Wallis baut auf **zwei Prinzipien: Induktion** und **Interpolation**.

Beispiel zur Induktion: Proposition 1:
„Ist eine Folge von Größen in arithmetischer Proportion gegeben (oder eine Folge natürlicher Zahlen), startend von irgendeinem Punkt oder 0, also wie $0, 1, 2, 3, 4$, etc., finde das Verhältnis ihrer Summe zur Summe mit der gleichen Anzahl von Summanden jeweils gleich der größten Zahl."

Also: Was ist

$$\frac{0+1+2+3+\ldots+n}{n+n+n+n+\ldots+n}$$

in Abhängigkeit von n?

Wallis rechnet:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{1}{2} \qquad \frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6}=\frac{1}{2}$$

und schreibt dann:

„Und auf diese Weise, wie weit wir auch immer fortschreiten, wird das Resultat immer 1/2 sein."

Beispiel: Proposition 19
Was ist

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2}$$

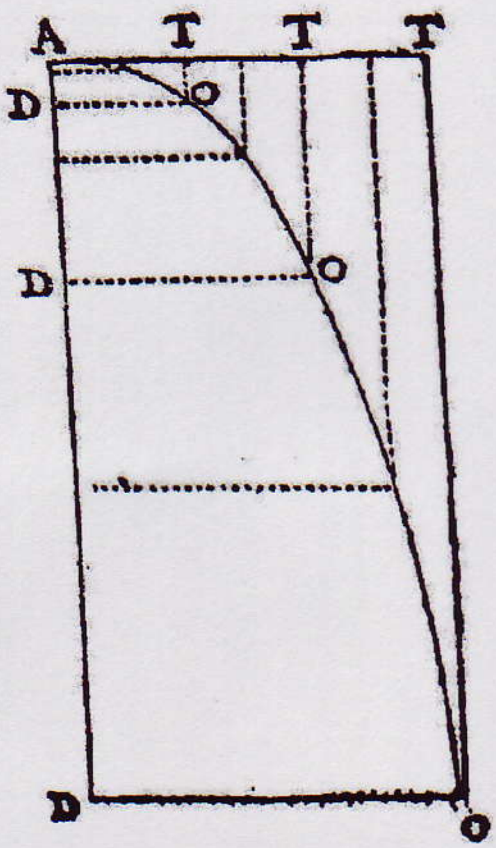
für „großes" n?

Wallis rechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{0+1}{1+1} &= \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\
\frac{0+1+4}{4+4+4} &= \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \\
\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} &= \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \\
\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16} &= \frac{9}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

und stellt fest („Induktion"): Der Quotient wird schließlich $\frac{1}{3}$.

Parabelquadratur:



Zu Berechnen ist die Fläche des Zwickels ATO im Verhältnis zum Rechteck $ATOD$ für die Parabel $\longrightarrow$ Die Linien TO sind zu summieren!

Zwischen den Linien sei der Zwischenraum a.

Dann gilt

$$\frac{0^2 + a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2}{(na)^2 + (na)^2 + (na)^2 + \ldots + (na)^2}$$

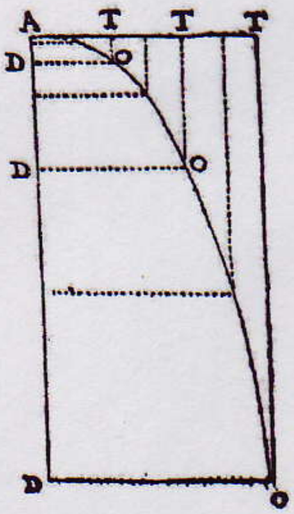
Für wachsendes n bei kleiner werdendem a ist dieser Quotient schließlich $\frac{1}{3}$, wie oben in Prop. 19 gezeigt.

Aber Wallis „sieht" noch mehr: Er zeigt für jede natürliche Zahl k

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

Für die Parabel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \ldots + n^2} = \frac{1}{3} = \frac{|ATO|}{|ATOD|}$$



Also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} + \ldots + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{|ATOD| - |ATO|}{|ATOD|} = \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$

Analog: $\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}}, n^0 = 1$, etc.

Prinzip der Interpolation:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^p + 1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p + n^p + n^p + \ldots + n^p} = \frac{1}{1+p}$$

für *alle* p.

Damit gelingt ihm der **arithmetische** Beweis von

$$\int_0^1 x^{\frac{p}{q}}\, dx = \frac{q}{p+q}.$$

Bei Anwendung der „Interpolation" auf die **Kreisquadratur** findet er

$$\square = \frac{4}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots}$$

William Brouncker findet eine Kettenbruchdarstellung für $4/\pi$, die man auch in der *Arithemtica infinitorum* findet.

Gilt als größter Kryptologe seiner Zeit.

„Conic sections"

„Algebra" 1685

„Arithmetica infinitorum" 1655

größtes Werk!

Quadraturen mit Hilfe von Indivisiblen über Kepler hinaus!

Wallissche Darstellung von π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2 \cdot 4\cdot 4 \cdot 6\cdot 6 \cdot 8\cdot 8 \cdots}{1\cdot 3\cdot 3 \cdot 5\cdot 5 \cdot 7\,7 \cdot 9\cdot 9 \cdots}$$

Geniale Manipulationen unendlicher Reihen

Isaac Barrow (1630 - 1677)

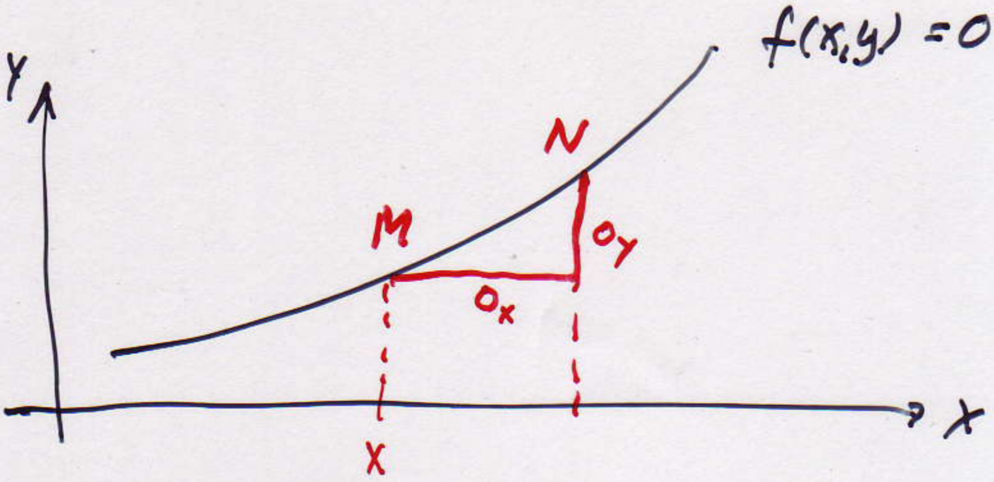
Prof. Math. in Cambridge.

1669 gibt Lehrstuhl (Lucasian) zu Gunsten Newtons auf!

„Lectiones geometricae" 1670

„Lectiones mathematicae" 1683 - 85

Geniale Tangentenmethoden



<u>Bspl</u>: finde Tangent an $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$$f(x + o_x , y + o_y) = f(x,y) \quad \text{liefert}$$

$$(x + o_x)^3 + (y + o_y)^3 - 3(x + o_x)(y + o_y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\Rightarrow \; 3x^2 o_x + 3x\,\underline{\underline{o_x^2}} + \underline{\underline{o_x^3}} + 3y^2 o_y + 3y\,\underline{\underline{o_y^2}} + \underline{\underline{o_y^3}} - 3x o_y - 3y o_x - 3\,\underline{\underline{o_x o_y}} = 0$$

$\underline{\underline{}} = 0$ „for these terms have no value"

$$\Rightarrow \; 3x^2 o_x + 3y^2 o_y - 3x o_y - 3y o_x = 0$$

$\Rightarrow$ Steigung der Tangenten : $\dfrac{o_y}{o_x} = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$

<u>Barrows Idee</u>: Raum und Zeit bestehen aus „unendlich kleinen" linearen Stückchen:

„linelets" „timelets"

Geometrische Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung!

Hollands „Größte"

Christian Huygens (1629 – 1695)

Großartiger Physiker und Astronom und Math.

Geboren in Den Haag

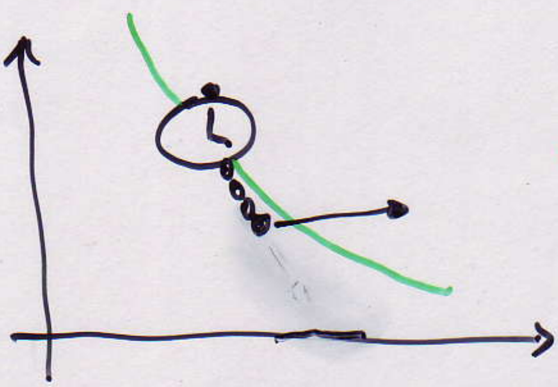
Studium unter Van Schooten

1660 – 1663 – Paris und London (Leibniz)

Große Liebe zu griechischer Geometrie

Freund Newtons. Newton: „Summus Hugenius"

- Erfindung der Pendeluhr
  „De horologio oscillatorio" 1673
  kann heute als Einführung in Newtons „Principia" gesehen werden!
- Tangenten- und Flächenberechnungen nach „klassischem" Muster, allerdings Archimedes überlegen.
- Problem der gezogenen Taschenuhr



H. löst „klassisch"
Leibniz „modern"
(gesucht ist f mit überall gleich langer Tangente)

Christiaan Huygens