

# Turbulente Strömungen in porösen Medien

Diplomarbeit

Humboldt-Universität zu Berlin  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II  
Institut für Mathematik

eingereicht von: Michael Herrmann,  
geb. am 29. 06. 1973 in Berlin  
Betreuer: Prof. Dr. K. Gröger

Berlin, den 6. August 2005



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Das physikalische Problem</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Einige Funktionenräume . . . . .	6
2.2	Monotone Operatoren . . . . .	8
2.3	Monotone Potentialoperatoren . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Normalenspuren divergenzfreier <math>L^r</math>-Funktionen</b>	<b>12</b>
3.1	Definition der Normalenspur . . . . .	12
3.2	Eigenschaften der Normalenspur . . . . .	15
3.3	Stromfunktionen zweidimensionaler, divergenzfreier $L^r$ -Funktionen . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Analytische Lösung der Aufgabe</b>	<b>27</b>
4.1	Funktionalanalytische Formulierung des Problems . . . . .	27
4.2	Eigenschaften der eingeführten Operatoren . . . . .	30
4.3	Umformulierung und Lösung der Aufgabe . . . . .	39
4.4	Eine andere Betrachtung des Operators $B$ . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Approximative Lösung der Aufgabe</b>	<b>42</b>
5.1	Die RITZ- und die GALERKIN-Approximation . . . . .	43
5.2	Gradienten- und Projektions-Iterationsverfahren . . . . .	44
5.3	A-posteriori Fehlerabschätzungen . . . . .	52
	Literaturverzeichnis	54
	Thesen	55
	Selbständigkeitserklärung	57

## 0 Einleitung

Dieser Arbeit liegt eine spezielle Gleichung aus der Strömungstechnik zugrunde, die stationäre und turbulente Strömungen in porösen Medien beschreibt. Die Gleichung ist unter dem Namen nichtlineares DARCY-Gesetz bekannt und modelliert den Zusammenhang zwischen der vektoriellen Geschwindigkeit  $v$  des Strömungsmittels und dem Druck  $p$ . Wir werden im ersten Kapitel genauer auf die physikalischen und strömungsmechanischen Grundlagen eingehen und zeigen, daß sich das DARCY-Gesetz in der Form

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} p + a v + b |v| v &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0\end{aligned}$$

schreiben läßt, wobei  $a$  und  $b$  im einfachsten Fall positive Konstanten sind. Außerdem werden wir geeignete Randbedingungen für die Größen  $v$  und  $p$  festlegen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, mit geeigneten funktionalanalytischen Hilfsmitteln eine Lösungstheorie für das DARCY-Gesetz zu entwickeln. Außerdem wollen wir Wege aufzeigen, wie eine Lösung approximativ berechnet werden kann. Wir werden dazu im zweiten Kapitel grundlegende Sätze aus den Theorien der monotonen Operatoren und der monotonen Potentialoperatoren zusammenstellen.

Im dritten Kapitel werden wir die Eigenschaften von integrierbaren Funktionen untersuchen, deren Divergenz im Distributionensinne auf einem berandeten Gebiet verschwindet. Wir werden zeigen, daß diesen Funktionen, die ja im allgemeinen keine Spur auf dem Gebietsrand besitzen, in sinnvoller Weise eine Normalenspur auf Teilstücken des Gebietsrandes zugeordnet werden kann.

Mit Hilfe des dritten Kapitels wird im vierten Kapitel eine adäquate schwache Formulierung des DARCY-Gesetzes als Randwertproblem gelingen. Durch eine geeignete Umformulierung können die beiden Unbekannten  $v$  und  $p$  getrennt werden. Wir werden dazu zwei konjugierte Gleichungen mit jeweils einem monotonen Potentialoperator angeben, von denen die eine nur  $v$ , die andere nur  $p$  als Unbekannte enthält. Schließlich wird sich die eindeutige Lösbarkeit der schwachen Formulierung des DARCY-Gesetzes ergeben.

Im fünften Kapitel werden wir Näherungsverfahren für unser Randwertproblem angeben. Wir werden dazu zunächst auf Standardverfahren zurückgreifen. Anschließend stellen wir ein speziell angepaßtes Projektions-Iterationsverfahren vor. Außerdem werden wir Fehlerabschätzungen herleiten, mit denen die Güte einer Näherungslösung berechnet werden kann.

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei Prof. Dr. K. Gröger für die sehr gute und intensive Betreuung dieser Arbeit bedanken.

# 1 Das physikalische Problem

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen dieser Arbeit zusammengefaßt. In allen verwendeten Größen, Bezeichnungen und physikalischen Gesetzen folgen wir weitestgehend den Büchern [7] und [8] von HACKESCHMIDT.

In vielen praktischen Anwendungen treten Strömungen von Gasen oder Flüssigkeiten durch poröse Medien (*Filter*) auf, wobei das Medium vergleichsweise feinkörnig (etwa Bodenfilter) oder grobkörnig (etwa Schüttungen von Rüben) sein kann. Typische Beispiele sind

- die Belüftung von Silos,
- die Durchströmung von Kontaktkörpersäulen,
- Sickerströmungen von Wasser durch Boden und
- Gasströmungen durch Erz-Kohle-Schüttungen in Hochöfen.

Das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell stammt aus der Theorie der Filterströmungen. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen der vektoriellen Geschwindigkeit  $v$  des Strömungsmittels und dem herrschenden Druck  $p$  (genauer dem sogenannten *Gesamtdruckverlust*). Dabei wird von einem *inkompressiblen* Strömungsmittel mit konstanter Massendichte  $\varrho$  ausgegangen. Außerdem werden nur *stationäre*, also zeitunabhängige Strömungsvorgänge betrachtet. Unter diesen Voraussetzungen führt das Gesetz vom Erhalt des Massenstroms zu der *Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (1)$$

In der Strömungsmechanik stellt man sich oft eine Strömung aus vielen *Stromröhren* zusammengesetzt vor, wobei eine Stromröhre die Bahn eines sich mit der Strömung mitbewegenden, infinitesimal kleinen Volumenelements darstellt. Diese Stromröhren können etwa durch Zugabe von Farbstoff sichtbar gemacht werden, wodurch die bekannten Stromlinienbilder entstehen.

Eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von Strömungsvorgängen spielt der Begriff des *Druckes*. In der Strömungstechnik unterscheidet man zwischen verschiedenen Druckarten:

- Der Druck  $p_{vol}$  entsteht durch die Wirkung äußerer Volumenkräfte wie Gravitations- oder Zentrifugalkräfte. Er heißt auch *hydrostatischer Druck*, da er unabhängig von der Bewegung des Strömungsmittels existiert.
- Der *dynamische Druck*  $p_{dyn}$  (oder auch *Staudruck* genannt) entspricht den Trägheitskräften, die in einer Strömung entstehen. Er berechnet sich aus der Geschwindigkeit  $v$  und der Massendichte  $\varrho$  gemäß der Formel

$$p_{dyn} = \frac{\varrho}{2} v^2.$$

- Der *statische Druck*  $p_{stat}$  beschreibt die Druckkräfte innerhalb des Strömungsmittels. Ist in der Literatur von dem Druck  $p$  die Rede, so ist i.a. der statische Druck gemeint.
- Der *Gesamtdruck*  $p_{ges}$  ist die Summe aus statischem und dynamischem Druck.

Bei einem *idealen* Strömungsmittel treten weder zwischen Filter und Strömungsmittel noch innerhalb des Strömungsmittels Reibungskräfte auf. Es gilt die *BERNOULLI-Gleichung*, nach der sich längs jeder Stromröhre der Gesamtdruck wie der hydrostatische Druck ändert:

$$p_{ges} - p_{vol} = \frac{\rho}{2}v^2 + p_{stat} - p_{vol} = \text{konst.} \quad (2)$$

Bei *realen* Strömungsmitteln treten aufgrund der Bewegung des Strömungsmittels zwischen Filter und Strömungsmittel bzw. innerhalb des Strömungsmittels Reibungskräfte auf, die zu einem zusätzlichen Abfall des Gesamtdruckes längs jeder Stromröhre führen. Daher wird in Gleichung (2) ein zusätzlicher Druckterm  $p_{reib}$ , der sogenannte *Gesamtdruckverlust*, aufgenommen, der den Druckverlust im Vergleich zu einer idealen Strömung modelliert. Man erhält die *BERNOULLI-Gleichung mit Verlustglied*:

$$p_{ges} - p_{vol} + p_{reib} = \frac{\rho}{2}v^2 + p_{stat} - p_{vol} + p_{reib} = \text{konst.} \quad (3)$$

Die Gleichungen (2) und (3) lassen sich als Energieerhaltung längs jeder Stromröhre interpretieren (vgl. dazu [7], Seite 102).

Um Filterströmungen zu beschreiben, abstrahiert man von der ohnehin nicht bekannten Feinstruktur des Filters und seiner Poren und geht zu lokal gemittelten Größen (Geschwindigkeit, die verschiedenen Drücke usw.) über. Der Filter selbst wird lediglich durch den *äquivalenten Kugeldurchmesser*  $d_k$ , dem sechsfachen Verhältnis von Filtervolumen und benetzter Oberfläche des Filters, und durch das *relative Porenvolumen*  $\varepsilon$ , dem Verhältnis aus Poren- und Gesamtvolumen, beschrieben.

Wie experimentelle Ergebnisse zeigen, hängt der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Gesamtdruckverlust entscheidend davon ab, ob die Strömung *turbulent* oder *laminar* verläuft, d.h. ob viele oder praktisch keine Wirbel auftreten. Als Kriterium für das Maß an Turbulenz einer Strömung kann die *REYNOLDS-Zahl*  $Re$  verwendet werden, die sich gemäß

$$Re = \frac{|v| d_k \rho}{\eta}$$

berechnet, wobei die *dynamische Zähigkeit*  $\eta$  eine druckunabhängige Materialkonstante des Strömungsmittels ist. Die Strömung ist bei REYNOLDS-Zahlen

- kleiner 10 praktisch laminar,
- zwischen 10 und  $10^3$  teils laminar, teils turbulent,
- größer  $10^3$  überwiegend turbulent.

Für laminare Strömungen verwendet man den Ansatz

$$\text{grad } p_{reib} = \frac{175(1-\varepsilon)^2\eta}{\varepsilon^2 d_k^2} v, \quad (4)$$

wobei die auftretenden Terme durch plausible Annahmen und Analogieverfahren motiviert werden können (vgl. dazu [7]). Die Gleichung (4) besagt, daß bei laminarer Strömung in hinreichend kleinen Stromröhren der Länge  $L$  die Proportionalität

$$\Delta p_{reib} \sim L |v|$$

besteht. Dieser Zusammenhang wurde Mitte des vorigen Jahrhunderts experimentell von DARCY gefunden. Daher nennt man die Gleichung (4) auch *lineares DARCY-Gesetz*. Bei turbulenter Strömung hat sich experimentell der Ansatz

$$\text{grad } p_{reib} = \frac{175(1-\varepsilon)^2\eta}{\varepsilon^2 d_k^2} \left(1 + \frac{Re}{100(1-\varepsilon)}\right) v \quad (5)$$

bewährt, den man auch *nichtlineares DARCY-Gesetz* nennt. Gelingt es, die Größen  $p_{reib}$  und  $v$  anhand des DARCY-Gesetzes (5), der Kontinuitätsgleichung (1) sowie gewisser Randwertvorgaben zu bestimmen, so können alle anderen Druckarten aus der BERNOULLI-Gleichung (3) und dem Gesetz des hydrostatischen Druckes (das in praktischen Fällen als bekannt vorausgesetzt werden darf) berechnet werden.

Diese Gleichung (5) können wir auch in der Form

$$\text{grad } p + av + b |v| v = 0 \quad (6)$$

schreiben, wobei  $a$  und  $b$  zwei ortsabhängige Funktionen sind, die sowohl von den Eigenschaften des Filters als auch von den Parametern des Strömungsmittels abhängen. Die Größe  $p$  steht für den Term  $p_{dyn} + p_{stat} - p_{vol}$ , welcher für kleine Geschwindigkeiten und kleine hydrostatische Drücke als gute Näherung für den statischen Druck betrachtet werden kann.

Man erhält die Gleichung (6) auch dadurch, daß man in der stationären NAVIER-STOKES-Gleichung für inkompressible Strömungsmittel den Trägheits- und den Zähigkeitsterm streicht und den Term  $-av - b |v| v$  als die vom Filter auf das Strömungsmittel ausgeübten Reibungskräfte interpretiert. In diesem Fall beschreibt die Gleichung (6) das Gleichgewicht zwischen den inneren Druckkräften und den äußeren Reibungskräften.

Wir werden im folgenden die Größe  $p$  in Gleichung (6) einfach nur Druck nennen. Um die Gleichung (6) in einem beschränkten Gebiet zu lösen, bedarf es noch geeigneter Randbedingungen. Dabei ist die Vorgabe von Randwerten sowohl für den Druck als auch für die Normalenkomponente der Geschwindigkeit (und damit für die hinein- oder hinaus transportierte Stoffmenge je Zeiteinheit) sinnvoll. Wir formulieren das physikalische

**Problem 1.0.1** *In einem gegebenen,  $N$ -dimensionalen Raumbereich  $\Omega$  seien die Funktionen  $a$  und  $b$  aus Gleichung (6) bekannt. Der Rand von  $\Omega$  zerfalle in zwei Teile: Auf dem einen sei der Druck, auf dem anderen die Normalenkomponente der Geschwindigkeit vorgegeben. Gesucht sind eine Druckverteilung  $p$  und ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld  $v$  auf  $\Omega$ , so daß die Gleichung (6) und die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt sind.*

Im Laufe dieser Arbeit wird dieses Problem weiter spezifiziert werden. Insbesondere werden wir festlegen, welche Eigenschaften die bekannten Größen haben müssen, und in welchen Funktionenräumen wir unsere Lösungen suchen werden.

## 2 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel faßt die theoretischen Grundlagen dieser Arbeit zusammen und klärt die verwendeten Bezeichnungen und Notationen. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben; Begriffe und Notationen, die Standard in der einschlägigen Literatur sind, werden z.T. benutzt, ohne weiter erklärt zu werden. Die kleinste natürliche Zahl sei stets 1.

### 2.1 Einige Funktionenräume

Im folgenden seien  $1 < r < \infty$  ein Exponent und  $\Omega$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet des  $\mathbb{R}^N$ . Für eine  $\mathbb{R}^N$ -wertige Funktion  $v$  auf  $\Omega$  bezeichnen wir die Komponentenfunktionen mit  $v_i$ ,  $i = 1..N$ . Ein bzgl. des Oberflächenmaßes meßbares Randstück  $\Gamma$  von  $\Omega$  nennen wir *normal*, falls eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1.  $\Gamma = \partial\Omega$ ,
2.  $\Gamma = \emptyset$ ,
3.  $\Gamma$  und  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  haben jeweils positives Oberflächenmaß.

Insbesondere ist  $\Gamma$  genau dann normal, wenn  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  normal ist.

Mit  $\mathbb{L}^r(\Omega)$  bezeichnen wir den LEBESGUE-Raum

$$\mathbb{L}^r(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N : v_i \in L^r(\Omega), i = 1..N \right\},$$

den wir mit der Norm

$$\|v\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} := \| |v| \|_{L^r(\Omega)}$$

versehen, wobei  $|\cdot|$  die euklidische Norm in  $\mathbb{R}^N$  meint. Sofern keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir für  $p \in L^r(\Omega)$  bzw.  $v \in \mathbb{L}^r(\Omega)$  auch

$$\begin{aligned} \|p\|_r &\text{ statt } \|p\|_{L^r(\Omega)} && \text{bzw.} \\ \|v\|_r &\text{ statt } \|v\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}. \end{aligned}$$



Abweichend von der Standardbezeichnung sei  $W_{\emptyset}^{1,r}(\Omega)$  der Raum

$$W_{\emptyset}^{1,r}(\Omega) := \left\{ p \in W^{1,r}(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0 \right\},$$

den wir mit der zur Standardnorm äquivalenten Norm

$$\|p\|_{W_{\emptyset}^{1,r}(\Omega)} := \|\text{grad } p\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}$$

auszeichnen.

Für jedes normale Randstück  $\Gamma$  von  $\Omega$  existiert ein linearer und stetiger Operator

$$\Theta_{\Gamma} : W^{1,r}(\Omega) \rightarrow L^r(\Gamma),$$

so daß für alle Funktionen  $p \in W^{1,r}(\Omega) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$  die Gleichung

$$\Theta_{\Gamma} p = p|_{\Gamma}$$

gilt, wobei  $L^r(\emptyset) = \{0\}$  und  $p|_{\emptyset} = 0$  verabredet sei. Wir nennen den Operator  $\Theta_{\Gamma}$  die  $\Gamma$ -Spur von  $p$  und schreiben generell

$$p|_{\Gamma} \text{ statt } \Theta_{\Gamma} p.$$

Für  $\Gamma \neq \emptyset$  definieren wir den Raum

$$W_{\Gamma}^{1,r}(\Omega) := \ker \Theta_{\Gamma}$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|p\|_{W_{\Gamma}^{1,r}(\Omega)} := \|\text{grad } p\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}.$$

Im folgenden seien  $\Gamma$  und  $\Delta$  zwei normale Randstücke von  $\Omega$ . Wir definieren den Operator

$$\Theta_{\Gamma,\Delta} : W_{\Delta}^{1,r}(\Omega) \rightarrow L^r(\Gamma)$$

als die Einschränkung von  $\Theta_{\Gamma}$  auf  $W_{\Delta}^{1,r}(\Omega)$ . Die Bildräume von  $\Theta_{\Gamma}$  bzw.  $\Theta_{\Gamma,\Delta}$  wollen wir mit

$$\begin{aligned} T_{\Omega}^r(\Gamma) &:= \text{im } \Theta_{\Gamma} \quad \text{bzw.} \\ T_{\Omega,\Delta}^r(\Gamma) &:= \text{im } \Theta_{\Gamma,\Delta} \end{aligned}$$

bezeichnen. Als Norm wählen wir

$$\begin{aligned} \|p|_{\Gamma}\|_{T_{\Omega}^r(\Gamma)} &:= \inf \left\{ \|q\|_{W^{1,r}(\Omega)} : q \in W^{1,r}(\Omega), q|_{\Gamma} = p|_{\Gamma} \right\} \quad \text{bzw.} \\ \|p|_{\Gamma}\|_{T_{\Omega,\Delta}^r(\Gamma)} &:= \inf \left\{ \|q\|_{W_{\Delta}^{1,r}(\Omega)} : q \in W_{\Delta}^{1,r}(\Omega), q|_{\Gamma} = p|_{\Gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Alle bisher in diesem Abschnitt definierten Räume sind mit den jeweiligen Normen BANACH-Räume.

Für eine beliebige offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^N$  sei  $C^\infty(U)$  die Menge aller auf  $U$  unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^N$ .  $C_c^\infty(U)$  sei die Menge aller Funktionen aus  $C^\infty(U)$ , die außerhalb einer in  $\mathbb{R}^N$  kompakten Teilmenge von  $U$  verschwinden.

## 2.2 Monotone Operatoren

Im folgenden sei  $X$  stets ein reflexiver BANACH-Raum. Ein i.a. mehrdeutiger und nicht überall definierter Operator  $M \subset X \times X^*$  mit Definitionsbereich  $D(M)$  heißt

*monoton*, falls

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in D(M), x^* \in Mx, y^* \in My,$$

*strikt monoton*, falls

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle > 0 \quad \forall x, y \in D(M) \text{ mit } x \neq y, x^* \in Mx, y^* \in My,$$

*stark monoton*, falls eine positive Konstante  $m$  derart existiert, daß

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq m \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in D(M), x^* \in Mx, y^* \in My,$$

*koerzitiv bzgl.  $\tilde{x} \in D(M)$* , falls für jede Folge  $(x_n, x_n^*) \in X \times X^*$  mit  $x_n^* \in Mx_n, \forall n$ , und  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  die Konvergenz

$$\frac{1}{\|x_n\|} \langle x_n^*, x_n - \tilde{x} \rangle \rightarrow \infty \quad \text{gilt,}$$

*koerzitiv*, falls  $M$  koerzitiv bzgl. irgendeines  $\tilde{x} \in D(M)$  ist, und

*maximal monoton*, falls  $M$  monoton ist, und falls jedes Paar  $(y, y^*) \in X \times X^*$  mit

$$\langle y^* - x^*, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D(M), x^* \in Mx$$

im Graphen von  $M$  enthalten ist. Ein eindeutiger Operator  $M \subset X \times X^*$  heißt

*demistetig*, falls aus  $x_n \rightarrow x$  die schwache Konvergenz  $Mx_n \rightharpoonup Mx$  in  $X^*$  folgt, und

*radialstetig*, falls  $D(M)$  linearer Unterraum von  $X$  ist, und für je zwei fixierte Elemente  $x_1, x_2 \in D(M)$  die reelle Funktion

$$s \rightsquigarrow \langle M(x_1 + sx_2), x_2 \rangle$$

stetig auf  $[0, 1]$  ist.

Wir sagen, ein Operator  $M : X \rightarrow X^*$  besitzt die *S-Eigenschaft*, wenn für jede Folge  $(x_n)$  in  $X$  aus  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  und  $\langle Mx_n - Mx, x_n - x \rangle \rightarrow 0$  die starke Konvergenz  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  folgt.

**Satz 2.2.1** *Ein maximal monotoner und koerzitiver Operator ist surjektiv. Ist er außerdem strikt monoton, so ist er auch injektiv.*

**Lemma 2.2.2** *Jeder monotone und radialstetige Operator  $M : X \rightarrow X^*$  ist maximal monoton.*

**Lemma 2.2.3** *Jeder radialstetige, strikt monotone und koerzitive Operator  $M : X \rightarrow X^*$  ist bijektiv.*

**Satz 2.2.4** *Für jeden BANACH-Raum  $X$  existiert ein überall definierter, maximal monotoner und koerzitiver Operator  $J_X \subset X \times X^*$ , so daß*

$$\langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \quad \forall x \in X, x^* \in J_X x.$$

*Ist  $X^*$  strikt konvex, so ist  $J_x$  eindeutig. Ist  $X$  strikt konvex, so ist  $J_x$  injektiv.*

Die Abbildung  $J_X$  heißt die *Dualitätsabbildung* von  $X$ .

**Lemma 2.2.5** *Es seien  $1 < r, s < \infty$  zwei konjugierte Exponenten. Die Dualitätsabbildung*

$$J_r : \mathbb{L}^r(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^s(\Omega)$$

*von  $\mathbb{L}^r(\Omega)$  ist bijektiv. Mit  $0^{-1} = 0$  gilt*

$$J_r f = \|f\|_r^{2-r} |f|^{r-2} f \quad \forall f \in \mathbb{L}^r(\Omega).$$

**Lemma 2.2.6** *Sei  $X$  ein BANACH-Raum mit bijektiver Dualitätsabbildung  $J_X$ , und sei  $Y$  ein weiterer BANACH-Raum, der via einer linearen Isometrie  $K : Y \rightarrow X$  in  $X$  eingebettet ist. Dann ist die Dualitätsabbildung  $J_Y$  von  $Y$  ebenfalls bijektiv und gegeben durch*

$$J_Y = K^* J_X K.$$

### 2.3 Monotone Potentialoperatoren

Unter einem *Funktional* auf einem reflexiven BANACH-Raum  $X$  verstehen wir eine Abbildung  $F$  von  $X$  nach  $(-\infty, \infty]$ . Nimmt  $F$  überall bzw. in mindestens einem Punkt einen endlichen Wert an, so sprechen wir von einem *endlichen* bzw. *nichttrivialen* Funktional.

Ein endliches Funktional  $F$  auf  $X$  heißt *GÂTEAUX-differenzierbar*, falls es einen Operator  $M : X \rightarrow X^*$  derart gibt, daß

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(x + ty) - F(x)) = \langle Mx, y \rangle \quad \forall x, y \in X.$$

Wir nennen  $F$  auch *Potential* für  $M$  bzw.  $M$  *Gradient* von  $F$ . Existiert für einen Operator  $M$  ein Potential  $F$ , so sagen wir auch,  $M$  sei *Potentialoperator*.

**Lemma 2.3.1** *Sei  $M : X \rightarrow X^*$  radialstetiger (bzw. stetiger) Potentialoperator mit dem Potential  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  und sei  $K : Y \rightarrow X$  linear und stetig. Dann ist auch  $K^*MK$  radialstetiger (bzw. stetiger) Potentialoperator mit dem Potential  $F \circ K$ .*

Aus der GÂTEAUX-Differenzierbarkeit eines Funktionals kann auf dessen klassische Differenzierbarkeit auf allen eindimensionalen, affinen Unterräumen von  $X$  geschlossen werden. Es gilt daher die folgende Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

**Lemma 2.3.2** *Sei  $M : X \rightarrow X^*$  radialstetiger Potentialoperator mit dem Potential  $F$ . Dann gilt*

$$F(x) - F(y) = \int_0^1 \langle M(y + t(x - y)), x - y \rangle dt \quad \forall x, y \in X. \quad (7)$$

Ein Funktional  $F$  auf  $X$  heißt *konvex*, falls die Menge

$$\text{epi } F := \left\{ (x, a) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq a \right\}$$

konvex ist;  $F$  heißt *schwach unterhalbstetig*, falls  $\text{epi } F$  schwach abgeschlossen ist.

**Lemma 2.3.3** *Ein endliches Funktional  $F$  auf  $X$  ist*

1. *genau dann konvex, wenn für alle  $x, y \in X$  und alle  $0 \leq \lambda \leq 1$*

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$$

*gilt.*

2. *genau dann schwach unterhalbstetig, wenn aus  $x_n \rightharpoonup x$  in  $X$  die Abschätzung*

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$$

*folgt.*

**Lemma 2.3.4** *Ein nichttriviales, konvexes und schwach unterhalbstetiges Funktional  $F$  mit*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = \infty$$

*nimmt auf jeder nichtleeren, konvexen und abgeschlossenen Menge sein Minimum an.*

**Lemma 2.3.5** *Jedes konvexe, GÂTEAUX-differenzierbare Funktional ist schwach unterhalbstetig.*

Für stetig differenzierbare Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind bekanntlich die Konvexität von  $f$  und das monotone Wachstum der Ableitung  $f'$  äquivalent. Dieser Zusammenhang besteht auch in allgemeineren Situationen:

**Lemma 2.3.6** *Das Funktional  $F$  besitze den Gradienten  $M : X \rightarrow X^*$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $F$  ist konvex.
2.  $M$  ist monoton.
3.  $F(y) \geq F(x) + \langle Mx, y - x \rangle$  für alle  $x, y \in X$ .

**Satz 2.3.7** *Sei  $F$  konvexes Funktional mit dem Gradienten  $M : X \rightarrow X^*$ . Dann ist jeder globale Minimalpunkt von  $F$  eine Lösung der Aufgabe  $Mx = 0$  und umgekehrt.*

Dieser Satz enthält die Grundidee der Theorie der monotonen Potentialoperatoren: Ein Extremalprinzip wird äquivalent in eine Operatorgleichung umgeformt. Die Gleichung

$$Mx = 0$$

ist nichts anderes als die EULER-Gleichung des Minimalproblems

$$\min_{x \in X} F(x) = \alpha.$$

Wir definieren für ein beliebiges, nichttriviales Funktional  $F$  auf  $X$  das zu  $F$  konjugierte Funktional  $F^*$  auf  $X^*$  durch

$$F^*(x^*) := \sup_{x \in X} \{ \langle x^*, x \rangle - F(x) \} \quad \forall x^* \in X^*.$$

Dabei ist der Wert  $+\infty$  zugelassen.

**Lemma 2.3.8** *Das zu einem beliebigen Funktional  $F$  konjugierte Funktional  $F^*$  ist konvex und schwach unterhalbstetig.*

**Lemma 2.3.9** *Für ein nichttriviales Funktional  $F$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $F$  ist konvex und schwach unterhalbstetig.
2. Es gilt  $F = F^{**}$ .

Das folgende Lemma motiviert die Einführung der konjugierten Funktionale.

**Lemma 2.3.10** *Sei  $M : X \rightarrow X^*$  monotoner und invertierbarer Potentialoperator mit dem Potential  $F$ . Dann ist auch  $M^{-1} : X^* \rightarrow X$  monotoner Potentialoperator mit dem Potential  $F^*$ .*

**Lemma 2.3.11** *Jeder monotone und invertierbare Potentialoperator ist radialstetig und demistetig.*

**Lemma 2.3.12** *Ist  $F$  konvexes Funktional mit dem Gradienten  $M : X \rightarrow X^*$ , so gilt*

$$F(x) + F^*(Mx) = \langle Mx, x \rangle \quad \forall x \in X.$$

Für monotone Potentialoperatoren kann, sofern der inverse Operator existiert und bekannt ist, das zum Potential konjugierte Funktional direkt berechnet werden:

**Lemma 2.3.13** *Ist  $M : X \rightarrow X^*$  monotoner und invertierbarer Potentialoperator mit dem Potential  $F$ , so gilt*

$$F^*(x^*) = \langle x^*, M^{-1}x^* \rangle - F(M^{-1}x^*) \quad \forall x^* \in X^*.$$

### 3 Normalenspuren divergenzfreier $\mathbb{L}^r$ -Funktionen

In diesem Kapitel seien  $\Omega$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet des  $\mathbb{R}^N$  mit Rand  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma$  ein normales Randstück von  $\Omega$  und  $1 < r, s < \infty$  zwei zueinander konjugierte Exponenten.

#### 3.1 Definition der Normalenspur

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß jeder divergenzfreien  $\mathbb{L}^r$ -Funktion in sinnvoller Weise eine Normalenspur auf  $\Gamma$  zugeordnet werden kann. Den auf  $\partial\Omega$  fast überall existierenden äußeren Normalenvektor wollen wir generell mit  $\nu$  bezeichnen.

Wir betrachten die Differentialoperatoren  $\text{grad}$  und  $\text{div}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{grad} & : W_{\partial\Omega}^{1,s}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^s(\Omega) \\ \text{div} & : \mathbb{L}^r(\Omega) \rightarrow W_{\partial\Omega}^{1,s}(\Omega)^* \end{aligned}$$

Dabei ist Gradient im Sinne der schwachen Ableitung und Divergenz im Sinne von Distributionenableitung zu verstehen. Die Operatoren  $\text{grad}$  und  $-\text{div}$  sind lineare Isometrien und zueinander adjungiert. Der Raum

$$\mathbb{L}_{\text{div}}^r(\Omega) := \{u \in \mathbb{L}^r(\Omega) : \text{div } u = 0\} \tag{8}$$

ist gerade der Kern von  $\text{div}$ .

**Satz 3.1.1** *Für jedes normale Randstück  $\Gamma$  von  $\Omega$  existiert ein linearer stetiger Operator*

$$\Phi_\Gamma : \mathbb{L}_{\text{div}}^r(\Omega) \rightarrow T_{\Omega, \partial\Omega \setminus \Gamma}^s(\Gamma)^*,$$

so daß für  $u \in \mathbb{L}_{\text{div}}^r(\Omega)$  und  $p \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)$  die Formel

$$\langle \Phi_\Gamma u, p|_\Gamma \rangle = \int_\Omega u \cdot \text{grad } p \tag{9}$$

gilt.

*Beweis:* Sei  $u \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  gegeben. Um zu zeigen, daß Formel (9) den Operator  $\Phi_\Gamma$  korrekt definiert, wählen wir eine Folge  $(u_n)$  aus  $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ , so daß  $u_n \rightarrow u$  in  $\mathbb{L}^r(\Omega)$ , und zwei Funktionen  $p, q \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)$  mit  $p|_\Gamma = q|_\Gamma$ . Dann ist  $p - q \in W_{\partial\Omega}^{1,s}(\Omega)$ , und aufgrund des Satzes von GAUSS gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \cdot (\text{grad } p - \text{grad } q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \cdot (\text{grad } p - \text{grad } q) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} (\text{div } u_n)(p - q) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \langle \text{div } u_n, p - q \rangle \\ &= - \langle \text{div } u, p - q \rangle = 0. \end{aligned}$$

$\Phi_\Gamma u$  ist also korrekt definiertes Funktional und offensichtlich linear (in  $p|_\Gamma$ ). Außerdem erhalten wir

$$|\langle \Phi_\Gamma u, p|_\Gamma \rangle| = \left| \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } p \right| \leq \|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \|\text{grad } p\|_{\mathbb{L}^s(\Omega)} = \|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \|p\|_{W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\langle \Phi(u), p|_\Gamma \rangle| &\leq \inf \left\{ \|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \|q\|_{W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)} : q \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega), q|_\Gamma = p|_\Gamma \right\} \\ &= \|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \|p|_\Gamma\|_{T_{\Omega, \partial\Omega \setminus \Gamma}^s(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Es ist also  $\Phi_\Gamma u \in T_{\Omega, \partial\Omega \setminus \Gamma}^s(\Gamma)^*$  mit  $\|\Phi_\Gamma u\| \leq \|u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}$ . Außerdem ist  $\Phi_\Gamma$  linear (in  $u$ ) und stetig mit  $\|\Phi_\Gamma\| \leq 1$ .  $\square$

Für alle divergenzfreien Funktionen  $u \in \mathbb{L}^r(\Omega) \cap \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$  gilt

$$\langle \Phi_\Gamma u, p|_\Gamma \rangle = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } p = \int_{\Gamma} u \cdot \nu,$$

d.h. oben definierter Operator  $\Phi_\Gamma$  ist eine Verallgemeinerung der Normalenspur, und Gleichung (9) entspricht dem Satz von GAUSS. Wir wollen  $\Phi_\Gamma u$  generell  $\Gamma$ -Normalenspur von  $u$  nennen und schreiben

$$u \cdot \nu|_\Gamma \quad \text{statt} \quad \Phi_\Gamma u.$$

Der Raum

$$\mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega) := \{u \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega) : u \cdot \nu|_\Gamma = 0\} \quad (10)$$

ist als Kern von  $\Phi_\Gamma$  ein BANACH-Raum. Da der Spurraum  $T_{\Omega, \partial\Omega}^s(\emptyset)$  nur die Null enthält, ist die  $\emptyset$ -Normalenspur für jede Funktion  $u \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  selbst Null. Es ist also

$$\mathbb{L}_{div, \emptyset}^r(\Omega) = \mathbb{L}_{div}^r(\Omega).$$

Wir werden sehen, daß die Räume  $\mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega)$  und  $W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega)$  in gewissem Sinne zueinander passen. Wir betrachten dazu das

**Diagramm 3.1.2**

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega) & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{L}^r(\Omega) & \xrightarrow{\text{grad}^*} & W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega)^* \\
 \mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega)^* & \xleftarrow{\text{id}^*} & \mathbb{L}^s(\Omega) & \xleftarrow{\text{grad}} & W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega)
 \end{array}$$

**Lemma 3.1.3** *Im Diagramm 3.1.2 gelten folgende Aussagen:*

1.  $\text{im}(\text{id}) = \ker(\text{id}^*)^\perp$  und  $\text{im}(\text{grad}) = \ker(\text{grad}^*)^\perp$ .
2.  $\text{im}(\text{id}) = \ker(\text{grad}^*)$  und  $\text{im}(\text{grad}) = \ker(\text{id}^*)$ .

*Beweis:*

1. Die Operatoren  $\text{grad}$  und  $\text{id}$  besitzen als Isometrien abgeschlossene Bilder. Daher folgt die zweite Behauptung aus einem wohlbekannten Satz der linearen Funktionalanalysis.
2. Für alle  $u \in \mathbb{L}^r(\Omega)$  und  $p \in W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega)$  gilt

$$\langle \text{grad}^* u, p \rangle = \langle u, \text{grad} p \rangle = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad} p.$$

Sei nun  $u \in \text{im}(\text{id}) = \mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega)$ . Dann gilt

$$0 = \langle u \cdot \nu|_{\Gamma}, p|_{\Gamma} \rangle = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad} p = \langle \text{grad}^* u, p \rangle \quad \forall p \in W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega),$$

also  $u \in \ker(\text{grad}^*)$ . Ist umgekehrt  $u \in \ker(\text{grad}^*)$ , so gilt

$$\langle u, \text{grad} p \rangle = 0 \quad \forall p \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega) \subset W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega),$$

also  $\text{div} u = 0$ . Es gilt aber auch

$$0 = \langle u, \text{grad} p \rangle = \langle u \cdot \nu|_{\Gamma}, p|_{\Gamma} \rangle \quad \forall p \in W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega),$$

also  $u \in \mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega)$ . Damit haben wir  $\text{im}(\text{id}) = \ker(\text{grad}^*)$  gezeigt. Mit der ersten Aussage dieses Lemmas finden wir

$$\text{im}(\text{grad}) = \ker(\text{grad}^*)^\perp = \text{im}(\text{id})^\perp = \ker(\text{id}^*).$$

□



**Folgerung 3.1.4** Für  $u \in \mathbb{L}^r(\Omega)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Divergenz und  $\Gamma$ -Normalenspur von  $u$  verschwinden.
2. Die Funktion  $u$  annulliert alle Gradienten von Funktionen aus  $W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega)$ .

### 3.2 Eigenschaften der Normalenspur

In diesem Abschnitt werden wir weitere Eigenschaften der Normalenspur beweisen. Alle aufgeführten Resultate sind aber für das Verständnis der folgenden Kapitel nicht notwendig.

Für eine integrierbare Funktion  $p$  auf  $\Omega$  sei

$$p_\emptyset := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p.$$

**Lemma 3.2.1** Sei  $\tilde{\Omega}$  ein Gebiet mit  $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ . Dann ist jede Funktion  $u \in \mathbb{L}_{div,\partial\Omega}^r(\Omega)$ , wenn sie in  $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$  zu Null fortgesetzt wird, divergenzfrei auf ganz  $\tilde{\Omega}$ .

*Beweis:* Für  $p \in C_c^\infty(\tilde{\Omega})$  gilt

$$\int_{\tilde{\Omega}} u \cdot \text{grad } p = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } p = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } (p - p_\emptyset) = \langle u \cdot \nu |_{\partial\Omega}, (p - p_\emptyset) |_{\partial\Omega} \rangle = 0.$$

□

Die  $\partial\Omega$ -Normalenspur enthält die vollständige Information über alle Normalenspur auf Teilrandstücken, denn es gilt

**Lemma 3.2.2** Für  $u \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  und  $p \in W_{\partial\Omega\setminus\Gamma}^{1,s}(\Omega)$  gilt

$$\langle u \cdot \nu |_{\Gamma}, p |_{\Gamma} \rangle = \langle u \cdot \nu |_{\partial\Omega}, (p - p_\emptyset) |_{\partial\Omega} \rangle. \quad (11)$$

*Beweis:* Nach Definition gilt

$$\langle u \cdot \nu |_{\partial\Omega}, (p - p_\emptyset) |_{\partial\Omega} \rangle = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } (p - p_\emptyset) = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } p = \langle u \cdot \nu |_{\Gamma}, p |_{\Gamma} \rangle.$$

□

Die  $\Gamma$ -Normalenspur haben wir als Funktional auf dem Spurraum  $T_{\Omega,\partial\Omega\setminus\Gamma}^s(\Gamma)$  definiert. Der folgende Satz zeigt, daß der Bildraum richtig gewählt wurde.

**Satz 3.2.3** Der Operator  $\Phi_\Gamma$  ist surjektiv.

*Beweis:* Sei  $f \in T_{\Omega, \partial\Omega \setminus \Gamma}^s(\Gamma)^*$  gegeben. Wir definieren einen Operator

$$\Psi : W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega) \rightarrow W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)^*$$

durch

$$\langle \Psi p, q \rangle := \langle \text{grad}^* J_s \text{grad} p, q \rangle - \langle f, q|_{\Gamma} \rangle \quad \forall p, q \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega).$$

Dabei sei  $J_s : \mathbb{L}^s(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\Omega)$  die Dualitätsabbildung von  $\mathbb{L}^s(\Omega)$ , und der Operator  $\text{grad}$  sei wie in Diagramm 3.1.2 betrachtet. Nach Lemma 2.2.6 ist der Operator  $\text{grad}^* J_s \text{grad}$  gerade die Dualitätsabbildung von  $W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)$ . Die maximale Monotonie und Koerzitivität von  $\text{grad}^* J_s \text{grad}$  übertragen sich auf  $\Psi$ . Nach Satz 2.2.1 existiert ein  $p_0 \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)$  mit  $\Psi p_0 = 0$ . Für  $u_0 := J_s \text{grad} p_0 \in \mathbb{L}^r(\Omega)$  gilt

$$0 = \langle \Psi p_0, q \rangle = \langle u_0, \text{grad} q \rangle - \langle f, q|_{\Gamma} \rangle \quad \forall q \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega).$$

Es folgt  $\text{div} u_0 = 0$  und  $\Phi_{\Gamma} u_0 = f$ . □

Für die Definition der  $\Gamma$ -Normalenspur als Funktional auf einem Spurraum war es wichtig (vgl. den Beweis von Satz 3.1.1), daß nur Spuren von Funktionen zugelassen wurden, die auf  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  verschwinden. Diese Obstruktion kann fallen gelassen werden, wenn die Normalenspur von  $u$  auf  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  verschwindet.

**Satz 3.2.4** *Für jedes normale Randstück  $\Gamma$  von  $\Omega$  existiert ein linearer stetiger Operator*

$$\Phi'_{\Gamma} : \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega) \rightarrow T_{\Omega}^s(\Gamma)^*,$$

so daß für  $u \in \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega)$  und  $p \in W^{1,s}(\Omega)$  die Formel

$$\langle \Phi'_{\Gamma} u, p|_{\Gamma} \rangle = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad} p \tag{12}$$

gilt.

*Beweis:* Seien  $u \in \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega)$  und  $p, q \in W^{1,s}(\Omega)$  mit  $p|_{\Gamma} = q|_{\Gamma}$ . Dann ist  $p - q \in W_{\Gamma}^{1,s}(\Omega)$ .

Es gilt also

$$\int_{\Omega} u \cdot \text{grad} p - \int_{\Omega} u \cdot \text{grad} q = \int_{\Omega} u \cdot \text{grad} (p - q) = \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega \setminus \Gamma}, (p - q)|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \rangle = 0.$$

Die Linearität und Stetigkeit von  $\Phi'_{\Gamma} u$  bzw.  $\Phi'_{\Gamma}$  lassen sich analog zum Beweis von Satz 3.1.1 zeigen. □

$\Phi'_{\Gamma} u$  ist für jedes  $u \in \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega)$  eine natürliche Erweiterung von  $\Phi_{\Gamma} u$ . Wir wollen daher beide Funktionale miteinander identifizieren und schreiben wiederum

$$u \cdot \nu|_{\Gamma} \quad \text{statt} \quad \Phi'_{\Gamma} u.$$

Für glatte und divergenzfreie Funktionen verschwindet das Randintegral der  $\partial\Omega$ -Normalenspur. Diese Eigenschaft überträgt sich auf unsere Verallgemeinerung:

**Bemerkung 3.2.5** Für  $u \in \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega)$  annulliert  $\Phi'_\Gamma u$  alle Konstanten.

Diese Restriktion für die Bildfunktionale von  $\Phi'_\Gamma$  ist jedoch die einzige:

**Lemma 3.2.6** Für jedes Funktional  $f \in T_\Omega^s(\Gamma)^*$ , das alle Konstanten annulliert, existiert ein  $u \in \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega)$ , so daß  $\Phi'_\Gamma u = f$ .

*Beweis:* Wir betrachten einen Operator

$$\Psi : W_\emptyset^{1,s}(\Omega) \rightarrow W_\emptyset^{1,s}(\Omega)^*$$

mit

$$\langle \Psi p, q \rangle := \langle \text{grad}^* J_s \text{grad} p, q \rangle - \langle f, q|_\Gamma \rangle \quad \forall p, q \in W_\emptyset^{1,s}(\Omega),$$

wobei  $J_s$  wieder die Dualitätabbildung von  $\mathbb{L}^s(\Omega)$  sei, und  $f$  in natürlicher Weise als Funktional auf  $T_{\Omega, \emptyset}^s(\Gamma)$  aufgefaßt wird. Analog zum Beweis von Lemma 3.2.3 läßt sich die Existenz eines  $p_0 \in W_\emptyset^{1,s}(\Omega)$  mit  $\Psi p_0 = 0$  zeigen. Sei  $u_0 := J_s \text{grad} p_0$ . Für beliebiges  $p \in W^{1,s}(\Omega)$  finden wir die Formel

$$\int_\Omega u_0 \cdot \text{grad} p = \int_\Omega u_0 \cdot \text{grad} (p - p_0) = \langle \Psi p_0, (p - p_0) \rangle = \langle f, p|_\Gamma \rangle - p_0 \langle f, 1|_\Gamma \rangle = \langle f, p|_\Gamma \rangle.$$

Es folgt  $u_0 \in \mathbb{L}_{div, \partial\Omega \setminus \Gamma}^r(\Omega)$  und  $\Phi'_\Gamma u_0 = f$ . □

Wir wollen im folgenden nur noch einfach zusammenhängende Gebiete untersuchen.

**Lemma 3.2.7** Sei  $\tilde{\Omega}$  ein weiteres beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet mit  $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ . Dann gibt es eine lineare und stetige Abbildung

$$\psi : T_{\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}}^s(\partial\Omega) \hookrightarrow T_\Omega^s(\partial\Omega),$$

so daß in  $L^s(\partial\Omega)$  gilt:

$$\psi(p|_{\partial\Omega}) = p|_{\partial\Omega} \quad \forall p \in W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}). \quad (13)$$

*Beweis:* Es existiert ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator

$$\Psi : W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow W^{1,s}(\mathbb{R}^N).$$

Jede so fortgesetzte Funktion können wir auf  $\Omega$  einschränken. Wir erhalten einen linearen und stetigen Operator

$$\Psi' : W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow W^{1,s}(\Omega).$$

Nach Konstruktion gilt  $\Psi' p|_{\partial\Omega} = p|_{\partial\Omega}$ . Die Zuordnung

$$p|_{\partial\Omega} \rightsquigarrow \Psi' p|_{\partial\Omega}$$

definiert also einen linearen Operator

$$\psi : T_{\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}}^s(\partial\Omega) \rightarrow T_{\tilde{\Omega}}^s(\partial\Omega),$$

der die Eigenschaft (13) erfüllt. Die Stetigkeit von  $\psi$  ergibt sich aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Psi'\| \|p|_{\partial\Omega}\|_{T_{\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}}^s(\partial\Omega)} &= \|\Psi'\| \inf \{ \|q\|_{W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega})} : q \in W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}), q|_{\partial\Omega} = p|_{\partial\Omega} \} \\ &\geq \inf \{ \|\Psi'q\|_{W^{1,s}(\Omega)} : q \in W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}), q|_{\partial\Omega} = p|_{\partial\Omega} \} \\ &= \inf \{ \|\Psi'q\|_{W^{1,s}(\Omega)} : q \in W^{1,s}(\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}), \Psi'q|_{\partial\Omega} = \Psi'p|_{\partial\Omega} \} \\ &\geq \inf \{ \|q\|_{W^{1,s}(\Omega)} : q \in W^{1,s}(\Omega), q|_{\partial\Omega} = \Psi'p|_{\partial\Omega} \} \\ &= \|\Psi'p|_{\partial\Omega}\|_{T_{\tilde{\Omega}}^s(\partial\Omega)} \\ &= \|\psi(p|_{\partial\Omega})\|_{T_{\tilde{\Omega}}^s(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.2.8** *Sei  $\tilde{\Omega}$  wieder ein weiteres beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet mit  $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ . Dann existiert für jede Funktion aus  $\mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  eine Fortsetzung aus  $\mathbb{L}_{div, \partial\tilde{\Omega}}^r(\tilde{\Omega})$ .*

*Beweis:* Sei  $u \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  fixiert und  $\Omega' := \tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}$ .  $\Omega'$  ist ebenfalls beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet. Es gilt

$$\partial(\Omega') = \partial\Omega \cup \partial\tilde{\Omega} \quad \text{und} \quad \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega = \emptyset.$$

Wir wollen in diesem Beweis unter Normalenspur immer die Verallgemeinerung aus Satz 3.2.4 verstehen. Das Gebiet, bzgl. dessen die Normalenspurbildung erfolgt, sei durch einen Index gekennzeichnet. Mit dem Operator  $\psi$  aus Lemma 3.2.7 definieren wir ein Funktional  $f$  auf  $T_{\tilde{\Omega}}^s(\partial\Omega)$  durch

$$\langle f, q|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega'} := -\langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, \psi(q|_{\partial\Omega}) \rangle_{\Omega} \quad \forall q|_{\partial\Omega} \in T_{\tilde{\Omega}}^s(\partial\Omega).$$

Da  $f$  nach Bemerkung 3.2.5 alle Konstanten annulliert, existiert mit Lemma 3.2.6 ein  $u' \in \mathbb{L}_{div, \partial\tilde{\Omega}}^r(\Omega')$  mit

$$u' \cdot \nu|_{\partial\Omega} = f.$$

Wir setzen  $u$  und  $u'$  zu einer Funktion  $\tilde{u}$  auf  $\tilde{\Omega}$  zusammen. Sei nun  $\tilde{p} \in W^{1,s}(\tilde{\Omega})$  gegeben, und seien  $p$  bzw.  $p'$  die Einschränkungen von  $\tilde{p}$  auf  $\Omega$  bzw.  $\Omega'$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u} \cdot \text{grad } \tilde{p} &= \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } p + \int_{\Omega'} u' \cdot \text{grad } p' \\ &= \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, p|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega} + \langle u' \cdot \nu|_{\partial\Omega}, p'|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega'} \\ &= \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, p|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega} + \langle f, p'|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega'} \\ &= \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, p|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega} - \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, \psi(p'|_{\partial\Omega}) \rangle_{\Omega} \\ &= \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, p|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega} - \langle u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, p|_{\partial\Omega} \rangle_{\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Es folgt  $\tilde{u} \in \mathbb{L}_{div, \partial\tilde{\Omega}}^r(\tilde{\Omega})$ . □

Wir beschränken unsere weiteren Betrachtungen auf den Fall, daß die folgende Voraussetzung erfüllt ist:

**Voraussetzung 3.2.9**  $\Omega$  ist sternförmig.  $\Gamma$  bzw.  $\Delta := \partial\Omega \setminus \Gamma$  bestehen aus jeweils endlich vielen, regulären und in  $\partial\Omega$  abgeschlossenen bzw. offenen Zusammenhangskomponenten.

Für eine beliebige Menge  $U \in \mathbb{R}^N$  und  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \neq 0$  seien wie üblich

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &:= \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, U) < \varepsilon\}, \\ \alpha U &:= \{x \in \mathbb{R}^N : \alpha^{-1}x \in U\}. \end{aligned}$$

Dabei seien sowohl  $\alpha\emptyset$  als auch  $\emptyset_\varepsilon$  wieder die leere Menge. Für  $\alpha \neq 0$  definieren wir formal einen Operator  $\tau_\alpha$  durch

$$(\tau_\alpha\phi)(x) := \phi(\alpha^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

wobei für  $\phi$  Funktionen auf  $\mathbb{R}^N$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder in  $\mathbb{R}^N$  zugelassen sind.

**Lemma 3.2.10** Sei  $\Omega$  sternförmig bzgl. 0. Mit den natürlichen Einbettungen

$$L^r(\Omega) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{L}^r(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^r(\mathbb{R}^N)$$

gelten für  $0 < \alpha \leq 1$  die folgenden Aussagen:

1. Der Operator  $\tau_\alpha$  bildet die Räume  $L^r(\Omega)$  bzw.  $\mathbb{L}^r(\Omega)$  linear und stetig in sich ab. Eine Stetigkeitskonstante ist dabei  $\alpha^{Nr^{-1}}$ .
2. Für  $q \in L^r(\Omega)$  bzw.  $u \in \mathbb{L}^r(\Omega)$  und  $\alpha \uparrow 1$  gilt  $\tau_\alpha q \rightarrow q$  bzw.  $\tau_\alpha u \rightarrow u$  in  $L^r(\Omega)$  bzw.  $\mathbb{L}^r(\Omega)$ .
3. Für alle  $u \in \mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega)$  ist  $\tau_\alpha u \in \mathbb{L}_{div, \alpha\Gamma}^r(\alpha\Omega)$ .

*Beweis:*

1. Sei  $q \in L^r(\Omega)$ . Es folgt  $\text{supp}(\tau_\alpha q) \subset \alpha\bar{\Omega} \subset \Omega$ . Die Linearität von  $\tau_\alpha$  bzgl.  $q$  gilt nach Konstruktion. Außerdem finden wir

$$\int_{\Omega} |\tau_\alpha q|^r = \int_{\alpha\Omega} |q(\alpha^{-1}x)|^r dx = \alpha^N \int_{\Omega} |q(x)|^r dx.$$

Vollkommen analog beweisen sich die entsprechenden Aussagen für  $u \in \mathbb{L}^r(\Omega)$ .

2. Sei zunächst  $q \in L^r(\Omega) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Dann ist für jedes  $x \in \mathbb{R}^N$  die Abbildung

$$\alpha \rightsquigarrow \tau_\alpha q(x), \quad \alpha > 0,$$

stetig differenzierbar mit der Ableitung  $-\alpha^{-2}x \cdot \text{grad } q(\alpha^{-1}x)$ . Für  $\alpha < 1$  gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |q(x) - \tau_{\alpha}q(x)|^r dx &= \int_{\Omega} \left| \int_{\alpha}^1 -a^{-2} \text{grad } q(a^{-1}x) \cdot x da \right|^r dx \\
&\leq (\text{diam } \Omega)^r \int_{\Omega} \int_{\alpha}^1 a^{-2r} |\text{grad } q(a^{-1}x)|^r da dx \\
&= (\text{diam } \Omega)^r \int_{\alpha}^1 a^{-2r} \|\tau_{\alpha}(\text{grad } q)\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}^r da \\
&= (\text{diam } \Omega)^r \|\text{grad } q\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}^r \int_{\alpha}^1 a^{N-2r} da \\
&= (\text{diam } \Omega)^r \|\text{grad } q\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)}^r (1 - \alpha) \max\{\alpha^{N-2r}, 1\}.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang  $\alpha \uparrow 1$  liefert die behauptete Konvergenz. Sei nun  $q \in L^r(\Omega)$  beliebig und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein glattes  $q_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$  derart, daß

$$\|q - q_{\varepsilon}\|_{L^r(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\|q - \tau_{\alpha}q\|_{L^r(\Omega)} &\leq \|q - q_{\varepsilon}\|_{L^r(\Omega)} + \|q_{\varepsilon} - \tau_{\alpha}q_{\varepsilon}\|_{L^r(\Omega)} + \|\tau_{\alpha}q_{\varepsilon} - \tau_{\alpha}q\|_{L^r(\Omega)} \\
&\leq (1 + \alpha^{N/r}) \|q - q_{\varepsilon}\|_{L^r(\Omega)} + \|q_{\varepsilon} - \tau_{\alpha}q_{\varepsilon}\|_{L^r(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die Grenzübergänge  $\alpha \uparrow 1$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefern

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} \|q - \tau_{\alpha}q\|_{L^r(\Omega)} = 0.$$

Sei nun  $u \in \mathbb{L}^r(\Omega)$  gegeben. Dann gilt  $(\tau_{\alpha}u)_i = \tau_{\alpha}u_i$ ,  $i = 1..N$ . Also konvergiert  $\tau_{\alpha}u$  für  $\alpha \uparrow 1$  komponentenweise in  $L^r(\Omega)$  gegen  $u$ . Es folgt auch hier die behauptete Konvergenz.

3. Seien  $u \in \mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega)$  und  $p \in W_{\alpha\Delta}^{1,s}(\alpha\Omega)$  gegeben. Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist  $\tau_{\alpha}u \in \mathbb{L}^r(\alpha\Omega)$  und  $\tau_{\alpha^{-1}}p \in W_{\Delta}^{1,s}(\Omega)$ . Wir finden

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha\Omega} (\tau_{\alpha}u) \cdot \text{grad } p &= \alpha^N \int_{\Omega} u(x) \cdot \text{grad } p(\alpha x) dx \\
&= \alpha^{N-1} \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } (\tau_{\alpha^{-1}}p) \\
&= \alpha^{N-1} \langle u \cdot \nu|_{\Gamma}, (\tau_{\alpha^{-1}}p)|_{\Gamma} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Inbesondere ist  $\tau_{\alpha}u \in \mathbb{L}_{div, \alpha\Gamma}^r(\alpha\Omega)$ . □

Wir fixieren nun einen positiven Faltungskern  $\varrho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  mit

$$\text{supp } \varrho \subset B_1(0), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varrho = 1,$$

und schreiben für  $\varepsilon > 0$  wie üblich  $\varrho_\varepsilon := \varepsilon^{-N} \varrho(\varepsilon^{-1} \cdot)$  sowie

$$(\varrho_\varepsilon * \phi)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_\varepsilon(x-y) \phi(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Dabei kann  $\phi$  durch jede auf  $\mathbb{R}^N$  lokal integrierbare Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^N$  ersetzt werden. Wie in Voraussetzung 3.2.9 sei  $\Delta = \partial\Omega \setminus \Gamma$ .

**Lemma 3.2.11** *Für jedes  $u \in \mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega)$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ist die Funktion  $\varrho_\varepsilon * u$  divergenzfrei auf  $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}$ .*

*Beweis:* Sei  $q \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  beliebig mit kompaktem Träger in  $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}$ . Mit den Rechenregeln der Faltung finden wir  $\varrho_\varepsilon * u \in \mathbb{L}^r(\mathbb{R}^N)$  und weiter

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}} (\varrho_\varepsilon * u) \cdot \text{grad } q &= \int_{\mathbb{R}^N} (\varrho_\varepsilon * u) \cdot \text{grad } q \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \text{grad } q(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_\varepsilon(x-y) u(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_\varepsilon(x-y) \text{grad } q(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(-y) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_\varepsilon(y-x) \text{grad } q(-x) dx dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u(-y) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varrho_\varepsilon(y-x) (\text{grad } \tau_{-1} q)(x) dx dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u(-y) \cdot (\varrho_\varepsilon * \text{grad } \tau_{-1} q)(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u(-y) \cdot \text{grad } (\varrho_\varepsilon * \tau_{-1} q)(y) dy \\ &= (-1)^N \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot \text{grad } (\tau_{-1} (\varrho_\varepsilon * \tau_{-1} q)) \\ &= (-1)^N \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } (\tau_{-1} (\varrho_\varepsilon * \tau_{-1} q)). \end{aligned}$$

Dabei gelten für  $\Delta \neq \emptyset$  die folgenden Trägerabschätzungen:

$$\begin{aligned} \text{supp } \tau_{-1} q &\subset \mathbb{R}^N \setminus (-1)\overline{\Delta_\varepsilon}, \\ \text{supp } \varrho_\varepsilon * \tau_{-1} q &\subset \mathbb{R}^N \setminus (-1)\Delta, \\ \text{supp } \tau_{-1} (\varrho_\varepsilon * \tau_{-1} q) &\subset \mathbb{R}^N \setminus \Delta. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}} (\varrho_\varepsilon * u) \cdot \text{grad } q &= (-1)^N \int_{\Omega} u \cdot \text{grad } (\tau_{-1}(\varrho_\varepsilon * \tau_{-1}q)) \\ &= (-1)^N \langle u \cdot \nu |_{\Gamma}, (\tau_{-1}(\varrho_\varepsilon * \tau_{-1}q)) |_{\Gamma} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Wir können nun folgende Dichtheitsresultate beweisen:

**Satz 3.2.12** *Der Raum*

$$\mathcal{L}_{div,c}(\Omega) := \left\{ u|_{\Omega} : u \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \text{div } u = 0, \text{supp } u \subset \Omega \right\}.$$

liegt dicht in  $\mathbb{L}_{div,\partial\Omega}^r(\Omega)$ .

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $\Omega$  sternförmig bzgl. 0. Der Raum  $\mathcal{L}_{div,c}(\Omega)$  ist trivialerweise in  $\mathbb{L}_{div,\partial\Omega}^r(\Omega)$  enthalten. Seien  $u \in \mathbb{L}_{div,\partial\Omega}^r(\Omega)$  und  $\delta > 0$  gegeben. Nach Lemma 3.2.10 existiert ein  $0 < \alpha < 1$  derart, daß

$$\|\tau_\alpha u - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq \delta.$$

Es gilt  $\tau_\alpha u \in \mathbb{L}_{div,\alpha\partial\Omega}^r(\alpha\Omega)$ . Wir wählen ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ , so daß

$$\text{dist}(\alpha\Omega, \partial\Omega) > 2\varepsilon.$$

Durch Verkleinern von  $\varepsilon$  können wir erreichen, daß

$$\|\varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u - \tau_\alpha u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq \delta.$$

Nach der Variante von Lemma 3.2.11 für das Gebiet  $\alpha\Omega$  und das Randstück  $\partial(\alpha\Omega)$  ist

$$u_\delta := \varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u$$

divergenzfrei in ganz  $\mathbb{R}^N$ . Außerdem ist  $u_\delta$  glatt in ganz  $\mathbb{R}^N$  und besitzt einen kompakten Träger in  $\Omega$ , d.h.  $u_\delta \in \mathcal{L}_{div,c}(\Omega)$ . Schließlich gilt

$$\|u_\delta - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq \|\varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u - \tau_\alpha u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} + \|\tau_\alpha u - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq 2\delta.$$

Da  $u$  und  $\delta$  beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung. □

**Satz 3.2.13** *Der Raum*

$$\mathcal{L}_{div}(\Omega) := \left\{ u|_{\Omega} : u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N), \text{div } u = 0 \right\}.$$

liegt dicht in  $\mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$ .



*Beweis:* Der Raum  $\mathcal{L}_{div}(\Omega)$  ist trivialerweise in  $\mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  enthalten. Sei  $u \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  gegeben. Wir wählen eine hinreichend große Kugel  $K$ , so daß  $\bar{\Omega} \subset K$ . Nach Lemma 3.2.8 und Lemma 3.2.12 existieren eine Funktion  $\tilde{u} \in \mathbb{L}_{div, \partial K}^r(K)$  als Fortsetzung von  $u$  und eine Folge  $(\tilde{u}_n)$  aus  $\mathcal{L}_{div, c}(K)$ , die in  $\mathbb{L}_{div}^r(K)$  gegen  $\tilde{u}$  konvergiert. Die Folge der Einschränkungen  $(\tilde{u}_n|_{\Omega})$  konvergiert dann in  $\mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$  gegen  $u$ .  $\square$

Wie eine Durchsicht des Beweises zeigt, gilt Satz 3.2.13 für jedes einfach zusammenhängende LIPSCHITZ-Gebiet  $\Omega$ .

### 3.3 Stromfunktionen zweidimensionaler, divergenzfreier $\mathbb{L}^r$ -Funktionen

Wir betrachten im folgenden den Fall  $N = 2$ . Ziel dieses Abschnitts ist eine andere, für bestimmte Zwecke praktischere, Beschreibung des Raumes  $\mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega)$ . Für das Verständnis der folgenden Kapitel ist dieser Abschnitt allerdings nicht erforderlich. Wir setzen wieder voraus, daß  $\Omega$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta = \partial\Omega \setminus \Gamma$  der Voraussetzung 3.2.9 genügen.

Wir definieren den Operator  $\sigma_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und formal den Differentialoperator curl durch

$$\begin{aligned} \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \\ \text{curl} &:= \sigma \circ \text{grad}. \end{aligned}$$

**Lemma 3.3.1** *Der Operator curl bildet  $W^{1,r}(\Omega)$  linear und stetig in  $\mathbb{L}^r(\Omega)$  ab.*

*Beweis:* Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen von  $\sigma$  und curl.  $\square$

Für  $\Gamma \neq \emptyset$  definieren wir den Raum

$$W_{\Gamma, loc}^{1,r}(\Omega) := \left\{ q \in W_{\emptyset}^{1,r}(\Omega) : q|_{\Gamma} \text{ lokal konstant auf } \Gamma \right\}.$$

Dabei heißt  $q|_{\Gamma}$  *lokal konstant* auf  $\Gamma$ , wenn  $q|_{\Gamma}$  konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\Gamma$  ist. Ist  $\Gamma = \emptyset$ , so sei

$$W_{\emptyset, loc}^{1,r}(\Omega) := W_{\emptyset}^{1,r}(\Omega).$$

Der Raum  $W_{\Gamma, loc}^{1,r}(\Omega)$  ist in jedem Fall abgeschlossener Unterraum von  $W_{\emptyset}^{1,r}(\Omega)$ .

Wir werden nun zeigen, daß, unter unseren Voraussetzungen an  $\Omega$ ,  $\Gamma$  und  $\Delta$ , für jede Funktion  $u \in \mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega)$  ein  $q \in W_{\Gamma, loc}^{1,r}(\Omega)$  derart existiert, daß sich  $u$  in der Form

$$u = \text{curl } q \tag{14}$$

schreiben läßt. Jede Funktion  $q \in W_{\Gamma, loc}^{1,r}(\Omega)$ , die die Gleichung (14) erfüllt, nennen wir *Stromfunktion* von  $u$ . Zwei verschiedene Stromfunktionen von  $u$  unterscheiden sich nur um eine Konstante.

**Satz 3.3.2** *Der Operator curl bildet  $W_{\Gamma,loc}^{1,r}(\Omega)$  isometrisch in  $\mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega)$  ab.*

*Beweis:* Zunächst gilt nach dem Satz von SCHWARZ

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{curl} q = 0 \quad \forall q \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Mit einem Dichtheitsargument folgt die Gültigkeit dieser Gleichung für alle  $q \in W^{1,r}(\Omega)$ . Sei nun ein  $q \in W_{\Gamma,loc}^{1,r}(\Omega)$  fixiert und  $u := \operatorname{curl} q \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega)$ .  $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$  seien die Zusammenhangskomponenten von  $\Gamma$ . Durch Addition einer geeigneten Konstanten zu  $q$  finden wir für jedes  $i = 1 \dots n$  ein  $q_i \in W_{\Gamma_i}^{1,r}(\Omega)$  derart, daß  $u = \operatorname{curl} q_i$ . Für  $p \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma_i}^{1,s}(\Omega)$  gilt

$$\langle u \cdot \nu|_{\Gamma_i}, p|_{\Gamma_i} \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{curl} q_i \cdot \operatorname{grad} p = - \int_{\Omega} \operatorname{curl} p \cdot \operatorname{grad} q_i = - \langle \operatorname{curl} p \cdot \nu|_{\Gamma_i}, q_i|_{\Gamma_i} \rangle = 0.$$

Es gilt also

$$u \cdot \nu|_{\Gamma_i} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n.$$

Da die Mengen  $\Gamma_i$  in  $\partial\Omega$  (und damit in  $\mathbb{R}^2$ ) abgeschlossen sind, existiert für jedes  $i = 1 \dots n$  eine Funktion  $\phi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  derart, daß

$$\begin{aligned} \phi_i|_{\Gamma_i} &= 1, \\ \phi_i|_{\Gamma_j} &= 0 \quad \forall j \neq i. \end{aligned}$$

Für  $p \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega)$  sei

$$\tilde{p} := \sum_{i=1}^n \phi_i p \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma}^{1,s}(\Omega).$$

Dann gilt  $\tilde{p}|_{\Gamma} = p|_{\Gamma}$  und

$$\phi_i p \in W_{\partial\Omega \setminus \Gamma_i}^{1,s}(\Omega) \quad \forall i = 1 \dots n.$$

Wir erhalten damit

$$\langle u \cdot \nu|_{\Gamma}, p|_{\Gamma} \rangle = \langle u \cdot \nu|_{\Gamma}, \tilde{p}|_{\Gamma} \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{grad} (\phi_i p) = \sum_{i=1}^n \langle u \cdot \nu|_{\Gamma_i}, \phi_i p|_{\Gamma_i} \rangle = 0.$$

Die Isometrie von curl folgt direkt aus

$$\|\operatorname{grad} q\|_r = \|\operatorname{curl} q\|_r.$$

□

**Satz 3.3.3** *Der Operator curl bildet  $W_{\Gamma,loc}^{1,r}(\Omega)$  auf  $\mathbb{L}_{div,\Gamma}^r(\Omega)$  ab.*

*Beweis:*

1. O.B.d.A. sei  $\Omega$  sternförmig bzgl. 0. Für  $0 < \delta < 1/2$  sei

$$\Delta^\delta := \left\{ tx : x \in \partial\Omega \cap \Delta_\delta, t \in (1 - \delta, 1) \right\}.$$

Dabei ist  $\emptyset^\delta = \emptyset$ . In jedem Fall ist  $\Omega \setminus \overline{\Delta^\delta}$  wieder sternförmig bzgl. 0.

Ist  $\Delta = \emptyset$  oder  $\Delta = \partial\Omega$ , so sei  $\delta_0 := 1/2$ . Andernfalls besteht die Menge  $\Gamma \cap \overline{\Delta}$  nur aus endlich vielen Punkten, und es existiert ein hinreichend kleines  $\delta_0 < 1/2$ , so daß für alle  $\delta < \delta_0$  und jede Zusammenhangskomponente  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$  gilt: Die Menge  $\Delta^\delta$  überdeckt  $\Gamma_1$  nicht vollständig, und die Menge  $\Gamma_1 \setminus \Delta^\delta$  ist wieder zusammenhängend.

Sei  $\varrho$  wieder ein positiver Faltungskern wie im letzten Abschnitt.

2. Seien nun ein  $u \in \mathbb{L}_{div, \Gamma}^r(\Omega)$  und ein  $\delta < \delta_0$  fixiert. Es existiert ein  $\alpha$  hinreichend nahe bei 1, so daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \|\tau_\alpha u - u\|_{L^r(\Omega)} &\leq \delta, \\ \alpha \overline{\Delta} &\subset \Delta^\delta. \end{aligned}$$

Da  $\|\varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u - \tau_\alpha u\|_{\mathbb{L}^r(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , existiert auch ein hinreichend kleines  $\varepsilon$ , so daß

$$\|\varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u - \tau_\alpha u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq \delta.$$

Verkleinern wir ggf. dieses  $\varepsilon$ , so können wir erreichen, daß zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\alpha \Delta, \mathbb{R}^2 \setminus \Delta^\delta) &> 2\varepsilon, \\ \text{dist}(\alpha \Omega, (\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})\partial\Omega) &> 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.10 und der Variante von Lemma 3.2.11 für das Gebiet  $\alpha\Omega$  mit dem Randstück  $\alpha\Gamma$  ist

$$\tau_\alpha u \in \mathbb{L}_{div, \alpha\Gamma}^r(\alpha\Omega) \quad \text{und} \quad \varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u \in \mathbb{L}_{div}^r(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{(\alpha\Delta)_\varepsilon}).$$

Nach Konstruktion ist  $\overline{(\alpha\Delta)_\varepsilon} \subset \Delta^\delta$ . Mit  $u_\delta := \varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u$  und  $\Omega^\delta := \Omega \setminus \overline{\Delta^\delta}$  finden wir daher  $u_\delta \in \mathbb{L}_{div}^r(\Omega^\delta)$ . Außerdem gilt

$$\text{supp } u_\delta \subset (\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})\overline{\Omega} \subset \Omega,$$

d.h.  $u_\delta$  verschwindet in einer Umgebung von  $\partial\Omega$ . Schließlich gilt

$$\|u_\delta - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} = \|\varrho_\varepsilon * \tau_\alpha u - \tau_\alpha u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} + \|\tau_\alpha u - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq 2\delta.$$

Die Funktion  $u_\delta$  ist glatt und divergenzfrei auf dem sternförmigen Gebiet  $\Omega^\delta$ . Insbesondere erfüllt  $\sigma u_\delta$  dort die Integrabilitätsbedingung. Daher existiert für  $u_\delta$  eine glatte Stromfunktion  $q_\delta$  auf  $\Omega^\delta$ , und es gilt

$$\|\operatorname{curl} q_\delta - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^\delta)} \leq \|u_\delta - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} \leq 2\delta.$$

3. Es sei eine monoton fallende Nullfolge  $(\delta_n)$  mit  $\delta_1 < \delta_0$  und eine kleine Kugel  $K \subset \Omega \setminus \Delta^{\delta_0}$  gegeben. Wir schreiben  $u_n$  bzw.  $q_n$  bzw.  $\Delta^n$  bzw.  $\Omega^n$  für  $u_{\delta_n}$  bzw.  $q_{\delta_n}$  bzw.  $\Delta^{\delta_n}$  bzw.  $\Omega^{\delta_n}$  und vereinbaren für  $\Gamma = \emptyset$

$$X^n := \left\{ q \in W^{1,r}(\Omega^n) : \int_K q = 0 \right\}$$

bzw. für  $\Gamma \neq \emptyset$

$$X^n := \left\{ q \in W^{1,r}(\Omega^n) : \int_K q = 0, q \text{ lokal konstant auf } \Gamma \setminus \Delta^n \right\}.$$

Die Räume  $X^n$  sind mit den Normen

$$\|\cdot\|_{X^n} := \|\operatorname{curl} \cdot\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^n)}$$

jeweils BANACH-Räume. Nach Konstruktion gelten für  $n > m$  die Inklusionen

$$\Delta^n \subset \Delta^m \quad \text{und} \quad \Omega^m \subset \Omega^n.$$

Wir betrachten zunächst  $\Gamma \neq \emptyset$  und wählen eine Zusammenhangskomponente  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$ . Für jedes  $n$  verschwindet  $u_n$  in einer Umgebung von  $\Gamma_1 \setminus \Delta^1 \subset \partial\Omega \setminus \Delta^n$ . Deshalb sind alle  $q_n$  konstant auf  $\Gamma_1 \setminus \Delta^1$ . Durch Addition geeigneter Konstanten (wobei diese Konstanten von  $\Gamma_1$  abhängen dürfen) können wir erreichen, daß

$$q_n|_{\Gamma_1 \setminus \Delta^1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Im Raum  $Y := W_{\Gamma_1 \setminus \Delta^1}^{1,r}(\Omega^1)$  mit der Norm  $\|\cdot\|_Y := \|\operatorname{curl} \cdot\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^1)}$  gilt

$$\begin{aligned} \|q_n - q_m\|_Y &\leq \|\operatorname{curl} q_n - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^1)} + \|\operatorname{curl} q_m - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^1)} \\ &\leq \|\operatorname{curl} q_n - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^n)} + \|\operatorname{curl} q_m - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^m)} \\ &\leq 2\delta_n + 2\delta_m. \end{aligned}$$

Es existiert also  $q_1^1 \in Y$  als Grenzwert der Folge  $(q_n)$ . Die Funktion  $q_1^1$  ist Stromfunktion für die Einschränkung von  $u$  auf  $\Omega^1$ , denn es gilt

$$\|\operatorname{curl} q_1^1 - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^1)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|q_1^1 - q_n\|_Y + \|\operatorname{curl} q_n - u\|_{\mathbb{L}^r(\Omega^n)} \right) = 0.$$

Diese Konstruktion können wir mit jeder anderen Zusammenhangskomponente  $\Gamma_2$  von  $\Gamma$  ebenfalls durchführen. Wir erhalten dann eine Stromfunktion  $q_2^1 \in W_{\Gamma_2 \setminus \Delta^1}^{1,r}(\Omega^1)$ . Da

sich  $q_1^1$  und  $q_2^1$  auf  $\Omega^1$  nur um eine Konstante unterscheiden, ist  $q_1^1$  konstant auf  $\Gamma_2 \setminus \Delta^1$ . Da  $\Gamma_2$  beliebig gewählt war, ist  $q_1^1$  lokal konstant auf  $\Gamma \setminus \Delta^1$ . Nach Addition einer geeigneten Konstanten finden wir eine Funktion  $q^1 \in X^1$ , die in  $\Omega^1$  Stromfunktion von  $u$  ist.

Sei nun  $\Gamma = \emptyset$ . Dann können wir o.B.d.A voraussetzen:

$$\int_K q_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analog zu oben kann gezeigt werden, daß die Folge  $(q_n)$  im Raum  $X^1$  gegen eine Funktion  $q^1$  konvergiert, die auf  $\Omega^1$  Stromfunktion von  $u$  ist.

Sei nun  $\Gamma$  wieder beliebig. Wir können die eben beschriebene Konstruktion wiederholen, indem wir aus der Folge  $(\delta_n)$  das erste Element streichen. Die so entstehende Stromfunktion von  $u$  auf  $\Omega^2$  sei  $q^2$ . Durch iterative Fortsetzung erhalten wir schließlich eine Folge  $(q^m)$ , so daß für alle  $m \in \mathbb{N}$  die Funktion  $q^m \in X^m$  eine Stromfunktion von  $u$  auf  $\Omega^m$  ist. Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} q^{m_1} |_{\Omega^{m_2}} &= q^{m_2} |_{\Omega^{m_2}} \quad \forall m_1 > m_2, \\ \|q^m\|_{X^m} &\leq \|u\|_{L^r(\Omega)} \quad \forall m. \end{aligned}$$

Setzen wir jedes  $q^m$  auf  $\Delta^m$  zu Null fort, so liefert das Lemma von FATOU die Existenz eines  $q \in L^r(\Omega)$  als punktweiser Grenzwert der Folge  $(q^m)$ . Durch elementare Rechnungen kann gezeigt werden, daß  $q \in W^{1,r}(\Omega)$  und daß  $\text{curl } q = u$  auf ganz  $\Omega$ .

Sei noch einmal  $\Gamma \neq \emptyset$ . Insbesondere ist  $q$  lokal konstant auf alle Mengen  $\Gamma^m := \Gamma \setminus \Delta^m$ . Da die  $\Gamma^m$ -Spuren von  $q$  für  $m \rightarrow \infty$  punktweise fast überall auf  $\Gamma$  gegen die  $\Gamma$ -Spur konvergieren, ist  $q$  lokal konstant auf  $\Gamma$ .

Sei  $\Gamma$  wieder beliebig. Durch Addition einer geeigneten Konstanten finden wir schließlich ein  $q \in W_{\Gamma,loc}^{1,r}(\Omega)$ , das Stromfunktion von  $u$  auf  $\Omega$  ist.  $\square$

## 4 Analytische Lösung der Aufgabe

### 4.1 Funktionalanalytische Formulierung des Problems

In diesem Kapitel werden wir das in Kapitel 1 formulierte physikalische Problem mathematisch exakt formulieren und lösen. Sei  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet des  $\mathbb{R}^N$  und seien  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  drei paarweise disjunkte, normale Randstücke von  $\Omega$  mit  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$ .

Unter  $\Omega$  wollen wir das Gebiet (etwa einen Silo) verstehen, in dem wir den Druck  $p$  und die Geschwindigkeit  $v$  suchen. Während  $\Gamma_1$  bzw.  $\Gamma_3$  Löcher im Rand von  $\Omega$  repräsentieren, in die das Strömungsmittel hineingepumpt wird bzw. aus denen es entweichen kann, entspricht  $\Gamma_2$  einer undurchlässigen Wand von  $\Omega$ . Seien weiterhin

$$p_r \in W^{1,3/2}(\Omega) \quad \text{sowie} \quad v_r \in \mathbb{L}_{div,\Gamma_2}^3(\Omega)$$

gegeben. Im folgenden werden

$$v_r \cdot \nu|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \quad \text{bzw.} \quad p_r|_{\Gamma_3}$$

als vorgegebene Randwerte der Normalenspur der Geschwindigkeit auf  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  bzw. der Spur des Druckes auf  $\Gamma_3$  interpretiert. Weiterhin seien zwei Funktionen

$$a, b \in L^\infty(\Omega)$$

und vier positive Konstanten  $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}$  derart gegeben, daß

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \underline{a} \leq a(x) \leq \bar{a}, \\ 0 < \underline{b} \leq b(x) \leq \bar{b} \end{array} \right\} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Wir formulieren die

**Aufgabe 4.1.1** *Gesucht sind eine Geschwindigkeit  $v \in \mathbb{L}^3(\Omega)$  und ein Druck  $p \in W^{1,3/2}(\Omega)$  mit den folgenden Eigenschaften:*

1.  $\text{grad } p + (a + b |v|)v = 0,$
2.  $\text{div } v = 0,$
3.  $v \cdot \nu|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = v_r \cdot \nu|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2},$
4.  $p|_{\Gamma_3} = p_r|_{\Gamma_3}.$

Jede Lösung der Aufgabe 4.1.1 nennen wir *schwache Lösung* des physikalischen Problems 1.0.1. Im nächsten Schritt werden wir diese Aufgabe zu einer Operatorgleichung ohne explizite Rand- und Nebenbedingungen umformulieren. Wir definieren dazu zwei Operatoren

$$N, M : \mathbb{L}^3(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$$

durch

$$\left. \begin{array}{l} Nv := av + b |v| v, \\ Mv := N(v + v_r) + \text{grad } p_r \end{array} \right\} \forall v \in \mathbb{L}^3(\Omega). \quad (15)$$

Die Korrektheit der Definition ergibt sich aus

**Lemma 4.1.2** Für  $u, v \in \mathbb{L}^3(\Omega)$  gilt:

1.  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  mit  $\|u\|_{3/2} \leq |\Omega|^{1/3} \|u\|_3$ ,
2.  $|u| v \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  mit  $\||u| v\|_{3/2} \leq \|u\|_3 \|v\|_3$ .

*Beweis:* Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der HÖLDER-Ungleichung. □

Im folgenden wollen wir  $K$  für

$$\text{id} : \mathbb{L}_{div, \Gamma_1 \cup \Gamma_2}^3(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^3(\Omega)$$

und  $L$  für

$$\text{grad} : W_{\Gamma_3}^{1, 3/2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$$

schreiben. Mit Lemma 3.1.3 ergibt sich die

**Folgerung 4.1.3** Die Operatoren  $K$  und  $L$  besitzen folgende Eigenschaften:

1.  $K$  und  $L$  sind lineare Isometrien.
2. Es gilt  $\text{im } K = \ker L^*$  und  $\text{im } L = \ker K^*$ .

Damit formulieren wir die

**Aufgabe 4.1.4** Gesucht sind  $v \in \mathbb{L}_{div, \Gamma_1 \cup \Gamma_2}^3(\Omega)$  und  $p \in W_{\Gamma_3}^{1, 3/2}(\Omega)$ , so daß

$$Lp + MKv = 0. \tag{16}$$

Die Aufgaben 4.1.1 und 4.1.4 sind äquivalent, denn es gilt:

$$(v, p) \text{ ist Lösung von 4.1.4} \iff (v + v_r, p + p_r) \text{ ist Lösung von 4.1.1.}$$

Definieren wir noch die Operatoren

$$A := K^*MK \quad \text{und} \quad B := L^*M^{-1}L,$$

wobei  $M^{-1}$  zunächst nur als formal inverser Operator existiert, ergänzt sich Diagramm 3.1.2 zu

**Diagramm 4.1.5**

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{L}_{div, \Gamma_1 \cup \Gamma_2}^3(\Omega) & \xrightarrow{K} & \mathbb{L}^3(\Omega) & \xrightarrow{L^*} & W_{\Gamma_3}^{1, 3/2}(\Omega)^* \\
 \downarrow A & \circlearrowleft & \downarrow M & \circlearrowleft & \uparrow B \\
 \mathbb{L}_{div, \Gamma_1 \cup \Gamma_2}^3(\Omega)^* & \xleftarrow{K^*} & \mathbb{L}^{3/2}(\Omega) & \xleftarrow{L} & W_{\Gamma_3}^{1, 3/2}(\Omega)
 \end{array}$$

Diagramme dieser und ähnlicher Bauart wurden von GAJEWSKI und GRÖGER in [4] untersucht. Dort wird auch der Begriff *konjugierte Operatoren* für  $A$  und  $B$  eingeführt. Wir werden sehen, daß damit die Aufgabe 4.1.4, die sowohl  $v$  als auch  $p$  als Unbekannte enthält, in zwei unabhängige Teilaufgaben umformuliert werden kann, von denen die eine nur noch  $v$ , die andere nur noch  $p$  als Unbekannte enthält. Entscheidend werden dabei, neben den Eigenschaften von  $M$  und  $M^{-1}$ , die in Folgerung 4.1.3 zusammengefaßten Eigenschaften von  $K$  und  $L$  sein.

Wir werden im folgenden auch

$$\begin{aligned} \text{V} & \text{ statt } \mathbb{L}_{div, \Gamma_1 \cup \Gamma_2}^3(\Omega) \quad \text{und} \\ \text{II} & \text{ statt } W_{\Gamma_3}^{1, 3/2}(\Omega) \end{aligned}$$

schreiben.

## 4.2 Eigenschaften der eingeführten Operatoren

**Satz 4.2.1** *Der Operator  $N$  besitzt folgende Eigenschaften:*

1. Für alle  $v_1, v_2 \in \mathbb{L}^3(\Omega)$  gilt

$$\langle Nv_1 - Nv_2, v_1 - v_2 \rangle \geq \underline{a} \|v_1 - v_2\|_2^2, \quad (17)$$

$$\langle Nv_1 - Nv_2, v_1 - v_2 \rangle \geq \underline{b} (\|v_1\|_3 - \|v_2\|_3)^2 (\|v_1\|_3 + \|v_2\|_3) \quad (18)$$

und

$$\|Nv_1 - Nv_2\|_1 \leq \left( \bar{a} |\Omega|^{1/2} + \bar{b} \|v_1 - v_2\|_2 + 2\bar{b} \|v_2\|_2 \right) \|v_1 - v_2\|_2, \quad (19)$$

$$\|Nv_1 - Nv_2\|_{3/2} \leq \left( \bar{a} |\Omega|^{1/3} + \bar{b} \|v_1\|_3 + \bar{b} \|v_2\|_3 \right) \|v_1 - v_2\|_3. \quad (20)$$

2.  $N$  ist stetiger und beschränkter Potentialoperator mit dem Potential

$$G(v) := \int_{\Omega} \left( \frac{a}{2} |v|^2 + \frac{b}{3} |v|^3 \right) \quad \forall v \in \mathbb{L}^3(\Omega). \quad (21)$$

3.  $N$  ist strikt monoton, maximal monoton und koerzitiv bzgl. jeder Funktion  $v \in \mathbb{L}^3(\Omega)$ .

4.  $N$  besitzt die  $S$ -Eigenschaft.

*Beweis:* Im folgenden seien  $v_1, v_2 \in \mathbb{L}^3(\Omega)$ .

1. Es gilt

$$\begin{aligned} (|v_1| v_1 - |v_2| v_2)(v_1 - v_2) &= |v_1| v_1^2 + |v_2| v_2^2 - (|v_1| + |v_2|) v_1 \cdot v_2 \\ &\geq |v_1|^3 + |v_2|^3 - (|v_1| + |v_2|) |v_1| |v_2| \\ &= |v_1|^3 + |v_2|^3 - |v_1|^2 |v_2| - |v_1| |v_2|^2 \\ &= (|v_1| - |v_2|)^2 (|v_1| + |v_2|) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$



und weiter mit HÖLDER-Ungleichung und Lemma 4.1.2

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} b(|v_1| |v_1 - v_2| - |v_2| |v_2|)(v_1 - v_2) &\geq \underline{b} \int_{\Omega} |v_1|^3 + |v_2|^3 - |v_1|^2 |v_2| - |v_1| |v_2|^2 \\
&\geq \underline{b} \left( \|v_1\|_3^3 + \|v_2\|_3^3 - \|v_1\|_3^2 \|v_2\|_3 - \|v_1\|_3 \|v_2\|_3^2 \right) \\
&= \underline{b} (\|v_1\|_3 - \|v_2\|_3)^2 (\|v_1\|_3 + \|v_2\|_3) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt finden wir

$$\begin{aligned}
\langle Nv_1 - Nv_2, v_1 - v_2 \rangle &= \int_{\Omega} a(v_1 - v_2)^2 + \int_{\Omega} b(|v_1| |v_1 - v_2| - |v_2| |v_2|)(v_1 - v_2) \\
&\geq \int_{\Omega} \underline{a}(v_1 - v_2)^2 + \int_{\Omega} \underline{b}(|v_1| |v_1 - v_2| - |v_2| |v_2|)(v_1 - v_2) \\
&\geq \underline{a} \|v_1 - v_2\|_2^2 + \underline{b} (\|v_1\|_3 - \|v_2\|_3)^2 (\|v_1\|_3 + \|v_2\|_3).
\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left| |v_1| |v_1 - v_2| - |v_2| |v_2| \right| &\leq \left| |v_1| (v_1 - v_2) \right| + \left| (|v_1| - |v_2|) v_2 \right| \\
&\leq \left| |v_1| (v_1 - v_2) \right| + \left| |v_1 - v_2| |v_2| \right| \\
&\leq (|v_1| + |v_2|) |v_1 - v_2| \tag{22} \\
&\leq (|v_1 - v_2| + 2|v_2|) |v_1 - v_2| \tag{23}
\end{aligned}$$

und der HÖLDER-Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|Nv_1 - Nv_2\|_1 &\leq \bar{a} \|v_1 - v_2\|_1 + \bar{b} \left\| |v_1| |v_1 - v_2| - |v_2| |v_2| \right\|_1 \\
&\leq \bar{a} \|v_1 - v_2\|_1 + \bar{b} \left\| (|v_1 - v_2| + 2|v_2|) |v_1 - v_2| \right\|_1 \\
&\leq \bar{a} \|v_1 - v_2\|_1 + \bar{b} \left\| |v_1 - v_2| + 2|v_2| \right\|_2 \|v_1 - v_2\|_2 \\
&\leq \bar{a} |\Omega|^{1/2} \|v_1 - v_2\|_2 + \bar{b} \left( \|v_1 - v_2\|_2 + 2 \|v_2\|_2 \right) \|v_1 - v_2\|_2.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.1.2 und der Abschätzung (22) erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned}
\|Nv_1 - Nv_2\|_{3/2} &\leq \bar{a} \|v_1 - v_2\|_{3/2} + \bar{b} \left\| |v_1| |v_1 - v_2| - |v_2| |v_2| \right\|_{3/2} \\
&\leq \bar{a} \|v_1 - v_2\|_{3/2} + \bar{b} \left\| (|v_1| + |v_2|) |v_1 - v_2| \right\|_{3/2} \\
&\leq \bar{a} |\Omega|^{1/3} \|v_1 - v_2\|_3 + \bar{b} \left( \|v_1\|_3 + \|v_2\|_3 \right) \|v_1 - v_2\|_3.
\end{aligned}$$

2. Die Stetigkeit und die Beschränktheit von  $N$  folgen direkt aus Ungleichung (20). Um zu zeigen, daß  $N$  Gradient von  $G$  ist, muß die Gültigkeit der Gleichung

$$\langle Nv_1, v_2 \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (G(v_1 + tv_2) - G(v_1))$$

nachgewiesen werden. Es gilt

$$\frac{1}{t}(G(v_1 + tv_2) - G(v_1)) = \int_{\Omega} \left( \frac{a}{2t}(|v_1 + tv_2|^2 - |v_1|^2) + \frac{b}{3t}(|v_1 + tv_2|^3 - |v_1|^3) \right).$$

Für  $t \rightarrow 0$  konvergiert der Integrand auf der rechten Seite punktweise fast überall gegen die Funktion

$$av_1 \cdot v_2 + b |v_1| |v_1 \cdot v_2|$$

und wird für  $|t| \leq 1$  majorisiert durch die integrierbare Funktion

$$\bar{a}(|v_1| |v_2| + \frac{1}{2} |v_2|^2) + \bar{b}(|v_1|^2 |v_2| + |v_1| |v_2|^2 + \frac{1}{3} |v_2|^3).$$

Da

$$\int_{\Omega} av_1 \cdot v_2 + b |v_1| |v_1 \cdot v_2| = \langle Nv_1, v_2 \rangle,$$

ist  $G$  GÂTEAUX-differenzierbar mit dem Gradienten  $N$ .

3. Die strikte Monotonie von  $N$  ist schon bewiesen. Mit der Stetigkeit folgt nach Lemma 2.2.2 auch die maximale Monotonie. Die Koerzitivität (bzgl.  $v_2$ ) ergibt sich aus folgender Abschätzung mit HÖLDER-Ungleichung und Lemma 4.1.2:

$$\begin{aligned} \langle Nv_1, v_1 - v_2 \rangle &= \int_{\Omega} (av_1 \cdot v_1 - av_1 \cdot v_2 + b |v_1| |v_1 \cdot v_1| - b |v_1| |v_1 \cdot v_2|) \\ &\geq 0 - \bar{a} \|v_1\|_3 \|v_2\|_{3/2} + \underline{b} \|v_1\|_3^3 - \bar{b} \| |v_1| |v_1| \|_{3/2} \|v_2\|_3 \\ &= -\bar{a} \|v_1\|_3 \|v_2\|_{3/2} + \underline{b} \|v_1\|_3^3 - \bar{b} \|v_1\|_3^2 \|v_2\|_3. \end{aligned} \quad (24)$$

4. Sei  $(v_n)$  Folge aus  $\mathbb{L}^3(\Omega)$  mit

$$v_n \rightharpoonup v \text{ in } \mathbb{L}^3(\Omega) \quad \text{und} \quad \langle Nv_n - Nv, v_n - v \rangle \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt mit (18) auch

$$\|v_n\|_3 \rightarrow \|v\|_3.$$

$\mathbb{L}^3(\Omega)$  ist aber uniform konvex. Deshalb folgt (vgl. [3], Kapitel I, Satz 5.12)

$$v_n \rightarrow v \text{ in } \mathbb{L}^3(\Omega).$$

□

**Satz 4.2.2** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Es existiert der zu  $N$  inverse Operator  $N^{-1} : \mathbb{L}^{3/2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^3(\Omega)$ . Für  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  ist*

$$N^{-1}u = \left( -a(2b|u|)^{-1} + \sqrt{a^2(2b|u|)^{-2} + (b|u|)^{-1}} \right) u. \quad (25)$$

*Dabei gelte  $0^{-1} = 0$ .*

2.  *$N^{-1}$  ist beschränkt, strikt und maximal monoton sowie koerzitiv bzgl. jeder Funktion  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$ .*

3.  *$N^{-1}$  ist stetiger Potentialoperator mit Potential  $G^*$ .*

4. *Für  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  ist*

$$G^*(u) = \frac{1}{4}G(2N^{-1}u). \quad (26)$$

5.  *$N^{-1}$  besitzt die  $S$ -Eigenschaft.*

*Beweis:*

1. Die Existenz von  $N^{-1}$  liefert Lemma 2.2.3; die Formel (25) erhalten wir durch Nachrechnen.

2. Da  $N$  und  $N^{-1}$  bijektiv sind, übertragen sich strikte und maximale Monotonie von  $N$  auf  $N^{-1}$ . Für  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  sei  $v := N^{-1}u$ . Mit Lemma 4.1.2 finden wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{3/2}^{3/2} &= \|Nv\|_{3/2}^{3/2} = \int_{\Omega} \left( a|v| + b|v|^2 \right)^{3/2} \\ &\geq \int_{\Omega} \left( \underline{b}|v|^2 \right)^{3/2} \\ &= \underline{b}^{3/2} \| |v| v \|_{3/2}^{3/2} = \underline{b}^{3/2} \|v\|_3^3 = \underline{b}^{3/2} \|N^{-1}u\|_3^3 \end{aligned}$$

und damit die Beschränktheit von  $N^{-1}$ . Nach Lemma 4.1.2 gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u\|_{3/2} &= \|Nv\|_{3/2} \leq \bar{a} \|v\|_{3/2} + \bar{b} \| |v| v \|_{3/2} \\ &\leq \bar{a} |\Omega|^{1/3} \|v\|_3 + \bar{b} \|v\|_3^2 \\ &= \bar{a} |\Omega|^{1/3} \|N^{-1}u\|_3 + \bar{b} \|N^{-1}u\|_3^2 \end{aligned} \quad (27)$$

und damit

$$\|N^{-1}u\|_3 \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \|u\|_{3/2} \rightarrow \infty.$$

Sei nun  $u \neq 0$ ,  $\tilde{u} \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  eine weitere Funktion. Mit Formel (27) und Lemma 4.1.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|u\|_{3/2}} \langle N^{-1}u, u - \tilde{u} \rangle &= \frac{1}{\|u\|_{3/2}} \langle v, Nv - \tilde{u} \rangle \\
&\geq \frac{1}{\|u\|_{3/2}} \left( \langle v, Nv \rangle - \|\tilde{u}\|_{3/2} \|v\|_3 \right) \\
&\geq \frac{1}{\|u\|_{3/2}} \left( \underline{a} \|v\|_2^2 + \underline{b} \|v\|_3^3 - \|\tilde{u}\|_{3/2} \|v\|_3 \right) \\
&\geq \frac{\underline{b} \|v\|_3^3 - \|\tilde{u}\|_{3/2} \|v\|_3}{\bar{a} |\Omega|^{1/3} \|v\|_3 + \bar{b} \|v\|_3^2} \\
&\geq \frac{\underline{b} \|N^{-1}u\|_3^3 - \|\tilde{u}\|_{3/2} \|N^{-1}u\|_3}{\bar{a} |\Omega|^{1/3} \|N^{-1}u\|_3 + \bar{b} \|N^{-1}u\|_3^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt die Koerzitivität von  $N^{-1}$  bzgl.  $\tilde{u}$ .

3. Aufgrund von Lemma 2.3.10 und Lemma 2.3.11 ist  $N^{-1}$  demistetiger Potentialoperator mit Potential  $G^*$ . Wir zeigen nun die Stetigkeit von  $N^{-1}$ . Sei dazu  $(u_n)$  eine Folge mit  $u_n \rightarrow u$  in  $\mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$ . Sei außerdem  $v_n := N^{-1}u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $v := N^{-1}u$ . Aufgrund der Demistetigkeit von  $N^{-1}$  gilt

$$v_n = N^{-1}u_n \rightarrow N^{-1}u = v$$

und

$$\langle Nv_n - Nv, v_n - v \rangle = \langle u_n - u, v_n - v \rangle \rightarrow 0.$$

Die  $S$ -Eigenschaft von  $N$  impliziert schließlich  $v_n \rightarrow v$  in  $\mathbb{L}^3(\Omega)$  und damit die Stetigkeit von  $N^{-1}$ .

4. Gemäß Lemma 2.3.13 gilt für  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$

$$G^*(u) = \langle u, N^{-1}u \rangle - G(N^{-1}u).$$

Mit  $v := N^{-1}u \in \mathbb{L}^3(\Omega)$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}
G^*(u) &= \langle Nv, v \rangle - G(v) \\
&= \int_{\Omega} (a |v|^2 + b |v|^3) - \int_{\Omega} \left( \frac{a}{2} |v|^2 + \frac{b}{3} |v|^3 \right) \\
&= \int_{\Omega} \left( \frac{a}{2} |v|^2 + \frac{2b}{3} |v|^3 \right) \\
&= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left( \frac{a}{2} |2v|^2 + \frac{b}{3} |2v|^3 \right) \\
&= \frac{1}{4} G(2v).
\end{aligned}$$

5. Sei  $(u_n)$  Folge in  $\mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  mit  $u_n \rightharpoonup u$  und  $\langle N^{-1}u_n - N^{-1}u, u_n - u \rangle \rightarrow 0$ . Mit  $v_n := N^{-1}u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $v := N^{-1}u$  finden wir

$$\langle Nv_n - Nv, v_n - v \rangle = \langle N^{-1}u_n - N^{-1}u, u_n - u \rangle \rightarrow 0.$$

Mit (17) sowie (18) gilt

$$\|v_n - v\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|v_n\|_3 \rightarrow \|v\|_3.$$

Insbesondere ist die Folge  $(v_n)$  beschränkt in  $\mathbb{L}^3(\Omega)$  und schwach konvergent in  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ . Da  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  dicht in  $\mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  eingebettet ist, folgt (vgl. [3], Kapitel I, Satz 5.5)

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad \mathbb{L}^3(\Omega).$$

Die S-Eigenschaft und die Stetigkeit von  $N$  liefern  $u_n \rightarrow u$  in  $\mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$ . □

**Satz 4.2.3** *Der Operator  $M$  besitzt folgende Eigenschaften:*

1. Für alle  $v_1, v_2 \in \mathbb{L}^3(\Omega)$  gilt

$$\langle Mv_1 - Mv_2, v_1 - v_2 \rangle \geq \underline{a} \|v_1 - v_2\|_2^2, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle Mv_1 - Mv_2, v_1 - v_2 \rangle &\geq + \underline{b} (\|v_1 + v_r\|_3 - \|v_2 + v_r\|_3)^2 \|v_1 + v_r\|_3 + \\ &\quad + \underline{b} (\|v_1 + v_r\|_3 - \|v_2 + v_r\|_3)^2 \|v_2 + v_r\|_3 \end{aligned} \quad (29)$$

und

$$\|Mv_1 - Mv_2\|_1 \leq \left( \bar{a} |\Omega|^{1/2} + \bar{b} \|v_1 - v_2\|_2 + 2\bar{b} \|v_2 + v_r\|_2 \right) \|v_1 - v_2\|_2, \quad (30)$$

$$\|Mv_1 - Mv_2\|_{3/2} \leq \left( \bar{a} |\Omega|^{1/3} + \bar{b} \|v_1\|_3 + \bar{b} \|v_2\|_3 + 2\bar{b} \|v_r\|_3 \right) \|v_1 - v_2\|_3. \quad (31)$$

Insbesondere ist  $M$  LIPSCHITZ-stetig auf allen beschränkten Mengen von  $\mathbb{L}^3(\Omega)$ .

2.  $M$  ist stetiger und beschränkter Potentialoperator mit dem Potential

$$F(v) := G(v + v_r) + \langle v, \text{grad } p_r \rangle \quad \forall v \in \mathbb{L}^3(\Omega). \quad (32)$$

3.  $M$  ist strikt monoton, maximal monoton und koerzitiv bzgl. 0.

4.  $M$  besitzt die S-Eigenschaft.

*Beweis:*

1. Die Ungleichungen (28), (29), (30) und (31) ergeben sich direkt aus den entsprechenden Ungleichungen für den Operator  $N$  (vgl. (17), (18), (19) und (20)).

2. Die Stetigkeit und die Beschränktheit von  $M$  folgen aus Ungleichung (31). Durch Nachrechnen sehen wir, daß  $F$  ein Potential für  $M$  ist.
3. Mit Abschätzung (28) ist  $M$  strikt monoton und aufgrund der Stetigkeit auch maximal monoton. Für  $v \in \mathbb{L}^3(\Omega)$ ,  $v \neq 0$ ,  $v \neq -v_r$ , und  $w := v + v_r$  finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|_3} \langle Mv, v \rangle &= \frac{1}{\|v\|_3} \langle Nw, w - v_r \rangle + \frac{1}{\|v\|_3} \langle \text{grad } p_r, v \rangle \\ &\geq \frac{1}{\|v\|_3} \langle Nw, w - v_r \rangle - \|\text{grad } p_r\|_{3/2} \\ &\geq \frac{\|w\|_3}{\|v\|_3} \frac{1}{\|w\|_3} \langle Nw, w - v_r \rangle - \|\text{grad } p_r\|. \end{aligned}$$

Da  $\|v + v_r\|_3 \rightarrow \infty$  für  $\|v\|_3 \rightarrow \infty$ , und da  $N$  koerzitiv bzgl.  $v_r$  ist, ergibt sich die Koerzitivität von  $M$  bzgl.  $0$ .

4. Sei  $(v_n)$  eine Folge mit  $v_n \rightharpoonup v$  und

$$\langle Mv_n - Mv, v_n - v \rangle = \langle N(v_n + v_r) - N(v + v_r), (v_n + v_r) - (v + v_r) \rangle \rightarrow 0.$$

Dann gilt  $v_n + v_r \rightharpoonup v + v_r$  und mit der  $S$ -Eigenschaft von  $N$  auch  $v_n + v_r \rightarrow v + v_r$  bzw.  $v_n \rightarrow v$ .  $\square$

**Satz 4.2.4** *Es gelten folgende Aussagen:*

1. *Es existiert der zu  $M$  inverse Operator  $M^{-1}$  als stetiger Potentialoperator mit Potential  $F^*$ .*
2. *Für  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  gilt:*

$$M^{-1}u = N^{-1}(u - \text{grad } p_r) - v_r \tag{33}$$

und

$$F^*(u) = \frac{1}{4}G(2N^{-1}(u - \text{grad } p_r)) - \langle u - \text{grad } p_r, v_r \rangle. \tag{34}$$

3.  *$M^{-1}$  ist beschränkt, strikt monoton und maximal monoton.*
4.  *$M^{-1}$  ist koerzitiv bzgl.  $0$  und besitzt die  $S$ -Eigenschaft.*

*Beweis:*

1. Aufgrund der Lemmata 2.2.3, 2.3.10 und 2.3.11 existiert  $M^{-1}$  als radialstetiger Potentialoperator mit Potential  $F^*$ . Durch Nachrechnen erhalten wir die Formel (33), aus der zusammen mit der Stetigkeit von  $N^{-1}$  die Stetigkeit von  $M^{-1}$  folgt.

2. Aufgrund der Definition von  $F^*$  und mit Gleichung (32) finden wir für  $u \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned}
F^*(u) &= \sup_{w \in \mathbb{L}^3(\Omega)} \left( \langle u, w \rangle - F(w) \right) \\
&= \sup_{w \in \mathbb{L}^3(\Omega)} \left( \langle u, w - v_r \rangle - F(w - v_r) \right) \\
&= \sup_{w \in \mathbb{L}^3(\Omega)} \left( \langle u, w - v_r \rangle - G(w) - \langle w - v_r, \text{grad } p_r \rangle \right) \\
&= \sup_{w \in \mathbb{L}^3(\Omega)} \left( \langle u - \text{grad } p_r, w \rangle - G(w) \right) - \langle u, v_r \rangle + \langle v_r, \text{grad } p_r \rangle \\
&= G^*(u - \text{grad } p_r) - \langle u - \text{grad } p_r, v_r \rangle.
\end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung (26) ergibt das Gleichung (34).

3. Da  $M$  und  $M^{-1}$  bijektiv sind, übertragen sich strikte und maximale Monotonie von  $M$  auf  $M^{-1}$ . Die Beschränktheit von  $M^{-1}$  ergibt sich durch einfache Rechnung aus der Formel (33) sowie der Beschränktheit  $N^{-1}$ .
4. Die  $S$ -Eigenschaft und die Koerzitivität (bzgl. 0) von  $M^{-1}$  folgen mit Formel (33) aus der  $S$ -Eigenschaft und der Koerzitivität (bzgl.  $-\text{grad } p_r$ ) von  $N^{-1}$ . Zur Begründung sei auf den Beweis von Satz 4.2.2 verwiesen, wo eine analoge Aussage für  $M$  und  $N$  bewiesen wird.

□

**Satz 4.2.5** *Die Operatoren  $A$  bzw.  $B$  sind*

1. *stetige Potentialoperatoren mit den Potentialen  $F \circ K$  bzw.  $F^* \circ L$ ,*
2. *bijektiv, strikt monoton und koerzitiv bzgl. 0,*
3. *beschränkte Operatoren mit der  $S$ -Eigenschaft.*

*Außerdem ist  $A$  LIPSCHITZ-stetig auf allen beschränkten Mengen von  $\mathbb{V}$ . Ist  $U$  ein endlich-dimensionaler Unterraum von  $\Pi$ , der auch in  $W^{1,2}(\Omega)$  enthalten ist, und ist  $I$  die Einbettung von  $U$  in  $\Pi$ , so bildet der Operator  $I^*BI$  den Raum  $U$  LIPSCHITZ-stetig nach  $U^*$  ab.*

*Beweis:*

1. Die erste Behauptung folgt aus Lemma 2.3.1.
2. Für  $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$  mit  $v_1 \neq v_2$  gilt

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle = \langle MKv_1 - MKv_2, Kv_1 - Kv_2 \rangle > 0.$$

Außerdem finden wir für  $0 \neq v \in \mathbb{V}$

$$\frac{1}{\|v\|} \langle Av, v \rangle = \frac{1}{\|Kv\|} \langle MKv, Kv \rangle \rightarrow \infty \quad \text{für } \|v\| = \|Kv\| \rightarrow \infty.$$

Vollkommen analog übertragen sich strikte Monotonie und Koerzitivität (bzgl. 0) von  $M^{-1}$  auf den Operator  $B$ . Die Bijektivität von  $A$  bzw.  $B$  ist gerade die Aussage von Lemma 2.2.3.

3. Sei  $(v_n)$  Folge aus  $\mathbb{V}$  mit  $v_n \rightarrow v$  und  $\langle Av_n - Av, v_n - v \rangle \rightarrow 0$ . Dann gilt

$$\langle Av_n - Av, v_n - v \rangle = \langle MKv_n - MKv, Kv_n - Kv \rangle \rightarrow 0.$$

Für  $f \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  ergibt sich

$$\langle f, Kv_n - Kv \rangle = \langle K^* f, v_n - v \rangle \rightarrow 0.$$

Insbesondere gilt  $Kv_n \rightarrow Kv$  in  $\mathbb{L}^3(\Omega)$ . Die S-Eigenschaft von  $M$  liefert  $Kv_n \rightarrow Kv$  und damit  $v_n \rightarrow v$ . Analog beweist sich die S-Eigenschaft von  $B$ . Die Beschränktheit von  $A$  bzw.  $B$  folgt direkt aus der Beschränktheit von  $M$  bzw.  $M^{-1}$ .

4. Die behauptete Stetigkeitsaussage für  $A$  ergibt sich aus der entsprechenden Aussage für Operator  $M$ .

5. Für  $u_1, u_2 \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega) \cap \mathbb{L}^2(\Omega)$  finden wir mit Ungleichung (28) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \underline{a} \|M^{-1}u_1 - M^{-1}u_2\|_2^2 &\leq \langle M^{-1}u_1 - M^{-1}u_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\leq \|M^{-1}u_1 - M^{-1}u_2\|_2 \|u_1 - u_2\|_2. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\|M^{-1}u_1 - M^{-1}u_2\|_2 \leq \underline{a}^{-1} \|u_1 - u_2\|_2.$$

Seien  $U$  und  $I$  wie in der Voraussetzung. Für  $q, q_1, q_2 \in U$  ergibt sich

$$\begin{aligned} |\langle I^*BIq_1 - I^*BIq_2, q \rangle| &= |\langle M^{-1}Lq_1 - M^{-1}Lq_2, Lq \rangle| \\ &\leq \|M^{-1}Lq_1 - M^{-1}Lq_2\|_2 \|Lq\|_2 \\ &\leq \underline{a}^{-1} \|Lq_1 - Lq_2\|_2 \|Lq\|_2. \end{aligned}$$

Da auf  $U$  die Normen  $\|L \cdot\|_{3/2}$  und  $\|L \cdot\|_2$  äquivalent sind, existiert eine Konstante  $C$ , so daß

$$|\langle I^*BIq_1 - I^*BIq_2, q \rangle| \leq \underline{a}^{-1} C^2 \|Lq_1 - Lq_2\|_{3/2} \|Lq\|_{3/2}.$$

Es folgt die behauptete LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $I^*BI$ . □



### 4.3 Umformulierung und Lösung der Aufgabe

Wir betrachten die

**Aufgabe 4.3.1** *Zu lösen sind folgende Teilaufgaben:*

1. *Gesucht ist  $v \in \mathbb{V}$  als Lösung der Gleichung*

$$Av = 0. \tag{35}$$

2. *Gesucht ist  $p \in \Pi$  als Lösung der Gleichung*

$$B(-p) = 0. \tag{36}$$

Die Teilaufgaben 4.3.1.1 und 4.3.1.2 heißen auch *konjugierte Aufgaben*.

**Satz 4.3.2** *Es gelten folgende Aussagen:*

1. *Die Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 sind äquivalent.*
2. *Die Teilaufgaben 4.3.1.1 und 4.3.1.2 sind jeweils eindeutig lösbar.*

*Beweis:*

1. Sei  $(v, p)$  Lösung von 4.1.4. Wenden wir auf Gleichung (16) den Operator  $K^*$  an, so erhalten wir mit Folgerung 4.1.3 die Gleichung (35). Es gilt aber auch

$$M^{-1}L(-p) = 0. \tag{37}$$

Hieraus erhalten wir durch Anwendung des Operators  $L^*$  die Gleichung (36), d.h.  $(v, p)$  ist auch Lösung der Aufgabe 4.3.1.

Sei umgekehrt  $(v, p)$  Lösung von 4.3.1. Dann gilt

$$MKv \in \ker K^*.$$

Nach Folgerung 4.1.3 existiert ein  $p' \in \mathbb{L}^{3/2}(\Omega)$  derart, daß

$$MKv = L(-p').$$

Das Paar  $(v, p')$  ist also Lösung von 4.1.4 und  $p'$  ist, wie wir schon gesehen haben, Lösung von 4.3.1.2. Aufgrund der Injektivität von  $B$  ist die Lösung 4.3.1.2 eindeutig, d.h.

$$p' = p.$$

2. Die zweite Behauptung folgt aus der Bijektivität von  $A$  bzw. von  $B$ . □

**Folgerung 4.3.3** *Die Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 sind beide eindeutig lösbar und besitzen eine gemeinsame Lösung.*

Damit haben wir Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt. Wir betrachten noch zwei Spezialfälle:

Im Fall  $\Gamma_1 = \emptyset$  können wir  $v_r = 0$  wählen. Ist zusätzlich  $p_r$  konstant, so ist, wie wir nun wissen, die triviale Lösung  $v = 0$  und  $p = 0$  der Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 auch die einzige Lösung. Die eindeutige Lösung der ursprünglichen Aufgabe 4.1.1 ist dann Geschwindigkeit Null und Druck wie vorgegeben (etwa Luftdruck). Dies entspricht unseren physikalischen Erwartungen, denn wenn keine Luft hineingepumpt oder abgesaugt wird, kann weder eine Strömung entstehen, noch kann der Druck sich ändern.

Auch der Fall  $\Gamma_3 = \emptyset$  ist in unserer Betrachtung zugelassen; der Ansatzraum  $\Pi$  für den Druck in den Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 ist  $W_{\emptyset}^{1,3/2}(\Omega)$ . Die fehlende Randbedingung wird also durch die Forderung nach Mittelwertfreiheit ersetzt, wodurch konstante Lösungen für den Druck ausgeschlossen werden. Würden wir  $\Pi = W^{1,3/2}(\Omega)$  wählen, so wäre, da in diesem Fall nur der Gradient des Druckes in die Aufgaben eingehen würde, die Lösung nicht eindeutig.

Zum Abschluß dieses Abschnitts untersuchen wir noch, inwieweit sich Symmetrien in den Ausgangsdaten  $\Omega$ ,  $v_r$ ,  $p_r$  auf die Lösung der Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 übertragen. Sei dazu  $T$  eine Bewegung im Raum  $\mathbb{R}^N$ . Wir sagen, das Gebiet  $\Omega$  ist *invariant unter der Wirkung von  $T$* , wenn

$$T[\Omega] = \Omega \quad \text{und} \quad T[\Gamma_i] = \Gamma_i, \quad i = 1 \dots 3.$$

Eine Funktion  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  nennen wir *invariant unter der Wirkung von  $T$* , falls

$$p = p \circ T^{-1} \quad \text{bzw.} \quad v = T \circ v \circ T^{-1}.$$

**Satz 4.3.4** *Sei  $T$  eine Bewegung im Raum  $\mathbb{R}^N$  und seien  $\Omega$ ,  $v_r$  und  $p_r$  invariant unter der Wirkung von  $T$ . Dann sind auch  $v_g$  und  $p_g$  invariant unter der Wirkung von  $T$ , wobei  $(v_g, p_g)$  die Lösung der Aufgabe 4.3.1 bezeichnet.*

*Beweis:* Durch Nachrechnen finden wir

$$\text{grad}(p_g \circ T^{-1}) + M(T \circ v_g \circ T^{-1}) = T \circ (\text{grad} p_g + M v_g) \circ T^{-1} = T \circ 0 \circ T^{-1} = 0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Aufgabe 4.1.4 gilt damit

$$p_g = p_g \circ T^{-1} \quad \text{und} \quad v_g = T \circ v_g \circ T^{-1}.$$

□

Damit ist gezeigt, daß sich Spiegel- und Rotationssymmetrien von  $\Omega$ ,  $v_r$ ,  $p_r$  auf  $v_g$ ,  $p_g$  übertragen.

#### 4.4 Eine andere Betrachtung des Operators $B$

In diesem Abschnitt wollen wir die Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 in anderen Räumen betrachten. Wir fordern dazu mehr Regularität der Randwertvorgaben: Im folgenden gelte

$$p_r \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{und} \quad v_r \in \mathbb{L}_{div, \Gamma_2}^4(\Omega).$$

**Lemma 4.4.1** *Der Operator  $M$  bildet den Raum  $\mathbb{L}^4(\Omega)$  surjektiv auf den Raum  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  ab.*

*Beweis:* Eine einfache Rechnung zeigt, daß  $M$  den Raum  $\mathbb{L}^4(\Omega)$  in  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  abbildet. Sei nun  $Mv \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  für ein  $v \in \mathbb{L}^3(\Omega)$ . Da auch  $a(v + v_r) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , gilt

$$b|v + v_r|(v + v_r) = Mv - a(v + v_r) - \text{grad } p_r \in \mathbb{L}^2(\Omega)$$

Wir finden

$$\infty \geq \int_{\Omega} \left| b|v + v_r|(v + v_r) \right|^2 \geq \int_{\Omega} \underline{b}^2 |v + v_r|^4.$$

Es ist also  $v + v_r \in \mathbb{L}^4(\Omega)$  bzw.  $v \in \mathbb{L}^4(\Omega)$ . Es folgt die behauptete Surjektivität.  $\square$

Wir erhalten einen surjektiven, dicht definierten Operator

$$\tilde{M} : \mathbb{L}^2(\Omega) \supset \mathbb{L}^4(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega),$$

der elementweise durch

$$\tilde{M}v := Mv \quad \forall v \in \mathbb{L}^4(\Omega)$$

gegeben ist.

**Lemma 4.4.2**

1. Der Operator  $\tilde{M}$  ist stark monoton mit der Monotoniekonstanten  $\underline{a}$ .
2. Es existiert der inverse Operator  $\tilde{M}^{-1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$ . Dabei gilt

$$\tilde{M}^{-1}u = M^{-1}u \quad \forall u \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

$\tilde{M}^{-1}$  ist Potentialoperator, wobei die Einschränkung von  $F^*$  auf  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  als Potential gewählt werden kann.

3.  $\tilde{M}^{-1}$  ist LIPSCHITZ-stetig mit Konstante  $\underline{a}^{-1}$ .

*Beweis:*

1. Die starke Monotonie von  $\tilde{M}$  beinhaltet gerade die Abschätzung (28).
2. Die Aussagen des zweiten Punktes gelten nach Konstruktion und Lemma 4.4.1.

3. Die dritte Behauptung folgt direkt aus der starken Monotonie von  $\tilde{M}$ . □

Wir wollen nun weitere Bezeichnungen einführen. Es sei

- $\tilde{\Pi}$  der Raum  $W_{\Gamma_3}^{1,2}(\Omega)$ ,
- $\tilde{L}$  der Differentialoperator  $\text{grad} : \tilde{\Pi} \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$ ,
- $\tilde{B}$  der Operator  $\tilde{L}^* \tilde{M}^{-1} \tilde{L}$ .

**Folgerung 4.4.3** *Der Operator  $\tilde{B}$  ist LIPSCHITZ-stetiger Potentialoperator mit Potential  $F^* \circ \tilde{L}$  und der LIPSCHITZ-Konstanten  $\underline{a}^{-1}$ .*

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß der Operator  $\tilde{B}$  im Vergleich zum Operator  $B$  bessere Approximationsverfahren zur Lösung der Aufgabe 4.3.1.2 ermöglicht.

## 5 Approximative Lösung der Aufgabe

In diesem Kapitel untersuchen wir, wie die Lösung der Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 approximativ berechnet werden kann. Wir werden dazu Näherungsverfahren angeben, bei denen nur Gleichungen in endlichdimensionalen BANACH-Räumen zu lösen sind. Außerdem sind wir an Fehlerabschätzungen für die Güte einer approximativen Lösung interessiert.

Eine Folge  $(X_n)$  von aufsteigenden und endlichdimensionalen Unterräumen eines BANACH-Raumes  $X$  heißt *GALERKIN-Schema für  $X$* , falls für jedes  $x \in X$  eine Folge  $(x_n)$  existiert, so daß  $x_n \in X_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , und  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Im folgenden Kapitel sei

- $(\mathbb{V}_n)$  ein GALERKIN-Schema für  $\mathbb{V}$ ,
- $(\Pi_n)$  ein GALERKIN-Schema für  $\Pi$ .

Wir wollen dabei  $\Pi_n \subset W^{1,2}(\Omega)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , voraussetzen. Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne

- $K_n$  die Einschränkung von  $K$  auf  $\mathbb{V}_n$ ,
- $L_n$  die Einschränkung von  $L$  auf  $\Pi_n$ ,
- $A_n$  den Operator  $K_n^* M K_n$ ,
- $B_n$  den Operator  $L_n^* M^{-1} L_n$ .

Außerdem wollen wir mit

$$(v_g, p_g) \in \mathbb{V} \times \Pi$$

die gemeinsame Lösung der Aufgaben 4.1.4 und 4.3.1 bezeichnen.

## 5.1 Die RITZ- und die GALERKIN-Approximation

In diesem Abschnitt wollen wir uns zwei wohlbekannten Approximationsverfahren zuwenden.

### Voraussetzung 5.1.1

1. Sei  $X$  ein strikt konvexer und reflexiver BANACH-Raum mit strikt konvexem Dualraum  $X^*$ , und sei  $(X_n)$  ein GALERKIN-Schema für  $X$ .
2. Sei  $D : X \rightarrow X^*$  ein stetiger, strikt monotoner und bzgl. 0 koerzitiver Potentialoperator mit Potential  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ .
3. Der Operator  $D$  besitze die  $S$ -Eigenschaft.
4. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei mit  $I_n$  die Einbettung von  $X_n$  in  $X$  bezeichnet.

Wir stellen nun einige Aussagen über monotone Potentialoperatoren zusammen.

**Satz 5.1.2** *Unter der Voraussetzung 5.1.1 und mit den dort eingeführten Bezeichnungen gelten für fixiertes  $f \in X^*$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  folgende Aussagen:*

1. Es existiert eine eindeutige Lösung  $x_g$  der Aufgabe

$$Dx = f. \quad (38)$$

2. Es existiert genau eine  $n$ -te GALERKIN-Lösung  $x_n \in X_n$  der Aufgabe (38), d.h. es gilt

$$\langle Dx_n, y \rangle = \langle f, y \rangle \quad \forall y \in X_n. \quad (39)$$

3. Die  $n$ -te GALERKIN-Lösung ist auch  $n$ -te RITZ-Lösung der Aufgabe (38), d.h. es gilt

$$H(x_n) - \langle f, x_n \rangle = \min_{y \in X_n} \left\{ H(y) - \langle f, y \rangle \right\}.$$

4. Es gilt  $x_m \rightarrow x_g$  für  $m \rightarrow \infty$ .

5. Das Element  $x_n$  ist Lösung der Aufgabe

$$I_n^* D I_n x = I_n^* f. \quad (40)$$

Zum Beweis dieses Satzes sei auf die einschlägige Literatur verwiesen (vgl. etwa [3], Kapitel III, Satz 3.2 und Lemma 4.13). Die Folge  $(x_n)$  heißt GALERKIN- oder RITZ-Approximation des Elements  $x_g$ . Die Aufgabe (40) wollen wir auch  $n$ -te GALERKIN-Aufgabe (von (38)) nennen.

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben (vgl. Satz 4.2.5), genügen die Operatoren  $A$  und  $B$  der Voraussetzung 5.1.1. Wir erhalten damit folgenden

**Satz 5.1.3** *Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $v_n$  bzw.  $p_n$  die jeweils eindeutige Lösung der Aufgaben*

$$A_n v = 0 \quad \text{bzw.} \quad B_n(-p) = 0. \quad (41)$$

*Dann konvergiert die Folge  $(v_n, p_n)$  in  $\mathbb{V} \times \Pi$  gegen  $(v_g, p_g)$ .*

## 5.2 Gradienten- und Projektions-Iterationsverfahren

Neben der im letzten Abschnitt vorgestellten RITZ- bzw. GALERKIN-Approximation gibt es noch weitere Standard-Approximationsverfahren für Gleichungen mit nichtlinearen Potentialoperatoren in BANACH-Räumen: das *Gradientenverfahren* und die sogenannten *Projektions-Iterationsverfahren*. Wir wollen zunächst wieder der Darstellung in [3] folgen und zitieren die dort vorgestellten Verfahren (vgl. [3], Kapitel III, Satz 4.2 und Satz 4.3).

**Voraussetzung 5.2.1** *Es mögen die Voraussetzung 5.1.1 und die dort eingeführten Bezeichnungen gelten. Zusätzlich sei  $D$  beschränkt LIPSCHITZ-stetig, d.h. es existiere eine monoton wachsende Funktion  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß*

$$\|Dx_1 - Dx_2\|_{X^*} \leq \mu\left(\max\{\|x_1\|_X, \|x_2\|_X\}\right) \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Mit  $J$  sei die Dualitätsabbildung von  $X$  bezeichnet.

Wir formulieren zunächst das Gradientenverfahren:

**Satz 5.2.2** *Es mögen die Voraussetzungen 5.1.1 und 5.2.1 sowie die dort eingeführten Bezeichnungen gelten. Sei außerdem  $x_1 \in X$  ein beliebiger Startwert,  $f \in X^*$  und  $\alpha$  eine positive Konstante. Dann konvergiert die durch*

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - \lambda_n z_n, & \lambda_n^{-1} &:= 2^{-1} \max\left\{2, \alpha + \mu(\|x_n\| + \|Dx_n - f\|)\right\} \\ Jz_n &:= Dx_n - f, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

definierte Folge  $(x_n)$  aus  $X$  stark gegen die Lösung  $x_g$  der Aufgabe  $Dx = f$ .

Die Zahl  $\lambda_n$  nennen wir auch die  $n$ -te *Schrittweite* und den Vektor  $z_n$  die  $n$ -te *Schrittrichtung* des Gradientenverfahrens (42).

Beim Gradientenverfahren (42) ist in jedem Schritt die Aufgabe  $Jz_n = Dx_n - f$  im Raum  $X$  selbst zu lösen. Ist  $X$  ein endlichdimensionaler BANACH-Raum, so kann durch den Übergang zu einer äquivalenten Norm erreicht werden, daß  $X$ , ausgestattet mit dieser neuen Norm, ein HILBERT-Raum wird. Auch bzgl. dieser neuen Norm ist der Operator  $D$  ein beschränkt LIPSCHITZ-stetiger, strikt monotoner und koerzitiver Potentialoperator mit der  $S$ -Eigenschaft. Die Dualitätsabbildung  $J'$  von  $X$  bzgl. dieser neuen Norm ist aber linear. In jedem Schritt ist die nun lineare Aufgabe  $J'z_n = Dx_n - f$  zu lösen. Für unendlichdimensionale Räume  $X$  kann die Lösung der i.a. nichtlinearen Gleichung  $Jz_n = Dx_n - f$  genauso schwierig wie die Lösung der ursprünglichen Aufgabe sein. In diesem Fall kann man das Gradientenverfahren mit dem RITZ-schen Verfahren zu einem Projektions-Iterationsverfahren vereinen:

**Satz 5.2.3** *Es mögen wieder dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 5.2.2 gelten. Dann konvergiert für jeden Startwert  $x_1 \in X_1$  die durch*

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - \lambda_n z_n, & \lambda_n^{-1} &:= 2^{-1} \max\left\{2, \alpha + \mu(\|x_n\| + \|Dx_n - f\|)\right\}, \\ J_{n+1} z_n &:= D_{n+1} x_n - f_{n+1}, & J_n &:= I_n^* J I_n, \\ D_n &:= I_n^* D I_n, & f_n &:= I_n^* f, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

definierte Folge  $(x_n)$  aus  $X$  stark gegen die Lösung  $x_g$  der Aufgabe  $Dx = f$ .

Bei diesem Verfahren ist in jedem Schritt die Aufgabe  $J_{n+1}z_n = D_{n+1}x_n - f_{n+1}$  im dem endlichdimensionalen Raum  $X_{n+1}$  zu lösen. Diese Aufgabe ist allerdings i.a. wieder nicht-linear.

In unserem Fall können wir die eben beschriebenen Verfahren zur Lösung der Aufgabe  $Av = 0$  anwenden. Als Funktion  $\mu = \mu_A$  aus Voraussetzung 5.2.1 kann dabei

$$\mu(T) := \bar{a} |\Omega|^{1/3} + 2\bar{b} \|v_r\|_3 + 2\bar{b}T \quad \forall T \in \mathbb{R}$$

gewählt werden, da für  $A$  eine zu (31) analoge Abschätzung gilt.

Wir können aber das Gradientenverfahren zur approximativen Lösung der GALERKIN-Aufgaben (41) einsetzen, denn die Operatoren  $A_n$  bzw.  $B_n$  sind auf jedem Unterraum  $\mathbb{V}_n$  bzw.  $\Pi_n$  beschränkt LIPSCHITZ-stetig. Für alle Operatoren  $A_n$  kann wieder  $\mu = \mu_{A,n}$  wie oben gewählt werden. Für jedes  $B_n$  kann  $\mu = \mu_{B,n}$  als eine, von  $n$  und  $\Pi_n$  abhängige, Konstante gewählt werden. Wählen wir auf den Räumen  $\mathbb{V}_n$  bzw.  $\Pi_n$  geeignete, zur ihrer natürlichen Norm äquivalente Normen (wobei dann natürlich auch die Funktionen  $\mu_{A,n}$  bzw.  $\mu_{B,n}$  abgeändert werden müssen), können wir erreichen, daß jede GALERKIN-Aufgabe durch lineare Gleichungen approximiert werden kann. Zusammenfassend können wir den folgenden Satz formulieren:

**Satz 5.2.4**

1. Zur approximativen Lösung der Aufgabe  $Av = 0$  kann sowohl das in Satz 5.2.2 beschriebene Gradientenverfahren als auch das in Satz 5.2.3 angegebene Projektions-Iterationsverfahren verwendet werden. Die entstehenden Approximationsfolgen konvergieren in  $\mathbb{V}$  gegen  $v_g$ .
2. Die GALERKIN-Aufgaben (41) können mit dem Gradientenverfahren aus Satz 5.2.2 approximativ gelöst werden.

Das bisher vorgestellte Projektion-Iterationsverfahren führt zu Approximationsaufgaben, die zwar endlichdimensional, aber, sofern  $X$  kein HILBERT-Raum ist, wiederum nichtlinear sind. Naturgemäß ist man aber besonders an endlichdimensionalen, linearen Approximationsaufgaben interessiert. Wir wollen daher ein weiteres Projektions-Iterationsverfahren angeben, bei dem die Approximationsaufgaben durch die Dualitätsabbildung eines anderen BANACH-Raumes gegeben sind.

**Voraussetzung 5.2.5** *Es mögen wieder die Voraussetzung 5.1.1 und die dort eingeführten Bezeichnungen gelten. Zusätzlich fordern wir:*

1.  $\tilde{X}$  sei ein weiterer, strikt konvexer und in  $X$  dicht eingebetteter BANACH-Raum mit strikt konvexem Dualraum  $\tilde{X}^*$ . In dieser Konstellation ist der Raum  $X^*$  dicht in  $\tilde{X}^*$  eingebettet.

2.  $(\tilde{X}_n)$  sei ein GALERKIN-Schema für  $\tilde{X}$ .
3. Der Operator  $D$  sei beschränkt und außerdem hinreichend regulär in dem Sinne, daß er den Raum  $\tilde{X}$  LIPSCHITZ-stetig (mit Konstante  $m$ ) nach  $\tilde{X}^*$  abbildet.
4. Mit  $\tilde{D}$  sei die Einschränkung von  $D$  auf  $\tilde{X}$  bezeichnet, wobei  $\tilde{X}^*$  als Bildraum von  $\tilde{D}$  gewählt sei.
5.  $\tilde{J}$  sei die Dualitätsabbildung von  $\tilde{X}$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\tilde{I}_n$  die Einbettung von  $\tilde{X}_n$  in  $\tilde{X}$  und

$$\begin{aligned}\tilde{J}_n &:= \tilde{I}_n^* \tilde{J} \tilde{I}_n, \\ \tilde{D}_n &:= \tilde{I}_n^* \tilde{D} \tilde{I}_n.\end{aligned}$$

**Satz 5.2.6** *Es mögen die Voraussetzungen 5.1.1 und 5.2.5 sowie die dort eingeführten Bezeichnungen gelten. Sei außerdem  $f$  ein fixiertes Element aus  $X^*$ ,  $\lambda < 2m^{-1}$  eine positive Konstante und  $x_s \in \tilde{X}_1$  ein beliebiger Startwert. Dann beschreibt die folgende, induktive Definition von  $k$ -Zyklen ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), bestehend aus jeweils  $\sigma_k$  vielen Schritten, ein wohldefiniertes Verfahren:*

1. Im nullten Zyklus sei  $\sigma_0 := 0$  und  $x_0^0 := x_s$ .
2. Im  $k$ -ten Zyklus ( $k > 0$ ) wird ein Gradientenverfahren in  $\tilde{X}_k$  für die Aufgabe

$$\tilde{D}_k x = \tilde{I}_k^* f$$

mit konstanter Schrittweite  $\lambda$  gestartet, wobei als Startwert  $x_k^0$  das letzte Element  $x_{k-1}^{\sigma(k-1)} \in \tilde{X}_{k-1}$  des  $(k-1)$ -ten Zyklus verwendet wird:

$$\left. \begin{aligned}x_k^{n+1} &:= x_k^n - \lambda z_k^n, & \tilde{J}_k z_k^n &:= \tilde{D}_k x_k^n - \tilde{f}_k, \\ \tilde{f}_k &:= \tilde{I}_k^* f, & n &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Nach  $\sigma_k < \infty$  vielen Schritten gilt

$$|\langle Dx_k^{\sigma_k} - f, x_k^{\sigma_k} \rangle_X| \leq \frac{1}{k}, \quad (45)$$

und der  $k$ -te Zyklus wird beendet.

Die so konstruierte Folge  $(x_k^{\sigma_k})$  konvergiert stark in  $X$  gegen die Lösung  $x_g \in X$  der Aufgabe  $Dx = f$ .

*Beweis:*

1. Auch der Operator  $D - f$  ist stetiger Potentialoperator, wobei

$$H_f := H - \langle f, \cdot \rangle_X$$



ein Potential ist. Nach Satz 2.3.7 ist  $x_g$  globaler Minimalpunkt von  $H_f$ . Sei zunächst  $k > 0$  fixiert. Der Operator  $\tilde{J}_k$  ist nach Lemma 2.2.6 und Satz 2.2.4 gerade die bijektive Dualitätsabbildung von  $\tilde{X}_k$ . Insbesondere ist die in (44) formulierte Aufgabe für die Schrittrichtung  $z_k^n$  stets eindeutig lösbar. Nach Konstruktion gelten für beliebiges  $x \in \tilde{X}_k$  die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \langle Dx, y \rangle_X &= \langle \tilde{D}x, y \rangle_{\tilde{X}} & \forall y \in \tilde{X}, \\ \langle \tilde{D}x, y \rangle_{\tilde{X}} &= \langle \tilde{D}_j x, y \rangle_{\tilde{X}_j} & \forall j \geq k, \forall y \in \tilde{X}_j, \\ \langle \tilde{J}x, y \rangle_{\tilde{X}} &= \langle \tilde{J}_j x, y \rangle_{\tilde{X}_j} & \forall j \geq k, \forall y \in \tilde{X}_j, \\ \langle f, y \rangle_{\tilde{X}} &= \langle \tilde{f}_j x, y \rangle_{\tilde{X}_j} & \forall j \geq k \forall y \in \tilde{X}_j. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

2. Wir werden in diesem und dem folgenden Beweisschritt zeigen, daß die Abbruchbedingung (45) für den  $k$ -ten Zyklus tatsächlich nach endlich vielen Schritten erreicht wird. Dazu untersuchen wir die Folgen  $(x_k^n)_{n=0}^\infty$  und  $(z_k^n)_{n=0}^\infty$ , die entstehen würden, wenn der Iterationsschritt (44) des  $k$ -ten Zyklus unendlich oft wiederholt würde. Es ist

$$\lambda_0 := \lambda \left(1 - \lambda \frac{m}{2}\right) > 0.$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 2.3.2 und der Formeln (44) bzw. (46) finden wir für den  $k$ -ten Zyklus

$$\begin{aligned} H_f(x_k^n) - H_f(x_k^{n+1}) &= \int_0^1 \langle D(x_k^{n+1} + t(x_k^n - x_k^{n+1})) - f, x_k^n - x_k^{n+1} \rangle_X dt \\ &= \int_0^1 \langle \tilde{D}_k(x_k^{n+1} + t(x_k^n - x_k^{n+1})) - \tilde{f}_k, x_k^n - x_k^{n+1} \rangle_{\tilde{X}_k} dt \\ &= + \langle \tilde{D}_k x_k^n - \tilde{f}_k, x_k^n - x_k^{n+1} \rangle_{\tilde{X}_k} + \\ &\quad + \int_0^1 \langle \tilde{D}_k(x_k^{n+1} + t(x_k^n - x_k^{n+1})) - \tilde{D}_k x_k^n, x_k^n - x_k^{n+1} \rangle_{\tilde{X}_k} dt \\ &= + \lambda \langle \tilde{J}_k z_k^n, z_k^n \rangle_{\tilde{X}_k} + \\ &\quad + \int_0^1 \langle \tilde{D}(x_k^{n+1} + t(x_k^n - x_k^{n+1})) - \tilde{D}x_k^n, x_k^n - x_k^{n+1} \rangle_{\tilde{X}} dt \\ &= + \lambda \|z_k^n\|_{\tilde{X}_k}^2 + \\ &\quad - \int_0^1 \|\tilde{D}(x_k^{n+1} + t(x_k^n - x_k^{n+1})) - \tilde{D}x_k^n\|_{\tilde{X}^*} \|x_k^n - x_k^{n+1}\|_{\tilde{X}} dt \\ &\geq \lambda \|z_k^n\|_{\tilde{X}}^2 - m \|x_k^n - x_k^{n+1}\|_{\tilde{X}}^2 \int_0^1 (1-t) dt \\ &\geq \lambda \|z_k^n\|_{\tilde{X}}^2 - \lambda^2 \frac{m}{2} \|z_k^n\|_{\tilde{X}}^2 = \lambda_0 \|z_k^n\|_{\tilde{X}}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Die Folge  $(H_f(x_k^n))_n$  ist also monoton fallend. Sie ist aber auch durch  $H_f(x_g)$  nach unten beschränkt. Daher existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_f(x_k^n))$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_k^n\|_{\tilde{X}} = 0.$$

3. Nach Lemma 2.3.2 gilt im  $k$ -ten Zyklus auch

$$\begin{aligned} H_f(x_k^n) - H_f(0) &= \int_0^1 \langle Dtx_k^n - f, x_k^n \rangle_X dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} \langle Dtx_k^n - D0, tx_k^n \rangle_X dt + \langle D0 - f, x_k^n \rangle_X \\ &\geq \int_{1/2}^1 \frac{1}{t} \langle Dtx_k^n - D0, tx_k^n \rangle_X dt + \langle D0 - f, x_k^n \rangle_X \\ &= \int_{1/2}^1 \langle Dtx_k^n, x_k^n \rangle_X dt + \langle \frac{1}{2}D0 - f, x_k^n \rangle_X \\ &\geq \langle D\frac{x_k^n}{2}, \frac{x_k^n}{2} \rangle_X + \langle \frac{1}{2}D0 - f, x_k^n \rangle_X, \end{aligned} \quad (48)$$

wobei wir für die letzte Abschätzung das monotone Wachstum der reellen Funktion

$$t \rightsquigarrow \langle Dtx_k^n, x_k^n \rangle, \quad t \in [0, 1],$$

ausgenutzt haben. Aufgrund der Koerzitivität von  $D$  ist die Folge  $(x_k^n)_n$  in der  $X$ -Norm beschränkt, denn im gegenteiligen Fall wären die rechte und damit auch die linke Seite der Abschätzung (48) unbeschränkt, und wir hätten einen Widerspruch zur Konvergenz der Folge  $(H_f(x_k^n))_n$ . Da in dem endlichdimensionalen Raum  $\tilde{X}_k$  die  $X$ - und die  $\tilde{X}$ -Norm äquivalent sind, ist die Folge  $(x_k^n)_n$  auch in der  $\tilde{X}$ -Norm beschränkt, und wir finden

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle Dx_k^n - f, x_k^n \rangle_X| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \tilde{D}_k x_k^n - \tilde{f}_k, x_k^n \rangle_{\tilde{X}_k}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \tilde{J}_k z_k^n, x_k^n \rangle_{\tilde{X}_k}| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \tilde{J} z_k^n, x_k^n \rangle_{\tilde{X}}| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_k^n\|_{\tilde{X}} \|x_k^n\|_{\tilde{X}} = 0. \end{aligned}$$

Die Abbruchbedingung (45) für den  $k$ -ten Zyklus wird also nach endlich vielen (gemäß Vereinbarung nach  $\sigma_k$  vielen) Schritten erreicht. Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß durch die  $k$ -Zyklen ein wohldefiniertes Verfahren beschrieben wird.

4. Wir wollen die Folgen

$$\begin{aligned} x_1^0, \dots, x_1^{\sigma_1-1}, \dots, x_k^0, \dots, x_k^{\sigma_k-1}, \dots \quad \text{bzw.} \\ z_1^0, \dots, z_1^{\sigma_1-1}, \dots, z_k^0, \dots, z_k^{\sigma_k-1}, \dots \end{aligned}$$

mit  $(x_i)_{i=1}^\infty$  bzw.  $(z_i)_{i=1}^\infty$  bezeichnen. Da  $x_k^{\sigma_k} = x_{k+1}^0$  für alle  $k$  gilt, existiert für alle  $i$  ein  $k(i)$ , so daß  $x_i, z_i$  und  $x_{i+1}$  zum  $k(i)$ -ten Zyklus gehören und die Gleichung

$$\tilde{J}_{k(i)} z_i = \tilde{D}_{k(i)} x_i - \tilde{f}_{k(i)} \quad (49)$$

gilt. Die Abschätzung (47) liest sich dann wie folgt:

$$H_f(x_i) - H_f(x_{i+1}) \geq \lambda_0 \|z_i\|_{\tilde{X}}^2.$$

Analog zu oben folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{i \rightarrow \infty} H_f(x_i)$$

und die Konvergenz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_i\|_{\tilde{X}} = 0.$$

Betrachten wir noch einmal die Abschätzung (48), so ergibt sich aus der Koerzitivität von  $D$  die Beschränktheit der gesamten Folge  $(x_i)$  bzgl. der  $X$ -Norm. Die Beschränktheit von  $D$  impliziert nun die Beschränktheit der Folge  $(Dx_i)$  bzgl. der  $X^*$ -Norm.

5. Seien  $j \in \mathbb{N}$  und  $y \in \tilde{X}_j$  beliebig. Für jedes  $i$  existiert, wie wir schon wissen, ein  $k(i)$  derart, daß die Gleichung (49) gilt. Für hinreichend große  $i$  gilt zusätzlich  $k(i) \geq j$ , und wir erhalten

$$|\langle Dx_i - f, y \rangle_X| = |\langle \tilde{D}_{k(i)} x_i - \tilde{f}_{k(i)}, y \rangle_{\tilde{X}_{k(i)}}| = |\langle \tilde{J}_{k(i)} z_i, y \rangle_{\tilde{X}_{k(i)}}| \leq \|z_i\|_{\tilde{X}} \|y\|_{\tilde{X}}. \quad (50)$$

Der Grenzübergang  $i \rightarrow \infty$  liefert

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle Dx_i - f, y \rangle_X = 0.$$

Sei nun  $y \in X$  beliebig und  $\delta > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $j$  und ein  $y_j \in \tilde{X}_j$  mit  $\|y - y_j\|_X < \delta$ . Wir finden

$$\begin{aligned} |\langle Dx_i - f, y \rangle_X| &\leq |\langle Dx_i - f, y - y_j \rangle_X| + |\langle Dx_i - f, y_j \rangle_X| \\ &\leq (\sup_i \|Dx_i - f\|_{X^*}) \delta + |\langle Dx_i - f, y_j \rangle_X|. \end{aligned}$$

Die Grenzübergänge  $i \rightarrow \infty$  und  $\delta \rightarrow 0$  liefern auch hier

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle Dx_i - f, y \rangle_X = 0. \quad (51)$$

Damit haben wir die schwache Konvergenz  $Dx_i - f \rightarrow 0$  in  $X^*$  gezeigt.

6. Wir definieren nun die Teilfolgen  $(x^k)_{k=2}^\infty$  bzw.  $(z^k)_{k=2}^\infty$  der Folgen  $(x_i)$  bzw.  $(z_i)$  durch

$$x^k := x_{k-1}^{\sigma_{k-1}} = x_k^0 \quad \text{und} \quad z^k := z_k^0 \quad \forall k = 2, 3, \dots$$

Nach Konstruktion gilt

$$x^k, z^k \in \tilde{X}_k, \quad \tilde{J}_k z^k = \tilde{D}_k x^k - \tilde{f}_k \quad \text{und} \quad |\langle Dx^k - f, x^k \rangle_X| \leq \frac{1}{k-1}.$$

Mit Lemma 2.3.6 ergibt sich für jedes  $y \in X$  und jedes  $k > 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} H_f(y) &\geq H_f(x^k) + \langle Dx^k - f, y - x^k \rangle_X \\ &= H_f(x^k) + \langle Dx^k - f, y \rangle_X - \langle Dx^k - f, x^k \rangle_X. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  liefert

$$H_f(y) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} H_f(x^k). \quad (52)$$

7. Sei  $x_\infty$  schwacher Grenzwert einer Teilfolge  $(x^{k_i})$  von  $(x^k)$  bzgl. der schwachen Topologie in  $X$ . Aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit von  $H_f$  (vgl. Lemmata 2.3.5 und 2.3.3) und Abschätzung (52) gilt

$$H_f(y) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} H_f(x^{k_i}) \geq H_f(x_\infty) \quad \forall y \in X,$$

d.h.  $x_\infty$  ist Minimalpunkt von  $H_f$ . Nach Lemma 2.3.6 ist  $Dx_\infty - f = 0$ . Da  $D$  injektiv ist, gilt

$$x_\infty = x_g.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die in  $X$  beschränkte Folge  $(x^k)$  höchstens den Häufungspunkt  $x_g$  besitzt. Dies impliziert die schwache Konvergenz  $x^k \rightharpoonup x_g$  in  $X$ . Denn unter der Annahme, dies gelte nicht, existiert eine Teilfolge  $(x^{k_i})$  von  $(x^k)$  und ein  $x^* \in X^*$  so daß

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} |\langle x^*, x^{k_i} - x_g \rangle| \geq 1. \quad (53)$$

Aufgrund der schwachen Folgenkompaktheit beschränkter Mengen in einem reflexiven BANACH-Raum (Satz von EBERLEIN-SHMULYAN) muß aber eine Teilfolge von  $(x^{k_i})$  schwach konvergieren. Der Grenzwert dieser Teilfolge kann, wie wir gezeigt haben, nur  $x_g$  sein, was einen Widerspruch zu (53) darstellt. Damit ist die schwache Konvergenz  $x^k \rightharpoonup x_g$  in  $X$  gezeigt. Außerdem gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Dx^k - Dx_g, x^k - x_g \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Dx^k - f, x^k - x_g \rangle = 0.$$

Die  $S$ -Eigenschaft von  $D$  liefert schließlich die starke Konvergenz  $x^k \rightarrow x_g$  in  $X$ .  $\square$

Satz 5.2.6 besagt, daß die Aufgabe  $Dx = f$  unter gewissen Voraussetzungen durch Aufgaben in einem kleineren Raum  $\tilde{X}$  approximiert werden kann. Der Vorteil dieser Approximation liegt auf der Hand, wenn  $\tilde{X}$  ein HILBERT-Raum ist. Denn in diesem Fall sind die zu lösenden Approximationsaufgaben (44) endlichdimensional und linear.

Wie eine Durchsicht des Beweises von Satz 5.2.6 zeigt, sind folgende ergänzende Bemerkungen möglich:

1. Auf die Forderung,  $D$  möge die  $S$ -Eigenschaft besitzen, kann verzichtet werden, wenn in den Behauptungen von Satz 5.2.6 die starke Konvergenz der Folge  $(x^k)$  durch die schwache Konvergenz in  $X$  ersetzt wird.
2. In der Abbruchbedingung (45) für den  $k$ -ten Zyklus kann die rechte Seite  $\frac{1}{k}$  durch irgendeine Funktion  $g(k)$  von  $k$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = 0$  ersetzt werden.
3. Ist  $D$  selbst LIPSCHITZ-stetig, so kann  $\tilde{X} = X$  gewählt werden. In diesem Fall sind beliebige Abbruchbedingungen für die  $k$ -Zyklen möglich, denn es kann allein aus der Beschränkung der Folge  $(x_i)$  bzgl. der  $X$ -Norm und aus der Konvergenz  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_i\|_{X^*} = 0$  auf die Konvergenz  $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle Dx_i - f, x_i \rangle_X = 0$  geschlossen werden. Es kann dann sogar gezeigt werden, daß die volle Approximationsfolge  $(x_i)$  stark in  $X$  gegen  $x_g$  konvergiert. Das angegebene Verfahren ist in diesem Fall nur eine Variante des in Satz 5.2.2 angegebenen Verfahrens, die eine verzögerte Dimensionserhöhung ermöglicht.
4. Ist  $\tilde{D} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}^*$  selbst koerzitiv bzgl. 0, so erfüllen der Operator  $\tilde{D}$ , der Raum  $\tilde{X}$  und das GALERKIN-Schema  $(\tilde{X}_k)$  alle die in 5.1.1 und 5.2.1 aufgeführten Voraussetzungen mit Ausnahme der  $S$ -Eigenschaft. Insbesondere ist  $\tilde{D}$  nach Satz 2.2.1 bijektiv und besitzt eine Lösung  $\tilde{x}_g \in \tilde{X}$  der Aufgabe  $\tilde{D}\tilde{x} = f$ . Wie eine einfache Überlegung zeigt, gilt  $\tilde{x}_g = x_g$ . Betrachten wir also von vornherein  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{X}$  und  $(\tilde{X}_k)$  und die entsprechende Version des Satzes 5.2.6, so erhalten wir (vgl. die erste Bemerkung) die schwache Konvergenz der Folge  $(x^k)$  gegen  $x_g$  in  $\tilde{X}$ . Ebenso wie im Fall der vorangegangenen Bemerkung sind beliebige Abbruchkriterien für die  $k$ -Zyklen möglich. Außerdem kann gezeigt werden, daß die volle Approximationsfolge  $(x_i)$  schwach in  $\tilde{X}$  und stark in  $X$  gegen  $x_g$  konvergiert.

In unserem Fall ergibt sich folgende Anwendung:

**Satz 5.2.7** *Sind die Randwertvorgaben  $v_r$  bzw.  $p_r$  aus  $\mathbb{L}_{div, \Gamma_2}^4(\Omega)$  bzw.  $W^{1,2}(\Omega)$  und wählen wir in den Voraussetzungen 5.1.1 und 5.2.5*

$$X = \Pi, \quad \tilde{X} = \tilde{\Pi}, \quad D = B, \quad \tilde{D} = \tilde{B}, \quad m = \frac{1}{a}$$

*sowie ein GALERKIN-Schema  $(\tilde{X}_n) = (\tilde{\Pi}_n)$  für  $\tilde{\Pi}$ , so kann das in Satz 5.2.6 beschriebene Verfahren zur approximativen Lösung der Aufgabe  $B(-p) = 0$  verwendet werden. Die entstehende Approximationsfolge aus  $\tilde{\Pi}$  konvergiert in der  $\Pi$ -Norm gegen  $p_g$ .*

### 5.3 A-posteriori Fehlerabschätzungen

Die vorgestellten Approximationsverfahren müssen, sofern sie praktisch realisiert werden, nach endlich vielen Schritten abgebrochen werden. Daher stellt sich nach jedem Approximationsschritt die Frage, wie „gut“ die berechnete Näherung ist. In diesem Abschnitt wollen wir nun a-posteriori Fehlerabschätzungen für  $v_g$  und  $p_g$  angeben.

**Satz 5.3.1** *Für jedes  $v \in \mathbb{V}$  gilt:*

$$\|v - v_g\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\underline{a}} \left( F(v) + F^*(-\text{grad } p) \right)} \quad \forall p \in \Pi. \quad (54)$$

*Außerdem gilt die Implikation*

$$(v_n, p_n) \rightarrow (v_g, p_g) \text{ in } \mathbb{V} \times \Pi \Rightarrow F(v_n) + F^*(-\text{grad } p_n) \rightarrow 0.$$

*Beweis:* Seien  $v \in \mathbb{V}$  und  $p \in \Pi$  beliebig. Mit Lemma 2.3.2 und Folgerung 4.1.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} F(Kv) + F^*(-Lp) &\geq F(Kv) + \langle -Lp, Kv_g \rangle - F(Kv_g) = F(Kv) - F(Kv_g) \\ &= \int_0^1 \langle M(Kv_g + t(Kv - Kv_g)), Kv - Kv_g \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle K^*M(Kv_g + t(Kv - Kv_g)), v - v_g \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle K^*M(Kv_g + t(Kv - Kv_g)) - K^*MKv_g, v - v_g \rangle dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} \langle M(Kv_g + t(Kv - Kv_g)) - MKv_g, t(Kv - Kv_g) \rangle dt. \end{aligned}$$

Setzen wir die Abschätzung (28) aus Satz 4.2.3 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(Kv) + F^*(-Lp) &\geq \int_0^1 \underline{a}t \|Kv - Kv_g\|_2^2 dt \\ &= \frac{\underline{a}}{2} \|Kv - Kv_g\|_2^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar (54). Betrachten wir nun zwei Folgen  $(v_n) \subset \mathbb{V}$  und  $(p_n) \subset \Pi$  mit  $v_n \rightarrow v_g$  und  $p_n \rightarrow p_g$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $F$  bzw.  $F^*$  und mit Lemma 2.3.12 sowie Folgerung 4.1.3 finden wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( F(Kv_n) + F^*(-Lp_n) \right) = F(Kv_g) + F^*(-Lp_g) = \langle -Lp_g, Kv_g \rangle = 0.$$

□

Wir werden nun auch für  $p_g$  eine a-posteriori Fehlerabschätzung angeben. Da wir für  $M^{-1}$  bzw.  $B$  nur wesentlich schwächere Monotonieaussagen als für  $M$  bzw.  $A$  zur Verfügung haben, müssen wir prinzipiell anders argumentieren.

**Satz 5.3.2** *Für jedes  $p \in \Pi$  gilt*

$$\begin{aligned} \|\text{grad } p - \text{grad } p_g\|_1 &\leq \mu(v, p) \quad \forall v \in \mathbb{V}, \\ \mu(v, p) &:= \left( \bar{a} |\Omega|^{1/2} + \bar{b} \lambda(v, p) + 2\bar{b} \|M^{-1}(-\text{grad } p) + v_r\| \right) \lambda(v, p), \\ \lambda(v, p) &:= \|v - M^{-1}(-\text{grad } p)\|_2 + \sqrt{\frac{2}{\underline{a}} \left( F(v) + F^*(-\text{grad } p) \right)}. \end{aligned} \quad (55)$$

*Darüber hinaus gilt die Implikation*

$$(v_n, p_n) \rightarrow (v_g, p_g) \text{ in } \mathbb{V} \times \Pi \Rightarrow \mu(v_n, p_n) \rightarrow 0.$$

*Beweis:* Sei  $p \in \Pi$  beliebig. Mit  $Lp_g + Mv_g = 0$ ,  $-Lp = M\tilde{v}$ ,  $\tilde{v} := M^{-1}(-Lp)$  und beliebigem  $\lambda \geq \|\tilde{v} - v_g\|_2$  sowie mit Abschätzung (30) aus Satz 4.2.4 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Lp - Lp_g\|_1 &= \|M\tilde{v} - Mv_g\|_1 \\ &\leq \left( \bar{a} |\Omega|^{1/2} + \bar{b} \|\tilde{v} - v_g\|_2 + 2\bar{b} \|\tilde{v} + v_r\|_2 \right) \|\tilde{v} - v_g\|_2 \\ &\leq \left( \bar{a} |\Omega|^{1/2} + \bar{b} \lambda + 2\bar{b} \|\tilde{v} + v_r\|_2 \right) \lambda. \end{aligned}$$

Für beliebiges  $v \in \mathbb{V}$  gilt nach Satz 5.3.1

$$\begin{aligned} \|\tilde{v} - v_g\|_2 &\leq \|\tilde{v} - v\|_2 + \|v - v_g\|_2 \\ &\leq \|\tilde{v} - v\|_2 + \sqrt{\frac{2}{\underline{a}} \left( F(v) + F^*(-Lp) \right)} \\ &= \lambda(v, p). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt die Ungleichung (55). Seien  $(v_n) \subset \mathbb{V}$  und  $(p_n) \subset \Pi$  zwei Folgen mit  $v_n \rightarrow v_g$  und  $p_n \rightarrow p_g$ . Im Beweis von Satz 5.3.1 hatten wir bereits gesehen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( F(Kv_n) + F^*(-Lp_n) \right) = 0.$$

Andererseits gilt aufgrund der Stetigkeit von  $M^{-1}$  auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - M^{-1}(-Lp_n) = v_g - M^{-1}(-Lp_g) = 0.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt also  $\lambda(v_n, p_n) \rightarrow 0$  und damit  $\mu(v_n, p_n) \rightarrow 0$ . □

Wir haben nun sowohl für  $v_g$  als auch für  $p_g$  a-posteriori Fehlerabschätzungen gefunden.

## Literatur

- [1] R. A. ADAMS. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. W. ALT. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [3] H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, K. ZACHARIAS. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [4] H. GAJEWSKI, K. GRÖGER. Konjugierte Operatoren und a-posteriori-Fehlerabschätzungen. *Mathematische Nachrichten*, 73: 315-333, 1976.
- [5] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [6] K. GRÖGER. Zur Lösung einer Klasse von Gleichungen mit einem monotonen Potentialoperator. *Mathematische Nachrichten*, 81: 7-24, 1978.
- [7] M. HACKESCHMIDT. *Grundlagen der Strömungstechnik*. Band I. Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie, Leipzig, 1969.
- [8] M. HACKESCHMIDT. *Grundlagen der Strömungstechnik*. Band II. Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie, Leipzig, 1970.
- [9] K. YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1980.



## Thesen zur Diplomarbeit

Dieser Arbeit liegt eine spezielle Gleichung aus der Strömungstechnik zugrunde, die stationäre und turbulente Strömungen in porösen Medien beschreibt. Die Gleichung ist unter dem Namen nichtlineares DARCY-Gesetz bekannt und modelliert den Zusammenhang zwischen der vektoriellen Geschwindigkeit  $v$  des Strömungsmittels und dem Druck  $p$ . Das DARCY-Gesetz läßt sich in der Form

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} p + a v + b |v| v &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0\end{aligned}$$

schreiben, wobei  $a$  und  $b$  im einfachsten Fall positive Konstanten sind.

### 1. These: (Divergenzfreie Funktionen besitzen eine Normalenspur)

Seien  $\Omega$  ein beschränktes LIPSCHITZ-Gebiet des  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 < r, s < \infty$  zwei konjugierte Exponenten und  $\Gamma$  ein hinreichend gutes Randstück von  $\Omega$ . Dann kann jedem divergenzfreien,  $\mathbb{R}^N$ -wertigen Vektorfeld auf  $\Omega$ , dessen Komponentenfunktionen in  $L^r(\Omega)$  enthalten sind, in sinnvoller Weise eine Normalenspur auf  $\Gamma$  zugeordnet werden. Für ein divergenzfreies Vektorfeld verschwindet diese Normalenspur auf  $\Gamma$  genau dann, wenn das Vektorfeld alle Gradienten von  $W^{1,s}(\Omega)$ -Funktionen, die auf  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  verschwinden, annulliert.

### 2. These: (Schwache Formulierung und Trennung der Unbekannten)

Das DARCY-Gesetz ermöglicht unter Hinzunahme geeigneter Randbedingungen eine adäquate schwache Formulierung als Operatorgleichung. Es können zwei zueinander konjugierte Formulierungen des Problems gefunden werden, von denen die eine nur den Druck und die andere nur die Geschwindigkeit als Unbekannte enthält. Die dabei auftretenden Operatoren sind monotone Potentialoperatoren. Für die beiden konjugierten Teilprobleme existieren äquivalente Minimalprobleme.

### 3. These: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

Die schwache Formulierung des DARCY-Gesetzes besitzt eine eindeutige Lösung  $(v, p)$ .

### 4. These: (Existenz von Approximationsverfahren)

Die schwache Lösung des DARCY-Gesetzes kann durch geeignete Approximationsverfahren näherungsweise berechnet werden. Insbesondere sind das RITZ-Verfahren, das Gradientenverfahren und speziell angepaßte Projektions-Iterationsverfahren geeignet. Die Güte einer Näherungslösung kann durch a-posteriori Fehlerabschätzungen kontrolliert werden.



## **Erklärung**

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 6. August 2005