi \int_0^a \frac{1}{2} \sqrt{1+4x} dx = \pi \int_0^a \sqrt{1+4x} dx = \frac{\pi}{6} [(4a+1)^{3/2} - 1]$$

Brief an de l'Hospital 1693.

Leibniz erinnert sich an seine ersten Schritte 1673.

[With the] use of what I call the "characteristic triangle", formed from the elements of the coordinates and the curve, I thus found as it were in the twinkling of an eyelid nearly all the theorems that I afterward found in the works of Barrow and Gregory. Up to that time, I was not sufficiently versed in the calculus [algebra] of Descartes, and as yet did not make use of equations to express the nature of curved lines; but, on the advice of Huygens, I set to work at it, and I was far from sorry that I did so: for it gave me the means almost immediately of finding my differential calculus. This was as follows. I had for some time previously taken a pleasure in finding the sums of series of numbers, and for this I had made use of the well-known theorem, that, in a series decreasing to infinity, the first term is equal to the sum of all the differences. From this I had obtained what I call the "harmonic triangle," as opposed to the "arithmetical triangle" of Pascal . . . Recognizing from this the great utility of differences and seeing that by the calculus of M. Descartes the ordinates of the curve could be expressed numerically, I saw that to find quadratures or the sums of the ordinates was the same thing as to find an ordinate (that of the quadratrix), of which the difference is proportional to the given ordinate. I also recognized almost immediately that to find tangents is nothing else but to find differences, and that to find quadratures is nothing else but to find sums, provided that one supposes that the differences are incomparably small.