



Prof. Dr. Michael Herrmann
Technische Universität Braunschweig
Mathematik – Institut iPDE
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

Skript der Vorlesung
Mathematik III
für die Studiengänge der Fakultät 5
im Wintersemester 2020/21

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Griechisches Alphabet

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
α	A	alpha	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε, ϵ	E	epsilon	ë
ζ	Z	zeta	z
η	H	eta	ē
θ, ϑ	Θ	theta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	my	m

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
ν	N	ny	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omikron	ö
π	Π	pi	p
ϱ, ρ	P	rho	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	y
φ, ϕ	Φ	phi	ph, f
χ	X	chi	ch
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	omega	ō

Literatur

Das Skript folgt teilweise und in groben Zügen der Darstellung in

[AORS] R. ANSORGE, H.J. OBERLE, K. ROTHE, TH. SONAR:
Mathematik für Ingenieure 2. Wiley-VCH 2011, 4. Auflage.

Darüber hinaus gibt es viele gute Bücher zur Ingeniermathematik im Allgemeinen und zur Funktionentheorie im Besonderen, zum Beispiel:

[A] L. AHLFORS:
Complex Analysis: An introduction McGraw-Hill New York 1978.

[P] H. A. PRIESTLEY:
Introduction to Complex Analysis. Oxford University Press 2003, 2. edition.

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionentheorie – Grundlagen	5
1.1	Wiederholung	5
1.2	Erweiterte Zahlenebene und Kreisgeraden	8
1.3	Möbius-Transformationen	13
1.4	Komplexe Funktionen	24
1.5	Komplexe Differenzierbarkeit	30
1.6	Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann	35
1.7	Konforme und biholomorphe Funktionen	42
1.8	Zwei Anwendungen	50
1.9	Potenzreihen	58
1.10	Laurent-Reihen	63
1.11	Komplexe Kurvenintegrale	67
1.12	Windungszahl	75
2	Funktionentheorie – Integralsatz von Cauchy und Folgerungen	81
2.1	Integralsatz von Cauchy	81
2.2	Komplexe Stammfunktionen	89
2.3	Integralformel von Cauchy	92
2.4	Folgerungen aus Satz und Formel von Cauchy	95
2.5	Komplexe Logarithmen und Potenzen	104
2.6	Nullstellen und Polstellen	114
2.7	Residuensatz	123
2.8	Integralberechnung mit Residuen	134
3	Fourier-Transformation	143
3.1	Einführung	143
3.2	Weitere Eigenschaften	149
3.3	Abtastproblem in der Signalverarbeitung	155
3.4	Distributionen	158
3.5	Fourier-Transformation und Distributionen	169
3.6	Fourier-Transformation und partielle Differentialgleichungen	176
3.7	Anwendung von Fourier-Reihen bei partiellen Differentialgleichungen	187
4	Laplace-Transformation	197
4.1	Definition und Eigenschaften	197
4.2	Typische Anwendungsbeispiele	203
4.3	Inverse Laplace-Transformation	211

Kapitel 1

Funktionentheorie – Grundlagen

Vorbemerkung In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit Funktionen in einer komplexen Variablen sowie mit ihren geometrischen und analytischen Eigenschaften. Im Deutschen wird dieses Teilgebiet der Mathematik aus historischen Gründen als *Funktionentheorie* bezeichnet, obwohl *Komplexe Analysis* viel treffender ist und auch in der angelsächsischen Welt verwendet wird.

Vorlesungswoche 01

1.1 Wiederholung

Voraussetzungen In den nächsten Kapiteln werden wir die folgenden Konzepte und Resultate aus *Mathe-1* (siehe die Abschnitte 2.3 und 9.4.) benutzen:

1. Komplexe Zahlen mit ihren Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sowie den elementaren Operationen (konjugiert komplexe Zahl, Betrag usw.)
2. Darstellung komplexer Zahlen durch kartesische Koordinaten ($z = x + iy$ mit $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$) bzw. durch Polarkoordinaten ($z = r \exp(i\varphi)$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$), Umrechnungen zwischen den Koordinaten mit Hilfe der Euler-Formel
3. Konvergenz von komplexen Zahlenfolgen und der entsprechenden Reihen
4. Fundamentalsatz der Algebra über die Nullstellen komplexer Polynome sowie das Verfahren der Polynomdivision
5. Komplexe Potenzreihen und die Cauchy-Hadamard-Formel für den Konvergenzradius, Reihendarstellung von \exp , \sin , \cos

Über komplexe Wurzeln und Potenzen Die Gleichung

$$z^n = \zeta$$

besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und gegebenes $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau n verschiedene komplexe Lösungen $z \in \mathbb{C}$ und wir hatten in *Mathe-1* schon gesehen, dass man diese mit Hilfe der Polardarstellung

$$\zeta = |\zeta| \exp(i \arg(\zeta))$$

als

$$z_k = |\zeta|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta) + 2\pi k}{n}\right), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

schreiben kann (alternativ kann man auch leicht nachrechnen, dass $z_k^n = \zeta$ gilt). Jedes z_k wird (eine) n -te komplexe Wurzel von ζ genannt, aber sofern ζ nicht gerade eine positive reelle Zahl ist, schreiben wir in dieser Vorlesung **niemals**

$$\sqrt[n]{\zeta} \quad \text{oder} \quad \zeta^{1/n},$$

obwohl andere Autoren dies durchaus tun. Der Grund ist, dass es nicht nur eine, sondern mehrere n -te Wurzeln von ζ gibt, und dass es auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine sinnvolle Möglichkeit gibt, eine erste, letzte oder sonstwie ausgezeichnete Wurzel anzugeben (wir werden dies später noch genauer verstehen).

Die Ausnahme von der Regel ist der Fall $\zeta \in \mathbb{R}$ mit $\zeta > 0$. In diesem Fall gibt es zwar auch n verschiedene komplexe Wurzeln, aber nur eine davon ist wieder eine positive reelle Zahl (nämlich z_n in der obigen Formel) und diese wird dann mit $\sqrt[n]{\zeta}$ oder $\zeta^{1/n}$ bezeichnet.

Aus analogen Gründen benutzen wir in dieser Vorlesung keine nicht-ganzzahligen Potenzen von nicht-positiv-reellen Zahlen ζ . Beachte aber, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ihre ganzzahligen Potenzen via

$$\dots, \quad z^{-2} = \frac{1}{z \cdot z}, \quad z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z^0 = 1, \quad z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \quad \dots$$

immer in eindeutiger Weise definiert sind.

Bemerkungen

1. Eine Sonderrolle spielt $\zeta = 0$, da dort wegen $z_1 = \dots = z_n = 0$ alle n -ten Wurzeln zusammenfallen.
2. Die imaginäre Einheit i ist wegen $i \cdot i = -1$ eine Quadratwurzel von -1 , die andere ist $-i$. Wir schreiben in dieser Vorlesung **niemals** $\sqrt{-1}$, da damit ja i oder $-i$ gemeint sein könnte.
3. Ein ähnliches Problem mit der Mehrdeutigkeit tritt beim komplexen Logarithmus auf, d.h. bei den komplexen Lösungen der Gleichung

$$\exp(z) = \zeta,$$

siehe die *-Hausaufgabe bzw. die Diskussion weiter unten. Insbesondere werden wir im Fortgang dieser Vorlesung sehen, dass die Mehrdeutigkeit des Logarithmus, die Mehrdeutigkeit der n -ten Wurzeln und die Mehrdeutigkeit des komplexen Arguments (also des Polarwinkels) sehr viel miteinander zu tun haben.

Über komplexe Quadratwurzeln Für jede Zahl $\zeta = \xi + i v \neq 0$ können ihre zwei komplexen Quadratwurzeln, d.h. die Lösungen $z = x + i y$ der Gleichung

$$z^2 = \zeta,$$

analog zu oben als

$$z_1 = \sqrt{|\zeta|} \exp\left(\frac{1}{2} i \arg(\zeta) + i\pi\right), \quad z_2 = \sqrt{|\zeta|} \exp\left(\frac{1}{2} i \arg(\zeta)\right)$$

oder alternativ als

$$z_{\pm} = \pm \left(\sqrt{+\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + v^2}} + i \operatorname{sgn}(v) \sqrt{-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + v^2}} \right)$$

geschrieben werden, wobei in beiden Formeln alle Terme unter den Wurzelsymbolen nichtnegative reelle Zahlen sind und $\operatorname{sgn}(v) \in \{-1, 0, +1\}$ das Vorzeichen der reellen Zahl v bezeichnet. Die zweite Wurzelformel kann leicht durch eine Probe verifiziert werden oder alternativ aus

$$(x + i y)^2 = x^2 - y^2 + i 2 x y = \xi + i v$$

durch Koeffizientenvergleich und einfache Rechnungen im Reellen abgeleitet werden. Im Fall von $v = 0$ und $\xi > 0$ erhalten wir wegen $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = \xi$ die bekannte Formel

$$z_{\pm} = \pm \left(\sqrt{\xi} + i 0 \right),$$

wohingegen sich

$$z_{\pm} = \pm \left(0 + i \sqrt{-\xi} \right)$$

für $v = 0$ und $\xi < 0$ ergibt, weil dann ja $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = -\xi$ gilt.

Über die komplexe p - q -Formel Wir können mit einer Variante der angegebenen Wurzelformeln die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + p z + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$ bestimmen, denn die quadratische Ergänzung

$$\left(z + \frac{1}{2} p\right)^2 = \frac{1}{4} p^2 - q =: \zeta$$

zeigt, dass wir von jeder der oben angegebenen Wurzeln von ζ jeweils noch $\frac{1}{2} p$ abziehen müssen. Nichts anderes besagt die p - q -Formel. Diese liefert aber keine (zumindest keine explizite) Vorschrift, wie die beiden Wurzeln der komplexen Zahl ζ berechnet werden können, so dass die Wurzelformeln von oben ins Spiel kommen.

1.2 Erweiterte Zahlenebene und Kreisgeraden

Erweiterung der Zahlenebene Oftmals ist es sinnvoll, die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} um einen unendlich fernen Punkt zu erweitern. Man setzt daher

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und vereinbart die folgenden *formalen Rechenregeln*

$$z \pm \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ sowie $0 \pm \infty = \infty$ und $0/\infty = 0$.

Bemerkung

1. Achtung: Die Ausdrücke

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

können nicht in sinnvoller Weise definiert werden.

2. Wir nennen \mathbb{C}^* die erweiterte komplexe Zahlenebene. Sie kann mittels der inversen *stereographischen Projektion* (siehe unten) *bijektiv* auf die Einheitskugel abgebildet werden und wird daher in der Mathematik manchmal auch die Riemannsche Kugel genannt.
3. Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gegen ∞ (in einem uneigentlichen Sinn), wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/z_n = 0$ gilt. Alternativ kann man $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ im Sinne der uneigentlichen Konvergenz aus *Mathe-1* fordern.
4. Es gibt im Komplexen nur einen unendlich fernen Punkt. Das ist im Reellen anders, da man dort sehr wohl und in natürlicher Weise zwischen $-\infty$ und $+\infty$ unterscheiden kann.
5. Hinweis: Das Konzept des unendlich fernen Punktes ist viel einfacher, als es zunächst scheint und mit ein bisschen Erfahrung ergeben sich (fast) alle Formeln mit ∞ auf sehr intuitive Weise.

Definition Eine Kreisgerade in \mathbb{C}^* ist entweder eine Kreislinie oder eine (affine) Gerade, wobei letztere als Kreis interpretiert werden kann, der durch den unendlich fernen Punkt ∞ läuft und einen unendlich großen Radius besitzt.

Bemerkung Es gibt verschiedene Arten, Kreisgeraden zu beschreiben. Kreislinien werden oftmals als

$$C = \partial B_\varrho(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| = \varrho\}$$

angegeben, d.h. als Rand der offenen Kreisscheibe

$$B_\varrho(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| < \varrho\}$$

mit Mittelpunkt $z_* \in \mathbb{C}$ und Radius $0 < \varrho < \infty$. Eine Gerade C wird hingegen eindeutig durch die Angabe zweier Punkte $z_1, z_2 \in C$ mit $z_j = x_j + i y_j$ festgelegt, wobei wir dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} C &= \{x + i y \in \mathbb{C} : -(x - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((z - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)) = 0\} \end{aligned}$$

oder

$$C = \{s z_1 + (1 - s) z_2 : s \in \mathbb{R}\}$$

schreiben können (siehe *Mathe-1*). Wir werden nun zwei andere Möglichkeiten kennenlernen, Kreisgeraden durch Formeln zu beschreiben.

Erste allgemeine Darstellungsformel für Kreisgeraden Für jede Kreisgerade C existieren Parameter

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \mu \nu < |\zeta|^2,$$

so dass

$$C = \{z \in \mathbb{C} : \mu z \bar{z} - \bar{\zeta} z - \zeta \bar{z} + \nu = 0\}$$

gilt. Umgekehrt ist jede so definierte Teilmenge aus \mathbb{C} eine Kreisgerade, wobei es sich für $\mu = 0$ um eine Gerade und andernfalls um eine Kreislinie handelt.

Beispiele

1. Für die Kreislinie $C = \partial B_\varrho(z_*)$ gilt

$$\varrho^2 = |z - z_*|^2 = (z - z_*)(\bar{z} - \bar{z}_*) = z\bar{z} - z\bar{z}_* - \bar{z}z_* + z_*\bar{z}_*$$

für jedes $z \in C$, d.h. wir können $\mu = 1$, $\nu = z_*\bar{z}_* - \varrho^2$ und $\zeta = z_*$ wählen, um C in der gewünschten Form zu schreiben.

2. Sind umgekehrt die Parameter μ, ν, ζ mit $\mu \neq 0$ gegeben, so ist C eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Radius durch

$$z_* = \frac{\zeta}{\mu}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{\zeta \bar{\zeta} - \mu \nu}{\mu^2}}$$

berechnet werden können.

3. Die Menge

$$C = \{x + i y \in \mathbb{C} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

mit reellen Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade und kann (Nachrechnen!) via

$$z = x + i y \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$$

auch als

$$C = \{z \in \mathbb{C} : -\bar{\zeta} z - \zeta \bar{z} + \nu = 0\}$$

geschrieben werden (es gilt also $\mu = 0$), sofern wir $\zeta = -\frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$ und $\nu = \gamma$ setzen.

4. Ist C die Gerade durch die zwei verschiedenen Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so können wir

$$\mu = 0, \quad \zeta = \frac{1}{2} \mathbf{i} (z_2 - z_1), \quad \nu = \operatorname{Im} (z_1 (\bar{z}_2 - \bar{z}_1))$$

wählen, wobei dies via $z_j = x_j + \mathbf{i} y_j$ entweder direkt oder mittels

$$\alpha = y_2 - y_1, \quad \beta = x_1 - x_2, \quad \gamma = \nu = y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)$$

aus der vorangegangenen Beispiel abgeleitet werden kann.

5. Sind die Parameter $\mu = 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben, so liefert die Darstellungsfomel eine Gerade, die zum Beispiel die beiden Punkte

$$z_1 = \frac{\nu}{2|\zeta|^2} (1 - \mathbf{i}) \zeta, \quad z_2 = \frac{\nu}{2|\zeta|^2} (1 + \mathbf{i}) \zeta$$

enthält. Insbesondere werden die tangentielle bzw. die normale Richtung durch die komplexen Zahlen $\mathbf{i} \zeta$ bzw. ζ beschrieben.

Spiegelung an Kreisgeraden Ist $C = \partial B_\varrho(z_*)$ eine Kreislinie, so nennen wir zwei Punkte ζ_1 und ζ_2 in \mathbb{C}^* genau dann symmetrisch bzgl. C , wenn

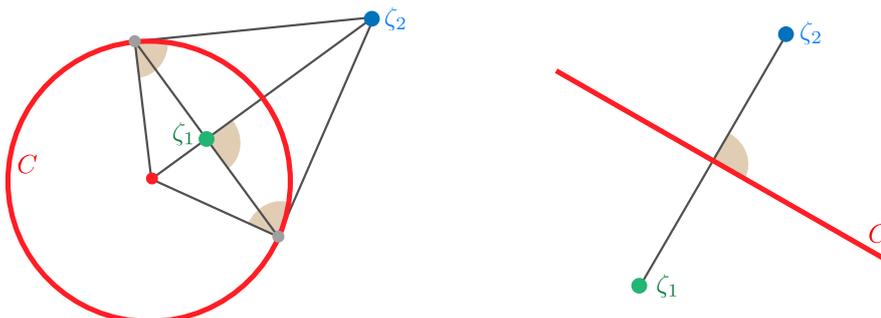
$$(\zeta_1 - z_*) (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_*) = \varrho^2$$

gilt. In diesem Fall (siehe Bild) sagt man auch, ζ_1 ist die Spiegelung von ζ_2 an C und umgekehrt. Ist C jedoch eine Gerade, so sind ζ_1 und ζ_2 genau dann symmetrisch bzgl. C , wenn beide Punkte spiegelsymmetrisch bzgl. C liegen.

Geometrische Bedeutung Die Symmetrie bzgl. der Kreislinie meint, dass die drei Punkte ζ_1 , ζ_2 und z_* auf einer Geraden liegen und dass

$$|\zeta_1 - z_*| |\zeta_2 - z_*| = \varrho^2$$

gilt (Übungsaufgabe). Insbesondere ist jeder Punkt $\zeta \in C$ symmetrisch zu sich selbst und der Kreismittelpunkt z_* ist symmetrisch zu ∞ .



Zur Symmetrie bzgl. eines Kreises (links) und bzgl. einer Geraden (rechts). Rechte Winkel sind durch braune Viertelkreise markiert und der rote Punkt stellt den Kreismittelpunkt z_* dar.

Lemma (Zweite allgemeine Darstellungsformel für Kreisgeraden) Sind $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ zwei Punkte und ist $\eta > 0$ ein reeller Parameter, so ist die Menge

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2|\}$$

eine Kreisgerade, wobei ζ_1 und ζ_2 symmetrisch bzgl. C liegen. Dabei handelt es sich für $\eta = 1$ um eine Gerade und sonst immer um eine Kreislinie.

Beweis: Wir schreiben $\zeta_j = \xi_j + i v_j$ sowie $z = x + i y$ und betrachten zunächst den Fall $\eta \neq 1$. Durch direkte Rechnungen verifizieren wir, dass $|z - \zeta_1|^2 = \eta^2 |z - \zeta_2|^2$ genau dann gilt, wenn

$$(x - \xi_1)^2 + (y - v_1)^2 = \eta^2 (x - \xi_2)^2 + \eta^2 (y - v_2)^2 \quad \text{bzw.} \quad (x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 = \varrho^2$$

erfüllt sind, wobei

$$x_* := \frac{\xi_1 - \eta^2 \xi_2}{1 - \eta^2}, \quad y_* := \frac{v_1 - \eta^2 v_2}{1 - \eta^2}, \quad \varrho^2 := \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2)^2} ((\xi_2 - \xi_1)^2 + (v_2 - v_1)^2).$$

Damit haben wir für $\eta \neq 1$ gezeigt, dass C wirklich ein Kreis ist, wobei ϱ gerade der Radius und

$$z_* = x_* + i y_* = \frac{\zeta_1 - \eta^2 \zeta_2}{1 - \eta^2}$$

der Mittelpunkt ist. Da außerdem

$$\zeta_1 - z_* = \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2)} (\zeta_2 - \zeta_1), \quad \zeta_2 - z_* = \frac{1}{(1 - \eta^2)} (\zeta_2 - \zeta_1)$$

gilt, liegen die Punkte ζ_1 , ζ_2 und z_* wirklich auf einer Geraden. Sie erfüllen auch

$$|\zeta_1 - z_*| |\zeta_2 - z_*| = \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2)^2} |\zeta_2 - \zeta_1|^2 = \varrho^2,$$

d.h. ζ_1 und ζ_2 sind in der Tat symmetrisch bzgl. C . Im Fall $\eta = 1$ heben sich die quadratischen Terme mit x^2 und y^2 auf und wir erhalten die Geradengleichung

$$C = \{x + i y \in \mathbb{C} : x (\xi_2 - \xi_1) + y (v_2 - v_1) = \frac{1}{2} (\xi_2^2 - \xi_1^2 + v_2^2 - v_1^2)\}.$$

Wir sehen nun, dass der Punkt $\frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2)$ auf C liegt und das C senkrecht auf $\zeta_2 - \zeta_1$ steht (der Vektor $(v_2 - v_1, \xi_1 - \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt die Richtung von C an). Damit haben wir auch in diesem Fall gezeigt, dass ζ_1 und ζ_2 symmetrisch bzgl. C sind. \square

Bemerkung Es gilt auch die folgende Umkehrung: Ist C eine Kreisgerade und sind die Punkte ζ_1 und ζ_2 symmetrisch bzgl. C , so kann C durch die Formel im Lemma charakterisiert werden, sofern η geeignet gewählt wird. Es gilt zum Beispiel $\eta = |z_0 - \zeta_1| / |z_0 - \zeta_2|$ für jeden frei gewählten Punkt $z_0 \in C$.

Beispiele

1. Das Lemma impliziert

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha - \beta i| = |z - \alpha + \beta i|\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

für alle reellen Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Kreisgerade ist hier also die reelle Achse, wobei dies die einzige Gerade ist, bezüglich der die Punkte $\zeta_1 = \alpha + \beta i$ und $\zeta_2 = \alpha - \beta i$ symmetrisch liegen.

2. Analog ergibt sich

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z - 1|\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$$

für die Diagonale in der komplexen Zahlenebene.

3. Unser Beweis liefert

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2|z - \frac{1}{2}i|\} = \partial B_1(0)$$

als alternative Darstellung der Einheitskreislinie, weil die Wahl

$$\zeta_1 = 2i, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}i, \quad \mu = 2$$

die Formeln

$$\varrho = \sqrt{\frac{4}{9}|\zeta_2 - \zeta_1|^2} = 1, \quad z_* = -\frac{1}{3}(\zeta_1 - 4\zeta_2) = 0$$

impliziert.

\mathbb{C}^* als Modell der Sphäre* Durch die Formel

$$z = P(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\xi_1 + i \xi_2}{1 - \xi_3}$$

wird eine Abbildung $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ definiert, die jeden Punkt $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ der Einheitssphäre

$$\mathbb{S}^2 := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\}$$

auf relativ einfache und naheliegende Weise auf einen Punkt z in \mathbb{C}^* abbildet (siehe Bild) und stereographische Projektion genannt wird. Dabei gilt

$$P(0, 0, -1) = 0, \quad P(0, 0, +1) = \infty, \quad P(\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

d.h. der Süd- bzw. der Nordpol wird auf den Ursprung bzw. den unendlich fernen Punkt abgebildet und das Bild des Äquatorialkreises ist gerade die Einheitskreislinie. Die stereographische Projektion hat drei wesentliche Eigenschaften:

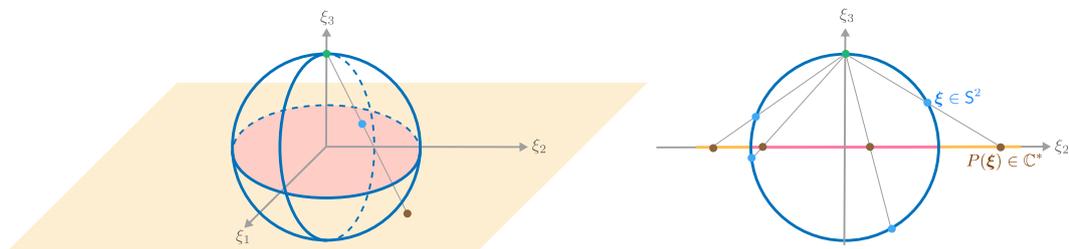
1. P ist bijektiv, d.h. es existiert die Umkehrabbildung $P^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}^2$, wobei man leicht die Formel

$$\boldsymbol{\xi} = P^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{-iz + i\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)$$

nachrechnet.

2. P ist winkeltreu und kann zum Beispiel benutzt werden, um winkeltreue Weltkarten zu erzeugen (die allerdings unendlich groß sind). Siehe dazu *Mathe-2* und WIKIPEDIA.
3. P bildet sphärische Kreise auf Kreisgeraden ab.

Die erste Eigenschaft besagt, dass man jeden Punkt in der erweiterten Zahlenebene \mathbb{C}^* mit genau einem Punkt in der Sphäre S^2 identifizieren kann und dass zu jeder Abbildung $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ durch $U := P^{-1} \circ T \circ P$ eine entsprechende Abbildung $U : S^2 \rightarrow S^2$ definiert werden kann. Die zweite und dritte Eigenschaft von P garantieren, dass U schöne Eigenschaften besitzt, sofern T schöne Eigenschaften aufweist. Besonders wichtig ist dabei der Fall, dass T eine Möbius-Transformation ist (siehe unten), weil dann auch U winkeltreu und bijektiv ist und außerdem sphärische Kreise in sphärische Kreise überführt.



Links: Die stereographische Projektion der Sphäre (blau), wobei der Nordpol grün dargestellt ist. Beachte, dass die südliche bzw. die nördliche Hemisphäre in das Innen- bzw. das Aussengebiet der Einheitskreislinie abgebildet wird (rosa bzw. orange). *Rechts:* Das entsprechende zweidimensionale Bild. Beachte, dass in der Literatur manchmal leicht andere Definitionen der stereographischen Projektion verwendet werden, die aber analoge Eigenschaften besitzen.

1.3 Möbius-Transformationen

Motivation Möbius-Transformationen sind zum einen relativ einfache komplexe Funktionen und wir werden sie immer wieder benutzen, um abstrakte Resultate mit Beispielen zu illustrieren. Darüber hinaus besitzen sie bemerkenswerte geometrische Eigenschaften und tauchen in vielen Bereichen der Mathematik und der Anwendungswissenschaften auf.

Setting In diesen Abschnitt werden wir mit der erweiterten Zahlenebene \mathbb{C}^* arbeiten, d.h. wir ergänzen \mathbb{C} um den unendlich fernen Punkt ∞ .

Grundlegende Eigenschaften

Definition Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gegebene komplexe Zahlen mit

$$ad - bc \neq 0$$

Dann wird die durch

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

definierte Abbildung $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ die Möbius-Transformation mit den Parametern a, b, c, d genannt.

Bemerkung

1. Statt *Transformation* kann man auch *Abbildung* oder *Funktion* sagen.
2. Man schreibt auch $T_{a,b,c,d}$ statt T , sofern man mit mehreren Parametersätzen arbeitet.
3. Für jede Möbius-Transformation ist via

$$T_{a,b,c,d}(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

ihr Wert im unendlich fernen Punkt gegeben, wobei $T_{a,b,c,d}(\infty) = \infty$ im Fall $c = 0$ gilt.

4. $T_{a,b,c,d}$ besitzt genau eine Nullstelle und genau eine Polstelle in \mathbb{C}^* , denn es gilt

$$T_{a,b,c,d}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{b}{a}, \quad T_{a,b,c,d}(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{d}{c},$$

wobei ggf. die obigen Rechenregeln in \mathbb{C}^* verwendet werden müssen. Beachte, dass die Null- und die Polstelle wegen $ad - bc \neq 0$ niemals zusammenfallen.

5. Zwei Parametersätze definieren genau dann via

$$T_{a,b,c,d}(z) = T_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^*$$

dieselbe Möbius-Transformation, sofern

$$\tilde{a} = \lambda a, \quad \tilde{b} = \lambda b, \quad \tilde{c} = \lambda c, \quad \tilde{d} = \lambda d,$$

für einen komplexwertigen Faktor $\lambda \neq 0$ gilt. Um diese Mehrdeutigkeit in den Parametersätzen zu eliminieren, fordern einige Autoren $ad - bc = 1$ anstelle von $ad - bc \neq 0$, aber dies verkompliziert einige Formeln.

Beispiele

1. Für $b = 0, c = 0, d = 1$ beschreibt

$$T(z) = T_{a,0,0,1}(z) = az$$

gerade die Multiplikation mit $a \in \mathbb{C}$ und damit aus geometrischer Sicht eine Drehstreckung.

2. Für $a = 0, c = 0, d = 1$ ist

$$T(z) = T_{0,b,0,1}(z) = z + b$$

gerade die Addition von b bzw. die Verschiebung um b .

3. Für $c = 0$ und $d = 1$ ergibt sich die affine Transformation

$$T(z) = T_{a,b,0,1}(z) = az + b,$$

die Drehstreckung und Verschiebung kombiniert.

4. Wegen

$$T_{a,0,0,a}(z) = \frac{az + 0}{0z + a} = \frac{az}{a} = z$$

ist $T_{a,0,0,a}$ für jedes $a \neq 0$ die Identitätsabbildung.

5. Die Abbildung

$$T(z) = T_{0,1,1,0}(z) = \frac{1}{z}$$

wird Inversion genannt.

Theorem (Kompositionssatz) Die Hintereinanderausführung (d.h. Komposition) zweier Möbius-Transformationen ist selbst Möbius-Transformation. Genauer gesagt, es gilt

$$T_{a_3, b_3, c_3, d_3} = T_{a_2, b_2, c_2, d_2} \circ T_{a_1, b_1, c_1, d_1},$$

sofern

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

im Sinne der Multiplikation von $(2, 2)$ -Matrizen erfüllt ist.

Beweis: Nach Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} (T_{a_2, b_2, c_2, d_2} \circ T_{a_1, b_1, c_1, d_1})(z) &= T_{a_2, b_2, c_2, d_2}(T_{a_1, b_1, c_1, d_1}(z)) \\ &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{a_2 (a_1 z + b_1) + b_2 (c_1 z + d_1)}{c_2 (a_1 z + b_1) + d_2 (c_1 z + d_1)} \\ &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1) z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} \\ &= T_{a_3, b_3, c_3, d_3}(z) \end{aligned}$$

und die behauptete Formel folgt nun, da z beliebig ist. □

Folgerung (Invertierbarkeitssatz) Es gilt

$$T_{d, -b, -c, a} = T_{a, b, c, d}^{-1} \quad T_{a, b, c, d} = T_{d, -b, -c, a}^{-1}$$

im Sinne von Umkehrabbildungen. Insbesondere ist jede Möbius-Transformation auf \mathbb{C}^* invertierbar, wobei die Umkehrabbildung wieder eine Möbius-Transformation ist.

Beweis: Mit

$$a_2 = d, \quad b_2 = -b, \quad c_2 = -c, \quad d_2 = a, \quad a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = d$$

und direkten Rechnungen erhalten wir

$$(T_{d,-b,a,-d} \circ T_{a,b,c,d})(z) = \frac{(da - bc)z + (db - bd)}{(-ca + ac)z + (-cb + ad)} = \frac{(ad - bc)z + 0}{0z + (ad - bc)} = z.$$

Es folgt

$$T_{d,-b,-c,a} \circ T_{a,b,c,d} = \text{id},$$

wobei $\text{id} = T_{1,0,0,1}$ die Identitätsabbildung ist, und analog zeigen wir

$$T_{a,b,c,d} \circ T_{d,-b,-c,a} = \text{id}.$$

Die letzten beiden Formeln liefern zusammen die Behauptung. \square

Bemerkung

1. Die Formeln der Umkehrabbildungen ergeben sich auch aus

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und der Tatsache, dass $T_{ad-bc,0,0,a-d-bc} = T_{1,0,0,1}$ gilt.

2. Eine andere, aber äquivalente Formulierung des Invertierbarkeitssatzes ist die folgende Implikation über das Lösen von Gleichungen:

$$\text{Es gilt } \frac{az + b}{cz + d} = \zeta \text{ genau dann, wenn } z = -\frac{d\zeta - b}{c\zeta - a} \text{ gilt.}$$

3. Ausblick*: Die Menge aller Möbius-Transformationen ist eine Gruppe im Sinne der mathematischen Algebra, wobei die Komposition die Multiplikation ist und $T_{1,0,0,1}$ das neutrale Element darstellt.

Folgerung (Zerlegungssatz) Die affinen Transformationen und die Inversion sind die Elementarbausteine, aus denen jede andere Möbius-Transformation mittels Komposition zusammengesetzt werden kann.

Beweis: Für $c = 0$ ist $T_{a,b,0,d}$ selbst eine affine Transformation und damit schon Baustein. Für $c \neq 0$ ergibt sich aus

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d}$$

die Darstellung

$$T_{a,b,c,d} = T_{\frac{bc-ad}{c}, \frac{a}{c}, 0, 1} \circ T_{0,1,1,0} \circ T_{c,d,0,1},$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung die Inversion $T_{0,1,1,0}$ mit zwei affinen Transformationen komponiert wird. \square

Geometrische Eigenschaften

Theorem (Invarianz von Kreisgeraden) Jede Möbius-Transformation bildet Kreisgeraden auf Kreisgeraden ab.

Beweis: Aufgrund des Zerlegungssatz reicht es, die Behauptung für affine Transformationen sowie für die Inversion separat nachzuprüfen. Dazu betrachten wir eine beliebige Kreisgerade

$$C = \{z \in \mathbb{C} : \mu z \bar{z} - \bar{\zeta} z - \zeta \bar{z} + \nu = 0\}$$

mit fixierten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ (für die $\mu\nu < \zeta\bar{\zeta}$ gilt) sowie zunächst die affine Transformation $T_{a,b,0,1}$, wobei wir

$$\tilde{z} = T_{a,b,0,1}(z) = az + b \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{\tilde{z} - b}{a}$$

schreiben. Durch direkte Rechnungen erhalten wir

$$\mu z \bar{z} - \bar{\zeta} z - \zeta \bar{z} + \nu = \tilde{\mu} \tilde{z} \bar{\tilde{z}} - \bar{\tilde{\zeta}} \tilde{z} - \tilde{\zeta} \bar{\tilde{z}} + \tilde{\nu}$$

mit

$$\mathbb{R} \ni \tilde{\mu} := \frac{\mu}{a\bar{a}}, \quad \mathbb{R} \ni \tilde{\nu} := \frac{\mu b\bar{b}}{a\bar{a}} + \frac{\bar{\zeta}b}{a} + \frac{\zeta\bar{b}}{\bar{a}} + \nu$$

sowie

$$\mathbb{C} \ni \tilde{\zeta} := \frac{\mu b}{a\bar{a}} + \frac{\zeta}{\bar{a}},$$

wobei wir auch leicht $\tilde{\mu}\tilde{\nu} < \tilde{\zeta}\bar{\tilde{\zeta}}$ nachrechnen können. Wir schließen, dass $T_{a,b,0,1}$ die Kreisgerade C auf die Kreisgerade

$$T_{a,b,0,1}(C) = \tilde{C} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \tilde{\mu} \tilde{z} \bar{\tilde{z}} - \bar{\tilde{\zeta}} \tilde{z} - \tilde{\zeta} \bar{\tilde{z}} + \tilde{\nu} = 0\}$$

abbildet. Im zweiten Beweisschritt betrachten wir noch einmal die Kreisgerade C , aber diesmal mit der Inversion, d.h. wir schreiben

$$\tilde{z} = T_{0,1,1,0}(z) = \frac{1}{z} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{1}{\tilde{z}}.$$

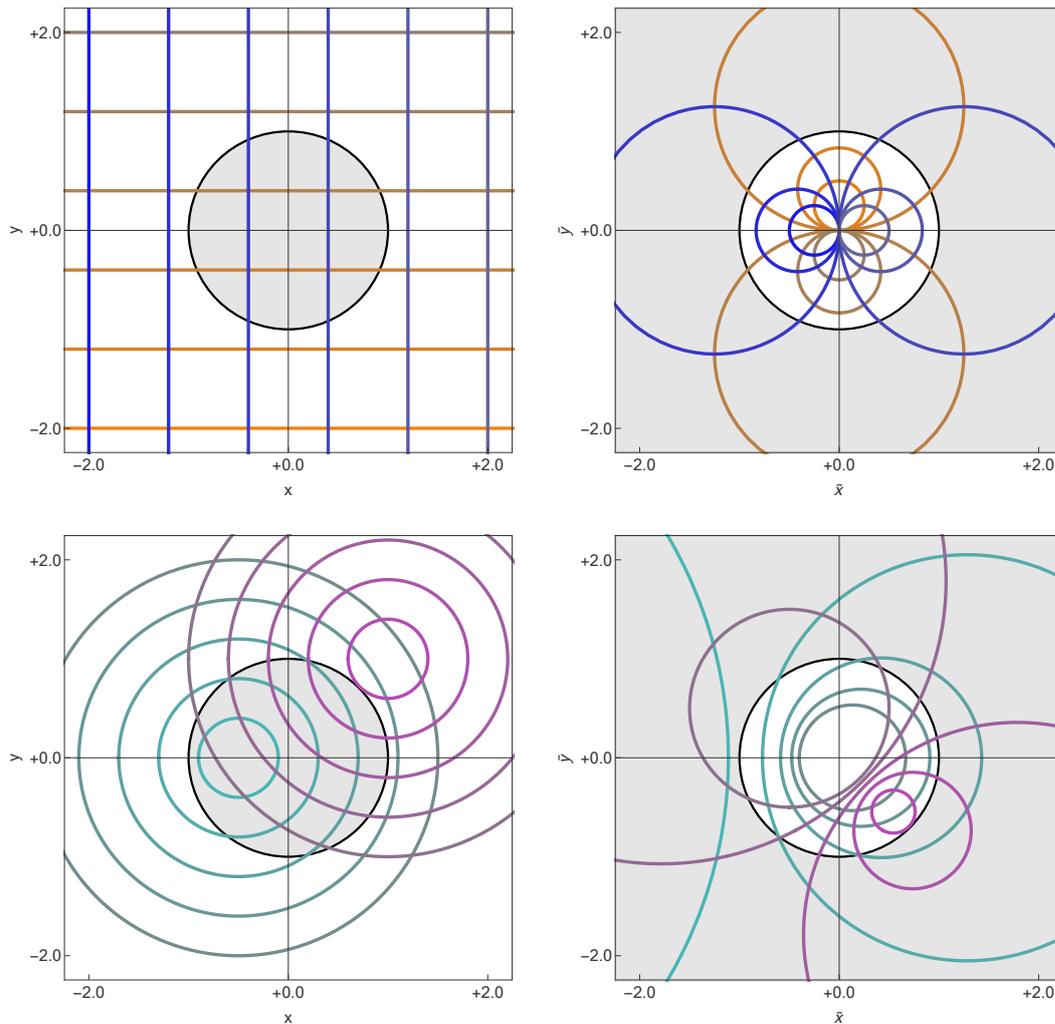
Mit direkten Rechnungen zeigen wir

$$T_{0,1,1,0}(C) = \tilde{C}$$

wobei diesmal

$$\tilde{\mu} := \nu, \quad \tilde{\nu} := \mu, \quad \tilde{\zeta} := \bar{\zeta}$$

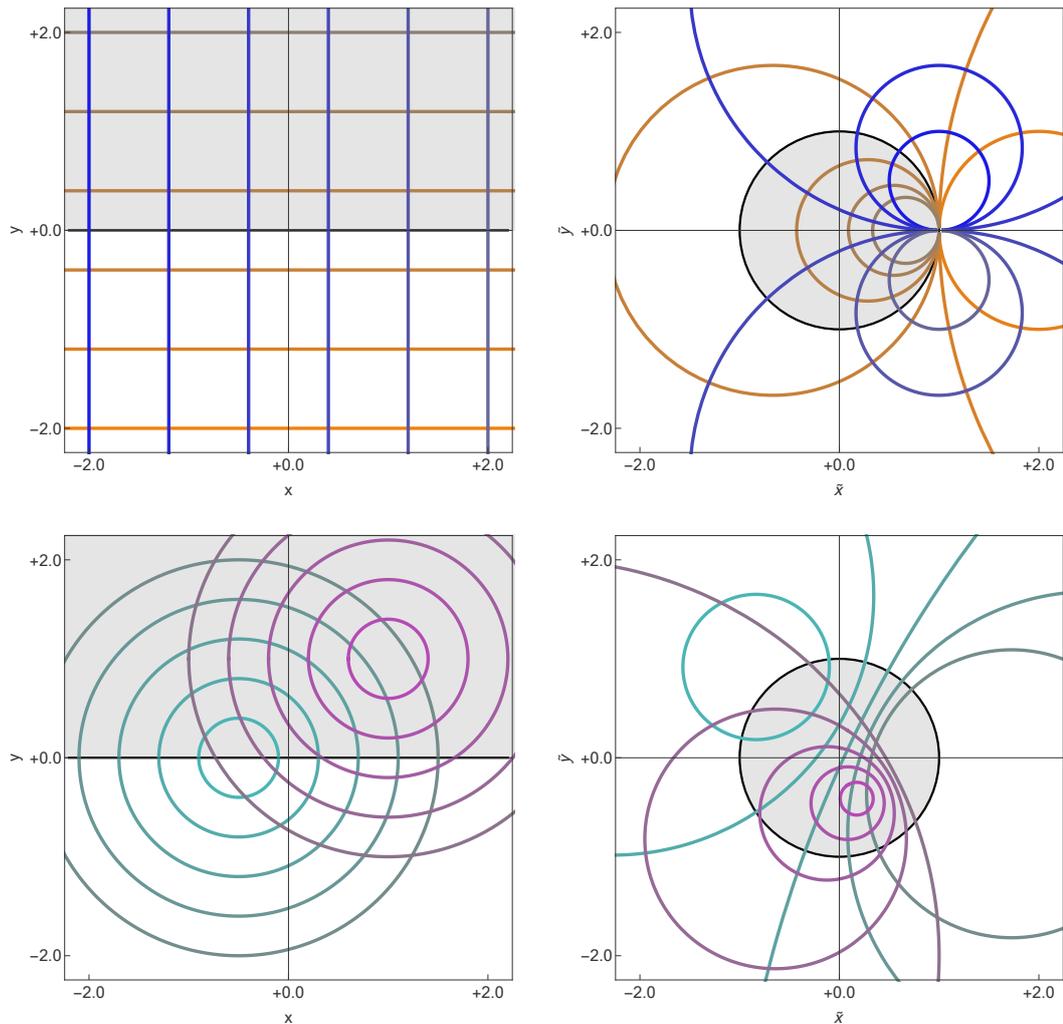
zu setzen ist. □



Zur Invarianz von Kreisgeraden bei der Inversion $\tilde{z} = T_{0,1,1,0}(z) = 1/z$, wobei links verschiedene Kreisgeraden im Urbild und rechts die entsprechenden Bilder mit derselben Farbe dargestellt sind. Die Einheitskreislinie ist invariant (d.h. $|\tilde{z}| = 1$ für $|z| = 1$) und schwarz dargestellt. Beachte auch, dass das Außen- bzw. das Innengebiet der Einheitskreislinie auf das Innen- bzw. Außengebiet abgebildet wird (graue und weiße Mengen).

Bemerkung

1. Das Theorem besagt nicht, dass Kreislinien auf Kreislinien und Geraden auf Geraden abgebildet werden, sondern dass jede Kreislinie und jede Gerade entweder auf eine Kreislinie oder eine Gerade abgebildet wird.
2. Wegen des Invertierungssatzes gilt für jede Möbius-Transformation auch die folgende Aussage: Das Urbild einer Kreisgeraden ist eine Kreisgerade.
3. Die Invarianz von Kreisgeraden gilt nur für Möbius-Transformationen, d.h. jede andere Abbildung $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ wird dieses Gesetz verletzen (in dem Sinne, dass mindestens eine Kreisgerade nicht auf eine Kreisgerade abgebildet wird).
4. Wir werden später sehen, dass jede Möbius-Transformation auch konform (d.h. winkeltreu) ist. Diese Eigenschaft besitzen aber auch viele andere Abbildungen.
5. Wir haben im Beweis die erste allgemeine Darstellungsformel von Kreisgeraden verwendet. Alternativ hätten wir auch die zweite Darstellungsformel verwenden können und dies wäre sogar etwas eleganter. Siehe dazu auch den Beweis des nächsten Resultats.



Zur Invarianz von Kreisgeraden bei der Cayley-Transformation $\tilde{z} = T_{1, -i, 1, +i}(z) = (z - i)/(z + i)$. Insbesondere wird die obere Halbebene in die Einheitskreisscheibe abgebildet (jeweils grau). Beachte, dass es links Kreise gibt, die rechts Geraden entsprechen, aber diese sind nicht eingezeichnet.

Lemma (Invarianz der Kreissymmetrie) Für jede Möbius-Transformation T und jede Kreisgerade C gilt: ζ_1 und ζ_2 sind genau dann symmetrisch bzgl. C , wenn $T(\zeta_1)$ und $T(\zeta_2)$ symmetrisch bzgl. $T(C)$ sind.

Beweis: Die zweite Darstellungsformel für Kreisgeraden impliziert die Existenz einer Konstanten $\eta > 0$, so dass

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2|\}$$

gilt. Mit

$$\tilde{z} = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{bzw.} \quad z = T^{-1}(\tilde{z}) = -\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a} \quad \text{sowie} \quad \tilde{\zeta}_j = \frac{b + a\zeta_j}{d + c\zeta_j} = T(\zeta_j)$$

ergibt sich

$$\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} = \frac{\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a} + \zeta_1}{\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a} + \zeta_2} = \frac{(d + c\zeta_1)\tilde{z} - (b + a\zeta_1)}{(d + c\zeta_2)\tilde{z} - (b + a\zeta_2)} = \frac{d + c\zeta_1}{d + c\zeta_2} \frac{\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1}{\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2}.$$

Setzen wir nun

$$\tilde{\eta} := \eta \left| \frac{d + c\zeta_2}{d + c\zeta_1} \right|,$$

so erhalten wir

$$\tilde{C} := T(C) = \{ \tilde{z} \in \mathbb{C} : |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1| = \tilde{\eta} |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2| \}$$

und schließen, dass $\tilde{\zeta}_1$ und $\tilde{\zeta}_2$ in der Tat symmetrisch bzgl. \tilde{C} sind. \square

Theorem (Satz über das Doppelverhältnis) Seien z_1, z_2, z_3 sowie $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ jeweils drei paarweise verschiedene Punkte in \mathbb{C}^* . Dann existiert genau eine Möbius-Transformation T , so dass die Interpolationseigenschaft

$$\tilde{z}_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt ist. Für diese Transformation T gilt außerdem die Dreipunkt-Formel

$$\frac{\frac{\tilde{z} - \tilde{z}_1}{\tilde{z} - \tilde{z}_2}}{\frac{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1}{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2}} = \frac{\frac{z - z_1}{z - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}$$

für alle $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}^*$ mit $\tilde{z} = T(z)$.

Beweisskizze: Im ersten Schritt überlegen wir uns, dass \tilde{S} mit

$$S(z) := \frac{\frac{z - z_1}{z - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}$$

die einzige Möbius-Transformation ist, für die

$$S(z_1) = 0, \quad S(z_2) = \infty, \quad S(z_3) = 1$$

gilt. Analog liefert

$$\tilde{S}(\tilde{z}) := \frac{\frac{\tilde{z} - \tilde{z}_1}{\tilde{z} - \tilde{z}_2}}{\frac{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1}{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2}}$$

die einzige Möbius-Transformation mit

$$\tilde{S}(\tilde{z}_1) = 0, \quad \tilde{S}(\tilde{z}_2) = \infty, \quad \tilde{S}(\tilde{z}_3) = 1.$$

Die Abbildung $T := \tilde{S}^{-1} \circ S$ besitzt nun nach Konstruktion alle gewünschten Eigenschaften, wobei die Dreipunkt-Formel auch als

$$\tilde{S}(T(z)) = S(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^*$$

geschrieben werden kann. Da die Interpolationseigenschaft

$$(\tilde{S} \circ T)(z_j) = S(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

fordert, impliziert die Eindeutigkeit von S die Formel $\tilde{S} \circ T = S$ und damit auch die behauptete Eindeutigkeit von T .

Bemerkungen

1. Das Theorem besagt, dass man eine Möbius-Transformation eindeutig durch die Angabe von drei Urbildpunkten (die z_j) sowie der entsprechenden Bildpunkte (die \tilde{z}_j) beschreiben bzw. festlegen kann.
2. In der Literatur wird oftmals

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad \text{statt} \quad \frac{\frac{z - z_1}{z - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}$$

für das Doppelverhältnis geschrieben.

3. Wenn einer der drei Urbildpunkte z_j und/oder einer der drei Bildpunkte \tilde{z}_j den Wert ∞ annimmt, so muss die Dreipunkt-Formel wegen des nicht definierten Terms ∞/∞ angepasst werden. Die notwendigen Modifikationen können aber leicht mit Stetigkeitsargumenten identifiziert werden. Die Nebenrechnung

$$\frac{\frac{z - z_1}{z - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} \frac{\frac{z}{z_1} - 1}{\frac{z_3}{z_1} - 1} \xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$$

zeigt zum Beispiel für $z_1 = \infty$, durch welches Verhältnis das Doppelverhältnis im Urbildraum ersetzt werden muss. Die anderen Fälle können analog behandelt werden.

Beispiel Wir setzen

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = i \quad \text{sowie} \quad \tilde{z}_1 = 0, \quad \tilde{z}_2 = i, \quad \tilde{z}_3 = -i$$

und bestimmen die entsprechende Möbius-Transformation T indem wir das Doppelverhältnis in der Dreipunkt-Formel

$$\frac{\frac{\tilde{z} - 0}{\tilde{z} - i}}{\frac{-i - 0}{-i - i}} = \frac{\frac{z - 0}{z - 1}}{\frac{i - 0}{i - 1}}$$

schrittweise nach \tilde{z} auflösen. Durch einfache Rechnungen erhalten wir zunächst

$$\frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - i} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{i}{i - 1}} \frac{z}{z - 1} = \frac{1 + i}{2} \frac{z}{z - 1} =: \zeta$$

und weil der Invertierungssatz die Implikation

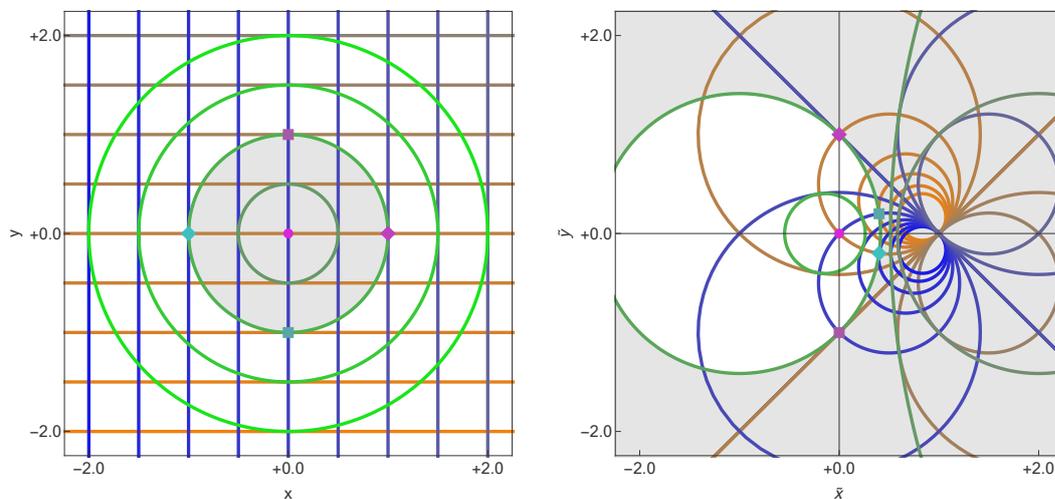
$$\frac{a\tilde{z} + b}{c\tilde{z} + d} = \zeta \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{z} = -\frac{d\zeta - b}{c\zeta - a}$$

liefert, ergibt sich mit $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ und $d = -i$ schließlich

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= \frac{i\zeta}{\zeta - 1} = \frac{\frac{-1+i}{2} \frac{z}{z-1}}{\frac{1+i}{2} \frac{z}{z-1} - 1} = \frac{(-1+i)z}{(1+i)z - 2(z-1)} = \frac{(-1+i)z}{(-1+i)z + 2} \\ &= \frac{z}{z - 1 - i}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $T = T_{1,0,1,-1-i}$ die gesuchte Möbius-Transformation.

Bemerkung: Bei Doppelverhältnissen kann man sich sehr leicht verrechnen. Machen Sie daher immer die Probe, d.h. prüfen Sie am Ende, ob wirklich die Interpolationseigenschaft erfüllt ist.



Die Möbius-Transformation aus dem soeben gerechneten Beispiel, wobei die vorgegebenen Bild- und Urbildpunkte lila gezeichnet sind. Wo kann man in diesem Bild die Invarianz der Kreissymmetrie erkennen?

Beispiel* Wir suchen eine Möbius-Transformation T mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Kreislinie $C = \partial B_2(0)$ wird von T in die Kreislinie $\tilde{C} = \partial B_1(-1)$ abgebildet.
2. Der Punkt 0 wird von T auf den Punkt i abgebildet.
3. Der Punkt -2 wird von T auf den Punkt 0 abgebildet.

Wir wollen diese Aufgabe mittels Doppelverhältnissen lösen und setzen daher

$$z_1 := 0, \quad \tilde{z}_1 := i, \quad z_2 := -2, \quad \tilde{z}_2 := 0.$$

Wir müssen aber noch geeignete Werte für z_3 und \tilde{z}_3 identifizieren. Dazu bemerken wir, dass z_1 und

$$z_3 := \infty$$

symmetrisch bzgl. C sind. Wegen der Invarianz der Kreissymmetrie müssen wir nun \tilde{z}_3 so wählen, dass \tilde{z}_1 und \tilde{z}_3 symmetrisch bzgl. \tilde{C} sind. Dies liefert die Bedingung

$$(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_*) (\overline{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_*}) = \tilde{\varrho}^2,$$

wobei $\tilde{z}_* = -1$ und $\tilde{\varrho} = 1$ den Mittelpunkt sowie den Radius von \tilde{C} bezeichnen. Kleinere Rechnungen zeigen

$$\tilde{z}_3 := \tilde{z}_* + \frac{\tilde{\varrho}^2}{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_*} = -1 + \frac{1}{-i + 1} = \frac{1}{2}(-1 + i),$$

und die gesuchte Möbius-Transformation T kann mittels $\tilde{z} = T(z)$ aus der Dreipunkt-Formel

$$\frac{\frac{\tilde{z} - i}{\tilde{z} - 0}}{\frac{\frac{1}{2}(-1 + i) - i}{\frac{1}{2}(-1 + i) - 0}} = \frac{\frac{z - 0}{z + 2}}{\lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{z_3 - 0}{z_3 + 2}}$$

durch Auflösung nach \tilde{z} bestimmt werden. Wegen

$$\frac{\frac{1}{2}(-1 + i) - i}{\frac{1}{2}(-1 + i) - 0} = i$$

und

$$\lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{z_3}{z_3 + 2} = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{z_3}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

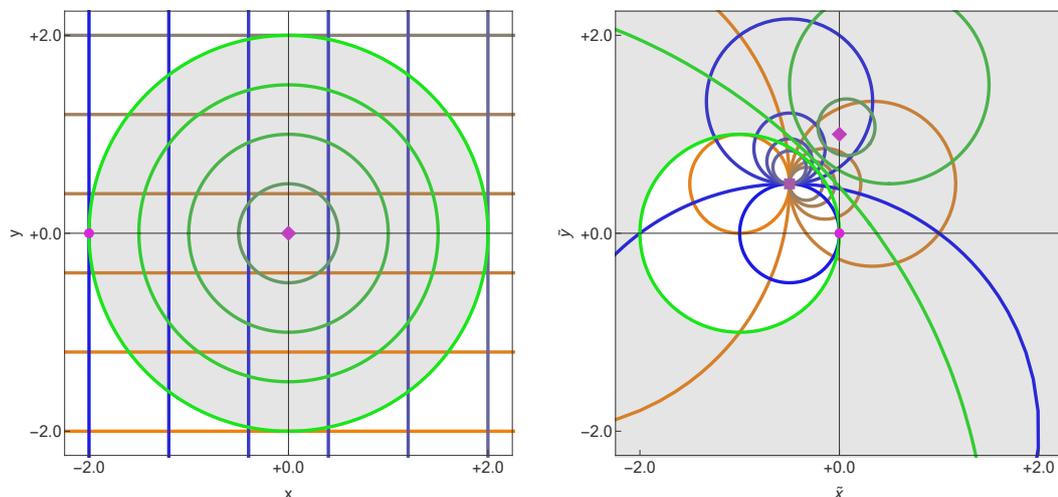
erhalten wir die zunächst vereinfachte Gleichung

$$\frac{\tilde{z} - i}{\tilde{z}} = \frac{i z}{z + 2}.$$

Mit Hilfe des Invertierungssatzes ergibt sich anschließend

$$\tilde{z} = \frac{-z - 2}{(1 + i)z + 2i},$$

d.h. $T = T_{-1, -2, 1+i, 2i}$ ist die gesuchte Möbius-Transformation.



Die Möbius-Transformation aus dem soeben gerechneten Beispiel, wobei C bzw. \tilde{C} jeweils der Rand der grauen Menge ist.

1.4 Komplexe Funktionen

Setting Wir betrachten Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, die auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ definiert sind, die Definitionsbereich oder Urbildbereich von f genannt wird. Für jede Teilmenge $C \subset D$ ist

$$\tilde{C} := f(C) = \{f(z) : z \in C\}$$

das Bild von C unter f und

$$\tilde{D} := f(D) = \{f(z) : z \in D\}$$

wird Wertebereich oder Bildbereich von f genannt. Punkte im Bildbereich bezeichnen wir mit \tilde{z} , d.h. wir schreiben $\tilde{z} = f(z)$.

Bemerkungen

1. Im Prinzip kann jede Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ als Definitionsbereich zugelassen werden, aber wir werden oftmals annehmen, dass D offen und zusammenhängend ist. Dabei heißt D offen, wenn jeder Punkt $z \in D$ ein innerer Punkt von D , d.h. wenn es zu jedem $z \in D$ einen (kleinen) Radius $\rho > 0$ gibt, sodass die Kreisscheibe $B_\rho(z)$ ganz in D liegt. Darüber hinaus wird D zusammenhängend genannt, wenn je zwei Punkte in D durch einen stetigen Weg verbunden werden können, der ganz in D verläuft. Diese Begriffsbildungen hatten wir schon in *Mathe-2* mit \mathbb{R}^2 anstelle von \mathbb{C} eingeführt.
2. Unsere Definition schließt zunächst aus, dass der unendlich ferne Punkt ∞ zu D oder \tilde{D} gehört. Wir werden aber in konkreten Beispielen ggf. diskutieren, ob man auch ∞ in die Betrachtungen einbeziehen kann.

Beispiele

1. Polynome sind komplexe Funktionen mit Definitionsbereich $D = \mathbb{C}$.
2. Für gegebene Parameter $a, b \in \mathbb{C}$ ist durch

$$f(z) = az + b = T_{a,b,0,1}(z)$$

die entsprechende affine Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben.

3. Jede Möbius-Transformation $T_{a,b,c,d}$ mit $c \neq 0$ kann als bijektive Funktion mit

$$D = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, \quad \tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

betrachtet werden. Hierbei ist $-d/c$ bzw. a/c die Polstelle von $T_{a,b,c,d}$ bzw. der Umkehrfunktion $T_{a,b,c,d}^{-1}$, an der jeweils der Wert ∞ angenommen wird.

komplexe Funktionen und Transformationen der Ebene Zu jeder komplexen Funktion f in der Variablen z gibt es zwei reelle Funktionen u und v in den Variablen x und y , sodass

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

für alle $z = x + iy \in D$ gilt. Beachte, dass die Funktionen u und v Werte in \mathbb{R} annehmen und auch auf D definiert sind, sofern diese als Teilmenge von \mathbb{R}^2 (und nicht als Teilmenge von \mathbb{C}) betrachtet wird. Man kann u bzw. v als den Real- bzw. Imaginärteil von f interpretieren und schreibt oftmals auch $u = \operatorname{Re}(f)$ bzw. $v = \operatorname{Im}(f)$.

Mit Hilfe der Notationen

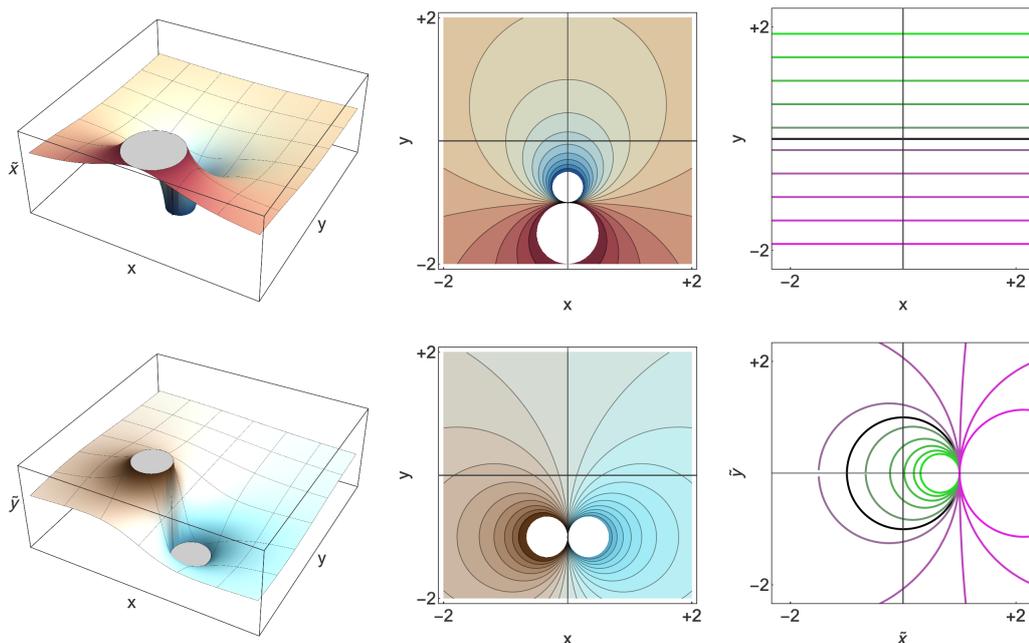
$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}, \quad z = x + iy$$

wird außerdem klar, dass jede komplexe Funktion f auch als Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

betrachtet werden kann, wobei die Funktionen u und v angeben, wie die kartesischen Koordinaten im Bildbereich (also $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$) aus den kartesischen Koordinaten im Urbildbereich (das sind $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) berechnet werden können. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir diese Abbildung die reelle Entsprechung von f nennen. Sie stellt den Schlüssel zum geometrischen Verständnis sehr vieler Resultate über komplexe Funktionen dar.

Visualisierung komplexer Funktionen Wir können eine komplexe Funktion f zum Beispiel dadurch graphisch darstellen, dass wir die Funktionen u und v in einem Flächen- oder Konturplot zeichnen bzw. vom Computer ausgeben lassen. Alternativ können wir auch für ausgewählte Mengen $C \subset D$ (zum Beispiel Kreisgeraden oder andere Kurven) die entsprechende Bildmenge $\tilde{C} = f(C)$ darstellen, wobei das Bild einer Kurve meist wieder eine Kurve ist (jedenfalls dann, wenn f differenzierbar ist).



Drei verschiedene graphische Darstellungen der Cayley-Transformation. *Links*: Die Graphen von $u = \operatorname{Re}(f)$ (oben) und $v = \operatorname{Im}(f)$ (unten) als Flächen. *Mitte*: Die entsprechenden Konturplots mit grauen Konturlinien. *Rechts*: Oben sind verschiedene Geraden im Urbildbereich und unten die entsprechenden Kurven im Bildbereich gezeichnet. Beachte, dass links und in der Mitte Werte in der Nähe der Singularität bei $z = -i$ mit einem zu großen Absolutbetrag nicht dargestellt wurden.

lineare Funktionen Wir betrachten die Multiplikation mit $\gamma = \alpha + i\beta$ bzw. die entsprechende lineare Abbildung $f(z) = \gamma z$, die \mathbb{C} nach \mathbb{C} abbildet. Mit der obigen Notation können wir die entsprechende Transformation als

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_\gamma := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ +\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

schreiben, d.h. die komplexe Multiplikation mit $\gamma \in \mathbb{C}$ entspricht im Reellen der Multiplikation mit der $(2, 2)$ -Matrix \mathbf{R}_γ , wobei letzteres als lineare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 betrachtet werden kann (die den Punkt (x, y) auf (\tilde{x}, \tilde{y}) abbildet). Gilt darüber hinaus die Polardarstellung $\gamma = r \exp(i\varphi)$, so erhalten wir

$$\mathbf{R}_\gamma := r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ +\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

d.h. \mathbf{R}_γ ist für $\gamma \neq 0$ eine Drehstreckung und vereint die Drehung um den Winkel $\varphi = \arg(\gamma)$ mit einer Streckung um den Faktor $r = |\gamma|$. Im Entartungsfall $\gamma = 0$ ist \mathbf{R}_γ jedoch die Nullmatrix.

Beobachtung Ganz allgemein können wir sagen: Die Multiplikation mit einer reellen $(2, 2)$ -Matrix \mathbf{M} entspricht genau dann der Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn die Diagonaleinträge von \mathbf{M} identisch sind und die Nebendiagonaleinträge sich im Vorzeichen unterscheiden, wobei dann der Real- und Imaginärteil des komplexen Faktors einfach in der ersten Spalte abgelesen werden können.

Bemerkung: Es ist sehr wichtig, dass Sie diese fundamentale Aussage verstehen und reproduzieren können.

quadratische Funktionen Die durch

$$f(z) = a z^2 + b z + c$$

definierte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wird quadratisch genannt, wobei $a, b, c \in \mathbb{C}$ gegebene Parameter sind und üblicherweise $a \neq 0$ gefordert wird, da es sich sonst um eine affine Funktion handelt. Um die Geometrie dieser Abbildung zu verstehen, wollen wir nun den Standardfall, nämlich $a = 1, b = c = 0$ betrachten, wobei der allgemeine Fall durch analoge Rechnungen studiert werden kann. Alternativ kann man auch Kompositionsargumente benutzen, denn jede quadratische Funktion kann via

$$f(z) = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a} \right)$$

als Hintereinanderausführung einer Verschiebung, der quadratischen Standardfunktion sowie einer Drehstreckung und einer weiteren Verschiebung betrachtet werden. Die reelle Entsprechung der quadratischen Standardfunktion ist

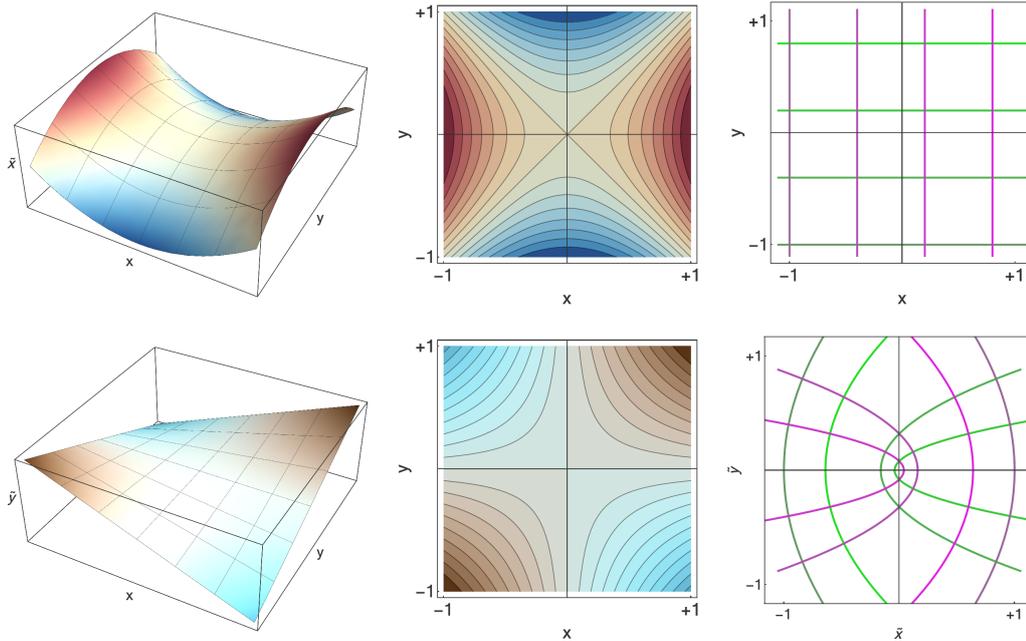
$$\tilde{x} = u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \tilde{y} = v(x, y) = 2xy$$

und wir schließen mit einfachen Umformungen, dass die Funktion f (bzw. ihr reelles Gegenstück)

1. die horizontale Achse $y = 0$ auf die horizontale Halbachse $\tilde{y} = 0$ mit $\tilde{x} \geq 0$
2. die vertikale Achse $x = 0$ auf die horizontale Halbachse $\tilde{y} = 0$ mit $\tilde{x} \leq 0$

3. für jedes feste $y_* \neq 0$ die horizontale Gerade $y = y_*$ auf die sich nach rechts öffnende Parabel $\tilde{y}^2 = 4 y_*^2 \tilde{x} + 4 y_*^4$
4. für jedes feste $x_* \neq 0$ die vertikale Gerade $x = x_*$ auf die sich nach links öffnende Parabel $\tilde{y}^2 = 4 x_*^4 - 4 x_*^2 \tilde{x}$

abbildet (siehe das Bild), wobei immer entweder x oder y als freie Variable (bzw. als Kurvenparameter) betrachtet wurde. Ganz allgemein gilt: Eine quadratische Funktion bildet Geraden auf Parabeln oder Halbgeraden ab, wobei eine Halbgerade auch als entartete Parabel mit unendlich großer Krümmung angesehen werden kann.



Die quadratische Standardfunktion $f(z) = z^2$.

Exponentialfunktion Mittels der Euler-Formel sowie des Ansatzes

$$\tilde{x} + i \tilde{y} = \exp(x + i y)$$

erhalten wir

$$\tilde{x} = u(x, y) = \exp(x) \cos(y), \quad \tilde{y} = v(x, y) = \exp(x) \sin(y)$$

für die reelle Entsprechung von $f(z) = \exp(z)$, wobei (x, y) bzw. (\tilde{x}, \tilde{y}) wieder die kartesischen Koordinaten im Urbild- bzw. im Bildbereich bezeichnen. Mit einfachen Umformungen können wir für jedes festgehaltene x_* bzw. y_* zeigen,

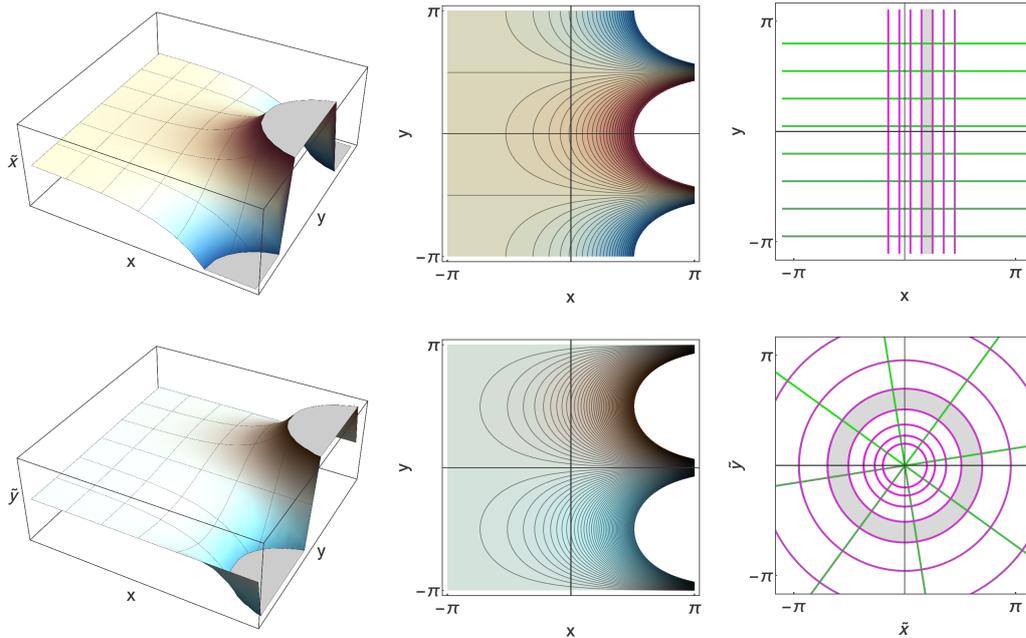
1. dass die vertikale Gerade $x = x_*$ auf den Kreis mit Radius $\exp(x_*)$ um den Ursprung abgebildet wird, d.h. dass $\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = \exp(x_*)$ gilt, und
2. dass die horizontale Gerade $y = y_*$ auf die Halbgerade

$$\tilde{x} = r \cos(y_*), \quad \tilde{y} = r \sin(y_*)$$

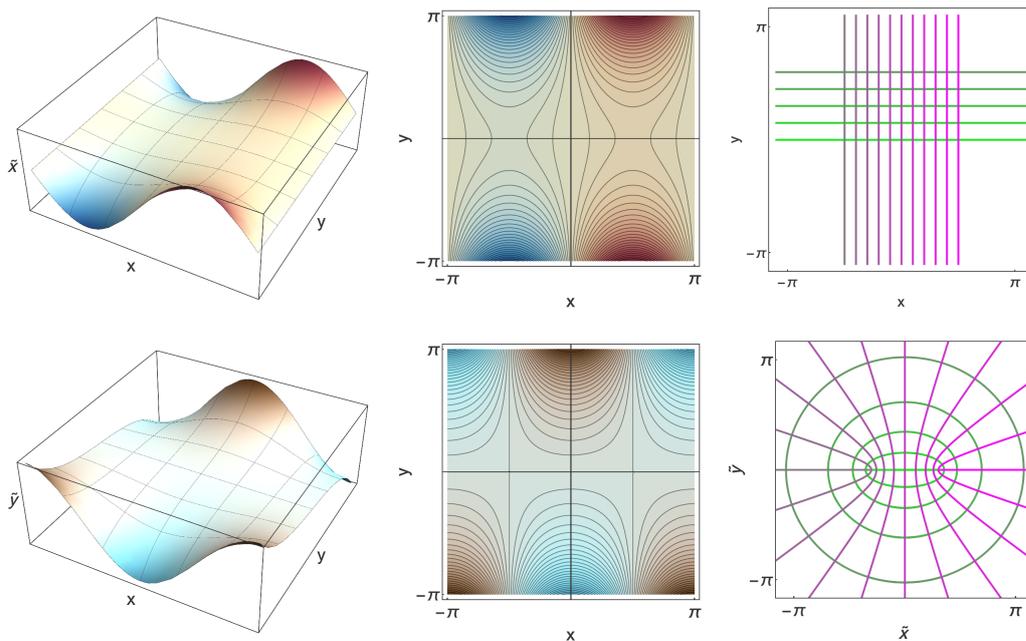
abgebildet wird, wobei $r = \exp(x)$ der freie Parameter ist. Analog können wir

$$\ln(\varrho_1) < \operatorname{Re}(z) < \ln(\varrho_2) \quad \Leftrightarrow \quad \varrho_1 < |\tilde{z}| < \varrho_2$$

für alle $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \infty$ zeigen, d.h. das Urbild eines Kreisringes um den Ursprung ist ein vertikaler Streifen.



Die Bilder der komplexen Exponentialfunktion. Hier gibt es keine Singularität, aber es wurden zur besseren Darstellung trotzdem Werte mit sehr großem Absolutbetrag abgeschnitten.



Graphische Darstellung der komplexen Sinusfunktion. Beachte, dass diese zwar noch 2π -periodisch (bzgl. $x = \operatorname{Re}(z)$), aber im Gegensatz zur reellen Sinusfunktion nicht mehr beschränkt ist.

Joukowski-Transformation Die durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spielt in der Strömungsmechanik eine wichtige Rolle (siehe zum Beispiel weiter unten). Um erste geometrische Eigenschaften zu beschreiben, benutzen wir Polarkoordinaten im Urbildbereich, aber kartesische Koordinaten im Bildbereich. Wir setzen also $z = r \exp(i\varphi)$ sowie $\tilde{z} = f(z) = \tilde{x} + i\tilde{y}$ und verifizieren durch einfache Rechnungen die Formeln

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi), \quad \tilde{y} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi),$$

mit denen wir die folgenden Aussagen ableiten können:

1. Für jeden festen Polarradius $r_* > 0$ erhalten wir eine Parametrisierung (mit freiem Parameter φ) der Ellipse

$$\frac{r_*^2 + 1}{r_*} \tilde{x}^2 + \frac{r_*^2 - 1}{r_*} \tilde{y}^2 = 4,$$

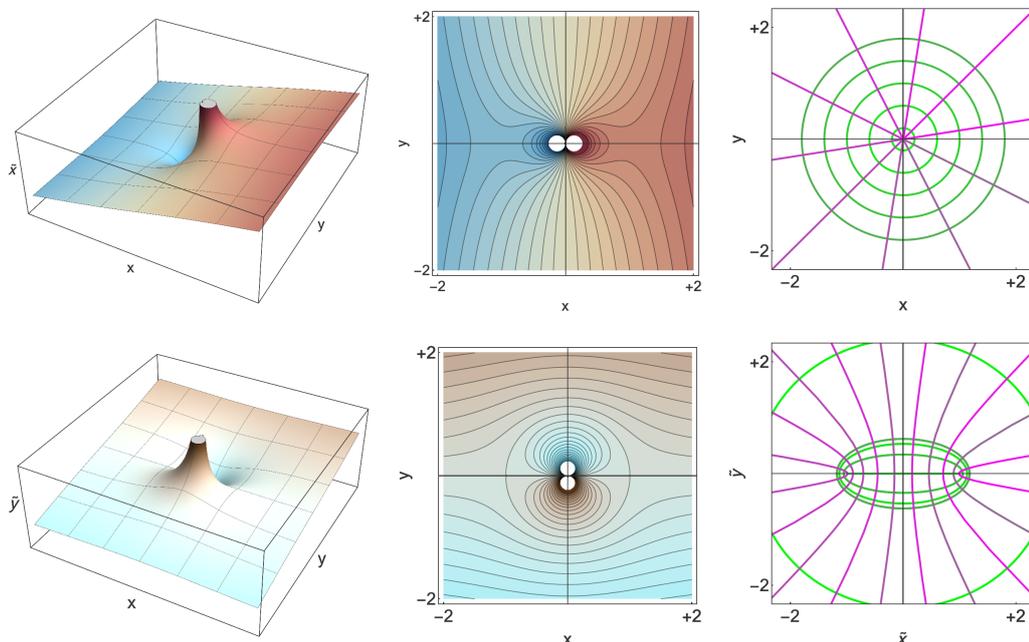
wobei diese für $r_* = 1$ entartet und mit dem (doppelt durchlaufenen) Intervall $[-1, +1]$ zusammenfällt.

2. Für jedes fixierte φ_* mit $\varphi_* \notin \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$ können wir den freien Parameter $r > 0$ eliminieren und erhalten

$$\frac{\tilde{x}^2}{\cos^2(\varphi_*)} - \frac{\tilde{y}^2}{\sin^2(\varphi_*)} = 1,$$

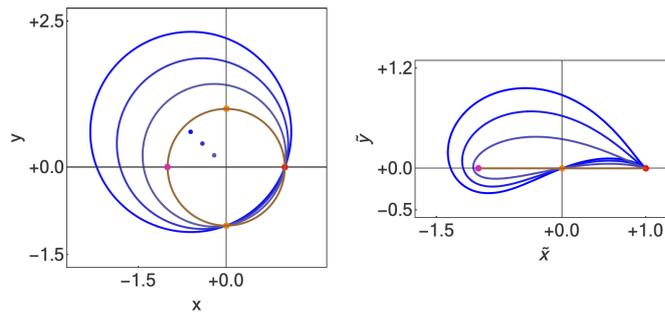
d.h. die Halbgerade $\varphi = \varphi_*$ wird auf eine Hyperbel abgebildet. In den insgesamt vier Entartungsfällen ergeben sich jedoch die folgenden Bildmengen:

- (a) die doppelt durchlaufene horizontale Halbachse $\tilde{y} = 0$ mit $\tilde{x} \geq +1$ bzw. $\tilde{x} \leq -1$ für $\varphi_* = 0$ bzw. für $\varphi_* = \pi$
- (b) die einfach durchlaufene vertikale Achse $\tilde{x} = 0$ für $\varphi_* = \frac{1}{2}\pi$ und für $\varphi_* = \frac{3}{2}\pi$.



Darstellung der Joukowski-Funktion, die manchmal auch als Kutta-Schukowski-Funktion bezeichnet wird, wobei dann eine andere Transkription russischer Namen zu Grunde liegt. Siehe auch das nächste Bild.

Es ist allerdings ohne Computer nicht ganz so einfach zu sehen, was das Bild eines nicht im Ursprung konzentrierten Kreises ist. Die Joukowski-Transformation hat aber unter anderem die schöne Eigenschaft, dass jeder Kreis mit Radius $\varrho_1 > 1$, der die beiden Punkte 1 und $-i$ enthält, auf eine Tragflächenkontur abgebildet wird.



Die Bilder gewisser Kreise unter der Joukowski-Transformation liefern sehr einfache Modelle für Tragflächen und können benutzt werden, um Luftströmungen bei Flugzeugen beispielhaft auszurechnen. Eine andere Anwendung diskutieren wir später.

Definition f heißt stetig in z_* , sofern die Implikation

$$z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad \implies \quad f(z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ gilt.

Bemerkung Diese Definition impliziert: Eine komplexe Funktion ist genau dann stetig in $z_* = x_* + i y_*$, wenn ihre reelle Entsprechung stetig in (x_*, y_*) ist. Die analoge Aussage mit Differenzierbarkeit statt Stetigkeit gilt aber *nicht*, siehe dazu die Cauchy-Riemannschen Gleichungen weiter unten.

1.5 Komplexe Differenzierbarkeit

Setting Wir betrachten eine komplexe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, deren Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ sowohl *offen* als auch *zusammenhängend* ist (siehe dazu weiter oben).

Definition Wir sagen, f ist im Punkt $z_* \in D$ (komplex) differenzierbar, falls

$$f'(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}$$

wohldefiniert ist, d.h. wenn der Grenzwert auf der rechten Seite in \mathbb{C} existiert. Ist diese Eigenschaft für jeden Punkt $z_* \in E$ einer offenen Teilmenge $E \subset D$ erfüllt, so nennen wir f (komplex) differenzierbar auf der Menge E .

Bemerkungen

1. Die komplexe Zahl $f'(z_*)$ wird die (komplexe) Ableitung von f im Punkt z_* genannt und oftmals schreibt man auch

$$\frac{df}{dz}(z_*) \quad \text{statt} \quad f'(z_*).$$

2. Im Fall von $E = D$ nennen wir f (komplex) differenzierbar bzw. holomorph (und meinen immer auf ihrem Definitionsbereich). In diesem Fall existiert die Ableitung als komplexe Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$. Ist diese sogar stetig, wird f stetig (komplex) differenzierbar genannt.

3. Beim Grenzwert der Differenzenquotienten wird immer stillschweigend $z \neq z_*$ vorausgesetzt (damit wir nicht durch 0 teilen). Der Grenzwert muss außerdem im eigentlichen Sinne existieren, d.h. der Fall $f'(z_*) = \infty$ ist nicht zugelassen.
4. Wir können die Definition der Ableitung auch als

$$f'(z_*) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(z_* + \gamma) - f(z_*)}{\gamma}$$

schreiben, wobei die Substitution $\gamma = z - z_*$ bzw. $z = z_* + \gamma$ zu Grunde liegt (und immer stillschweigend $\gamma \neq 0$ vorausgesetzt wird).

5. Höhere Ableitungen können analog eingeführt werden. Zum Beispiel existiert die zweite Ableitung von f in z_* genau dann, wenn

$$f''(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f'(z) - f'(z_*)}{z - z_*}$$

wohldefiniert ist.

Ausblick: Wir werden unten die folgende Aussage ableiten: Ist f einmal komplex differenzierbar auf D , so besitzt f schon unendlich viele komplexe Ableitungen. Dieses fundamentale (und auf den ersten Blick sehr verblüffende) Resultat besitzt kein Gegenstück im Reellen.

Generelle Bemerkung Die Grenzwertformeln in der reellen (*Mathe-1*, Kapitel 8.2) bzw. komplexen (gerade eben) Definition von Differenzierbarkeit sehen im Prinzip gleich aus und deshalb wird es für viele Theoreme aus der reellen Analysis eine direkte Entsprechung im Komplexen geben (ein Beispiel ist die Kettenregel).

Die Tatsache, dass wir nun im Komplexen rechnen, wird aber — wie wir in dieser Vorlesung sehen werden — sehr weitreichende Konsequenzen haben und die Theorien der differenzierbaren Funktionen in einer reellen bzw. einer komplexen Variable unterscheiden sich ganz erheblich. Man kann analog zu *Mathe-2* auch partielle Ableitungen für Funktionen in mehreren komplexen Variablen einführen, aber dieses Konzept wird hier keine Rolle spielen: Alle unsere Betrachtungen bleiben *komplex eindimensional* bzw. *reell zweidimensional*.

Beispiele

1. Jedes komplexe Polynom $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

und gegebenen Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ist holomorph, wobei die Ableitung durch

$$p'(z) = n \alpha_n z^{n-1} + (n-1) \alpha_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 \alpha_2 z + \alpha_1$$

gegeben ist. Diese Aussage kann analog zum Reellen direkt nachgerechnet werden. Im einfachsten Fall gilt zum Beispiel

$$p(z) = z^n$$

und für $n \neq 0$ erhalten wir nach Ausmultiplizieren und Umstellen den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{(z_* + \gamma)^n - z_*^n}{\gamma} &= \frac{1}{\gamma} \left(-z_*^n + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_*^{n-k} \gamma^k \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(-z_*^n + \binom{n}{0} z_*^{n-1} + \binom{n}{1} z_*^{n-1} \gamma + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z_*^{n-k} \gamma^k \right) \\ &= n z_*^{n-1} + \gamma \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z_*^{n-k} \gamma^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\gamma \rightarrow 0$ liefert schließlich die Formel $p'(z_*) = n z_*^{n-1}$ für alle z_* , in der wir anschließend z_* durch z ersetzen können.

2. Mit analogen Argumenten zeigt man

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z^n} = -n \frac{1}{z^{n+1}}$$

für jede natürliche Zahl $n \neq 0$, wobei dann natürlich $z \neq 0$ zu fordern ist.

3. Wir werden unten sehen, dass jede komplexe Potenzreihe holomorph auf ihrem Konvergenzkreis ist. Insbesondere können die bekannten Formeln

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = +\cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z)$$

im Komplexen verwendet werden.

Gegenbeispiel Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ ist in keinem Punkt komplex differenzierbar, wobei dies zum Beispiel wie folgt begründet werden kann: Mit $z_* = x_* + i y_*$ und $\gamma = \alpha + i \beta$ ergibt sich

$$\frac{\operatorname{Re}(z_* + \gamma) - \operatorname{Re}(z_*)}{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha + i \beta}$$

wobei die rechte Seite für $\beta = 0$ und $\alpha \rightarrow 0$ gegen 1, für $\alpha = 0$ und $\beta \rightarrow 0$ aber gegen 0 konvergiert. Dies impliziert die Behauptung, denn andernfalls würde sowohl $f'(z_*) = 1$ als auch $f'(z_*) = 0$ gelten. Analog kann man zeigen, dass auch die Funktion f mit $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ in keinem Punkt differenzierbar ist.

Bemerkung Etwas allgemeiner gilt:

1. Komplexe Funktionen, die nur reelle Werte annehmen, sind nur dann holomorph, wenn sie auch konstant sind (im Sinne von $f(z) = c$ für ein c und alle z).
2. Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist $f^\# : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f^\#(z) = f(\bar{z})$ im Allgemeinen nicht holomorph (es sei denn, f ist konstant).

Beide Aussagen können aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen abgeleitet werden (siehe unten).

Einfache Rechenregeln Sind die Funktionen f, g beide differenzierbar im Punkt $z \in D$, so gilt

1. (Summenregel) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
2. (Produktregel) $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
3. (Quotientenregel) $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/g^2(z)$

wobei in der letzten Formel $g(z) \neq 0$ zu fordern ist und $g^2(z) = g(z)g(z)$ gilt. Diese Formeln können analog zu den entsprechenden Resultaten im Reellen (siehe *Mathe-1*) bewiesen werden.

Beispiele

1. Es gilt

$$\frac{d}{dz}(\exp(z) + z \sin(z)) = \exp(z) + \sin(z) + z \cos(z)$$

sowie

$$\tan'(z) = \frac{d}{dz} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{\sin'(z) \cos(z) - \sin(z) \cos'(z)}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)},$$

wobei wir benutzt haben, dass $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ auch im Komplexen gilt, und stillschweigend $\cos(z) \neq 0$ vorausgesetzt haben.

2. Ein Spezialfall der Produktregel ist

$$(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$$

für jede feste Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$, wobei wir hier benutzen haben, dass die Ableitung der konstanten Funktion $g(z) = \alpha$ wegen

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{g(z + \gamma) - g(z)}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\alpha - \alpha}{\gamma} = 0$$

in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ verschwindet.

3. Aus den Rechenregeln folgt auch

$$(\alpha f + \beta g)'(z) = (\alpha f' + \beta g')(z)$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und damit die Linearität der komplexen Differentiation.

4. Für alle Parameter a, b, c, d und jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq -d/c$ gilt

$$T'_{a,b,c,d}(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

d.h. jede Möbius-Transformation ist außerhalb ihrer Polstelle differenzierbar, wobei wir hier keine Aussage über das Verhalten im Unendlichen machen. Die Ableitung ist aber *keine* Möbius-Transformation.

Kettenregel Analog zu *Mathe-1* können wir

$$(g \circ f)'(z) = \frac{d}{dz}g(f(z)) = g'(f(z)) f'(z)$$

zeigen, sofern die rechte Seite Sinn hat, d.h. sofern die Funktionen f bzw. g in z bzw. $f(z)$ definiert und differenzierbar sind.

Beispiele Es gilt

$$\frac{d}{dz}(z^2 + z + 1)^2 = \left(2(z^2 + z + 1)\right) (2z + 1) = 4z^3 + 6z^2 + 6z + 4$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin^3(1 + \cos(3z^2 + 1)) &= \left(3 \sin^2(1 + \cos(3z^2 + 1))\right) \left(-\sin(3z^2 + 1)\right) (6z) \\ &= -18z \sin(3z^2 + 1) \sin^2(1 + \cos(3z^2 + 1)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Beispiel die Kettenregel zweimal angewendet haben.

Alternative Notation In den angewandten Wissenschaften wird die Kettenregel oftmals in einer anderen Form angegeben: Mit den Notationen $\tilde{z} = f(z)$ sowie $\check{z} = g(\tilde{z})$ gilt symbolisch

$$\frac{d\check{z}}{dz} = \frac{d\check{z}}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz},$$

wobei wir das reelle Analogon dieser Schreibweise schon in *Mathe-1* kennen gelernt hatten.

Ableitung der Umkehrabbildung Ist f eine differenzierbare und invertierbare komplexe Funktion, so folgt aus $f^{-1}(f(z)) = z$ durch Differentiation beider Seiten und Anwendung der Kettenregel die Formel

$$(f^{-1})'(f(z)) f'(z) = 1$$

und damit

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(\tilde{z}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\tilde{z}))},$$

wobei wir $\tilde{z} = f(z)$ bzw. $z = f^{-1}(\tilde{z})$ verwendet haben und immer $f'(z) \neq 0$ gelten muss.

Bemerkungen: Merken Sie sich die Herleitung, nicht die Formel! Wir sehen hier auch schon ein Resultat, das wir später besser verstehen werden: Besitzt f' eine Nullstelle, so kann f nicht invertierbar sein.

Beispiel Der Invertierungssatz für Möbius-Transformationen impliziert

$$\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{bzw.} \quad z = -\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a},$$

mit $\tilde{z} = T_{a,b,c,d}(z)$ und durch Differentiation der ersten bzw. zweiten Gleichung nach z bzw. \tilde{z} erhalten wir

$$\frac{d\tilde{z}}{dz} = -\frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dz}{d\tilde{z}} = -\frac{ad-bc}{(c\tilde{z}-a)^2}.$$

Wir können nun durch Einsetzen der Formeln für z bzw. \tilde{z} die Formeln

$$\frac{1}{\frac{d\tilde{z}}{dz}} = \frac{dz}{d\tilde{z}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\frac{dz}{d\tilde{z}}} = \frac{d\tilde{z}}{dz}$$

verifizieren und damit direkt zeigen, dass die Kettenregel für Möbius-Transformationen gilt. Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion wird in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften meist in dieser Form angegeben.

1.6 Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann

Lemma (äquivalentes Kriterium für Differenzierbarkeit) f ist genau dann in $z_* \in D$ differenzierbar, wenn die Approximationsformel

$$f(z) = f(z_*) + \zeta_*(z - z_*) + r(z, z_*),$$

mit $\zeta_* = f'(z_*)$ und einem Fehlerterm $r(z, z_*) \in \mathbb{C}$ gilt, der via

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \frac{|r(z, z_*)|}{|z - z_*|} = 0$$

für $z \approx z_*$ vernachlässigt werden kann.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus unseren Definitionen. In der Tat, wenn die Approximationsformel für ein $\zeta_* \in \mathbb{C}$ richtig ist, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} = \zeta_* + \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{r(z, z_*)}{z - z_*} = \zeta_*,$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\left| \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{r(z, z_*)}{z - z_*} \right| = \lim_{z \rightarrow z_*} \left| \frac{r(z, z_*)}{z - z_*} \right| = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{|r(z, z_*)|}{|z - z_*|} = 0$$

nach Voraussetzung und wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion gilt. Insbesondere ist dann f in z_* differenzierbar und besitzt die Ableitung $f'(z_*) = \zeta_*$. Ist nun umgekehrt f differenzierbar in z_* , so setzen wir

$$\zeta_* := f'(z_*), \quad r(z, z_*) := f(z) - f(z_*) - \zeta_*(z - z_*)$$

und schließen analog zu oben, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \frac{|r(z, z_*)|}{|z - z_*|} = \left| \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} - f'(z_*) \right| = 0$$

gilt, d.h. dass $r(z, z_*)$ wirklich die geforderte Eigenschaft besitzt. \square

Bemerkung Man schreibt oftmals auch

$$r(z, z_*) = o(|z - z_*|),$$

wobei das Landau-Symbol $o(|z - z_*|^k)$ ganz allgemein — und analog zu *Mathe-2* — einen komplexwertigen Ausdruck bezeichnet, dessen Betrag für $z \rightarrow z_*$ schneller gegen 0 geht als $|z - z_*|^k$.

Folgerung (Differenzierbarkeit und Stetigkeit) Ist f differenzierbar in z_* , so ist f auch stetig in z_* .

Beweis: Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ eine Folge mit $z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, so gilt

$$|f(z_n) - f(z_*)| = |z_n - z_*| \left(\zeta_* + \frac{|r(z_n, z_*)|}{|z_n - z_*|} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 (\zeta_* + 0) = 0$$

und damit auch $f(z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$. □

Bemerkung Wie im Reellen ist die Umkehrung falsch, d.h. Stetigkeit in z_* liefert nicht die Differenzierbarkeit in z_* .

Theorem (reelle Entsprechung der komplexen Differenzierbarkeit) Mit den oben eingeführten Notationen sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. f ist im Punkt z_* komplex differenzierbar.
2. Die reelle Entsprechung von f ist im Punkt (x_*, y_*) total differenzierbar und die $(2, 2)$ -Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_f(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_*, y_*) & \partial_y u(x_*, y_*) \\ \partial_x v(x_*, y_*) & \partial_y v(x_*, y_*) \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehstreckung.

Jede dieser Bedingungen impliziert, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\partial_x u(x_*, y_*) = +\partial_y v(x_*, y_*), \quad \partial_y u(x_*, y_*) = -\partial_x v(x_*, y_*).$$

erfüllt sind und dass die Drehstreckung via

$$\mathbf{J}_f(x_*, y_*) = \mathbf{R}_{f'(z_*)}$$

bzw.

$$f'(z_*) = \partial_x u(x_*, y_*) + \mathbf{i} \partial_x v(x_*, y_*) = \partial_y v(x_*, y_*) - \mathbf{i} \partial_y u(x_*, y_*)$$

gerade der komplexen Multiplikation mit $f'(z_*)$ entspricht.

Beweis: Unsere Definitionen und die Identifikationen

$$z = x + \mathbf{i} y, \quad f(z) = u(x, y) + \mathbf{i} v(x, y), \quad z_* = x_* + \mathbf{i} y_*, \quad \zeta_* = \xi_* + \mathbf{i} v_*$$

implizieren, dass die Approximationsformel

$$\begin{pmatrix} u(x_*, y_*) \\ v(x_*, y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\zeta_*} \cdot \begin{pmatrix} x - x_* \\ y - y_* \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2}\right)$$

mit reeller $(2, 2)$ -Matrix

$$\mathbf{R}_{\zeta_*} = \begin{pmatrix} \xi_* & -v_* \\ +v_* & \xi_* \end{pmatrix}$$

äquivalent zu

$$f(z) = f(z_*) + \zeta_* (z - z_*) + o(|z - z_*|)$$

ist, wobei die reellen bzw. komplexen Fehlerterme dieselbe Größenordnung widerspiegeln. Die reelle Approximationsformel meint, dass die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

in $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist (siehe *Mathe-2*), wobei die entsprechende Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_f(x_*, y_*)$ gerade durch \mathbf{R}_{ζ_*} gegeben ist. Die komplexe Approximationsformel kodiert hingegen $f'(z_*) = \zeta_*$ und die behauptete Äquivalenz sowie die Gültigkeit der angegebenen Differentialgleichungen folgen unmittelbar. \square

Beispiele

1. Für $f(z) = z^2$ gilt

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy, \quad \mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} +2x & -2y \\ +2y & +2x \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und f ist in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wobei aus $\mathbf{J}(x, y) = \mathbf{R}_{2x+2iy}$ die Formel $f'(z) = 2x + 2iy = 2z$ abgelesen werden kann.

Bemerkung: Wir hatten dieses Ergebnis schon oben direkt aus der Definition von Differenzierbarkeit hergeleitet.

2. Mit $f(z) = \bar{z}$ erhalten wir

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y, \quad \mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind via

$$\partial_x u(x, y) = +1 \neq -1 = \partial_y v(x, y)$$

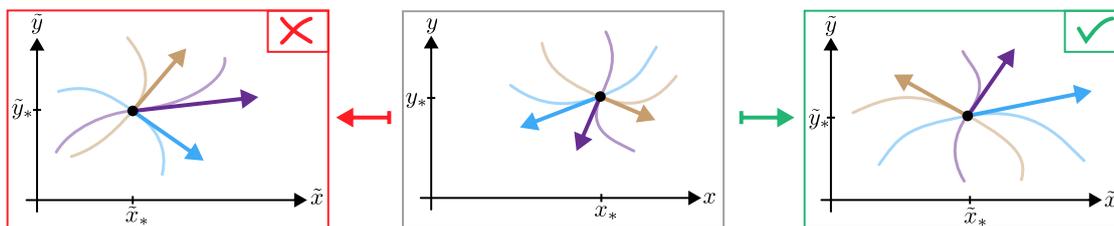
verletzt. Also ist f in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Bemerkung: Die reelle Entsprechung von f ist hier differenzierbar, aber die Jacobi-Matrix beschreibt eben keine Drehstreckung.

Bemerkung Das Theorem zeigt, dass nur gewisse Transformationen der Ebene einer holomorphen Funktion entsprechen, nämlich nur solche, deren Jacobi-Matrix in jedem Punkt (x, y) einer Drehstreckung entspricht und als

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \xi & -v \\ +v & \xi \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\xi+iv},$$

geschrieben werden kann (wobei ξ, v von x, y abhängen dürfen und $f'(z) = \xi + iv$ gilt). Wir werden weiter unten sehen, dass das (bis auf Entartungsfälle) gerade die *winkeltreuen* und *orientierungserhaltenden* Transformationen sind. Alle anderen Transformationen der Ebene können zwar auch als reelle Entsprechung einer komplexen Funktion betrachtet werden, aber diese wird dann nicht bzw. nicht überall differenzierbar sein.



Die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_f(x_*, y_*)$ beschreibt ganz allgemein die lineare Transformation des \mathbb{R}^2 , die Tangentialvektoren an Kurven durch den Punkt (x_*, y_*) (Urbildbereich) auf Tangentialvektoren im Punkt $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*)$ (Bildbereich) abbildet. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung zeigen, dass f genau dann in z_* komplex differenzierbar ist, wenn alle Tangentialvektoren um denselben Winkel gedreht und um denselben Faktor gestreckt werden (grün). Drehungen (rot) oder Spiegelungen sind hingegen nicht kompatibel mit komplexer Differenzierbarkeit.

Ausblick* Eine komplexe Funktion f wird antiholomorph genannt, wenn $f^\#$ mit $f^\#(z) = f(\bar{z})$ holomorph ist. In diesem Fall gilt

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} +\xi & v \\ v & -\xi \end{pmatrix},$$

und die entsprechende Transformation der Ebene ist daher zwar noch winkelerhaltend, ändert aber die Orientierung.

Folgerung (Charakterisierung konstanter Funktionen) Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

1. Es gilt $f(z) = f(0)$ für alle $z \in D$.
2. Es gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Beweis: Die Aussage (1.) \Rightarrow (2.) hatten wir schon oben abgeleitet. Unter der Annahme, dass (2.) gilt, berechnen wir

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und schließen mit unserem *Mathe-2*-Wissen, dass die reelle Entsprechung von f konstant sein muss, d.h. dass $u(x, y) = u(0, 0)$ und $v(x, y) = v(0, 0)$ für alle (x, y) gilt. Dies liefert dann die Gültigkeit von (1.). \square

Folgerung (nützliche Beobachtung) Jede holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt, ist notwendigerweise konstant.

Beweis: Nach Voraussetzung können wir die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen mit der trivialen Funktion $v \equiv 0$ auswerten und erhalten

$$\partial_x u(x, y) = +\partial_y v(x, y) = 0, \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) = 0$$

und damit auch $f'(z) = 0$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die vorherige Folgerung liefert daher die Behauptung. \square

Bemerkung

1. Wir hatten in *Mathe-2* die folgende Terminologie eingeführt: Eine Teilmenge D von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ wird einfach zusammenhängend genannt, sofern sie keine „Löcher“ enthält (wobei insbesondere auch Ein-Punkt-Löcher verboten sind).
2. Eine skalare Funktion u in den reellen Variablen x, y heißt harmonisch, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und $\Delta u(x, y) = 0$ für alle (x, y) aus dem Definitionsbereich von u gilt, wobei Δ mit

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y)$$

der (zweidimensionale) Laplace-Operator ist.

Theorem (harmonische Funktionen, Teil 1) Ist f zweimal stetig komplex differenzierbar, so sind $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ harmonische Funktionen.

Beweisskizze: In einem ersten Schritt müssen wir sicherstellen, dass u und v zweimal stetig differenzierbar im Sinne von *Mathe-2* sind, aber wir wollen diesen technischen Schritt nicht im Detail erklären. Wichtig ist das folgende Argument: Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt

$$\partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \partial_x \partial_y v(x, y) - \partial_y \partial_x v(x, y) = 0$$

sowie

$$\partial_x^2 v(x, y) + \partial_y^2 v(x, y) = -\partial_x \partial_y u(x, y) + \partial_y \partial_x u(x, y) = 0$$

wobei wir den Satz von Schwartz sowohl für u als auch für v verwendet haben. \square

Theorem (harmonische Funktionen, Teil 2) Sei D einfach zusammenhängend und u harmonisch. Dann gibt es eine andere harmonische Funktion v , sodass $f = u + iv$ zweimal stetig komplex differenzierbar ist.

Beweisskizze: Die Harmonizität von u impliziert die Integrierbarkeitsbedingung

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ +\partial_x u(x, y) \end{pmatrix} = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \Delta u(x, y) = 0$$

und wir hatten in *Mathe-2* gesehen, dass es daher ein Potential v geben muss, sodass

$$\begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ +\partial_x u(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\partial_x v(x, y) \\ +\partial_y v(x, y) \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt (x, y) erfüllt ist. Insbesondere gelten damit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und f ist komplex differenzierbar. In einem zweiten, technischen Schritt muss man dann zeigen, dass f sogar zweimal stetig differenzierbar ist. \square

Bemerkung

1. Wir werden unten sehen, dass die komplexe Differenzierbarkeit von f schon die Existenz und Stetigkeit aller höheren Ableitungen impliziert. Mit diesem Wissen kann man die Voraussetzungen in den letzten beiden Theoremen abschwächen.
2. Die Funktion v ist nicht eindeutig und in der Praxis kann man noch sogenannte *Randbedingungen* an v stellen, die das Verhalten von v auf ∂D festlegen.
3. Im letzten Theorem ist es sehr wichtig, dass D einfach zusammenhängend ist. Wir werden unten noch einmal auf diesen Aspekt zurückkommen.
4. Mit analogen Argumenten können wir auch die folgende Aussage ableiten, wobei D wieder einfach zusammenhängend sein muss: Ist v eine harmonische Funktion, so existiert eine andere harmonische Funktion u , sodass $f = u + i v$ zweimal stetig komplex differenzierbar ist.
5. Der Beweis zeigt, dass die Gradienten der harmonischen Funktionen u und v in jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Genauer gesagt, der Vektor $\mathbf{grad} v(x, y)$ entsteht immer aus $\mathbf{grad} u(x, y)$ durch Drehung um 90° , was einer komplexen Multiplikation mit i entspricht.
6. Die beiden letzten Theoreme spielen in den Anwendungswissenschaften eine herausragende Rolle. Siehe dazu auch weiter unten.
7. Man kann auch harmonische Funktionen mit mehr als zwei reellen Variablen studieren, aber diese können aus Dimensionsgründen nicht mehr als Real- oder Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion betrachtet werden.

Beispiele

1. Da die Exponentialfunktion auf \mathbb{C} komplex differenzierbar ist, liefern die Formeln

$$u(x, y) = \exp(x) \cos(y), \quad v(x, y) = \exp(x) \sin(y)$$

zwei harmonische Funktionen auf \mathbb{R}^2 (was wir natürlich alternativ auch mit direkten Rechnungen begründen können).

2. Wir betrachten die durch

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

definierte harmonische Funktion auf \mathbb{R}^2 und wollen eine komplex differenzierbare Funktion f auf \mathbb{C} konstruieren, sodass $u = \operatorname{Re}(f)$ gilt. Für den entsprechenden Imaginärteil $v = \operatorname{Im}(f)$ muss dann

$$\partial_x v(x, y) = 6xy, \quad \partial_y v(x, y) = 3x^2 - 3y^2$$

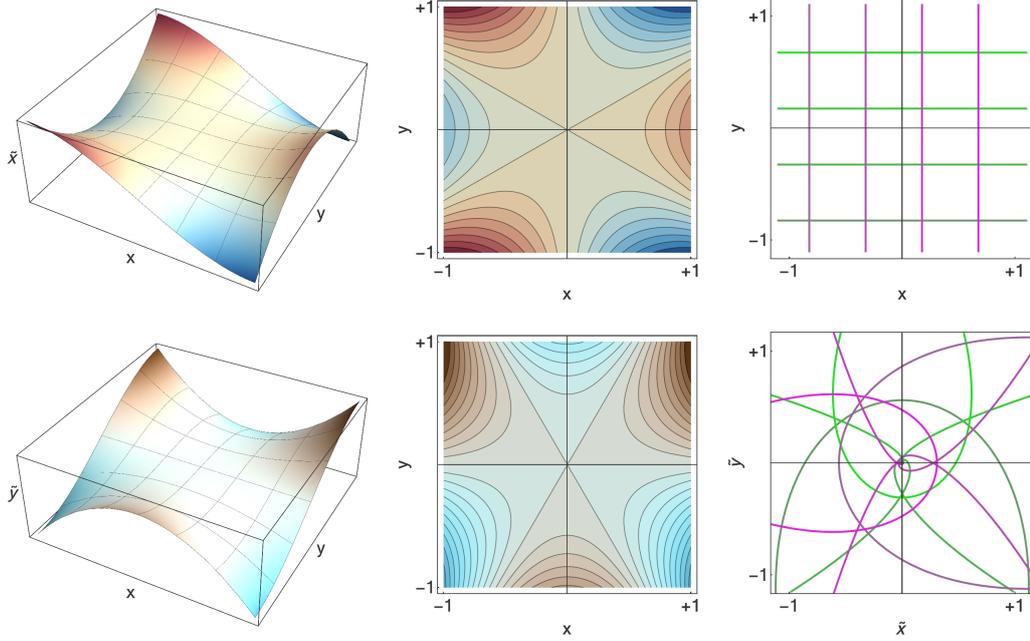
wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten und durch Scharfes Hinsehen (oder mit Hilfe der Rechenverfahren aus *Mathe-2*) können wir

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

als mögliche Wahl für v identifizieren, wobei v auch harmonisch ist. Die entsprechende komplexe Funktion ist dann durch

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x + iy)^3 = z^3$$

gegeben.



Die kubische Standardfunktion $f(z) = z^3$ aus dem letzten Beispiel.

1.7 Konforme und biholomorphe Funktionen

Vorbemerkung Wir hatten schon gesehen, dass man eine komplexe Funktion f auch als Gebietstransformation betrachten kann, die jeden Punkt aus D auf einen Punkt in $\tilde{D} = f(D)$ abbildet. Wir werden nun diese geometrische Sicht weiter vertiefen und damit die Grundlagen für viele Anwendungen legen, in denen eine gegebene Menge D zunächst auf eine einfachere Menge transformiert werden muss.

Kurven im Komplexen Eine Abbildung $c : I \rightarrow D$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wird auch im Komplexen parametrisierte Kurve in D genannt, wobei wir die Elemente von I meist mit t bezeichnen. Existiert für festes $t_* \in I$ der Grenzwert

$$\dot{c}(t_*) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{c(t) - c(t_*)}{t - t_*} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t_* + h) - c(t_*)}{h}$$

als Element in \mathbb{C} , so nennen wir ihn den Tangentialvektor an c in $z_* = c(t_*)$.

Bemerkungen

1. Die obigen Definitionen entsprechen den analogen Konzepten im Reellen (siehe *Mathe-1* und *Mathe-2*). Insbesondere beschreibt die Bildmenge

$$C = \{c(t) : t \in I\} = \text{spur}(c)$$

wieder das eindimensionale geometrische Objekt und wird Spur von c bzw. unparametrisierte Kurve genannt. Man sagt auch wieder, c parametrisiert C .

2. Beachte, dass bei den Differenzenquotienten in der Grenzwertformel für $\dot{c}(t)$ im Nenner immer eine reelle Zahl steht. Es handelt sich also eigentlich nicht um eine Ableitung im Sinne der komplexen Analysis, sondern um die reell-eindimensionale Ableitung einer vektorwertigen Funktion auf einem Intervall. In der Praxis spielt diese feinsinnige Unterscheidung aber keine große Rolle.
3. Analog zum Reellen können auch die Begriffe *stetig differenzierbare Kurve* und *stückweise stetig differenzierbare Kurve* eingeführt werden.

Alternative Notation Physiker und Ingenieure benutzen oftmals keine explizite Parametrisierungsabbildung c , sondern schreiben einfach

$$z(t) \quad \text{statt} \quad c(t) \quad \text{sowie} \quad \dot{z}(t) \quad \text{statt} \quad \dot{c}(t),$$

wobei wir uns dann vorstellen, dass der Punkt $z \in D$ sich mit der „Zeit“ t ändert. Im Reellen entspricht dies den konsistenten Formeln

$$x(t) = \text{Re}(z(t)), \quad y(t) = \text{Im}(z(t)), \quad \dot{x}(t) = \text{Re}(\dot{z}(t)), \quad \dot{y}(t) = \text{Im}(\dot{z}(t)).$$

Auch wir werden manchmal diese sehr intuitive Schreibweise verwenden, wollen aber nicht vergessen, dass im Hintergrund immer eine Abbildung c steht. Wenn wir mit zwei oder mehreren Kurven arbeiten, werden wir aber meist die mathematische Notation benutzen, da man dort besser Indizes einführen kann.

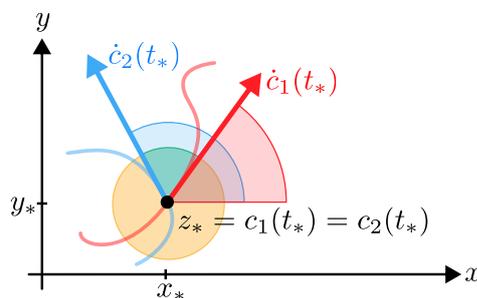
Winkel zwischen Tangentialvektoren Sind $\dot{c}_1(t_*) \neq 0$ und $\dot{c}_2(t_*) \neq 0$ zwei Tangentialvektoren im Punkt $z_* = c_1(t_*) = c_2(t_*)$, so kann der Winkel zwischen diesen via

$$\sphericalangle(\dot{c}_2(t_*), \dot{c}_1(t_*)) = \arg(\dot{c}_2(t_*)) - \arg(\dot{c}_1(t_*)) \pmod{2\pi}$$

aus den komplexen Argumenten berechnet werden. Beachte, dass wir hier immer *orientierte Winkel* mit

$$\sphericalangle(\dot{c}_2(t_*), \dot{c}_1(t_*)) = -\sphericalangle(\dot{c}_1(t_*), \dot{c}_2(t_*)) \pmod{2\pi}$$

verwenden, wobei diese im Bogenmaß nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt sind. Diese Mehrdeutigkeit wird gerade durch die Schreibweise $(\text{mod } 2\pi)$ (sprich „modulo 2π “) ausgedrückt.



Die Winkel (gelb bzw. grün) zwischen zwei nicht-verschwindenden Tangentialvektoren ergeben sich aus der Differenz der entsprechenden Argumente (rot bzw. blau), wobei ggf. 2π addiert oder subtrahiert werden muss.

Lemma (Winkel- und Orientierungstreue) Seien f holomorph und z_* ein beliebiger Punkt in D mit $f'(z_*) \neq 0$. Sind $c_j : I_j \rightarrow D$ mit $j = 1, 2$ zwei differenzierbare Kurven im Urbildbereich, die via $z_* = c_j(t_*)$ zur Zeit t_* durch den Punkt z_* laufen, so gilt

$$\sphericalangle(\dot{c}_2(t_*), \dot{c}_1(t_*)) = \sphericalangle(\dot{\tilde{c}}_2(t_*), \dot{\tilde{c}}_1(t_*)) \pmod{2\pi},$$

wobei die $\tilde{c}_j = f \circ c_j$ die entsprechenden Kurven im Bildbereich sind.

Beweis: Die Kettenregel impliziert

$$\dot{\tilde{c}}_j(t_*) = f'(z_*) \dot{c}_j(t_*)$$

und damit

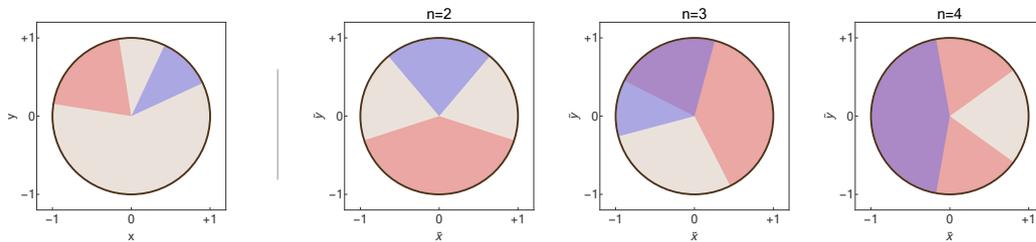
$$\arg(\dot{\tilde{c}}_j(t_*)) = \arg(f'(z_*)) + \arg(\dot{c}_j(t_*)) \pmod{2\pi}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun durch Einsetzen (für $j = 1$ und $j = 2$) in die Winkelformel. \square

Bemerkungen

1. Man nennt eine Abbildung oder Funktion, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs im obigen Sinne winkel- und orientierungstreu ist, auch konform, wobei ein analoges Konzept auch in höheren Raumdimensionen und auf gekrümmten Flächen verwendet wird.

- Das Lemma besagt, dass jede holomorphe Funktion f konform ist, sofern ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet. Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass jede konforme Abbildung auf D schon holomorph sein muss, wobei wir das wesentliche Argument schon beim Studium der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen kennen gelernt hatten: Eine im Reellen differenzierbare Abbildung $D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann winkel- und orientierungstreu, wenn ihre Jacobi-Matrix in jedem Punkt eine Drehstreckung beschreibt.
- Gilt $f'(z_*) = 0$ auch nur in einem Punkt $z_* \in D$, so wird f nicht mehr konform sein. Wir können dies beispielhaft an dem Monom $f(z) = z^n$ mit $n > 1$ verstehen (siehe Bild). Da es außerdem für jedes $\tilde{z} \in B_1(0)$ mit $\tilde{z} \neq 0$ genau n Punkte $z \in B_1(0)$ mit $z^n = \tilde{z}$ gibt (nämlich die n -ten komplexen Wurzeln von \tilde{z}), schließen wir insgesamt, dass jedes Monom vom Grad größer 1 die Einheitskreisscheibe zwar holomorph und surjektiv, aber weder injektiv noch konform auf sich abbildet. Wir werden später sehen, dass dies eine wichtige Beobachtung ist.



Das n -te Monom ist für $n > 1$ nicht konform im Koordinatenursprung, da jedes Tortenstück im Urbildbereich (ganz links) auf ein Tortenstück mit *größerem* Öffnungswinkel (und gedrehter Mittellinie) abgebildet wird.

Definition Eine komplex differenzierbare Funktion f mit Urbildbereich D und Bildbereich $\tilde{D} = f(D)$ wird biholomorph genannt, wenn die folgenden beiden Aussagen erfüllt sind

- f bildet D bijektiv auf \tilde{D} ab.
- Es gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

Insbesondere existiert dann die Umkehrfunktion $\tilde{f} = f^{-1}$ und ist (wegen der Kettenregel) auch komplex differenzierbar. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

- \tilde{f} bildet \tilde{D} bijektiv auf D ab.
- Es gilt $\tilde{f}'(\tilde{z}) \neq 0$ für alle $\tilde{z} \in \tilde{D}$.

Bei biholomorphen Funktionen schreiben wir gerne $f : D \rightarrow \tilde{D}$, d.h. wir geben nicht nur den Urbildbereich, sondern auch den Bildbereich explizit an.

Interpretation Die biholomorphen Funktionen beschreiben gerade die invertierbaren Transformationen von D , unter denen orientierte Winkel erhalten bleiben. Insbesondere ist die Rücktransformation immer wohldefiniert und besitzt analoge geometrische Eigenschaften.

Bemerkung Eine biholomorphe Funktion muss in Randpunkten nicht unbedingt definiert oder differenzierbar sein. In vielen Fällen wird zwar ∂D auf $\partial \tilde{D}$ abgebildet, aber diese entsprechende Randabbildung muss dann nicht unbedingt bijektiv sein.
Merkregel: Am Rand von D bzw. \tilde{D} können verschiedene Entartungen auftreten.

Beispiele

1. Die inverse Cayley-Transformation

$$f(z) = i \frac{1+z}{1-z}$$

bildet die Einheitskreisscheibe biholomorph auf die obere Halbebene ab.

2. Die Exponentialabbildung bildet das
- Rechteck*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \eta_1 < \operatorname{Re}(z) < \eta_2 \text{ und } -\pi < \operatorname{Im}(z) < +\pi\}$$

mit reellen Parametern $\eta_1 < \eta_2$ biholomorph auf den *geschlitzten Kreisring*

$$\tilde{D} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \varrho_1 < |\tilde{z}| < \varrho_2 \text{ mit } \operatorname{Im}(\tilde{z}) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(\tilde{z}) > 0\}$$

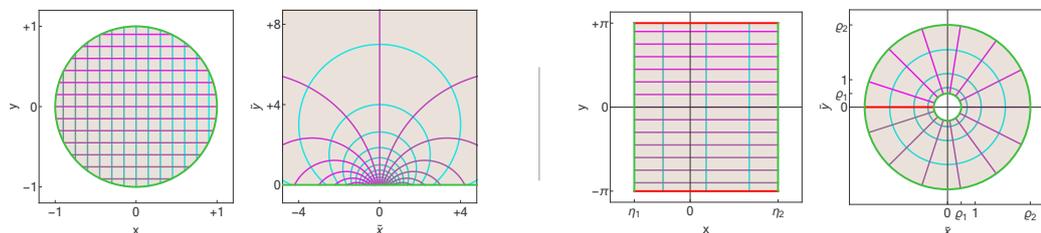
ab, sofern $\varrho_j = \exp(\eta_j)$ bzw. $\eta_j = \ln(\varrho_j)$ gilt (Übungsaufgabe). Im Grenzfall $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_2 = \infty$ wird der *horizontale Streifen*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < +\pi\}$$

biholomorph auf die *geschlitzte Ebene*

$$\tilde{D} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\tilde{z}) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(\tilde{z}) > 0\}$$

abgebildet, wobei letztere entsteht, wenn die negative reelle Halbachse aus der komplexen Zahlenebene entfernt wird.



Bilder für die inverse Cayley-Transformation (links) sowie die Exponentialabbildung (rechts, mit $\eta_1 < 0 < \eta_2$ und rotem Schlitz). Beachte die Winkelerhaltung.

über komplexe Logarithmen und Wurzeln In dem eben besprochenen Grenzfall kann die Exponentialfunktion invertiert werden. Die entsprechende Umkehrfunktion wird Hauptwert des Logarithmus genannt und mit Ln bezeichnet. Aus

$$\tilde{x} + i \tilde{y} = \exp(x + i y) = \exp(x) \exp(i y)$$

ergibt sich die Formel

$$z = \operatorname{Ln}(\tilde{z}) = \ln(|\tilde{z}|) + i \operatorname{Arg}(\tilde{z}),$$

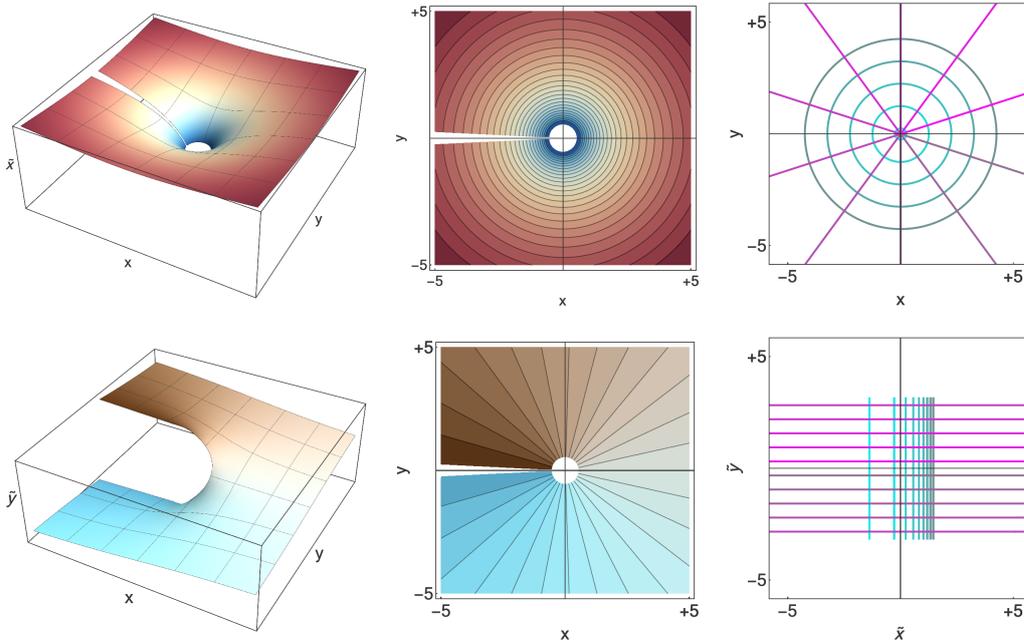
wobei Arg der Hauptwert des Arguments ist und jedem \tilde{z} aus der geschlitzten Ebene via

$$\operatorname{Arg}(\tilde{z}) = \begin{cases} -\operatorname{arccot}(-\tilde{x}/\tilde{y}) & \text{für } \tilde{y} < 0 \\ 0 & \text{für } \tilde{y} = 0 \\ +\operatorname{arccot}(+\tilde{x}/\tilde{y}) & \text{für } \tilde{y} > 0 \end{cases}$$

in eindeutiger Weise seinen Winkel aus $(-\pi, +\pi)$ mit Hilfe des reellen Arkuskotangens $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ zuordnet. Analog wird für jeden komplexen Parameter $p \in \mathbb{C}$ der Ausdruck

$$\operatorname{Pow}_p(\tilde{z}) = \exp(p \operatorname{Ln}(\tilde{z}))$$

der Hauptwert der p -ten Potenz im Punkt \tilde{z} genannt und im Fall $p = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ liefert $\operatorname{Pow}_{1/n}(\tilde{z})$ den Hauptwert der n -ten Wurzel.



Der Hauptwert des komplexen Logarithmus, wobei Werte in der Nähe des Ursprungs bzw. Schlitzes nicht dargestellt wurden, da dort eine Singularität bzw. Unstetigkeiten im Imaginärteil vorhanden sind.

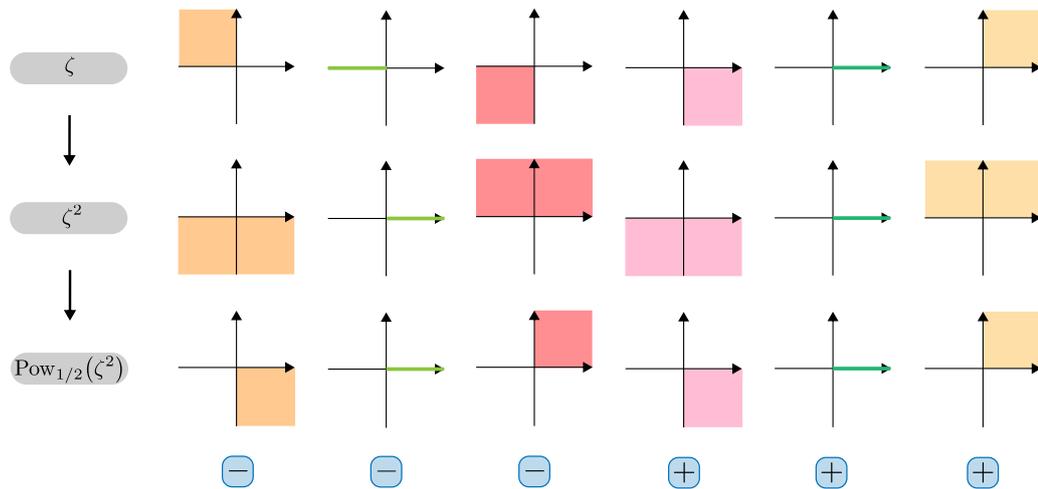
Bemerkungen

1. Die Funktionen Ln und Pow_p sind komplex differenzierbar mit

$$\operatorname{Ln}'(\tilde{z}) = \tilde{z}^{-1}, \quad \operatorname{Pow}'_p(\tilde{z}) = p \operatorname{Pow}_{p-1}(\tilde{z}),$$

wobei diese Formeln für alle $\tilde{z} \in \tilde{D}$ gelten und sich direkt aus der Kettenregel ergeben, zum Beispiel via $\operatorname{Ln}(\exp(z)) = z$ oder $\exp(\operatorname{Ln}(\tilde{z})) = \tilde{z}$. Beachte aber, dass die Funktion Arg nur reelle Werte annimmt und daher in *keinem* Punkt komplex differenzierbar ist.

2. Für *ganzzahlige* Exponenten $p = k \in \mathbb{Z}$ können wir leicht $\operatorname{Pow}_k(\tilde{z}) = \tilde{z}^k$ zeigen.
3. Es gilt $\operatorname{Pow}_i(i) = \exp(i \operatorname{Ln}(i)) = \exp(-\operatorname{Arg}(i)) = \exp(-\pi/2) \in \mathbb{R}$, aber wir schreiben in dieser Vorlesung *niemals* $i^i = e^{-\pi/2}$, da die i -te Potenz auf ganz \mathbb{C} nicht in sinnvoller bzw. eindeutiger Weise definiert werden kann.
4. Für alle $\tilde{z} \in \tilde{D}$ gilt $(\operatorname{Pow}_{1/2}(\tilde{z}))^2 = \tilde{z}$, aber $\operatorname{Pow}_{1/2}(\zeta^2)$ ist entweder $-\zeta$ oder $+\zeta$, wobei das richtige Vorzeichen für jeden Quadranten mit den Formeln oder alternativ durch geometrische Überlegungen bestimmt werden kann (siehe das Bild und die Übungen). Analog ist $\operatorname{Pow}_{1/2}(-\zeta^2)$ entweder $-i\zeta$ oder $+i\zeta$ und ähnliche Fragen stellen sich bei allen anderen Wurzeln, wobei dann allgemeinere Sektoren anstelle von Quadranten zu untersuchen sind.



Zur Vorzeichenwahl in $\text{Pow}_{1/2}(\zeta^2) = \pm\zeta$, wobei die linke Seite dieser Gleichung auf der imaginären Achse, d.h. für $\text{Re}(\zeta) = 0$ nicht definiert ist. Beachte, dass die farbig gezeichneten Quadranten und Halbebenen immer offen sind und dass die farbigen Halbachsen nicht den Ursprung enthalten.

Achtung Alle Hauptwerte sind nur auf der in $\{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \text{Re}(\tilde{z}) \leq 0, \text{Im}(\tilde{z}) = 0\}$ geschlitzten Ebene definiert und können damit in negativen reellen Zahlen oder im Ursprung *nicht* ausgewertet werden. Insbesondere gilt

$$\lim_{\tilde{\varphi} \nearrow \pi} \text{Ln}(\tilde{r} e^{i\tilde{\varphi}}) = \ln(\tilde{r}) + i\pi, \quad \lim_{\tilde{\varphi} \searrow \pi} \text{Ln}(\tilde{r} e^{i\tilde{\varphi}}) = \ln(\tilde{r}) - i\pi$$

sowie

$$\lim_{\tilde{\varphi} \nearrow \pi} \text{Pow}_{1/2}(\tilde{r} e^{i\tilde{\varphi}}) = +\sqrt{\tilde{r}} i, \quad \lim_{\tilde{\varphi} \searrow \pi} \text{Pow}_{1/2}(\tilde{r} e^{i\tilde{\varphi}}) = -\sqrt{\tilde{r}} i.$$

Wir werden später noch einmal die Beziehung zwischen Argument, Logarithmus, Potenzen und Wurzeln genauer untersuchen und sehen, dass es auch andere sinnvolle Möglichkeiten gibt, diese Funktionen einzuführen (was dann viele Nebenwerte ergibt). Keine Variante wird aber überall definiert sein.

Bemerkung* Die obigen Formeln illustrieren bereits das folgende allgemeine Prinzip für beliebige Teilmengen von \mathbb{C} : Sinnvolle Definitionen des komplexen Logarithmus sowie allgemeiner Potenz- oder Wurzelfunktionen gibt es genau dann, wenn es eine stetige Argumentfunktion gibt.

Mehr über Gebietstransformationen

Theorem (Satz von Riemann) Jede offene und einfach zusammenhängende Menge $D \subsetneq \mathbb{C}$ kann biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ abgebildet werden.

Bemerkungen

1. Dieses wirklich fundamentale Resultat ist einer der Meilensteine der Mathematik. Es gilt sogar dann, wenn der Rand von D fraktal ist, also zum Beispiel für die *Kochsche Schneeflocke*. Einen Beweis dieses Satzes können wir aber mit unserem Wissensstand nicht geben.
2. Es ist sehr wichtig, dass D eine echte und einfach zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{C} ist. Die Ebene \mathbb{C} kann nämlich *nicht* biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden. Das ist eine weitere nicht-triviale Erkenntnis. Genauso wenig können Gebiete mit Löchern biholomorph auf $B_1(0)$ abgebildet werden.

3. Die Abbildung aus dem Satz von Riemann ist nicht eindeutig, d.h. für jedes D gibt es viele biholomorphe Funktionen $f : D \rightarrow B_1(0)$ (siehe das Bild zu den Automorphismen der Kreisscheibe). Die Mehrdeutigkeit kann aber dadurch eliminiert werden, dass man $f(z_*) = 0$ und $f'(z_*) \in \mathbb{R}$ für einen beliebig fixierten Punkt z_* in D fordert.
4. Bei einigen Mengen D gibt es explizite Formeln für eine biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow B_1(0)$ und/oder die Umkehrabbildung $f^{-1} : D \rightarrow B_1(0)$. Bei den meisten Mengen muss man aber geeignete numerische Approximationsverfahren verwenden, die allerdings nicht einfach sind.
5. Sind $D, E \subsetneq \mathbb{C}$ zwei offene und einfach zusammenhängende Mengen, so kann D biholomorph auf E abgebildet werden und umgekehrt. Diese Verallgemeinerung des Satzes von Riemann ergibt sich unmittelbar aus einfachen Kompositionsargumenten, denn wenn $f : D \rightarrow B_1(0)$ und $g : E \rightarrow B_1(0)$ biholomorph sind, dann sind auch $g^{-1} \circ f : D \rightarrow E$ und $f^{-1} \circ g : E \rightarrow D$ biholomorph.

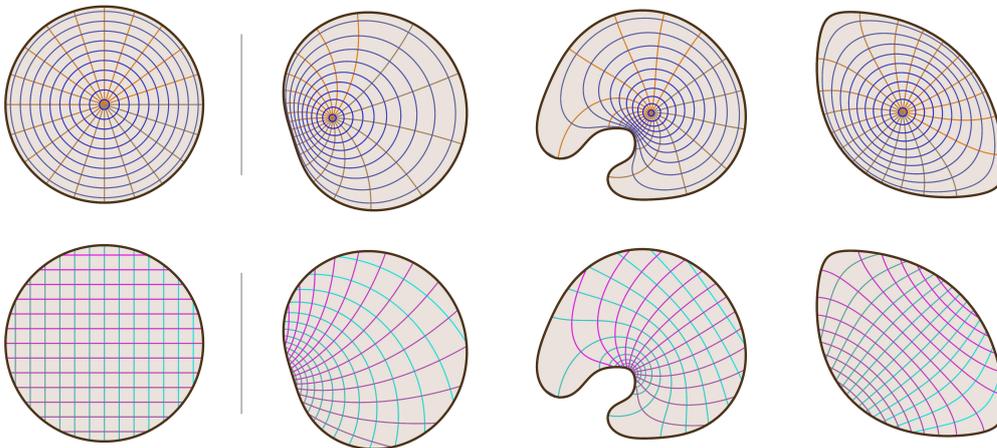


Illustration des Satzes von Riemann für drei einfach zusammenhängende Mengen D . Oben bzw. unten ist dargestellt, wie das polare bzw. kartesische Koordinatennetz in der Einheitskreisscheibe (ganz links) durch die Umkehrfunktion $f^{-1} : B_1(0) \rightarrow D$ von $f : D \rightarrow B_1(0)$ deformiert wird. Beachte die Winkelerhaltung.

Konforme Selbstabbildungen* Jede biholomorphe Funktion $f : D \rightarrow D$ wird Automorphismus von D genannt. Mit einem Automorphismus können also die Punkte innerhalb von D so gegeneinander verschoben werden, dass alle orientierten Winkel erhalten bleiben.

Für einige Mengen D kann man alle Automorphismen in geschlossener Form angeben, wobei wir uns vor allem für die folgenden vier Fälle interessieren, in denen nur Möbius-Transformationen relevant sind. Bei allen anderen Mengen sind die Automorphismen jedoch in der Regel durch kompliziertere Funktionen gegeben.

Theorem* (Automorphismen spezieller Mengen)

1. (Ebene) Die Automorphismen von \mathbb{C} sind gerade die affinen Funktionen, d.h. die Möbius-Transformationen der Form

$$f(z) = az + b,$$

wobei $a \neq 0$ und b komplexe Parameter sind.

2. (Kreisscheibe) Die Automorphismen von $B_1(0)$ sind gerade die Möbius-Transformationen der Bauart

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z},$$

wobei θ ein reeller und ζ ein komplexer Parameter mit $|\zeta| < 1$ ist.

3. (Halbebene) Die Automorphismen der Menge

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

sind gerade die Möbius-Transformationen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

mit *reellen* Parametern a, b, c, d (wobei natürlich wieder $ad \neq bc$ gelten muss).

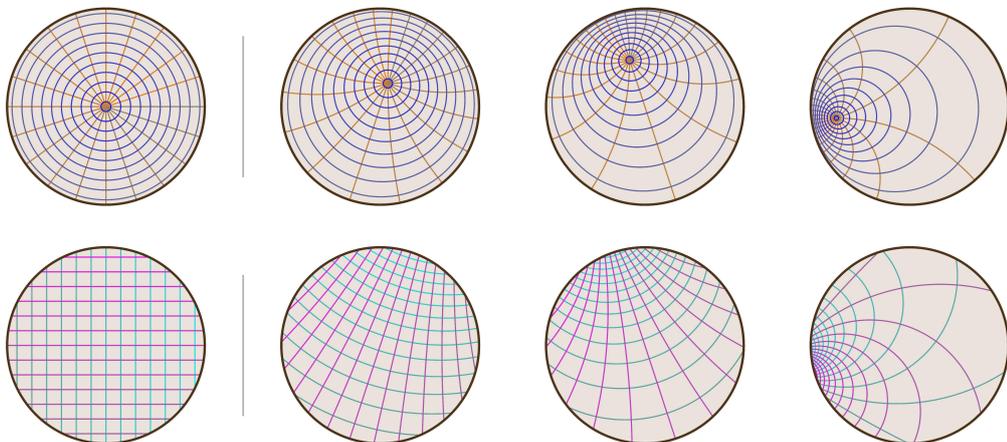
4. (Riemannsche Sphäre) Die Automorphismen von \mathbb{C}^* sind die Möbius-Transformationen mit beliebigen komplexen Parametern.

Bemerkungen*

- Automorphismen auf \mathbb{C}^* sind leicht anders definiert, da man zunächst einen geeigneten Ableitungsbegriff im unendlich fernen Punkt einführen muss. Salopp gesprochen gilt: Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist genau dann in ∞ differenzierbar, wenn die Funktion $z \mapsto f(1/z)$ gute Eigenschaften im Ursprung besitzt.
- zum Beweis*: Für jeden der vier Teile des Theorems können wir durch direkte Rechnungen zeigen, dass die angegebenen Möbius-Transformationen wirklich die jeweilige Menge bijektiv auf sich selbst abbilden, wobei sich die Biholomorphie dann unmittelbar aus der Differenzierbarkeit von Möbius-Transformationen ergibt. Der Nachweis, dass jeder Automorphismus schon Möbius-Transformation sein muss, ist jedoch deutlich subtiler und kann mit unserem Wissensstand nicht geführt werden.
- Auf der Einheitskreisscheibe gilt insbesondere die Invertierungsformel

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = f^{-1}(\tilde{z}) = -\frac{\tilde{z} + e^{i\theta} \zeta}{-\bar{\zeta} \tilde{z} - e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \frac{\tilde{z} + e^{i\theta} \zeta}{1 + e^{-i\theta} \bar{\zeta} \tilde{z}} = e^{i\tilde{\theta}} \frac{\tilde{z} - \tilde{\zeta}}{1 - \bar{\tilde{\zeta}} \tilde{z}}$$

mit $\tilde{\theta} = -\theta$ und $\tilde{\zeta} := -e^{-i\theta} \zeta$.



Deformation der polaren und der kartesischen Koordinatennetze bei drei verschiedenen Automorphismen der Einheitskreisscheibe, die jeder durch eine Möbius-Transformation spezieller Bauart gegeben sind.

1.8 Zwei Anwendungen

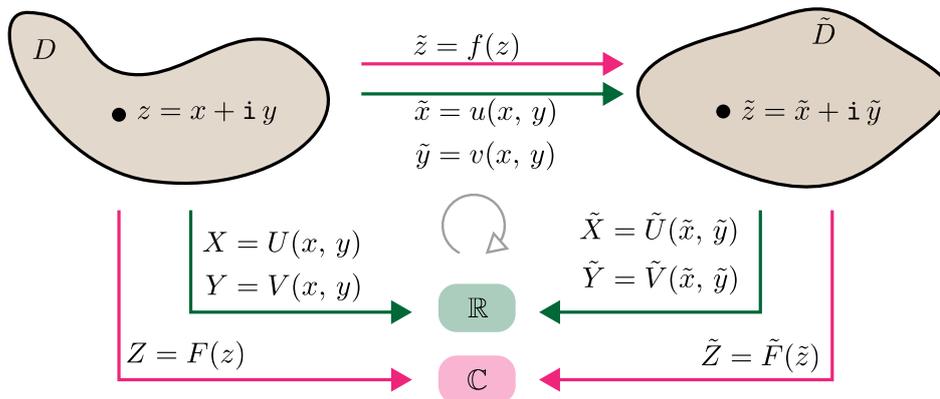
Vorbemerkung In den Natur- und Ingenieurwissenschaften müssen wir oftmals eine harmonische Funktion U oder sogar eine holomorphe Funktion F auf einer gegebenen zweidimensionalen Menge D finden oder konstruieren, wobei ggf. noch geeignete *Randbedingungen* zu berücksichtigen sind, die das Verhalten der Funktion auf ∂D festlegen. Die Menge D kann dabei sowohl als Teilmenge des \mathbb{R}^2 , als auch als Teilmenge von \mathbb{C} betrachtet werden (so wie wir das bisher auch schon gemacht haben).

Eine sehr erfolgreiche Strategie besteht darin, D mittels einer holomorphen (oder gar biholomorphen) Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf die Menge $\tilde{D} = f(D)$ zu transformieren und dort eine harmonische Funktion \tilde{U} bzw. eine holomorphe Funktion \tilde{F} zu finden, mit der dann U bzw. F durch Rücktransformation gewonnen werden kann. Der Vorteil dieser Methode liegt auf der Hand, wenn D eine komplizierte Geometrie, die Menge \tilde{D} aber eine besonders einfache Gestalt (Kreisscheibe, Halbebene usw.) besitzt.

Setting Die im Folgenden verwendeten Bezeichnungen sind im Bild dargestellt. Mit Rücktransformation meinen wir

$$F(z) = \tilde{F}(f(z)) \quad \text{bzw.} \quad U(x, y) = \tilde{U}(u(x, y), v(x, y)),$$

wobei sich diese Formeln in natürlicher Weise aus den Pfeilen und Bezeichnungen im Diagramm ergeben.



Die Bezeichnungen aller Mengen, Funktionen und Variablen in diesem Abschnitt.

Bemerkung

1. Die Funktion f wird im Folgenden immer holomorph sein, so dass u und v immer harmonisch sind. Die Kettenregel zeigt darüber hinaus, dass die Holomorphie von \tilde{F} auch die Holomorphie von $F = \tilde{F} \circ f$ impliziert. Eine analoge Aussage für \tilde{U} und U leiten wir gleich her.
2. Wir haben zunächst nicht vorausgesetzt, dass f invertierbar ist, aber in vielen Beispielen ist f sogar biholomorph. In diesem Fall gilt $f(\partial D) = \partial \tilde{D}$, d.h. der Rand von D wird auf den Rand von \tilde{D} abgebildet. Insbesondere können also Randbedingungen an U in Randbedingungen an \tilde{U} übersetzt werden.
3. Die Resultate aus den vorangegangenen Abschnitten können auf die Gebietstransformation f , aber sinngemäß auch auf F und \tilde{F} angewendet werden (sofern diese holomorph sind).

4. Die in diesem Abschnitt betrachteten zweidimensionalen Probleme in der reellen xy -Ebene kommen in der Regel von dreidimensionalen Problemen, bei denen die dritte Dimension durch Symmetriebetrachtungen oder Reduktionsargumente eliminiert wurde. Die Variable z benutzen wir wieder via $z = x + i y$ als komplexe Variable in der Ebene (und nicht etwa für die dritte Raumdimension).

Lemma (eine Transformationsformel) Mit den obigen Notationen gilt

$$\Delta U(x, y) = \Delta \tilde{U}(u(x, y), v(x, y)) |f'(x + i y)|^2.$$

Insbesondere ist U harmonisch (auf D), sofern \tilde{U} harmonisch (auf \tilde{D}) ist.

Beweis: Wenn wir in der oben angegebenen Formel für die Rücktransformation beide Seiten insgesamt zweimal nach x differenzieren, so ergibt sich mit der Kettenregel zunächst

$$\partial_x U = \partial_{\tilde{x}} \tilde{U} \partial_x u + \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \partial_x v,$$

und anschließend

$$\partial_x^2 U = \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{U} (\partial_x u)^2 + 2 \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} (\partial_x u \partial_x v) + \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{U} (\partial_x v)^2 + \partial_{\tilde{x}} \tilde{U} \partial_x^2 u + \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \partial_x^2 v,$$

wobei wir die Argumente der verschiedenen Funktionen nicht geschrieben haben, um die Notation kompakt zu halten. Eine analoge Formel erhalten wir durch zweimaliges Differenzieren nach y und durch Addition ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \Delta U &= \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{U} \left((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \right) + \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{U} \left((\partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2 \right) \\ &\quad + 2 \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \left((\partial_x u \partial_x v) + (\partial_y u \partial_y v) \right) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{U} (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} (\partial_x^2 v + \partial_y^2 v). \end{aligned}$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (wir benutzen hier, dass f holomorph ist) gilt außerdem

$$\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v = 0, \quad (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2 = |f'(x + i y)|^2$$

sowie $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \Delta u = 0$ und $\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = \Delta v = 0$. Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen. \square

Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

Elektrostatistisches Grundproblem in 2D Ein wichtiges Teilproblem in der Theorie elektromagnetischer Phänomene kann wie folgt formuliert werden: Finde eine Funktion $U : D \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta U(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in D$$

und außerdem die *Dirichlet-Randbedingung*

$$U(x, y) = g(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \partial D$$

mit gegebener Funktion $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt sind. Die Funktion U ist dabei das gesuchte *elektrische Potential*, dessen negativer Gradient das *elektrische Feld* \mathbf{E} liefert, wobei das Minuszeichen der physikalischen Potentialdefinition entspricht.

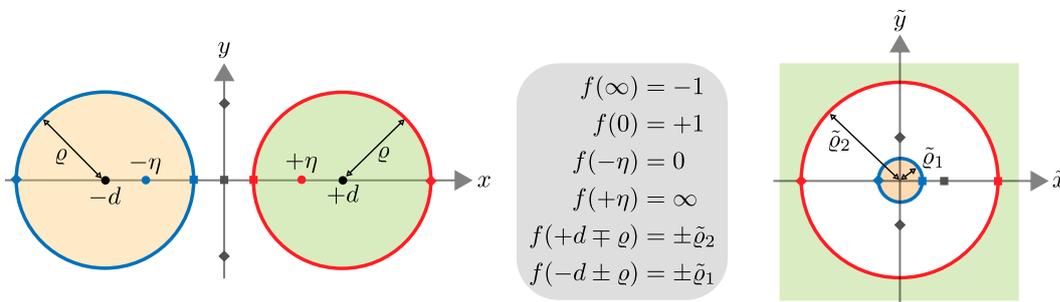
Wir wollen nun beispielhaft U und damit auch \mathbf{E} im Außengebiet zweier sehr langer Leiter berechnen, die senkrecht zur xy -Ebene verlaufen. Im einfachsten Fall können die Querschnitte beider Leiter durch zwei Kreisscheiben vom Radius $\varrho > 0$ beschrieben werden, wobei die entsprechenden Kreismittelpunkte durch $-d$ und $+d$ mit $d > \varrho$ gegeben sind und daher auf der x -Achse sowie symmetrisch zur y -Achse liegen. Wir suchen also eine harmonische Funktion U auf der offenen Menge

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z - d| > \varrho, |z + d| > \varrho\},$$

wobei wir zusätzlich die Randbedingungen

$$U(x, y) = \pm\mu \quad \text{für} \quad z = x + iy = \partial B_\varrho(\mp d)$$

mit gegebener Konstante $\mu \in \mathbb{R}$ erfüllen wollen. Diese kodieren, dass beide Leiter gleich große, aber ungleichnamige Ladungen tragen.



Links: Die Querschnitte der beiden Leiter als Kreisscheiben in der Ebene sowie die beiden Punkte $-\eta$ und $+\eta$, die symmetrisch bzgl. beider Randkreislinien liegen. Rechts: Das Außengebiet der beiden Kreisscheiben wird durch die angegebene Möbius-Transformation f auf einen Kreisring im Bildbereich abgebildet (jeweils weiß), wobei $0 < \tilde{\varrho}_1 < 1 < \tilde{\varrho}_2 < \infty$ für die Radien gilt. Siehe auch die linke Spalte im nächsten Bild. Mitte: Die Bilder ausgewählter Punkte unter f .

biholomorphe Gebietstransformation Die wichtige geometrische Beobachtung ist, dass die Möbius-Transformation

$$\tilde{z} = f(z) := \frac{\eta + z}{\eta - z}, \quad \eta := \sqrt{d^2 - \varrho^2}$$

das Gebiet D auf den Kreisring

$$\tilde{D} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \tilde{\varrho}_1 < |\tilde{z}| < \tilde{\varrho}_2\}, \quad \tilde{\varrho}_1 = 1/\tilde{\varrho}_2, \quad \tilde{\varrho}_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 - \varrho^2}}{\varrho}$$

abbildet, wobei die Randkreislinien $|z + d| = \varrho$ bzw. $|z - d| = \varrho$ (Rand des linken bzw. rechten Leiters) auf $|\tilde{z}| = \tilde{\varrho}_1$ (Innenkreis) bzw. $|\tilde{z}| = \tilde{\varrho}_2$ (Außenkreis) abgebildet wird.

Damit haben wir unser Ursprungsproblem transformiert und suchen nun eine harmonische Funktion \tilde{U} auf dem Kreisring \tilde{D} , die auf der Innen- bzw. der Außenkreislinie den Wert $-\mu$ bzw. $+\mu$ annimmt. Dieses Ersatzproblem ist deutlich einfacher als das Ursprungsproblem, eben weil die Geometrie von \tilde{D} viel übersichtlicher als die von D ist.

Konstruktion des elektrischen Potentials Auf \tilde{D} können wir den Laplace-Operator bzgl. der kartesischen Koordinaten \tilde{x} und \tilde{y} in den entsprechenden Polarkoordinaten schreiben, wobei wir schon in *Mathe-2* gesehen hatten, dass dies via $\tilde{z} = \tilde{r} \exp(i\tilde{\varphi})$ und mit der symbolischen Transformationsformel

$$\partial_{\tilde{x}}^2 + \partial_{\tilde{y}}^2 = \partial_{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^{-1} \partial_{\tilde{r}} + \tilde{r}^{-2} \partial_{\tilde{\varphi}}^2$$

gelingt. Anschließend können wir eine radialsymmetrische Funktion \tilde{U} durch das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung bzgl. des Polarradius \tilde{r} gewinnen. Nach einigen Rechenschritten erhalten wir

$$\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\mu}{\ln \tilde{\varrho}_2} \ln(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}),$$

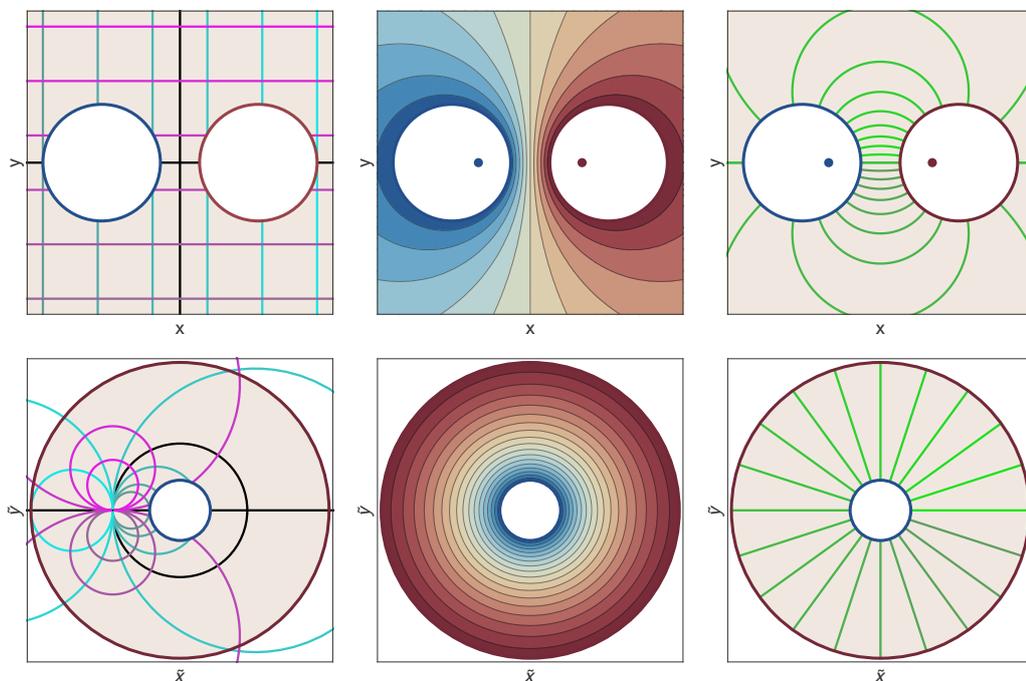
wobei wir anschließend durch eine Probe leicht verifizieren können, dass die so definierte Funktion \tilde{U} in der Tat alle gewünschten Eigenschaften besitzt, also harmonisch auf \tilde{D} ist und die gegebenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllt. Man kann schließlich auch beweisen, dass keine anderen (zum Beispiel nicht radialsymmetrische) Lösungen des Problems in \tilde{D} existieren, aber dies erfordert erheblich mehr Aufwand.

Durch Einsetzen der Gebietstransformation erhalten wir schließlich

$$U(x, y) = \frac{\mu}{\ln(\tilde{\varrho}_2)} \ln(|f(x + iy)|) = \frac{\mu}{\ln(\tilde{\varrho}_2)} \ln\left(\sqrt{\frac{(\eta + x)^2 + y^2}{(\eta - x)^2 + y^2}}\right)$$

für das elektrische Potential zwischen den beiden stromdurchflossenen Leitern. Nach Konstruktion ist sichergestellt, dass U wirklich die Laplace-Gleichung auf D sowie die Randbedingungen auf ∂D erfüllt, aber auch hier könnten wir dies mit einer Probe noch einmal direkt nachrechnen.

Bemerkung Die Funktion \tilde{U} beschreibt das elektrische Potential in einem *Zylinderkondensator* und das entsprechende elektrische Feld $\tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad} \tilde{U}$ ist bis auf das Vorzeichen gerade das elementare Quellenfeld aus *Mathe-2*.



Links: Darstellung der Möbius-Transformation f , wobei die horizontale bzw. vertikale Achse im Urbildbereich auf die horizontale Achse bzw. die Einheitskreislinie im Bildbereich abgebildet wird (jeweils schwarz) und das Außengebiet der Leiter nun braun gezeichnet wurde. *Mitte:* Konturplot des elektrischen Potentials U (oben) bzw. \tilde{U} (unten) als harmonische Funktion auf D bzw. \tilde{D} mit vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen, wobei alle Niveaulinien sowohl in D als auch in \tilde{D} Kreislinien sind. *Rechts:* Die elektrischen Feldlinien sind Integralkurven an das elektrische Feld und stehen immer senkrecht auf den Potentiallinien. Beachte, dass jede Feld- bzw. Potentiallinie oben durch die Transformation f auf eine entsprechende Kurve unten abgebildet wird und umgekehrt. Insbesondere sind die Feldlinien in D Segmente von Kreislinien, die die Punkte $-\eta$ und $+\eta$ enthalten (farbige Punkte).

Konstruktion der elektrischen Feldlinien Die elektrischen Feldlinien sind die Integralkurven an das Vektorfeld

$$\mathbf{E}(x, y) = -\mathbf{grad} U(x, y),$$

wobei $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ automatisch und $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ wegen $\Delta U = 0$ gilt, d.h. das elektrische Feld ist sowohl quellen- als auch wirbelfrei in der Menge D . Die Feldlinien stehen dabei immer senkrecht auf den *Potentiallinien*, also den Niveaukurven von U , und können (zumindest im Prinzip) als Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x U(x(t), y(t)) \\ -\partial_y U(x(t), y(t)) \end{pmatrix}.$$

bestimmt werden. Es ist jedoch viel einfacher, zunächst die Feldlinien im Ersatzproblem auf \tilde{D} zu identifizieren und anschließend die inverse Möbius-Transformation f^{-1} anzuwenden. Da \tilde{U} radialsymmetrisch ist, sind die Feldlinien in \tilde{D} nämlich gerade Segmente von Halbgeraden, die die Punkte 0 und ∞ miteinander verbinden. Jede dieser Halbgeraden wird von f^{-1} auf eine Halbkreislinie abgebildet, die die Punkte $f^{-1}(0) = -\eta$ und $f^{-1}(\infty) = +\eta$ miteinander verbindet, und wir schließen, dass die Feldlinien in D Segmente solcher Kreislinien sind. Mit analogen Argumenten zeigt man, dass jede Potentiallinie in D eine Kreislinie ist, bzgl. derer η und $+\eta$ symmetrisch sind.

Wir können natürlich auch direkte Formeln für die Feldlinien angeben, aber die Details sind recht kompliziert. Mit

$$z = f^{-1}(\tilde{z}) = \eta \frac{\tilde{z} - 1}{\tilde{z} + 1}$$

ergibt sich nämlich (Nachrechnen)

$$x = \eta \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1}{(\tilde{x} + 1)^2 + \tilde{y}^2}, \quad y = \eta \frac{2\tilde{y}}{(\tilde{x} + 1)^2 + \tilde{y}^2}$$

und wenn wir auf der rechten Seite

$$\tilde{x} = \tilde{r} \cos(\tilde{\varphi}_*), \quad \tilde{y} = \tilde{r} \sin(\tilde{\varphi}_*)$$

mit festem Winkel $\tilde{\varphi}_*$ und freiem Radius $\tilde{r} \in (\tilde{\varrho}_1, \tilde{\varrho}_2)$ einsetzen, so erhalten wir eine explizite Parametrisierung einer Feldlinie in D . Es bedarf jedoch einiger Erfahrung, um die bereits abgeleitete Kreisstruktur der Feldlinien auch in diesen Formeln zu erkennen.

zum komplexen Potential Es gibt keine holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\tilde{F} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U = \operatorname{Re}(F)$ bzw. $\tilde{U} = \operatorname{Re}(\tilde{F})$. Im Ersatzproblem kann diese Aussage durch folgendes indirekte Argument begründet werden: Wenn die Behauptung falsch wäre, so würde eine harmonische Funktion $\tilde{V} = \operatorname{Im}(\tilde{F})$ auf \tilde{D} existieren und nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen müsste

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\partial_{\tilde{y}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{c\tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \quad \partial_{\tilde{y}} \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) = +\partial_{\tilde{x}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = +\frac{c\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$$

mit $c = \mu / \ln(\tilde{\varrho}_2)$ gelten, wobei die zwei Terme auf den rechten Seiten die Komponenten des elementaren Wirbelfelds sind. Wir hatten aber schon in *Mathe-2* gesehen, dass dieses Wirbelfeld kein Potential besitzt, obwohl es in jedem Punkt aus \tilde{D} rotationsfrei

ist und damit die lokalen Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Der Grund ist natürlich, dass \tilde{D} ein Loch besitzt und damit nicht einfach zusammenhängend ist.

Es gibt aber auf jeder einfach zusammenhängenden Teilmenge von D bzw. \tilde{D} ein *lokales komplexes Potential*. Ein Beispiel im transformierten Gebiet ist die Funktion

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = c \operatorname{Ln}(\tilde{z}) = c \ln |\tilde{z}| + c \mathbf{i} \operatorname{Arg}(\tilde{z}),$$

die aber nicht auf dem gesamten Kreisring \tilde{D} , sondern nur außerhalb des Schlitzes $\tilde{S} = \{\tilde{z} : -\tilde{\varrho}_1 < \tilde{x} < -\tilde{\varrho}_2, \tilde{y} = 0\}$ definiert ist. Der geschlitzte Kreisring $\tilde{D} \setminus \tilde{S}$ ist einfach zusammenhängend (da wir *in dieser Menge* nicht um das Loch von \tilde{D} herumlaufen können) und dort gilt

$$\tilde{F}'(\tilde{z}) = \frac{c}{\tilde{z}}, \quad \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \operatorname{Re}(\tilde{F}(\tilde{z})), \quad \tilde{F}'(\tilde{z}) = \partial_{\tilde{x}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{i} \partial_{\tilde{y}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

d.h. der Vektor $\mathbf{grad} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$ entspricht der konjugiert komplexen Zahl zu $\tilde{F}'(\tilde{z})$. Ganz analoge Aussagen ergeben sich mit

$$F(z) = \tilde{F}(f(z)) = c \operatorname{Ln}\left(\frac{\eta + z}{\eta - z}\right)$$

auf der Menge $D \setminus S$, wobei $S = \{z : -d + \varrho < x < d - \varrho, y = 0\}$ das Urbild von \tilde{S} bzgl. f ist und gerade die horizontale Steckle zwischen den Leitern beschreibt.

Bemerkung Das elementare Wirbelfeld verläuft in \tilde{D} übrigens immer tangential zu den Potentiellinien von \tilde{U} , wobei letztere durch konzentrische Kreise gegeben sind. Eine analoge Aussage gilt auch für das Vektorfeld mit den Komponenten $-\partial_{\tilde{y}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $+\partial_{\tilde{x}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$, da dieses gerade als winkeltreue Transformation des elementaren Wirbelfelds betrachtet werden kann.

Umströmung eines Kreiszyinders

reelles und komplexes Strömungspotential in 2D Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{W} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ einer idealen (und damit inkompressiblen) Flüssigkeit muss immer quellfrei sein. In vielen Fällen kann außerdem das Auftreten von *Turbulenz* vernachlässigt werden, so dass das Vektorfeld dann auch *wirbelfrei* ist und insgesamt

$$\operatorname{div} \mathbf{W}(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{W}(x, y) = 0$$

in allen Punkten $(x, y) \in D$ gilt. Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichungen ist die Existenz einer harmonischen Funktion U , so dass

$$\mathbf{W}(x, y) = -\mathbf{grad} U(x, y)$$

auf D gilt, wobei U dann als *Geschwindigkeitspotential* bezeichnet wird. Oftmals existiert sogar eine holomorphe Funktion F , so dass die obige Gleichung für den Realteil von $F = U + \mathbf{i} V$ gilt. In diesem Fall nennt man F das *komplexe Strömungspotential* und den Imaginärteil V die *Stromfunktion*, wobei die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen für U und V dann in jedem Punkt implizieren, dass $\mathbf{grad} V(x, y)$ aus $\mathbf{grad} U(x, y)$ durch Drehung um 90° hervorgeht.

Bemerkung Die drei verschiedenen Formulierungen des Problems sind nur auf einfach zusammenhängenden Gebieten paarweise äquivalent. Auf Gebieten mit Löchern kann es sein, dass zu einem quellen- und wirbelfreien Vektorfeld kein reelles oder gar komplexes Potential existiert. Das Standardbeispiel ist hier wieder das elementare Wirbelfeld auf der punktierten komplexen Ebene $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

biholomorphe Gebietstransformation Wir wollen nun mittels eines komplexen Strömungspotentials F die Umströmung eines kreisförmigen Zylinders beschreiben, der senkrecht zur xy -Ebene liegt und dessen Querschnitt der Einheitskreisscheibe entspricht. Insbesondere setzen wir

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

und konstruieren eine geeignete holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$. Im ersten Schritt bemerken wir, dass wir D mithilfe der Joukowski-Transformation

$$\tilde{z} = f(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

biholomorph auf die offene Menge

$$\tilde{D} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \neq 0 \text{ oder } |x| > 1\}$$

abbilden können (siehe dazu das Bild), wobei wir für unsere Zwecke keine expliziten Formeln für die Umkehrabbildung benötigen.

Bemerkung* Dass die Joukowski-Transformation D wirklich biholomorph auf \tilde{D} abbildet, kann wie folgt begründet werden: (1.) Durch direkte Rechnungen beweisen wir zunächst, dass $f(z_1) = f(z_2)$ für zwei beliebige, aber verschiedene komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn $z_1 = 1/z_2$ gilt. Dies impliziert insbesondere die behauptete Injektivität von f auf D . (2.) Durch Lösen quadratischer Gleichungen zeigen wir die Surjektivität, d.h. dass f die Menge D wirklich auf \tilde{D} abbildet. (3.) Die Differenzierbarkeit von $f : D \rightarrow \tilde{D}$ ergibt sich aus den obigen Rechenregeln, wobei offensichtlich $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - 1/z^2)$ gilt. (4.) Die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung folgt dann aus der Kettenregel, weil $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ gilt (siehe wieder oben).

Konstruktion des Strömungspotentials Im transformierten Gebiet \tilde{D} kann das Problem mit physikalischer Intuition gelöst werden: Das einfachste Geschwindigkeitsfeld einer den Schlitz umströmenden Flüssigkeit ist konstant und zeigt immer in horizontale Richtung (*laminare Strömung*). Diese spezielle Lösung wird durch die Wahl

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = -\mu \tilde{z}, \quad \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\mu \tilde{x}, \quad \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\mu \tilde{y}$$

beschrieben, denn diese liefert zusammen mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Formeln

$$\tilde{W}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{x}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ -\partial_{\tilde{y}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{y}} \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ +\partial_{\tilde{x}} \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei der Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ der horizontalen Strömungsgeschwindigkeit entspricht und als trivialer Faktor in allen Formeln auftaucht. Das entsprechende komplexe Potential auf D ergibt sich zu

$$F(z) = \tilde{F}(f(z)) = -\mu \frac{z^2 + 1}{2z}$$

und einfache Rechnungen liefern

$$U(x, y) = -\mu \frac{x^3 + x y^2 + x}{2(x^2 + y^2)}, \quad V(x, y) = -\mu \frac{y^3 + x^2 y - y}{2(x^2 + y^2)}$$

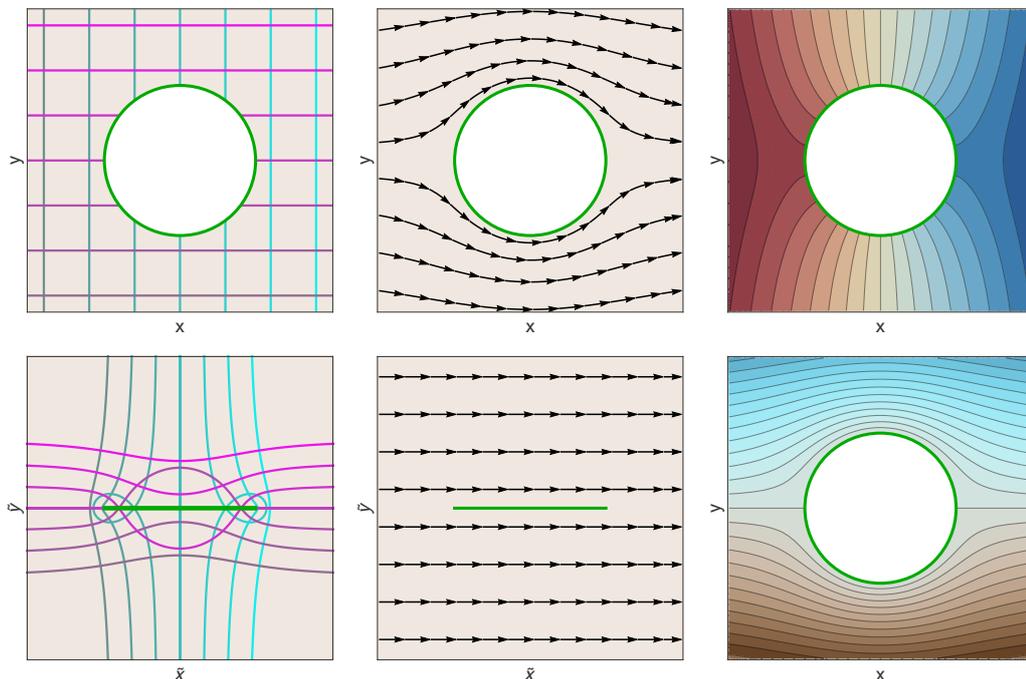
für das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion sowie

$$\mathbf{W}(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_x U(x, y) \\ -\partial_y U(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\mu}{2(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - x^2 + y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$$

für das gesuchte nichttriviale Geschwindigkeitsfeld auf D . Beachte, dass

$$F'(z) = \mu \frac{1 - z^2}{2z^2} = \partial_x U(x, y) - i \partial_y U(x, y) = \partial_y V(x, y) + i \partial_x V(x, y)$$

wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt, d.h. die Komponenten von $\mathbf{grad} U(x, y)$ und $\mathbf{grad} V(x, y)$ können alternativ auch direkt aus dem Real- und dem Imaginärteil der komplexen Ableitung $F'(z)$ abgelesen werden.



Links: Das offene Außengebiet der Einheitskreisscheibe (oben) wird durch die Joukowski-Transformation biholomorph auf die im reellen Intervall $[-1, +1]$ geschlitzte Ebene (unten) abgebildet. Der abgeschlossene Schlitz ist dabei gerade das Bild der Einheitskreislínie (jeweils grün), d.h. der Rand von D wird auf den Rand von \tilde{D} abgebildet, wobei allerdings die Injektivität verloren geht. *Mitte:* Das Strömungsfeld der Flüssigkeit in D (oben) und \tilde{D} (unten). *Rechts:* Konturplots des Geschwindigkeitspotentials U (oben) sowie der Stromfunktion V (unten) für die Strömung in D . Beachte, dass das Geschwindigkeitsfeld nach Konstruktion oben bzw. unten normal bzw. tangential zu den jeweiligen Niveaulinien verläuft.

1.9 Potenzreihen

Vorbemerkung Ein wesentlicher Bestandteil der Theorie und Praxis holomorpher Funktionen sind Potenzreihen, die wir ja schon in *Mathe-1* kennengelernt hatten. Wir wollen nun die Grundlagen etwas ausführlicher darstellen.

Theorem (Potenzreihe als holomorphe Funktion) Seien $z_* \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Entwicklungspunkt und $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Koeffizienten. Dann wird durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_*) + \alpha_2 (z - z_*)^2 + \alpha_3 (z - z_*)^3 + \dots$$

eine holomorphe Funktion auf der offenen Kreisscheibe $B_R(z_*)$ definiert, wobei der Konvergenzradius durch die Cauchy-Hadamard-Formel

$$R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}}$$

gegeben ist und die Ableitung mittels

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha_k (z - z_*)^{k-1} = \alpha_1 + 2 \alpha_2 (z - z_*) + 3 \alpha_3 (z - z_*)^2 + 4 \alpha_4 (z - z_*)^3 + \dots$$

berechnet werden kann.

Beweisskizze, Teil 1: Zunächst zeigen wir, dass $f(z)$ für jedes feste $z \in B_R(z_*)$ im Sinne einer absolut konvergenten Reihe (siehe *Mathe-1*) wohldefiniert ist. Das wesentliche Argument in diesem Zusammenhang wird *Lemma von Abel* genannt und kann wie folgt formuliert werden: Ist $r > 0$ ein beliebiger Radius und $\zeta \in \partial B_r(z_*)$ ein Punkt, sodass

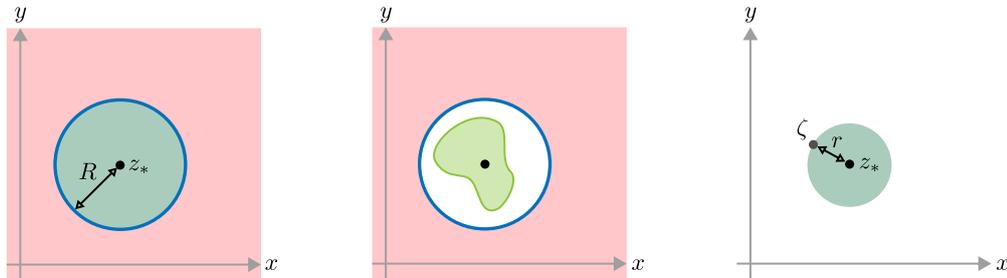
$$|\alpha_k (\zeta - z_*)|^k = |\alpha_k| r^k \leq C$$

für eine geeignete Konstante C und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt via

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| |z - z_*|^k &= \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| r^k \frac{|z - z_*|^k}{r^k} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_*|}{r} \right)^k = \frac{C}{1 - \frac{|z - z_*|}{r}} < \infty \end{aligned}$$

die absolute Konvergenz von $f(z)$ für jedes z mit $|z - z_*| < r = |\zeta - z_*|$. Oder anders gesagt: Wenn die Reihenglieder auch nur für *einen Punkt* aus der Kreislinie vom Radius r um z_* beschränkt sind, so folgt automatisch die absolute Konvergenz der Reihe in der *ganzen Kreisscheibe* $B_r(z_*)$. Mit diesem Hebel kann nun leicht die Wohldefiniertheit von f auf $B_R(z_*)$ gezeigt werden, wobei R gerade die größtmögliche Wahl von r im Lemma von Abel ist.

Beweisskizze, Teil 2: Um zu zeigen, dass f in jedem $z \in B_R(z_*)$ differenzierbar ist und die angegebene Ableitung $f'(z)$ besitzt, berechnen wir die entsprechenden Differenzenquotienten mit Hilfe binomischer Formeln und gehen anschließend zum Grenzwert über. Die Argumente sind analog zu der weiter oben beschriebenen Herleitung der Ableitungsformel für Polynome, nur müssen diesmal unendlich viele Summanden berücksichtigt und abgeschätzt werden. Die (etwas technischen) Details finden sich in der Literatur, zum Beispiel in [AORS, Beweis von Satz 27.4.9]. \square



Links: Im Inneren des Konvergenzkreises (grün) konvergiert die Potenzreihe (sogar absolut), aber im Außengebiet (rot) konvergiert sie nicht. Auf dem Rand (blau) ist keine allgemeine Aussage möglich und das Konvergenzverhalten kann in jedem Punkt anders sein. *Mitte:* Auf jeder Teilmenge des Konvergenzkreises, die einen echt positiven Abstand zum Rand besitzt, gilt sogar gleichmäßige Konvergenz der Reihe (hellgrün). *Rechts:* Illustration des Lemmas von Abel, mit dem die Existenz des Konvergenzkreises bewiesen wird.

Bemerkungen

1. Im Fall von $R = 1/0 = \infty$ (reelles $+\infty$, nicht komplexes ∞) ist f eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C} = B_\infty(z_*)$. Im Entartungsfall $R = 0$ gilt $D = B_0(z_*) = \emptyset$ (leere Menge) für den Definitionsbereich, d.h. es gibt gar keine entsprechende holomorphe Funktion.
2. Der Konvergenzradius kann oftmals durch

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|\alpha_k|}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} \quad (\text{Wurzelformel})$$

oder alternativ durch

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} \quad (\text{Quotientenformel})$$

berechnet werden, aber wenn die entsprechenden Grenzwerte nicht existieren, so muss (und kann) die allgemeine Formel mit größten Häufungswert (\limsup) verwendet werden.

3. Das Theorem besagt, dass jede Potenzreihe *gliedweise* differenziert werden kann. Die Formel für die Ableitung kann dabei nach Index-Verschiebung auch als

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \alpha_{k+1} (z - z_*)^k$$

geschrieben werden.

4. Da im Inneren des Konvergenzkreises $B_R(z_*)$ absolute Konvergenz vorliegt, kann die Potenzreihe beliebig umsortiert werden. Außerdem können wir das Produkt zweier Potenzreihen immer mit der Cauchyschen Produktformel berechnen. Siehe dazu jeweils *Mathe-1*.

5. Man kann auch zeigen, dass für jedes z mit $|z - z_*| > R$ (d.h. für jeden Punkt im Außengebiet des Konvergenzkreises) die Reihe divergiert, d.h. dass die entsprechende Partialsummenfolge nicht konvergiert. In einem Randpunkt des Konvergenzkreises (d.h. für $|z - z_*| = R$) kann im Prinzip alles passieren (Konvergenz, absolute Konvergenz oder Divergenz) und man muss in jedem Fall sehr viel genauer hinschauen.

Merkregel: Auf dem Rand $\partial B_R(z_*)$ ist alles kompliziert, da dieser die Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz darstellt.

6. Ist $D_* \subset B_R(z_*)$ eine kompakte Menge (also beschränkt und abgeschlossen), so gilt

$$0 \leq \sup_{z \in D_*} \left| f(z) - \sum_{k=0}^K \alpha_k (z - z_*)^k \right| \leq \sup_{z \in D_*} \sum_{k=K+1}^{\infty} |\alpha_k| |z - z_*|^k \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

für den K -ten Reihenrest, d.h. $f(z)$ konvergiert nicht nur in jedem Punkt $z \in D_*$ absolut, sondern sogar *gleichmäßig* auf D_* . Diese verfeinerte Aussage ist sowohl für theoretische Betrachtungen als auch für numerische Approximationsverfahren ausgesprochen nützlich.

Beispiele

1. Wir hatten in *Mathe-1* ausgerechnet, dass die trigonometrischen Funktionen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

jeweils den Konvergenzradius $R = \infty$ besitzen, wobei die bekannten Ableitungsformeln sich auch durch gliedweise Differentiation ergeben. Wir hatten außerdem gesehen, dass die Euler-Formel

$$\exp(i z) = \cos(z) + i \sin(z)$$

mit dem Umordnungssatz und die Produktformeln

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

aus dem Cauchy-Produkt abgeleitet werden können. Beachte auch, dass diese Formeln für alle komplexen (und nicht etwa nur für reelle) Argumente gelten.

2. Jedes Polynom ist auch Potenzreihe, wobei fast alle Koeffizienten verschwinden und $R = \infty$ gilt.
3. Durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{3^k}$$

wird nach dem Theorem eine holomorphe Funktion auf $B_3(1)$ definiert, wobei es sich für jedes z um eine geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$ mit Parameter $q = (1-z)/3$ handelt und wir wegen $|q| < 1$ auch

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{1-z}{3}} = \frac{3}{2+z} =: f_{\text{ext}}(z)$$

schreiben können. Dabei gilt:

- (a) f_{ext} besitzt die Polstelle $z = -2$ und ist dort weder definiert noch komplex differenzierbar. (Wir könnten aber durchaus $f_{\text{ext}}(-2) = 3/0 = \infty$ schreiben.)
- (b) f_{ext} ist auf der punktierten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ wohldefiniert und holomorph.
- (c) Die Polstelle von f_{ext} liegt auf $\partial B_3(0)$, d.h. auf dem Rand des Konvergenzkreises von f .
- (d) Die Reihe zu f kann in allen Punkten z mit $|z - 1| > 3$ nicht konvergieren, da die entsprechenden Reihenglieder keine Nullfolge mehr bilden (siehe wieder *Mathe-1*).

Die Funktion f_{ext} ist eine holomorphe Fortsetzung (*'extension'*) von f und wir werden später verstehen, dass die vier Beobachtungen allgemeine Prinzipien widerspiegeln.

Folgerung (Potenzreihen besitzen viele Ableitungen) Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises unendlich oft komplex differenzierbar, wobei die n -te Ableitung durch

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \alpha_k (z - z_*)^{k-n}$$

gegeben ist. Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(z_*) = n! \alpha_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im Mittelpunkt des Konvergenzkreises.

Beweisskizze: Der springende Punkt ist, dass das vorangegangene Theorem auch auf die Potenzreihe für f' (deren k -ter Koeffizient gerade $(k+1)\alpha_{k+1}$ ist) angewendet werden kann, wobei diese Reihe denselben Konvergenzradius wie die Potenzreihe für f haben muss. Das dem so ist, kann man aus der Cauchy-Hadamard-Formel oder am einfachsten via

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)|\alpha_{k+1}|}{(k+2)|\alpha_{k+2}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_{k+2}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} = R$$

aus dem Quotientenkriterium ableiten. Damit liefert das Theorem die Existenz von f'' auf $B_R(z_*)$ sowie die entsprechende Formel für die Ableitung. Danach können wir das Theorem auch noch auf die Potenzreihe für f'' (mit Koeffizienten $(k+2)(k+1)\alpha_{k+2}$) anwenden und erhalten die Existenz sowie die Formel für f''' auf $B_r(z_*)$. Weil diese rekursive Argumentationskette beliebig oft wiederholt werden kann, ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkungen

- Es gilt wieder $0! = 1$ sowie $f^{(0)}(z) = f(z)$, $f^{(1)}(z) = f'(z)$, $f^{(2)}(z) = f''(z)$ usw.. Beachte auch, dass $k!/(n-k)! = k(k-1)\dots(k-n+1)$ gerade das Produkt aus n aufeinanderfolgenden Zahlen ist.
- Aufgrund der ersten Formel gilt

$$f^{(2)}(z) = f''(z) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(z - z_*) + 12\alpha_4(z - z_*)^2 + \dots$$

sowie

$$f^{(3)}(z) = f'''(z) = 6\alpha_3 + 24\alpha_4(z - z_*) + 60\alpha_5(z - z_*)^2 + \dots,$$

d.h. auch jede n -te Ableitung einer Potenzreihe kann *gliedweise* berechnet werden.

3. Die zweite Formel impliziert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k,$$

d.h. jede Potenzreihe ist auch eine Taylor-Reihe (siehe *Mathe-1* für das analoge Konzept im Reellen).

Beispiele

1. Jedes Polynom

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_K z^K$$

ist trivialerweise seine eigene Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $z_* = 0$. Es gilt aber auch

$$f(z) = \sum_{k=0}^K \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k$$

für jede andere Wahl von z_* , wobei die entsprechenden Koeffizienten erst berechnet werden müssen. Ein ganz einfaches Beispiel ist

$$z^2 + 1 = (z - 1)^2 + 2(z - 1) + 2 = (z - 2i)^2 + 4i(z - 2i) - 3,$$

wobei in der Mitte bzw. rechts $z_* = 1$ bzw. $z_* = 2i$ der Entwicklungspunkt ist.

2. Für den Hauptwert des Logarithmus gilt

$$\operatorname{Ln}'(z) = +z^{-1}, \quad \operatorname{Ln}''(z) = -z^{-2}, \quad \operatorname{Ln}'''(z) = +2z^{-3}, \quad \operatorname{Ln}^{(4)}(z) = -6z^{-4}$$

und mit vollständiger Induktion zeigen wir

$$\operatorname{Ln}^{(k)}(z) = (-1)^{k+1} (k-1)! z^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\operatorname{Ln}^{(0)}(1) = 0$ ergibt sich dann die Taylor-Formel

$$\operatorname{Ln}(z) = (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \frac{1}{3}(z - 1)^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (z - 1)^k,$$

aber die Reihe auf der rechten Seite besitzt nur den Konvergenzradius

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

Insbesondere kann diese Reihe nicht auf dem Definitionsbereich von Ln (die in der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene), sondern nur auf der Kugel $B_1(1)$ verwendet werden. Wir werden später noch einmal auf diesen Punkt zurückkommen, wollen aber hier schon festhalten: $B_1(1)$ ist die größte offene Kugel um den Entwicklungspunkt $z_* = 1$, die (gerade noch) im Definitionsbereich von Ln liegt.

Ausblick Wir werden unten sehen, dass sich jede holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in der Nähe eines *jeden* Punktes $z_* \in D$ *lokal* als Potenzreihe schreiben lässt, wobei diese Potenzreihe dann die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt z_* ist. Eine spezielle Folgerung wird sein, dass *jede* holomorphe, d.h. jede einmal komplex differenzierbare Funktion automatisch schon unendlich viele komplexe Ableitungen besitzt. Die analoge Aussage mit reellen Ableitungen ist übrigens falsch.

1.10 Laurent-Reihen

Vorbemerkung In einer Potenzreihe addieren wir alle nicht-negativen Potenzen von $(z - z_*)$ (gewichtet mit den komplexen Koeffizienten α_k) und betrachten die unendliche Summe als eine Funktion in der Variablen z . Eine wichtige Erkenntnis ist nun, dass wir auch (endlich oder gar unendlich viele) negative Exponenten in den Summanden zulassen können, wobei dann die sogenannten *Laurent-Reihen* entstehen. Diese spielen eine große Rolle bei Rechnungen in den Anwendungswissenschaften, wobei α_{-1} , der Koeffizient vor $(z - z_*)^{-1}$, besonders interessant und wichtig ist.

Absolute Konvergenz bei Doppelreihen Die komplexe Doppelreihe $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k$ mit Gliedern $\beta_k \in \mathbb{C}$ konvergiert genau dann absolut, wenn

$$\sup_{K \in \mathbb{N}} \sum_{k=-K}^K |\beta_k| < \infty$$

gilt, wobei dann der Wert der Reihe zum Beispiel via

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=-K}^K \beta_k$$

oder durch analoge Formeln mit umsortierten Gliedern bestimmt werden kann. Dieses Konzept verallgemeinert die absolute Konvergenz einfacher Reihen in sehr natürlicher Weise. Die nicht-absolute Konvergenz von Doppelreihen ist jedoch deutlich subtiler und wird bei uns keine Rolle spielen.

Bemerkung* Ganz allgemein kann man auch bei einfachen Reihen sagen: Die Frage, ob eine Reihe konvergiert oder nicht, ist aus Sicht der modernen Mathematik eigentlich falsch gestellt. Die entscheidende Frage ist vielmehr, ob eine Reihe absolut konvergiert oder nicht.

Theorem (Laurent-Reihen als holomorphe Funktionen) Seien $z_* \in \mathbb{C}$ ein Entwicklungspunkt und $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ eine Doppelfolge komplexer Koeffizienten. Dann wird durch

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \dots + \alpha_{-1} (z - z_*)^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_*) + \dots$$

eine holomorphe Funktion auf dem offenen Kreisring (*'annulus'*)

$$A_{R_-, R_+}(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : R_- < |z - z_*| < R_+\}$$

definiert. Hierbei ist die Ableitung durch

$$f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \alpha_k (z - z^*)^{k-1}$$

gegeben und die (nichtnegativen) Radien

$$R_- := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{-n}|} \quad \text{bzw.} \quad R_+ := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{+n}|}}$$

hängen in leicht unterschiedlicher Weise nur von den Koeffizienten mit negativem bzw. positivem Index ab.

Beweis: Die wesentliche Idee ist es, die Doppelreihe mittels

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z - z_*}\right) + h(z - z_*)$$

aufzuspalten, wobei

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \zeta^n = \alpha_{-1} \zeta + \alpha_{-2} \zeta^2 + \alpha_{-3} \zeta^3 + \dots$$

und

$$h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{+n} \zeta^n = \alpha_0 + \alpha_{+1} \zeta + \alpha_{+2} \zeta^2 + \alpha_{+3} \zeta^3 + \dots$$

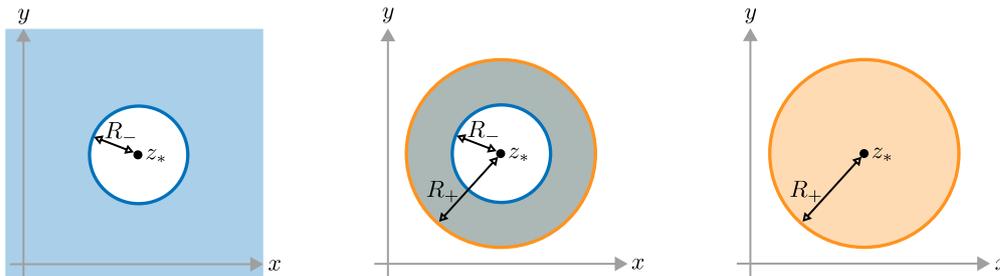
zwei Potenzreihen in der Variablen ζ und mit dem Entwicklungspunkt $\zeta_* = 0$ sind. Nach dem Theorem über die Holomorphie von Potenzreihen sind der Konvergenzradius S von g bzw. T von h durch

$$S = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{-n}|}} = 1/R_-, \quad T = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{+n}|}} = R_+,$$

gegeben, und wir schließen, dass der Term $g(1/(z - z_*))$ für $1/(z - z_*) < 1/R_-$ absolut konvergiert, wohingegen $h(z - z_*)$ für $|z - z_*| < R_+$ absolut konvergiert. Zusammen ergibt sich die absolute Konvergenz von $f(z)$ für alle $z \in A_{R_-, R_+}(z_*)$. Die Holomorphie von f mit

$$f'(z) = -\frac{1}{(z - z_*)^2} g'\left(\frac{1}{z - z_*}\right) + h'(z - z_*)$$

folgt aus der Kettenregel, wobei dann schließlich die Reihendarstellungen von g' und h' eingesetzt werden können. \square



Der offene Konvergenzring einer Laurent-Reihe (Mitte) wird durch die Konvergenzgebiete ihres Haupt- (links) bzw. Nebenteiles (rechts) bestimmt, wobei diese durch alle Summanden mit negativen bzw. positiven Indizes gegeben sind. Beachte, dass das Außengebiet (weiß) sowie der Rand des Konvergenzringes aus je zwei Teilen bestehen.

Bemerkungen

- Wir setzen bei einer Laurent-Reihe immer stillschweigend voraus, dass mindestens einer der Koeffizienten $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots$ nicht verschwindet, da es sich andernfalls ja um eine Potenzreihe handelt. Die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_{+1}, \alpha_{+2}, \dots$ dürfen aber durchaus alle verschwinden.

- Auch eine Laurent-Reihe kann also gliedweise differenziert werden. Die Ableitung

$$f'(z) = \dots - 2\alpha_{-2}(z - z_*)^{-3} - \alpha_{-1}(z - z_*)^{-2} + \alpha_1 + 2\alpha_2(z - z_*) + \dots$$

ist wieder eine Laurent-Reihe und besitzt denselben Konvergenzring wie f . Beachte aber, dass in dieser Reihe der Koeffizient vor $(z - z_*)^{-1}$ verschwindet, sodass der entsprechende Summand nicht auftaucht. Auch diese Beobachtung wird nützlich werden.

- Im Fall von $R_- = 0$ und $0 < R_\infty < \infty$ gilt $A_{0,R_+}(z_*) = B_{R_+} \setminus \{z_*\}$, d.h. der Konvergenzring ist eigentlich eine punktierte Kreisscheibe und f besitzt eine isolierte Singularität in z_* . Beachte aber, dass *Einpunktlöcher* immer noch Löcher sind. Analoge Aussagen kann man für $R_+ = \infty$ treffen, wobei der Konvergenzring dann eine unbeschränkte Menge ist. Im Entartungsfall $R_+ \leq R_-$ gilt $A_{R_-,R_+}(z_*) = \emptyset$ und es gibt überhaupt keine holomorphe Funktion f . Die Aussage des Theorems ist dann zwar immer noch richtig, aber natürlich absolut nutzlos.

- Es gilt

$$f(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_*)^{-n} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{+n} (z - z_*)^{+n} \right),$$

wobei der erste bzw. zweite Summand auf der rechten Seite als Hauptteil bzw. Nebenteil von f bezeichnet werden (und gerade den Termen $g(1/(z - z_*))$ bzw. $h(z - z_*)$ im Beweis entsprechen).

- Ein besonders wichtiger Spezialfall sind Laurent-Reihen, die nur endlich viele Summanden — bzw. nur endlich viele nicht verschwindende Koeffizienten — zu negativen Exponenten enthalten. Für diese gilt $R_- = 0$ und der Hauptteil ist ein Polynom in $1/(z - z_*)$.
- Analog zu Potenzreihen gilt: Im Außengebiet des Konvergenzringes konvergiert die Laurent-Reihe in keinem Punkt, aber auf den Rändern des Konvergenzringes kann keine allgemeine Aussage getroffen werden. Auf jeder kompakten Teilmenge $D_* \subset A_{R_-,R_+}(z_*)$ gilt darüber hinaus

$$\sup_{z \in D_*} \left| f(z) - \sum_{k=-K}^{+K} \alpha_k (z - z_*)^k \right| \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

sowie

$$\sup_{z \in D_*} \left(\sum_{k=-\infty}^{-K-1} |\alpha_k| |z - z_*|^k + \sum_{k=K+1}^{+\infty} |\alpha_k| |z - z_*|^k \right) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

und damit sogar *gleichmäßige* Konvergenz.

7. Oftmals können die Radien durch

$$R_- = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{-n-1}|}{|\alpha_{-n}|}, \quad R_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{+n}|}{|\alpha_{+n+1}|} \quad (\text{Quotientenformel})$$

oder die entsprechende Wurzelformel (Grenzwert statt größter Häufungswert im Theorem) berechnet werden.

8. Der Beweis des Theorems macht klar, dass auch jede durch eine Laurent-Reihe definierte Funktion unendlich oft differenzierbar ist, wobei mit jedem Ableiten ein weiterer Koeffizient notwendigerweise verschwindet:

k	...	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	...
$f(z)$...	α_{-4}	α_{-3}	α_{-2}	α_{-1}	α_0	α_{+1}	α_{+2}	...
$f'(z)$...	$-3\alpha_{-3}$	$-2\alpha_{-2}$	$-\alpha_{-1}$	$\boxed{0}$	α_{+1}	$+2\alpha_{+2}$	$+3\alpha_{+3}$...
$f''(z)$...	$+6\alpha_{-2}$	$+2\alpha_{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$2\alpha_{+2}$	$+6\alpha_{+3}$	$+12\alpha_{+4}$...
$f'''(z)$...	$-6\alpha_{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$+6\alpha_{+3}$	$+24\alpha_{+4}$	$+120\alpha_{+5}$...

Beispiele

1. Durch

$$f(z) = \frac{2 - z^2}{(z + i)^3} = \frac{-(z + i)^2 + 2i(z + i) + 3}{(z + i)^3}$$

wird eine Laurent-Reihe im Entwicklungspunkt $z_* = -i$ definiert, wobei nur die Koeffizienten $\alpha_{-3} = +3$, $\alpha_{-2} = 2i$ und $\alpha_{-1} = -1$ nicht verschwinden.

Bemerkung: In diesem Beispiel gilt

$$R_- = \limsup_{n \geq 4, n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad R_+ = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} 0 = 1/0 = \infty,$$

wobei wir dieses Ergebnis alternativ auch aus der Tatsache ableiten können, dass f offensichtlich in jedem Punkt $z \neq z_*$ wohldefiniert und komplex differenzierbar ist. Beachte außerdem, dass die Quotientenformeln hier die Terme $0/0$ enthalten und daher nicht verwendet werden können.

2. Die Laurent-Reihe

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{24}z^{-4} + \frac{1}{120}z^{-5} + \dots$$

konvergiert absolut in jedem Punkt $z \in A_{0, \infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und besitzt die Ableitung

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 0 - z^{-2} - z^{-3} - \frac{1}{2}z^{-4} - \frac{1}{6}z^{-5} - \frac{1}{24}z^{-6} - \dots,$$

wobei diese Formel sowohl gliedweise als auch mithilfe der Kettenregel begründet werden kann.

3. Jede Möbius-Transformation ist wegen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{az_* + b}{c} \frac{1}{z - z_*}$$

eine Laurent-Reihe mit $R_- = 0$ und $R_+ = \infty$, wobei der Entwicklungspunkt $z_* = -d/c$ gerade die Polstelle von f ist und nur die Koeffizienten für $k = -1$ und $k = 0$ von Null verschieden sind. Umgekehrt ist jede solche Laurent-Reihe selbst Möbius-Transformation.

4. Die Joukowski-Transformation $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ ist eine Laurent-Reihe mit nur zwei Summanden ($\alpha_{-1} = \alpha_{+1} = \frac{1}{2}$).

Laurent-Reihen als Potenzreihen* Wir hatten schon vorweg genommen, dass eine holomorphe Funktion lokal als Taylor-Reihe geschrieben werden kann. Dies gilt natürlich auch für jede Laurent-Reihe, sofern der Taylorsche Entwicklungspunkt ζ_* im Konvergenzring gewählt wird. Der Konvergenzring der resultierenden Potenzreihe ist dabei gerade die größte offene Kreisscheibe um ζ_* , die noch ganz in $A_{R_-, R_+}(z_*)$ enthalten ist.

Das Standardbeispiel ist hier die Laurent-Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z_* - z} \quad \text{mit} \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(z_* - z)^{n+1}},$$

die nur aus einem einzelnen Summanden (mit Koeffizient $\alpha_{-1} = -1$) besteht und den Konvergenzring $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$ besitzt. Für jedes beliebig fixierte $\zeta_* \neq z_*$ ergibt sich nun

$$\frac{1}{z_* - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \zeta_*)^n}{(z_* - \zeta_*)^{n+1}} \quad \text{für alle } z \in B_{|z_* - \zeta_*|}(\zeta_*),$$

wobei links eine Laurent-Reihe und rechts eine Potenzreihe steht. Beide sind Funktionen in der Variablen z , aber die Entwicklungspunkte ζ_* und z_* sind verschieden. Die Formel, die wirklich nur auf der Kreisscheibe mit Radius $|z_* - \zeta_*|$ um ζ_* gilt, kann entweder abstrakt als lokale Taylor-Reihe von f oder konkret durch direkte Rechnungen mit geometrischen Reihen verifiziert werden.

1.11 Komplexe Kurvenintegrale

Setting Wir betrachten im Folgenden eine komplexe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sowie eine parametrisierte Kurve $c : [t_a, t_e] \rightarrow D$ im Definitionsbereich D von f , die wenigstens stückweise stetig differenzierbar ist.

Bemerkungen

1. Analog zu *Mathe-2* kann man auch im Komplexen von geschlossenen Wegen und von Doppelpunkten reden. Im ersten Fall gilt $c(t_a) = c(t_e)$ und im zweiten Fall gibt es zwei Zeiten $t_a \leq t_1 < t_2 < t_e$ mit $c(t_1) = c(t_2)$.
2. Da D offen ist, besitzt die Spur der Kurve, das ist die Menge

$$C = \text{spur}(c) = \{c(t) : t_a \leq t \leq t_e\} \subset D,$$

immer einen *positiven* Abstand vom Rand ∂D . Diese einleuchtende Beobachtung wird für alle nachfolgenden Betrachtungen sehr wichtig sein, obwohl wir meist nicht mehr explizit darauf hinweisen werden.

3. Die Abbildung

$$c(t) = z_* + \rho \exp(i t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

nennen wir die Standardparametrisierung der Kreislinie $\partial B_\rho(z_*)$. Sie beschreibt, dass die Kreislinie genau einmal entgegen dem Uhrzeigersinn (und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) durchlaufen wird.



Vier verschiedene Integrationswege in einem Gebiet mit Loch, wobei die jeweilige Durchlaufrichtung durch die Pfeile angedeutet wird. Beachte, dass eine Kurve in Knickpunkten nicht differenzierbar ist.

Definition Die komplexe Zahl

$$\int_c f(z) dz = \int_{t_a}^{t_e} f(c(t)) \dot{c}(t) dt$$

wird als Kurvenintegral von f entlang von c bezeichnet.

Bemerkungen

1. Die geometrische und physikalische Bedeutung des komplexen Kurvenintegrals sowie seine Beziehung zu den reellen Kurvenintegralen aus *Mathe-2* werden wir später genauer studieren.
2. Statt *Kurvenintegral* kann man auch *Wegintegral* sagen, wobei dann c der *Weg* bzw. der *Integrationsweg* genannt wird.
3. Der Integrand auf der rechten Seite ist als Produkt komplexer Zahlen wieder eine komplexe Zahl. Das Integral bzgl. t ist daher das reell-eindimensionale Integral einer komplexwertigen Funktion auf dem Intervall $[t_a, t_e]$ und kann zum Beispiel mit Hilfe von Riemann-Summen approximiert werden.
4. zur alternativen Notation: Schreiben wir entlang des Integrationsweges $z(t)$ statt $c(t)$, so kann die Definition des komplexen Kurvenintegrals als

$$\int_c f(z) dz = \int_{t_a}^{t_e} f(z(t)) \dot{z}(t) dt,$$

geschrieben werden, wobei diese Formel auf Grund der formalen Substitutionsregel

$$dz = \dot{z} dt$$

als Variante des Transformationssatzes für Integrale verstanden werden kann. Betrachten wir allerdings mehr als einen Integrationsweg (was wir sehr häufig tun werden), so ist die mathematische Notation vorzuziehen.

5. In der Literatur gibt es verschiedene Notationen für Wege und Integrale, die aber natürlich alle äquivalent sind. Manche Autoren benutzen zum Beispiel die Sondernotation $\oint_c f(z) dz$, um Kurvenintegrale über einen *geschlossenen* Weg c auszuzeichnen. Wir werden dies aber in dieser Vorlesung nicht tun.
6. Die Bildung des Kurvenintegrals ist eine lineare Operation bzgl. f , d.h. es gilt

$$\int_c (\mu_1 f_1(z) + \mu_2 f_2(z)) dz = \mu_1 \int_c f_1(x) dz + \mu_2 \int_c f_2(x) dz$$

für je zwei Funktionen f_1 und f_2 auf D und alle Faktoren $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$.

Beispiele

1. Für $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und die Standardparametrisierung der Kreislinie $\partial B_\rho(0)$, d.h. $c(t) = \rho \exp(i t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \left(\rho^n \exp(i n t) \right) \left(\rho i \exp(i t) \right) dt \\ &= i \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} \exp(i(n+1)t) dt = i \rho^{n+1} \left[\frac{\exp(i(n+1)t)}{i(n+1)} \right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n+1} \left(\exp(i 2\pi(n+1)) - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, warum wir das auch ohne explizite Rechnungen hätten wissen können.

2. Wir betrachten nun $f(z) = \bar{z}^n$, wieder mit $n \in \mathbb{N}$ und c wie oben. Im Fall von $n = 1$ ergibt sich

$$\int_c f(z) dz = \int_0^{2\pi} \left(\rho \exp(-i t) \right) \left(\rho i \exp(i t) \right) dt = \rho^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \rho^2,$$

wohingegen $n > 1$ analog zu oben

$$\int_c f(z) dz = i \rho^{n+1} \left[\frac{\exp(i(1-n)t)}{i(1-n)} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

impliziert. Beachte, dass diesmal die Funktion f nicht holomorph ist.

3. Die Spur des parametrisierten Weges

$$c(t) = \exp((1+i)t), \quad t \in [0, T]$$

ist das Segment einer Kreisspirale und direkte Rechnungen zeigen

$$\begin{aligned} \int_c z dz &= \int_0^T \left(e^{(1+i)t} \right) \left((1+i) e^{(1+i)t} \right) dt \\ &= (1+i) \int_0^T e^{(2+2i)t} dt = \frac{1}{2} \left[e^{(2+2i)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{2} (e^{4\pi} - 1). \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, wie man auch dieses Ergebnis anders, d.h. ohne direkte Berechnung der Integrale, herleiten kann.

4. Wir integrieren $f(z) = |z|^2$ über die zwei Wege

$$c_1(t) = \exp(i\pi t) \quad \text{mit } t \in [0, \pi], \quad c_2(t) = -t \quad \text{mit } t \in [-1, +1],$$

die beide den Punkt -1 mit dem Punkt $+1$ auf unterschiedliche Art (Halbkreis bzw. Strecke) verbinden. Direkte Rechnungen liefern mit

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_0^\pi i \exp(it) dt = - \int_0^\pi \sin(t) dt + i \int_0^\pi \cos(t) dt = 2$$

und

$$\int_{c_2} f(z) dz = \int_{-1}^1 -t^2 dt = -\frac{2}{3}$$

unterschiedliche Ergebnisse, d.h. das Kurvenintegral einer gegebenen Funktion f hängt im Allgemeinen nicht nur von Anfangs- und Endpunkt, sondern vom gesamten Integrationsweg ab.

Elementare Eigenschaften von Kurvenintegralen

Verhalten unter Reparametrisierungen Eine Kurve $\check{c} : [\check{t}_a, \check{t}_e] \rightarrow D$ wird orientierungserhaltende Reparametrisierung von $c : [t_a, t_e] \rightarrow D$ genannt, wenn es zwei *streng monoton wachsende* und *zueinander inverse* Funktionen

$$h : [\check{t}_a, \check{t}_e] \rightarrow [t_a, t_e], \quad \check{h} = h^{-1} : [t_a, t_e] \rightarrow [\check{t}_a, \check{t}_e]$$

gibt, sodass

$$\check{c}(\check{t}) = c(h(\check{t})) \quad \text{und} \quad c(t) = \check{c}(\check{h}(t))$$

für alle $t \in [t_a, t_e]$ und alle $\check{t} \in [\check{t}_a, \check{t}_e]$ gilt, wobei dies insbesondere via

$$c(t_a) = \check{c}(\check{t}_a), \quad c(t_e) = \check{c}(\check{t}_e)$$

die Gleichheit der Anfangs und der Endpunkt impliziert. Dasselbe Konzept hatten wir schon in *Mathe-1* und *Mathe-2* verwendet und auch diesmal können wir mit der Kettenregel sowie der Transformationsformel für eindimensionale Integrale die Gleichheit

$$\int_c f(z) dz = \int_{\check{c}} f(z) dz$$

nachrechnen.

Bei einer orientierungswechselnden Reparametrisierung sind die Funktionen h und \check{h} immer noch *invers zueinander*, aber jeweils *streng monoton fallend*. In diesem Fall werden Anfangs- und Endpunkt via

$$c(t_a) = \check{c}(\check{t}_e), \quad c(t_e) = \check{c}(\check{t}_a)$$

vertauscht und beide Kurvenintegrale unterscheiden sich im Vorzeichen.

Beispiele

1. Neben der Standardparametrisierung c können wir auch

$$\check{c}(\check{t}) = \varrho \exp\left(\mathrm{i}\left(\check{t} + \frac{1}{2}\sin(\check{t})\right)\right), \quad \check{t} \in [0, 2\pi]$$

als Parametrisierung der Kreislinie $\partial B_\varrho(0)$ verwenden, wobei die Orientierung bzw. der Durchlaufsinne erhalten bleibt. Bzgl. der neuen Zeit \check{t} wird aber die Kreislinie nicht mehr mit uniformer, sondern nun mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit durchlaufen. In diesem Beispiel können wir keine explizite Formel für die Umkehrung des Parameterwechsel

$$t = h(\check{t}) = \check{t} + \frac{1}{2}\sin(\check{t})$$

angeben, aber es ist klar, dass \check{h} wegen der Monotonie von h existiert (beachte, dass $\frac{1}{2} \leq \frac{d}{d\check{t}}h(\check{t}) \leq \frac{3}{2}$ für alle $\check{t} \in [0, 2\pi]$ gilt).

2. Wird die orientierungswechselnde Reparametrisierung

$$t = h(\check{t}) = 2\pi - 2\check{t}, \quad \check{t} = h(t) = \pi + \frac{1}{2}t$$

auf die Standardparametrisierung c von $\partial B_\varrho(0)$ angewendet, so erhalten wir

$$\check{c}(t) = \varrho \exp(-\mathrm{i}2t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei diese Formel beschreibt, dass die Kreislinie diesmal im Uhrzeigersinn und zusätzlich mit verdoppelter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird. Durch direkte Rechnungen erhalten wir

$$\int_{\check{c}} \frac{d}{dz} = \int_0^\pi \frac{-\mathrm{i}2 \exp(-\mathrm{i}2\check{t})}{\exp(-\mathrm{i}2\check{t})} d\check{t} = -2\mathrm{i} \int_0^\pi d\check{t} = -2\pi\mathrm{i} = \int_c \frac{d}{dz}$$

und haben damit für dieses einfache Beispiel nachgerechnet, dass sich unter der Reparametrisierung nur das Vorzeichen des Kurvenintegrals geändert hat.

Notation Wegen der Invarianz unter Reparametrisierung ist auch das komplexe Kurvenintegral eine geometrische Größe, die nur von f , der unparametrisierten Kurve $C = \text{spur}(c)$ und der gewählten Orientierung, aber nicht von den Details der Parametrisierungsabbildung c abhängt. Bei einfachen geschlossenen Integrationswegen (Kreise, Ellipsen, Polygone usw.) schreiben wir daher oftmals

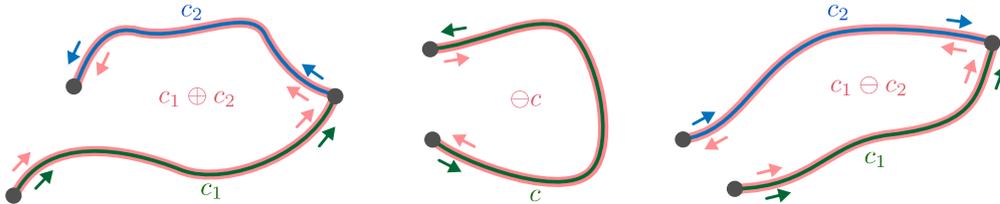
$$\int_C f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_c f(z) dz,$$

wobei wir dann immer stillschweigend voraussetzen, dass C genau einmal mit *positiver Orientierung* (also entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Beachte aber, dass wir immer dann eine entsprechende Abbildung c brauchen, wenn wir den Wert des Kurvenintegrals ausrechnen wollen.

Verhalten bei Kurvenoperationen Analog zu *Mathe-2* können wir die Formeln

$$\int_{c_1 \oplus c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz, \quad \int_{c_1 \ominus c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz - \int_{c_2} f(z) dz,$$

ableiten, wobei die Operationen \oplus und \ominus im Bild illustriert sind. Den Spezialfall $\int_{\ominus c} f(z) dz = -\int_c f(z) dz$ hatten wir schon bei den Reparametrisierungen kennengelernt.



Die Addition und Subtraktion von Kurven kann analog zu *Mathe-2* auch für Integrationswege im Komplexen verwendet werden.

Standardabschätzung Die Theorie der Integrale in einer reellen Variablen (siehe *Mathe-1*) impliziert

$$\left| \int_{t_a}^{t_e} f(c(t)) \dot{c}(t) dt \right| \leq \int_{t_a}^{t_e} |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt \leq \left(\sup_{t \in [t_a, t_e]} |f(c(t))| \right) \left(\int_{t_a}^{t_e} |\dot{c}(t)| dt \right),$$

und da das Integral auf der rechten Seite gerade die Länge $L(c)$ von c ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \left(\sup_{z \in C} |f(z)| \right) L(c),$$

die sich oftmals als nützlich erweisen wird.

Achtung Im Allgemeinen gilt

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \not\leq \int_c |f(z)| dz,$$

d.h. die Dreiecksungleichung für Integrale darf im Komplexen *nicht* verwendet werden. Das Standardbeispiel in diesem Zusammenhang ist

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \text{mit} \quad \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{|z|} = 0,$$

wobei wir die erste Formel gleich berechnen werden und die zweite sich wegen $|z| = 1$ für $z \in \partial B_1(0)$ aus der Nebenrechnung

$$\int_{\partial B_1(0)} 1 dz = \int_0^{2\pi} i \exp(it) dt = -\int_0^{2\pi} \cos(t) dt + i \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0 + 0i$$

ergibt.

Fundamentale Beobachtungen für komplexe Kurvenintegrale

Kurvenintegrale und Ableitungen Besitzt f eine Stammfunktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = F'(z) \quad \text{für alle } z \in D,$$

so gilt

$$\int_c f(z) dz = F(c(t_e)) - F(c(t_a)),$$

d.h. das Kurvenintegral hängt nur vom Anfangspunkt $c(t_a)$ und vom Endpunkt $c(t_e)$. Diese Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt via

$$f(c(t)) \dot{c}(t) = F'(c(t)) \dot{c}(t) = \frac{d}{dt} F(c(t))$$

mit der Kettenregel sowie den Integrationsgesetzen aus *Mathe-1*. Allerdings besitzt, wie wir noch verstehen werden, nicht jede komplexe Funktion eine Stammfunktion.

Achtung Wir benutzen im Komplexen **nicht** die Notation $F(z) = \int f(z) dz$ (unbestimmtes Integral) für eine Stammfunktion. Oder anders gesagt: Im Komplexen integrieren wir Funktionen immer über Kurven bzw. Integrationswege.

Sprechweise Wir nennen den Term $(z - z_*)^k$ mit ganzzahligem Exponenten $k \in \mathbb{Z}$ das k -te (verallgemeinerte) Monom im Entwicklungspunkt z_* .

Monome mit Exponent $k \neq -1$ Das Standardbeispiel für den Nutzen von Stammfunktionen ist

$$f(z) = (z - z_*)^k = F'(z) \quad \text{mit} \quad F(z) = \frac{(z - z_*)^{k+1}}{k+1},$$

wobei $z_* \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt und $k \in \mathbb{Z}$ ein ganzzahliger Exponent mit $k \neq -1$ sind. In diesem Fall erhalten wir

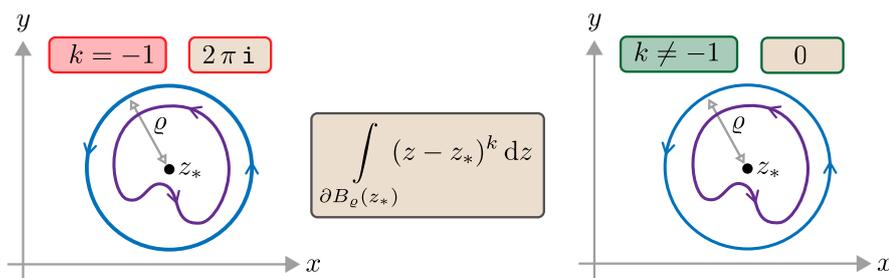
$$\int_c (z - z_*)^k dz = 0$$

für *jeden geschlossenen* Integrationsweg in der punktierten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$.

Sonderrolle des Monoms mit Exponent $k = -1$ Die Überlegungen von oben gelten *nicht* für $k = -1$, wobei wir das im Moment noch nicht für eine beliebige Kurve, sondern nur für die Kreiswege genauer untersuchen wollen, die die Polstelle z_* genau einmal in mathematisch positiver Orientierung umlaufen. Mit der Standardparametrisierung von $\partial B_\varrho(z_*)$ berechnen wir

$$\int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{dz}{z - z_*} = \int_0^{2\pi} \exp(-it) i \exp(+it) dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i,$$

d.h. das Kurvenintegral verschwindet nicht mehr, sondern nimmt den Wert $2\pi i$ an (und zwar für alle Radien $\varrho > 0$). Diese Formel ist ausgesprochen wichtig und wird weitreichende Konsequenzen haben.



Das Fundamentalintegral (braune Box). Wird ein Monom über einen geschlossenen Kreisweg (blau) um den Entwicklungspunkt z_* integriert, so hängt das Ergebnis nicht vom Radius ρ , aber ganz entscheidend vom Exponenten k ab. Die gleichen Ergebnisse gelten auch für kompliziertere Wege (lila), sofern diese z_* genau einmal und entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen. Der Beweis der verallgemeinerten Aussage ist aber für $k = -1$ mangels einer Stammfunktion deutlich schwieriger als im Fall von $k \neq -1$.

Konsequenz für Laurent-Reihen und Potenzreihen Ist f eine Laurent-Reihe und ρ ein beliebiger Radius mit $R_- < r < R_+$, so erhalten wir

$$\int_{\partial B_\rho(z_*)} f(z) dz = \int_{\partial B_\rho(z_*)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - z_*)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \int_{\partial B_\rho(z_*)} (z - z_*)^k dz = 2\pi \alpha_{-1} i,$$

wobei wir benutzt haben, dass in der letzten Reihe nur der Term für $k = -1$ einen von Null verschiedenen Betrag liefert und dass wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz einer Laurent-Reihe auf jeder kompakten Teilmenge ihres Konvergenzringes die Summation und die Integration tatsächlich vertauschen dürfen. Analog kann man für eine Potenzreihe zeigen, dass das entsprechende Kurvenintegral verschwindet (da dann ja $\alpha_{-1} = 0$ gilt).

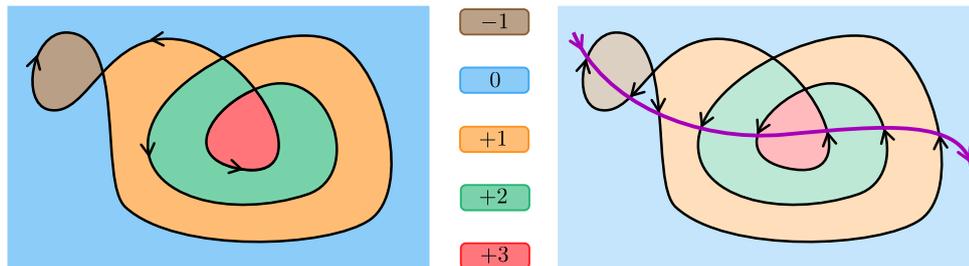
Ausblick: Wir werden später verstehen, dass eine analoge Formel in einem viel allgemeineren Zusammenhang gilt und eine effektive Berechnung komplizierter Kurvenintegrale erlaubt.

1.12 Windungszahl

Theorem (Windungszahl als Kurvenintegral) Sei c eine geschlossene Kurve mit Spur $C = \text{spur}(c)$. Dann wird durch

$$\text{wnd}_c(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - z_*}$$

eine Funktion $\text{wnd} : \mathbb{C} \setminus C \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert, die nur ganzzahlige Werte annimmt und auf jeder Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereiches konstant ist.



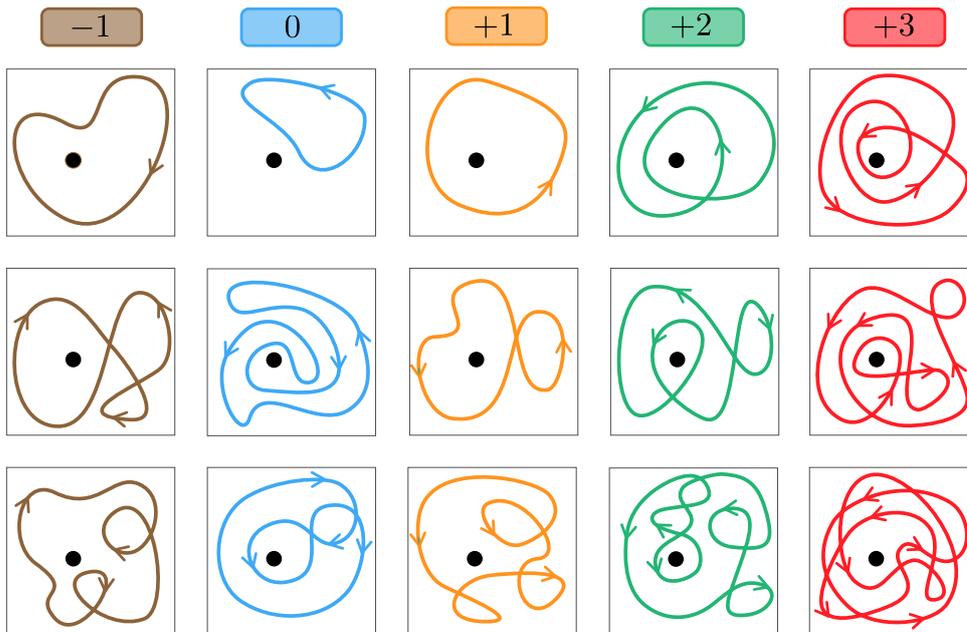
Links: Illustration der Windungszahl für eine gegebene Kurve c mit Spur C (schwarz). Die Werte von wnd_c sind immer ganzzahlig und konstant auf jeder Komponente der Komplementärmenge von C . So gilt zum Beispiel $\text{wnd}_c(z_*) = +3$ für jedes z_* aus der roten Menge. *Rechts:* Bewegen wir uns im Geiste entlang einer anderen Kurve (lila), so erhöht bzw. verringert sich die Windungszahl immer dann, wenn die Kurve c uns von links bzw. von rechts trifft, wobei die Änderung gerade $+1$ bzw. -1 ist. Dabei darf die lila Kurve durch keine Doppel- oder andere Mehrfachpunkte der schwarzen Kurve laufen, da sonst entsprechende Sonderregeln formuliert werden müssten. Außerdem sollten sich die schwarze und die lila Kurve immer in einem nicht-entarteten Winkel schneiden.

Bemerkungen

1. Die ganze Zahl $\text{wnd}_c(z_*)$ nennen wir die Windungszahl von c bzgl. z_* . Sie wird oftmals auch Umlaufzahl genannt, aber in jedem Fall beschreibt sie eine Relation zwischen einer Kurve *und* einem Punkt. In der Geometrie gibt es ein ähnliches Konzept, das aber nur eine Kurve und keinen Punkt braucht.
2. Wir wollen den vollen Beweis des Theorems nicht angeben, da er etwas technisch und wenig illustrativ ist. Wir verweisen aber auf die unten ausgeführte Rechnung mit relativen Polarkoordinaten, die das wesentliche Argument verdeutlicht, sowie auf die Bilder in diesem Abschnitt.
3. Der Term $\text{wnd}_c(z_*)$ ist für $z_* \in C$ nicht definiert. Dies ist sehr einleuchtend, da so ein Punkt ja gerade auf der Grenze zwischen zwei Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus C$ liegt. Etwas formaler sieht man das auch daran, dass in diesem Fall die Polstelle des Integranden gerade auf dem Integrationsweg liegt.
4. Die reelle Entsprechung des komplexen Wegintegrals im Theorem hatten wir in *Mathe-1* kennengelernt.
5. Man kann die Integralformel der Windungszahl auf mehrere Weisen schreiben, zum Beispiel auch als

$$\text{wnd}_c(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - \zeta} \quad \text{oder} \quad \text{wnd}_c(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Wichtig ist nur, dass im Integral die Integrationsvariable anders als der Parameter bezeichnet wird, wobei letzterer gerade die Variable von wnd_c ist.

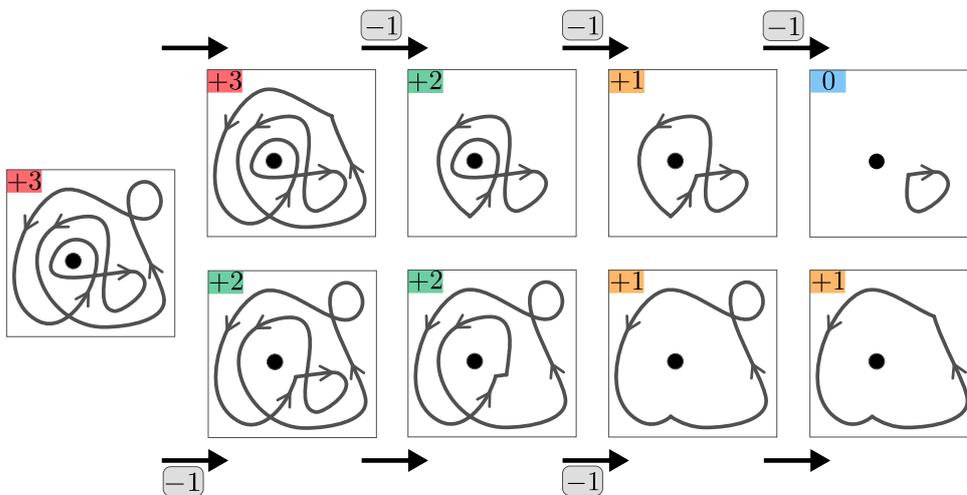


Eine andere Sicht auf die Windungszahl: Diesmal halten wir den Punkt z_* fest (schwarz) und zeichnen für jede Windungszahl drei typische Kurven c , für die $wnd_c(z_*)$ den vorgegebenen Wert besitzt. Wir können für jede Kurve die entsprechende Windungszahl von z_* dadurch bestimmen, dass wir im Geiste die Kurve c durchlaufen und die Anzahl der echten Umrundungen mit (-1) bzw. gegen $(+1)$ den Uhrzeigersinn mitzählen und aufaddieren, wobei wir am besten in einem Doppelpunkt anfangen (sofern vorhanden). Siehe dazu auch die relativen Polarkoordinaten weiter unten. Alternativ können wir auch einen beliebigen lila Weg betrachten, der ganz weit draußen (wo die Windungszahl den Wert 0 annimmt) beginnt, in z_* endet und unterwegs keine Doppelpunkte trifft. Entlang dieses gedachten Weges können wir die Änderung der Windungszahl wie im vorherigen Bild beschrieben durch sukzessives Inkrementieren bzw. Dekrementieren ermitteln.

Hinweis In der Praxis werden wir Windungszahlen in aller Regel ohne explizite Berechnung des entsprechenden Kurvenintegrals bestimmen, aber es ist wichtig zu verstehen, dass das angegebene Kurvenintegral die Windungszahl liefert. Insbesondere folgt

$$wnd_{c_1 \oplus c_2}(z_*) = wnd_{c_1}(z_*) + wnd_{c_2}(z_*), \quad wnd_{c_1 \ominus c_2}(z_*) = wnd_{c_1}(z_*) - wnd_{c_2}(z_*)$$

sowie $wnd_{\ominus c}(z_*) = -wnd_c(z_*)$ aus den Rechenregeln für komplexe Kurvenintegrale.



Wir können Windungszahlen sehr verknäulter Kurven auch wie folgt ermitteln: Wir vereinfachen die Kurve schrittweise, indem wir in einem Doppelpunkt eine geschlossene Teilkurve herauserschneiden und die Windungszahl ggf. erniedrigen (um die Windungszahl des entfernten Teils). Nach endlich vielen Schritten sind alle Doppelpunkte eliminiert und wir können die Windungszahl der vereinfachten Endkurve ablesen, aus der wir dann die der Ursprungskurve rückwärts rekonstruieren können (farbige Zahlen). Es gibt natürlich viele Möglichkeiten, die Teilstücke nacheinander zu wählen, aber alle Varianten werden am Ende dasselbe Ergebnis liefern. Im Bild gilt zum Beispiel $wnd_c(z_*) - 3 = 0$ oben bzw. $wnd_c(z_*) - 2 = 1$ unten und damit immer $wnd_c(z_*) = 3$.

Windungszahl und relative Polarkoordinaten Wir können leicht einsehen, dass das Kurvenintegral im Theorem wirklich die Interpretation einer Windungszahl besitzt, sofern wir

$$c(t) = z_* + r(t) \exp(i \varphi(t))$$

schreiben. Dabei sind r und φ die zeitabhängigen Polarkoordinaten von $z - z_*$ und die Schließungsbedingung $c(t_e) = c(t_a)$ ist äquivalent zu

$$r(t_e) = r(t_a), \quad \varphi(t_e) = \varphi(t_a) \pmod{2\pi},$$

wobei letzteres

$$\varphi(t_e) = \varphi(t_a) + 2\pi m$$

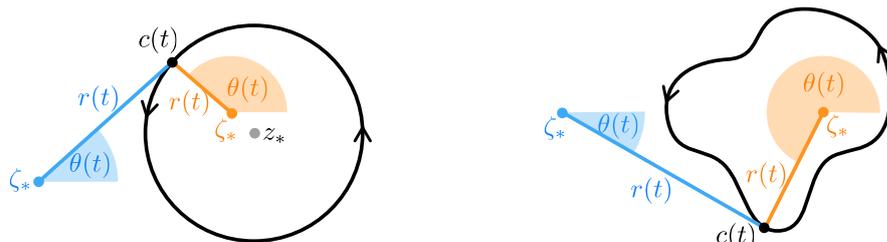
für eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ meint. Damit ergibt sich

$$\dot{c}(t) = \dot{r}(t) \exp(i \varphi(t)) + i r(t) \dot{\varphi}(t) \exp(i \varphi(t))$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} i 2\pi \operatorname{wnd}_c(z_*) &= \int_{t_a}^{t_e} \frac{\dot{r}(t) + i r(t) \dot{\varphi}(t)}{r(t)} dt = \left(\int_{t_a}^{t_e} \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} dt \right) + i \left(\int_{t_a}^{t_e} \dot{\varphi}(t) dt \right) \\ &= \left(\ln(r(t_e)) - \ln(r(t_a)) \right) + i \left(\varphi(t_e) - \varphi(t_a) \right) \\ &= 0 + i 2\pi m. \end{aligned}$$

Mit etwas Übung kann man bei einer gegebenen Kurve den Wert von m bzw. die Winkeldifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve direkt aus graphischen Darstellungen ablesen (siehe die Bilder und die Animation).



Links: Die Windungszahl $\operatorname{wnd}_c(z_*)$ kann mithilfe relativer Polarkoordinaten berechnet werden, wobei c die Standardparametrisierung von $\partial B_\varrho(z_*)$ ist und ζ_* innerhalb (orange) bzw. außerhalb (blau) der Kreisscheibe liegen kann. Beachte, dass die Winkeldifferenz bei einem Durchlauf der Kurve in beiden Fällen unterschiedlich ist und den Wert 2π bzw. 0 annimmt. *Rechts:* Dieselben Konzepte bei einer anderen Kurve.

Standardbeispiel Ein wichtiger, wenngleich auch entarteter, Fall sind die Wege

$$c_{\pm n}(t) = z_* + \varrho \exp(\pm i n t),$$

mit Parameter $n \in \mathbb{N}$, wobei c_{-n} bzw. c_{+n} die Kreislinie $\partial B_\varrho(z_*)$ genau n mal mit negativer bzw. positiver Orientierung durchläuft. Dies entspricht den relativen Polarfunktionen $r_m(t) = \varrho$, $\varphi_m(t) = m t$ und mit den eben abgeleiteten Formeln (bzw. durch direkte Rechnungen) erhalten wir das nicht überraschende Ergebnis

$$\operatorname{wnd}_{c_{\pm n}}(z_*) = \pm n.$$

Ganz allgemein gilt

$$\text{wnd}_{c_{\pm n}}(\zeta_*) = \begin{cases} \pm n & \text{falls } |\zeta_* - z_*| < \varrho, \\ 0 & \text{falls } |\zeta_* - z_*| > \varrho, \end{cases}$$

aber die formalen Rechnungen sind für $\zeta_* \neq z_*$ alles andere als einfach, da man erst via

$$z_* + \varrho \exp(\pm i n t) = \zeta_* + r_n(t) \exp(i \varphi_n(t))$$

die entsprechenden Polarfunktionen (die ja nun relativ zu ζ_* und nicht mehr relativ zu z_* zu wählen sind) bestimmen muss. Wir können uns aber im Bild durch Scharfes Hinsehen klar machen, dass für jedes ζ_* innerhalb der Kugel $B_\varrho(z_*)$ die Winkeldifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt weiterhin $\pm 2\pi n$ sein muss, wohingegen für jeden äußeren Punkt ζ_* von $B_\varrho(z_*)$ wirklich $\varphi(t_e) = \varphi(t_a)$ gilt. Außerdem werden wir im nächsten Kapitel sehen, wie die obige Formel für $\zeta_* \neq z_*$ sehr elegant aus dem Integralsatz von Cauchy abgeleitet werden kann.

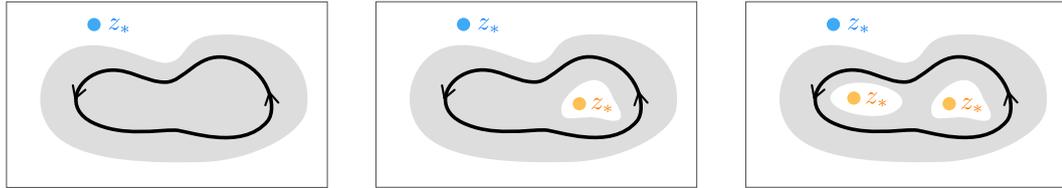
Zusammenfassung Es gibt vier verschiedene, aber äquivalente Möglichkeiten, die Windungszahl für eine gegebene geschlossene Kurve c und einen festgehaltenen Punkt z_* zu ermitteln, wobei drei davon ohne größere Rechnungen auskommen:

1. Berechnung des entsprechenden Kurvenintegrals, aber diese Methode ist in der Regel nicht wirklich praktikabel.
2. Bestimmung mit Hilfe relativer Polarkoordinaten, wobei dies oftmals mit Hilfe der geometrischen Anschauung gelingt (siehe zweites Bild und die Animation).
3. Schrittweise Eliminierung von Doppelpunkten und anschließende Rekonstruktion der Windungszahl (siehe drittes Bild).
4. Verschieben von z_* entlang einer gedachten Kurve, wobei die sukzessive Änderung der Windungszahl in Kollisionspunkten protokolliert wird (siehe erstes Bild rechts).

Windungszahl und einfacher Zusammenhang Man kann mit Windungszahlen auch den einfachen Zusammenhang von Mengen $G \subset \mathbb{C}$ charakterisieren, denn die folgenden vier Aussagen sind paarweise äquivalent:

1. G ist einfach zusammenhängend, d.h. es gibt keine Löcher in G .
2. Die Komplementärmenge $\mathbb{C} \setminus G$ ist zusammenhängend, d.h. sie besteht nur aus einem, aber nicht aus zwei oder mehreren separierten Teilen.
3. Der Rand ∂G von G (d.h. die Menge der Randpunkte) besteht auch nur aus einem zusammenhängenden Teil.
4. Es gilt $\text{wnd}_c(z_*) = 0$ für jede geschlossene Kurve in G und jeden Punkt $z_* \notin G$ (Nullhomologie).

*Achtung**: Das Konzept des einfachen Zusammenhangs ist im \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ deutlich subtiler (siehe *Mathe-2*).



Besitzt die Menge G (grau) ein oder mehrere Löcher, so gibt es geschlossene Kurven c in G (schwarz) sowie Punkte z_* außerhalb von G (orange), so dass $\text{wnd}_c(z_*) \neq 0$ gilt. Beachte auch, dass der Rand ∂G in den drei Beispielen durch eine, zwei bzw. drei Kurven beschrieben werden kann.

Beobachtung und Definition Der Rand einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge $G \subset \mathbb{C}$ kann oftmals durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve c parametrisiert werden, die ∂G genau einmal in mathematisch positiver Orientierung umrundet (wobei dann $\partial G = C = \text{spur}(c)$ gilt und keine Doppelpunkte auftreten). In diesem Fall sprechen wir von einem regulären Rand und schreiben dann auch

$$\text{wnd}_{\partial G}(z_*) \quad \text{statt} \quad \text{wnd}_c(z_*),$$

da ja aufgrund der Invarianz von Kurvenintegralen unter Reparametrisierungen das Ergebnis nicht von den Details der Abbildung c abhängt. Insbesondere gilt dann

$$\text{wnd}_{\partial G}(z_*) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_* \in G, \\ 0 & \text{für } z_* \notin G \cup \partial G, \end{cases}$$

wobei der Fall $z_* \in \partial G$ explizit nicht zugelassen ist. Beispiele für Mengen mit regulärem Rand sind (Segmente von) Kreisscheiben, Ellipsen und Polygone bzw. Mengen, die aus solchen in einfacher Weise zusammengesetzt sind. Ein Gegenbeispiel ist die *Kochsche Schneeflocke*, die einen fraktalen Rand besitzt. Bei einer zweifach zusammenhängenden Menge mit regulärem Rand handelt es sich um eine Menge, die genau ein Loch besitzt und deren Rand durch zwei geschlossene und jeweils stückweise stetig differenzierbare Kurven parametrisiert werden kann, wobei wir diesen Fall weiter unten noch genauer studieren werden.

Anzahl der Nullstellen eines komplexen Polynoms Jedes Polynom

$$f(z) = \alpha_K z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0, \quad \alpha_K \neq 0$$

vom Grad K kann nach dem Hauptsatz der Algebra auch als endliches Produkt

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_L)^{n_L}$$

geschrieben werden, wobei z_1, \dots, z_L die paarweise verschiedenen Nullstellen und n_1, \dots, n_L die entsprechenden Vielfachheiten sind (insbesondere gilt $1 \leq L \leq K$ und $n_1 + \dots + n_L = K$). Einfache Rechnungen zeigen nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \dots + \frac{n_L}{z - z_L}$$

und für jede einfach zusammenhängende Menge G mit regulärem Rand erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^L \int_{\partial G} \frac{n_l}{z - z_l} dz = \sum_{l=1}^L n_l \text{wnd}_{\partial G}(z_l),$$

wobei in der Summe auf der rechten Seite nur die Nullstellen innerhalb von G einen Beitrag liefern, da die Windungszahl der anderen Nullstellen verschwindet. Oder anders gesagt: Das Kurvenintegral auf der linken Seite zählt — bis auf den Faktor $2\pi i$ — gerade die Nullstellen innerhalb von G unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit. Auch dieses nützliche Resultat wird in einem viel allgemeineren Zusammenhang gelten.

Beispiel Es gilt

$$\int_{\partial_\varrho B(0)} \frac{3z^2 - (2 + 8i)z - (4 - 4i)}{z^3 - (1 + 4i)z^2 - (4 - 4i)z + 4} = 2\pi i \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \varrho < 1, \\ 1 & \text{für } 1 < \varrho < 2, \\ 3 & \text{für } 2 < \varrho < \infty, \end{cases}$$

da das Nennerpolynom

$$f(z) = z^3 - (1 + 4i)z^2 - (4 - 4i)z + 4 = (z - 1)(z - 2i)^2$$

die Einfachnullstelle $z_1 = 1$ sowie die Doppelnulstelle $z_2 = 2i$ besitzt. Beachte, dass für $\varrho = 1$ oder $\varrho = 2$ das Integral nicht existiert, da der Integrand dann eine Singularität entlang des Integrationsweges besitzt.

Kapitel 2

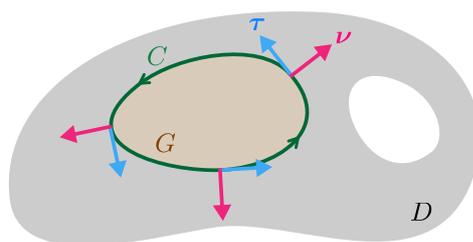
Funktionentheorie – Integralsatz von Cauchy und Folgerungen

2.1 Integralsatz von Cauchy

Setting In diesem Abschnitt gilt:

1. Die Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist offen und zusammenhängend und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine komplexe Funktion auf D .
2. $G \subset D$ ist eine offene und einfach zusammenhängende Menge mit regulärem Rand, wobei sowohl G als auch ∂G ganz in D enthalten sind.
3. Die Kurve $c : [t_a, t_e] \rightarrow D$ ist stückweise stetig differenzierbar und parametrisiert den Rand ∂G so, dass dieser genau einmal und gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Insbesondere gilt $C = \text{spur}(c) = \partial G$ und $\text{wnd}_c(z) = +1$ für jedes $z \in G$.

Wir nennen c bzw. G im Folgenden auch einen elementaren Cauchy-Weg bzw. ein elementares Cauchy-Gebiet.



Schematische Darstellung der Mengen D , G und C , wobei die Vektoren ν und τ aus *Mathe-2* bekannt sind und unten benutzt werden. Beachte, dass hier D , aber nicht G Löcher haben darf.

Geometrische Bedeutung des komplexen Kurvenintegrals Als Vorbereitung auf den Beweis des Satzes von Cauchy identifizieren wir die reelle Entsprechung des komplexen Kurvenintegrals und schreiben in Physikernotation

$$z(t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) + i y(t) \quad \text{statt} \quad c(t),$$

da dies für unsere momentanen Zwecke übersichtlichere Formeln produziert. Damit gilt auch

$$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)), \quad \dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i \dot{y}(t)$$

und der Integrand bzgl. t kann insgesamt als

$$\begin{aligned} f(z(t))\dot{z}(t) &= \left(u(x(t), y(t)) + \mathbf{i} v(x(t), y(t)) \right) (\dot{x}(t) + \mathbf{i} \dot{y}(t)) \\ &= \ell(t) \langle \boldsymbol{\phi}(x(t), y(t)), \boldsymbol{\tau}(x(t), y(t)) \rangle + \mathbf{i} \ell(t) \langle \boldsymbol{\phi}(x(t), y(t)), \boldsymbol{\nu}(x(t), y(t)) \rangle \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei

$$\boldsymbol{\phi}(x, y) := \begin{pmatrix} +u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix},$$

gerade das reelle Vektorfeld ist, dessen Komponenten dem Real- und Imaginärteil von $\overline{f(z)}$ entsprechen. Außerdem bezeichnen $\boldsymbol{\tau}(x, y)$ bzw. $\boldsymbol{\nu}(x, y)$ für jeden Randpunkt von G den in *Mathe-2* eingeführten normierten und positiv orientierten Tangentialvektor bzw. den nach außen zeigenden normierten Normalenvektor. Diese können durch

$$\boldsymbol{\tau}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} +\dot{x}(t) \\ +\dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} +\dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden, wobei

$$\ell(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \quad \text{bzw.} \quad ds = \ell(t) dt$$

die Länge des Tangentialvektors an die Kurve c bzw. das dazugehörige infinitesimale Längenelement sind. Wir können nun die Formeln

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \int_{\partial G} \langle \boldsymbol{\phi}(x, y), \boldsymbol{\tau}(x, y) \rangle ds + \mathbf{i} \int_{\partial G} \langle \boldsymbol{\phi}(x, y), \boldsymbol{\nu}(x, y) \rangle ds,$$

ablesen, wobei links das komplexe Kurvenintegral von f und rechts zwei reelle Kurvenintegrale stehen (und G sowie ∂G als Teilmengen von \mathbb{C} bzw. von \mathbb{R}^2 betrachtet werden). Es handelt sich aber nicht um irgendwelche Kurvenintegrale, sondern um das Stokesches Umlaufintegral (im Realteil) und das Gaußsche Durchflussintegral (als Imaginärteil) des Vektorfeldes $\boldsymbol{\phi}$. Ist dieses stetig differenzierbar (im reellen Sinne), so können wir schließlich die 2D-Versionen der Sätze von Stokes bzw. Gauß anwenden und erhalten

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \iint_G \text{rot } \boldsymbol{\phi}(x, y) dx dy + \mathbf{i} \iint_G \text{div } \boldsymbol{\phi}(x, y) dx dy,$$

wobei auf der rechten Seite nun das Stokessche und das Gaußsche Gebietsintegral stehen.

Zur physikalischen Bedeutung: Interpretiert man $\boldsymbol{\phi}$ als das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, so beschreiben der Realteil bzw. der Imaginärteil von $\int_c F'(z) dz$ wieviel Strömungsmittel entlang der Kurve transportiert wird bzw. wieviel durch die Kurve hindurch strömt.

Bemerkung* Man kann die Real- und Imaginärteile des komplexen Kurvenintegrals auch anders darstellen, sofern man zusätzlich noch das Vektorfeld $\boldsymbol{\psi}$ mit

$$\boldsymbol{\psi}(x, y) = \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$$

einführt, dass in jedem Punkt senkrecht auf ϕ steht. Dann gilt

$$\int_{\partial G} f(z) dz = - \int_{\partial G} \langle \psi(x, y), \nu(x, y) \rangle ds + i \int_{\partial G} \langle \psi(x, y), \tau(x, y) \rangle ds,$$

d.h. der Real- bzw. Imaginärteil sind durch das Gaußsche bzw. das Stokessche Kurvenintegral zu ψ bestimmt. Durch Kombination der verschiedenen Formeln kann $\int_{\partial G} f(z) dz$ schließlich entweder allein durch die zwei Stokesschen oder nur mit den beiden Gaußschen Integralen von ϕ und ψ dargestellt werden. Die entsprechenden Formeln werden manchmal in der Literatur verwendet.

Theorem (erste Version des Integralsatzes von Cauchy) Mit den obigen Notationen gilt

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0,$$

sofern f holomorph ist.

Beweis: Aufgrund der Definition von ϕ sowie der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \phi(x, y) &= -\partial_x v(x, y) - \partial_y u(x, y) = 0, \\ \operatorname{div} \phi(x, y) &= +\partial_x u(x, y) - \partial_y v(x, y) = 0 \end{aligned}$$

und wir erhalten via

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \iint_G 0 dx dy + i \iint_G 0 dx dy = 0$$

die Behauptung. □

Bemerkungen

1. In der Mathematik wird die von uns skizzierte Beweisidee nicht verwendet, da wir dort stillschweigend (nämlich beim Satz von Stokes) die Stetigkeit der Ableitung von f' verwendet haben, die wir aber unten erst mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy begründen werden. Für unsere praktisch-orientierte Vorlesung ist diese Subtilität bzw. der entstehende logische Zirkelschluss aber irrelevant.

Der „richtige“ Beweis etabliert übrigens die Behauptung mit einem vollkommen anderen Argument zunächst auf Dreiecks- oder Viereckswegen und benutzt anschließend Approximationsargumente, um die Formel auch für allgemeinere Wege c bzw. allgemeinere Mengen G abzuleiten. Dabei wird die Stetigkeit von f (diese ergibt sich sofort aus der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von f) sehr ausgiebig, aber eben nicht die von f' , benutzt.

2. Das Theorem wird zurecht auch *Hauptsatz der Funktionentheorie* genannt. Es hat, wie wir im Fortgang der Vorlesung sehen werden, sehr weitreichende Konsequenzen. Eine spezielle Anwendung ist die Berechnung von komplizierten Kurvenintegralen entlang geschickt gewählter Ersatzwege.
3. Für die Gültigkeit des Theorems ist es wichtig, dass f holomorph ist. Am Ende dieses Abschnitts sehen wir zum Beispiel, dass das Kurvenintegral für $f(z) = \bar{z}$ nicht verschwindet.

Anwendung zur Windungszahl Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, dass das Windungsintegral in

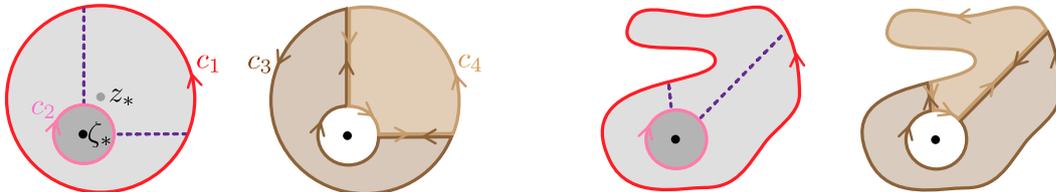
$$\int_{\partial B_\rho(z_*)} \frac{dz}{z - \zeta_*} = +2\pi i \quad \text{für } \zeta_* \in B_\rho(z_*)$$

nur für den Fall $\zeta_* = z_*$ einfach zu berechnen ist. Wir wollen nun zeigen, wie man diese Formel auch für $\zeta_* \neq z_*$ mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy ableiten kann. Dazu führen wir wie im Bild dargestellt insgesamt vier Wege c_1 , c_2 , c_3 und c_4 ein, wobei wir die Funktion $f(z) = 1/(z - \zeta_*)$ entlang des Weges c_1 (rot) integrieren wollen. Der Weg c_2 (rosa) durchläuft eine kleine Kreislinie um ζ_* mit negativer Orientierung und wir können das Kurvenintegral von f explizit zu $-2\pi i$ berechnen. Für die Wege c_3 (dunkelbraun) und c_4 (hellbraun) garantiert der Integralsatz von Cauchy hingegen, dass das Kurvenintegral von f verschwindet, denn beide umschließen jeweils ein elementares Cauchy-Gebiet, auf dem f auch holomorph ist.

Die wesentliche geometrische Beobachtung ist nun, dass

$$\int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz = \int_{c_3} f(z) dz + \int_{c_4} f(z) dz$$

gilt, da die Beiträge von den beiden Geradenstücken sich gegenseitig aufheben (siehe Bild). Durch Einsetzen der Teilergebnisse für c_2 , c_3 und c_4 erhalten wir schließlich den Wert $+2\pi i$ für das gesuchte Kurvenintegral über c_1 . Beachte, dass der Satz von Cauchy nicht direkt auf die Integrale bzgl. der Kurven c_1 und c_2 angewendet werden kann: Diese parametrisieren zwar jeweils den Rand eines elementaren Cauchy-Gebiets (Kreisscheibe), aber f ist wegen der Polstelle in ζ_* dort nicht holomorph.



Links: Die vier Wege zur Berechnung der Windungszahl $wnd_{B_\rho(z_*)}(\zeta_*)$ mittels des Integralsatzes von Cauchy, wobei f in ζ_* (schwarz) nicht holomorph ist. *Rechts:* Analoge Konstruktionen können auch für andere Wege c_1 durchgeführt werden, sofern geschickt neue Wegstrecken (lila) eingeführt werden, die sogar gekrümmt sein könnten. Wichtig ist nur, dass c_2 eine Kreislinie mit Mittelpunkt ζ_* ist, dass c_1 und c_2 unterschiedliche Orientierungen aufweisen, und dass c_3 , c_4 elementare Cauchy-Wege sind. Siehe dazu auch das *Deformationslemma* im nächsten Abschnitt.

Berechnung eines reellen Integrals Als anspruchsvolle, aber doch illustrative Anwendung des Integralsatzes von Cauchy berechnen wir das Integral $\int_0^\infty g(x) dx$ der reellen Funktion

$$g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2},$$

die im Punkt $x = 0$ stetig ist (Regel von l'Hospital) und für $x \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abklingt, sodass insgesamt das Integral im uneigentlichen Sinne wohldefiniert ist. Die Idee ist nun, die gesuchte Zahl durch komplexe Kurvenintegrale der Funktion

$$f(z) = \frac{1 - \exp(iz)}{z^2}$$

zu ermitteln, wobei f holomorph auf der punktierten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist und im Ursprung eine Polstelle besitzt.

Wir wählen dazu zwei Radien $0 < \varepsilon < \varrho < \infty$ und parametrisieren die im Bild dargestellten Teile des entsprechenden Halbkreisringes durch

$$c_1(t) = t \quad \text{mit} \quad t \in [-\varrho, -\varepsilon], \quad c_3(t) = t \quad \text{mit} \quad t \in [+ \varepsilon, +\varrho]$$

sowie

$$c_2(t) = \varepsilon \exp(i\pi - it) \quad \text{mit} \quad t \in [0, \pi], \quad c_4(t) = \varrho \exp(it) \quad \text{mit} \quad t \in [0, \pi].$$

Insbesondere erhalten wir

$$\int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz = \int_{-\varrho}^{-\varepsilon} f(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\varrho} f(t) dt = 2 \int_{\varepsilon}^{\varrho} g(x) dx,$$

wobei wir im letzten Schritt $\sin(-t) = -\sin(t)$ sowie $\cos(-t) = \cos(t)$ ausgenutzt und anschließend die Integrationsvariable t durch x ersetzt haben. Außerdem folgt

$$0 = \int_{c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{c_j} f(z) dz$$

aus dem Satz von Cauchy, wobei G gerade der obere Halbkreisring ist.

Unser Ziel ist nun, die Summe der Integrale von f über c_2 und c_4 im Doppellimes $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varrho \rightarrow \infty$ zu berechnen, da diese dann nach Division durch -2 das gesuchte reelle Integral liefert. Wegen $\sin(t) \geq 0$ für $0 \leq t \leq \pi$ gilt

$$|f(c_4(t))| \leq \varrho^{-2} \left(1 + |\exp(i\varrho \cos(t))| \exp(-\varrho \sin(t)) \right) \leq 2\varrho^{-2}$$

und die Standardabschätzung kombiniert mit $L(c_4) = \varrho\pi$ zeigt via

$$\left| \int_{c_4} f(z) dz \right| \leq 2\pi\varrho^{-1} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0,$$

dass c_4 keinen Beitrag zum Endergebnis liefert. Für das Integral über die kleine Halbkreislinie erhalten wir jedoch

$$\begin{aligned} \int_{c_2} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{1 - \exp(i\varepsilon \exp(i\pi - it))}{\varepsilon^2 \exp(i2\pi - i2t)} (-i)\varepsilon \exp(i\pi - it) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1 - \exp(i\varepsilon \exp(i\pi - it))}{i\varepsilon \exp(\pi i - it)} dt \\ &= \int_0^\pi (-1 + O(\varepsilon)) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi, \end{aligned}$$

wobei wir im Integranden für jedes t die Taylor-Approximation

$$\frac{1 - \exp(\zeta)}{\zeta} = -1 + O(|\zeta|)$$

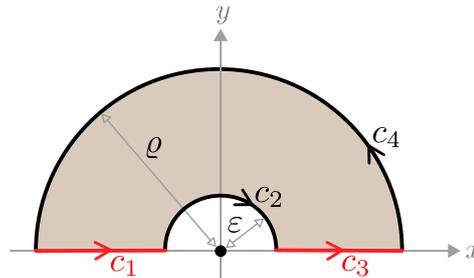
mit $\zeta = i \varepsilon \exp(i \pi - i t)$ benutzt haben. Insgesamt haben wir damit

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = \frac{1}{2} \pi$$

gezeigt. Die Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \pi$$

kann übrigens durch analoge Rechnungen mit $f(z) = \exp(iz)/z$ hergeleitet werden.



Die vier Integrationswege im eben gerechneten Beispiel. Beachte, dass die verwendete Funktion f eine Polstelle in 0 besitzt und dass $c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4$ ein elementarer Cauchy-Weg ist.

Flächenberechnung von G Als ein Nebenresultat unserer Anfangsbetrachtungen können wir die reelle Entsprechung des komplexen Kurvenintegrals auch für die nicht-holomorphe Funktion

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{bzw.} \quad \phi(x, y) = \begin{pmatrix} +x \\ +y \end{pmatrix}$$

auswerten. Wegen

$$\operatorname{div} \phi(x, y) = 2, \quad \operatorname{rot} \phi(x, y) = 0$$

erhalten wir

$$\int_{\partial G} \bar{z} dz = 2i \operatorname{area}(G),$$

d.h. das komplexe Kurvenintegral von $f(z) = \bar{z}$ liefert — bis auf den Faktor $2i$ — gerade den Flächeninhalt $\operatorname{area}(G)$ der von der Kurve c eingeschlossenen Fläche G . Das reelle Analogon zu dieser Formel hatten wir schon in *Mathe-1* kennengelernt.

Beispiel Die von der Kurve

$$c(t) = a \cos(t) + ib \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

eingeschlossene Menge G ist gerade die achsenparallele Ellipse durch die Punkte $-a$, $+a$, $-ib$ und $+ib$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (a \cos(t) - ib \sin(t)) (-a \sin(t) + ib \cos(t)) dt \\ &= (b^2 - a^2) \left(\int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt \right) + iab \left(\int_0^{2\pi} 1 dt \right) = 0 + i2\pi ab \end{aligned}$$

und erhalten nach Division durch $2i$ die bekannte Flächenformel für eine Ellipse.

Bemerkung* In den Ingenieurwissenschaften schreibt man die Formel für $\text{area}(G)$ oftmals als

$$\text{area}(G) = + \int_{\partial G} x \, dy = - \int_{\partial G} y \, dx$$

und betrachtet sie als Spezialfall des Satzes von Stokes (der in 2D auch Satz von Green genannt wird). Die beiden Integrale sind dabei in Physikernotation im Sinne der formalen Substitutionen $dx = \dot{x} \, dt$ und $dy = \dot{y} \, dt$ durch

$$\int_{\partial G} x \, dy = \int_{t_a}^{t_e} x(t) \dot{y}(t) \, dt \quad \int_{\partial G} y \, dx = \int_{t_a}^{t_e} y(t) \dot{x}(t) \, dt$$

gegeben. Das unterschiedliche Vorzeichen entlang von geschlossenen Kurven ergibt sich unmittelbar aus der eindimensionalen partiellen Integrationsformel, da die Randterme sich wegen der Schließungsbedingungen $x(t_e) = x(t_a)$ und $y(t_e) = y(t_a)$ gegenseitig aufheben. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\partial G} \bar{z} \, dz = i \left(\int_{\partial G} x \, dy - \int_{\partial G} y \, dx \right) = +2i \int_{\partial G} x \, dy = -2i \int_{\partial G} y \, dx$$

und schließen, dass die verschiedenen Formeln, die $\text{area}(G)$ entweder durch komplexe oder reelle Kurvenintegrale darstellen, alle äquivalent sind.

weitere nützliche Integrale Wir wollen durch Rechnungen im Komplexen auch die Formeln

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n}(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t) \, dt = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n},$$

herleiten, wobei auf der rechten Seite ein Binomialkoeffizient (und nicht etwa ein Vektor) steht. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$f_{\pm}(z) := \frac{1}{z} \left(z \pm \frac{1}{z} \right)^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} \left(\pm \frac{1}{z} \right)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\pm 1)^k z^{2n-2k-1}$$

wegen der verallgemeinerten binomischen Formel gilt. Die Wegintegration über die Einheitskreislinie liefert nun

$$\int_{\partial B_1(0)} f_{\pm}(z) \, dz = \sum_{k=0}^{2n} (\pm 1)^k \binom{2n}{k} \int_{\partial B_1(0)} z^{2n-2k-1} \, dz = (\pm 1)^n \binom{2n}{n} 2\pi i,$$

da der Beitrag für $k = n$ gerade eine Windungszahl ist und weil die Wegintegrale der Monome für $k \neq n$ verschwinden, wobei man dies mit dem Integralsatz von Cauchy oder alternativ durch direkte Rechnungen (siehe dazu weiter oben) bzw. die Verwendung der entsprechenden Stammfunktion begründen kann. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(0)} f_+(z) \, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(\exp(+it) + \exp(-it))^{2n}}{\exp(+it)} i \exp(+it) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} i (2 \cos(t))^{2n} \, dt = i 4^n \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t) \, dt \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial B_1(0)} f_-(z) dz = \int_0^{2\pi} i (2i \sin(t))^{2n} dt = i (-1)^n 4^n \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(t) dt,$$

und die gewünschten Ergebnisse folgen durch Vergleich der verschiedenen Formeln. Beachte, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1}(t) dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t) dt = 0$$

gilt, da sich für ungerade Exponenten die positiven und die negativen Beiträge zu jedem Integral genau die Waage halten.

Kurvenintegral und Stammfunktionen* Wir schreiben wieder

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und wollen nun zusätzlich annehmen, dass

$$f(z) = F'(z)$$

für eine Stammfunktion

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

gilt, wobei wir weiter unten diskutieren werden, ob bzw. in welchem Sinne diese immer existiert. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für F garantieren

$$\begin{pmatrix} \partial_x U(x, y) & \partial_y U(x, y) \\ \partial_x V(x, y) & \partial_y V(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +u(x, y) & -v(x, y) \\ +v(x, y) & +u(x, y) \end{pmatrix},$$

wobei links die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_F(x, y)$ der reellen Entsprechung von F steht und die Matrix rechts gerade die Drehstreckung ist, die zur komplexen Multiplikation mit $f(z) = F'(z)$ gehört. Insbesondere gilt

$$\phi(x, y) = \mathbf{grad} U(x, y), \quad \psi(x, y) = \mathbf{grad} V(x, y),$$

d.h. die oben eingeführten Vektorfelder ϕ bzw. ψ sind gerade der Gradient des Real- bzw. des Imaginärteils der Stammfunktion. Diese Beobachtung liefert die nützlichen reellen Darstellungsformeln

$$\operatorname{Re} \left(\int_c F'(z) dz \right) = + \int_c \langle \mathbf{grad} U(x, y), \boldsymbol{\tau}(x, y) \rangle ds = - \int_c \langle \mathbf{grad} V(x, y), \boldsymbol{\nu}(x, y) \rangle ds$$

und

$$\operatorname{Im} \left(\int_c F'(z) dz \right) = + \int_c \langle \mathbf{grad} U(x, y), \boldsymbol{\nu}(x, y) \rangle ds = + \int_c \langle \mathbf{grad} V(x, y), \boldsymbol{\tau}(x, y) \rangle ds,$$

die auch für beliebige (zum Beispiel nicht geschlossene) Wege c verwendet werden können.

Bemerkung: In der Physik wird wegen der unterschiedlichen Vorzeichenkonvention $-F$ als das komplexe Potential bezeichnet und wir hatten schon weiter oben gesehen, dass $\mathbf{grad} U = -\mathbf{grad} \operatorname{Re}(-F)$ oftmals als Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit oder als elektrisches Feld interpretiert werden kann. Beachte aber, dass damals f nicht die komplexe Ableitung von F war, sondern eine beliebige holomorphe Gebietstransformation bezeichnete.

2.2 Komplexe Stammfunktionen

Theorem (Kriterien für die Existenz einer Stammfunktion) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $U \subset D$ eine offene, aber zusammenhängende Teilmenge von D . Dann sind die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:

1. Es gilt

$$\int_c f(z) dz = 0$$

für jeden *geschlossenen* Weg c in U .

2. Für je zwei Wege c_1 und c_2 in U , die dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen, gilt

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz,$$

d.h. das Kurvenintegral von f ist wegunabhängig in U .

3. f besitzt eine (lokale) Stammfunktion in U , d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = F'(z)$$

für alle $z \in U$ gilt.

Beweis: Wir hatten ein analoges Resultat in *Mathe-2* (Hauptsatz über Kurvenintegrale im Abschnitt über Potentialtheorie) für reelle Kurvenintegrale hergeleitet. Das komplexe Theorem kann mit exakt denselben Ideen bewiesen werden, nur dass jetzt komplexe Kurvenintegrale zu verwenden sind und das Wort *Potential* durch *Stammfunktion* ersetzt werden muss. \square

Ergänzung* Ist U sogar einfach zusammenhängend, so kann im Theorem noch eine vierte äquivalente Bedingung aufgeführt werden, nämlich

4. f ist holomorph auf U .

Die Implikation 1. \Rightarrow 4. wird *Satz vom Morera* genannt und ist sehr wichtig in der mathematischen Analysis, denn sie garantiert, dass der punktweise Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen selbst holomorph ist. Bei uns wird diese Aussage (sowie die Konvergenz von Funktionenfolgen) jedoch keine Rolle spielen.

Folgerung (zweite Version des Integralsatzes von Cauchy) Ist f holomorph auf D , so existiert auf jedem elementaren Cauchy-Gebiet $G \subset D$ eine lokale Stammfunktion zu f .

Beweisskizze: Die erste Version des Cauchyschen Integralsatzes impliziert nach einigen Zwischenschritten, dass $\int_c f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg c in G gilt. Alternativ kann dies mit der oben erwähnten Ergänzung begründet werden. Die Behauptung ergibt sich schließlich mit $U = G$ aus dem Theorem. \square

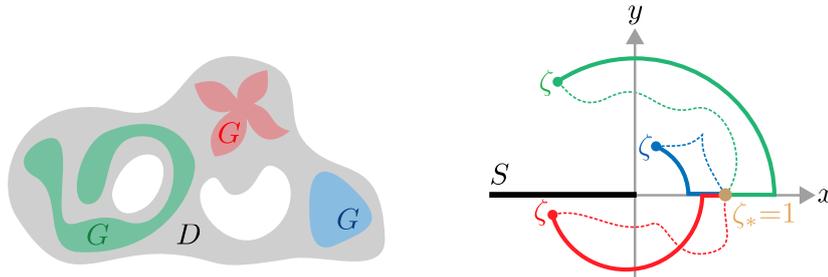
Bemerkungen

1. Im Allgemeinen können wir nicht erwarten, dass es für eine gegebene komplexe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ (holomorph oder nicht) eine globale Stammfunktion auf D gibt. Das Standardbeispiel ist wieder $f(z) = 1/z$ mit $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn da das Fundamentalintegral

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \text{wmd}_{\partial B_1(0)}(0) = 2\pi i$$

nicht verschwindet, kann es auf D keine Stammfunktion für f geben. Da f aber holomorph ist, gibt es eine lokale Stammfunktion auf jeder hinreichend guten Teilmenge von D (siehe auch das Beispiel unten).

2. *Ausblick*: Wenn f eine lokale Stammfunktion F in $U \subset D$ besitzt, so muss f schon holomorph auf U sein, denn wir werden später zeigen, dass die Funktion F unendlich viele Ableitungen besitzt und das damit auch $f' = F''$ auf U existiert.
3. Die zweite Version des Integralsatzes von Cauchy gilt sinngemäß auch für jede einfach zusammenhängende Menge $U \subset D$, wobei der Rand von U (im Gegensatz zum Rand von G) nicht regulär sein muss.



Links: Schematische Darstellung der zweiten Version des Integralsatzes von Cauchy, wobei jede der farbig gezeichneten Mengen ein elementares Cauchy-Gebiet ist. *Rechts*: Zur Konstruktion der Stammfunktion im Beispiel, wobei für drei verschiedene Wahlen von ζ der verwendete Integrationsweg als durchgehende Linie gezeichnet wurde. Die gestrichelten Linien illustrieren alternative Integrationswege.

Konstruktion von Stammfunktionen Die lokale Stammfunktion F von f in U kann, sofern Sie existiert, wie folgt konstruiert werden, wobei wir dieselbe Idee schon bei der Potentialtheorie in *Mathe-2* benutzt hatten.

Wir fixieren $\zeta_* \in D$ beliebig und wählen für jeden anderen Punkt $\zeta \in U$ einen Verbindungsweg $c_{\zeta_*, \zeta}$, der in ζ_* startet, ganz in U verläuft und im Punkt ζ endet. Es gibt natürlich viele solcher Verbindungswege, aber das Endergebnis wird wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals in U nicht von der konkreten Wahl des Weges abhängen.

Wir legen außerdem den Wert $F(\zeta_*)$ beliebig fest und können die entsprechende Stammfunktion in jedem Punkt $\zeta \in U$ durch

$$F(\zeta) = F(\zeta_*) + \int_{c_{\zeta_*, \zeta}} f(z) dz,$$

d.h. durch Integration von f entlang des gewählten Verbindungsweges berechnen.

Beispiel Wir betrachten noch einmal das Monom $f(z) = 1/z$ auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und konstruieren durch Wegintegration eine Stammfunktion auf der geschlitzten Ebene

$$U := \mathbb{C} \setminus S, \quad S := \{x + iy : y = 0 \text{ und } x \leq 0\},$$

die eine offene und einfach zusammenhängende Teilmenge des Definitionsbereichs D ist. Dazu setzen wir $\zeta_* = 1$ sowie $F(\zeta_*) = 0$ und betrachten für jedes $\zeta \in U$ den zusammengesetzten Verbindungsweg

$$c_{\zeta_*, \zeta} = c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]} \oplus c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]},$$

der via

$$c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]}(z) = -t + |\zeta| (t + 1) \quad \text{für } t \in [-1, 0]$$

und

$$c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]} = |\zeta| \exp(it) \quad \text{mit } t \in [0, \text{Arg}(\zeta)]$$

zunächst ein Stück auf der horizontalen Achse und anschließend auf einem Kreisbogen mit Mittelpunkt 0 verläuft (siehe Bild oben). Wir könnten auch einen anderen Verbindungsweg betrachten, aber mit dieser Wahl sind die Kurvenintegrale besonders einfach. Direkte Rechnungen ergeben

$$\int_{c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]}} \frac{dz}{z} = \int_{-1}^0 \frac{|\zeta| - 1}{-t + |\zeta| (t + 1)} dt = \left[\ln \left(-t + |\zeta| (t + 1) \right) \right]_{t=-1}^{t=0} = \ln(|\zeta|)$$

sowie

$$\int_{c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]}} \frac{dz}{z} = \int_0^{\text{Arg}(\zeta)} \frac{|\zeta| i \exp(it)}{|\zeta| \exp(it)} dt = \int_0^{\text{Arg}(\zeta)} i dt = i \text{Arg}(\zeta),$$

und wir erhalten insgesamt die lokale Stammfunktion

$$F(\zeta) = \ln(|\zeta|) + i \text{Arg}(\zeta) = \text{Ln}(\zeta).$$

Damit haben wir das schon bekannte Resultat, nämlich $\text{Ln}'(\zeta) = 1/\zeta$ für alle $\zeta \in U$, mit einer anderen Methode hergeleitet. Beachte, dass für $\zeta \in \mathbb{R}$ mit $\zeta \geq 0$ der Weg $c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]}$ entartet und keinen Beitrag zur Stammfunktion liefert. Für $|\zeta| = 1$ entartet hingegen $c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]}$.

2.3 Integralformel von Cauchy

Vorbemerkung Wir verwenden dieselben Notationen und Voraussetzungen wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten.

Theorem (Integralformel von Cauchy) Es gilt

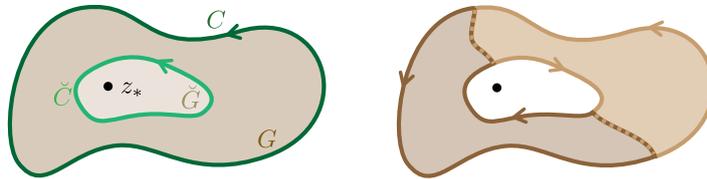
$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz$$

in jedem Punkt $z_* \in G$, sofern f holomorph ist.

Beweis, Teil 1: Wir beginnen mit dem sogenannten Deformationslemma: Ist \check{G} ein weiteres elementares Cauchy-Gebiet, dass mit seinem Rand vollständig in G liegt und auch den Punkt z_* enthält, so gilt

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz = \int_{\partial \check{G}} \frac{f(z)}{z - z_*} dz.$$

Diese Aussage können wir — ganz analog zur obigen Diskussion über Windungsintegrale — aus dem Integralsatz von Cauchy ableiten, indem wir den Durchlaufsinne von $\check{C} = \partial \check{G}$ umdrehen und die offene, aber nicht-einfach zusammenhängende Menge $G \setminus \{\check{G} \cup \partial \check{G}\}$ in zwei elementare Cauchy-Gebiete zerlegen. Wir werden diese Formel nun auf Kreisscheiben $\check{G} = B_\varepsilon(z_*)$ auswerten, wobei der Radius $\varepsilon > 0$ immer so klein ist, dass \check{G} und \check{C} ganz im Definitionsbereich D von f liegen.



Die Aussage des Deformationslemmas (links) kann mit geschickten Zerlegungsargumenten (rechts) bewiesen werden, wobei wir im letzten Abschnitt schon eine ganz ähnliche Konstruktion verwendet hatten.

Beweis, Teil 2: Nach der Definition des Kurvenintegrals und unter Verwendung der Standardparametrisierung von Kreislinien gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(z_*)} \frac{f(z)}{z - z_*} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_* + \varepsilon \exp(it))}{\varepsilon \exp(it)} i \varepsilon \exp(it) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_* + \varepsilon \exp(it)) dt \\ &=: i I_\varepsilon, \end{aligned}$$

und wir wollen nun das Integral I_ε mit reeller Integrationsvariable $0 \leq t \leq 2\pi$ im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ berechnen. Zum einen gilt

$$I_0 = \int_0^{2\pi} f(z_*) dt = f(z_*) \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi f(z_*)$$

und zum anderen impliziert die Theorie (vektorwertiger) Riemann-Integrale aus *Mathe-1* die Abschätzung

$$|I_\varepsilon - I_0| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_* + \varepsilon \exp(i t)) - f(z_*)| dt \leq 2\pi O(\varepsilon),$$

wobei wir auch die komplexe Taylor-Formel

$$f(z_* + \gamma) - f(z_*) = f'(z_*)\gamma + o(|\gamma|)$$

bzw. ihre Folgerung

$$|f(z_* + \gamma) - f(z_*)| \leq |f'(z_*)| |\gamma| + o(|\gamma|) = O(|\gamma|)$$

für $\gamma = \varepsilon \exp(i t)$ ausgewertet haben. Da das komplexe Kurvenintegral über ∂G aber gar nicht vom Parameter ε abhängt, und weil wir gerade gezeigt haben, dass I_ε gegen I_0 konvergiert, erhalten wir insgesamt

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = i I_0 = i 2\pi f(z_*)$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkungen

1. Die Integralformel impliziert die folgende Aussage: Wenn f auf dem Rand ∂G bekannt ist, so kennen wir f schon auf ganz G , denn wir können ja $f(z_*)$ durch das angegebene Kurvenintegral berechnen (zumindest im Prinzip). Diese sehr bewerkenswerte Eigenschaft hängt natürlich mit der Holomorphie, d.h. mit der komplexen Differenzierbarkeit, von f zusammen. Im zweidimensional Reellen gilt eine analoge Formel übrigens nur für harmonische Funktionen, aber *nicht* für allgemeine differenzierbare Funktionen.
2. Im Spezialfall $f(z) = 1$ (konstante Funktion) reduziert sich die Cauchysche Integralformel auf

$$1 = \text{wnd}_{\partial G}(z_*).$$

Insbesondere zeigt sich hier schon — da $\text{wnd}_{\partial G}(z_*) = 0$ für jeden äußeren Punkt z_* von G gilt — dass die Bedingung $z_* \in G$ im Theorem ganz wesentlich ist.

3. Die Mittelwerteigenschaft

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_* + \varepsilon \exp(i t)) dt$$

gilt für alle $\varepsilon > 0$ mit $\partial B_\varepsilon(z_*) \subset G$ und ergibt sich als Nebenprodukt aus dem Beweis.

4. Wenn f auf G durch seine Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt z_* dargestellt werden kann, d.h. wenn

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k = f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*) + \frac{1}{2} f''(z_*)(z - z_*)^2 + \dots$$

für alle $z \in G \cup \partial G$ gilt, so kann die Cauchysche Integralformel auch direkt via

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz &= \int_{\partial G} \frac{f(z_*)}{z - z_*} dz + \int_{\partial G} f'(z_*) dz + \int_{\partial G} \frac{1}{2} f''(z_*) (z - z_*) dz + \dots \\ &= f(z_*) 2\pi i + 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

aus den Integralformeln für die verallgemeinerten Monome abgeleitet werden. Wir werden unten sehen, dass die Taylor-Formel lokal immer verwendet werden darf, d.h. sofern der Durchmesser der Menge G hinreichend klein ist.

5. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Cauchy-Formel zu schreiben. Wir werden zum Beispiel weiter unten die Variante

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } z \in G$$

verwenden, wobei die Integrationsvariable mit ζ bezeichnet wird und z als freie Variable betrachtet werden kann. Diese Formel ist aber äquivalent zu der im Theorem angegebenen Version.

6. Wir können die Cauchysche Integralformel auch benutzen, um gewisse komplexe Kurvenintegrale entlang von elementaren Cauchy-Wegen auszurechnen. Dies setzt natürlich voraus, dass der Integrand in der benötigten Form gegeben ist oder in diese transformiert werden kann (siehe die Beispiele).

Beispiel Für

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{f(z)}{z - i} \quad \text{mit} \quad f(z) = \frac{z}{z + i}$$

gilt

$$\int_{\partial B_1(i)} g(z) dz = 2\pi i f(i) = i\pi,$$

aufgrund der Cauchyschen Integralformel für f mit $z_* = i$ und $G = B_1(i)$. Diese konnten wir hier verwenden, da f auf $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ holomorph ist und weil die Polstelle $z = -i$ weder zu G noch zu ∂G gehört. Wir hätten dieses Integral aber auch anders berechnen können. Die Partialbruchzerlegung

$$g(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{2} \frac{1}{z + i}$$

liefert zum Beispiel via

$$\int_{\partial B_1(i)} g(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \text{wnd}_{B_1(i)}(-i) + \frac{1}{2} \text{wnd}_{B_1(i)}(+i) \right) = \pi i (0 + 1)$$

das gleiche Ergebnis.

2.4 Folgerungen aus Satz und Formel von Cauchy

Vorbemerkung Wir benutzen die Cauchysche Integralformel, um eine ganz zentrale Aussage über holomorphe Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ zu erhalten, die auf einer beliebigen offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ definiert sind. Insbesondere darf D wieder Löcher und/oder einen fraktalen Rand besitzen.

Theorem (lokaler Entwicklungssatz) Seien $z_* \in D$ ein beliebiger Punkt und $\varrho > 0$ ein Radius, so dass die Kreisscheibe $B_\varrho(z_*)$ sowie ihr Rand zu D gehören. Dann existiert eine Koeffizientenfolge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, sodass die lokale Potenzreihen-Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k \quad \text{für alle } z \in B_\varrho(z_*)$$

gilt, wobei jeder Koeffizient mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz$$

berechnet werden kann. Insbesondere besitzt f in z_* unendlich viele Ableitungen und die Taylor-Formel

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!}$$

liefert eine alternative Darstellung der Koeffizienten α_k .

Beweis: Für jedes $z \in B_\varrho(z_*)$ kann die Cauchysche Integralformel (siehe auch die Bemerkungen oben) als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

geschrieben werden. Außerdem wollen wir den Trick mit der geometrischen Reihe verwenden, d.h. wir bemerken, dass die Formel

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_*} \frac{1}{1 - \frac{z - z_*}{\zeta - z_*}} = \frac{1}{\zeta - z_*} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_*}{\zeta - z_*} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_*)^k}{(\zeta - z_*)^{k+1}}$$

für jedes $\zeta \in \partial B_\varrho(z_*)$ gilt, wobei die Reihe wegen $|z - z_*| < |\zeta - z_*| = \varrho$ absolut konvergiert. Durch Einsetzen und nach Vertauschung von Integration und Summation (dies muss natürlich streng genommen erst gerechtfertigt werden) erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{f(\zeta) (z - z_*)^k}{(\zeta - z_*)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$$

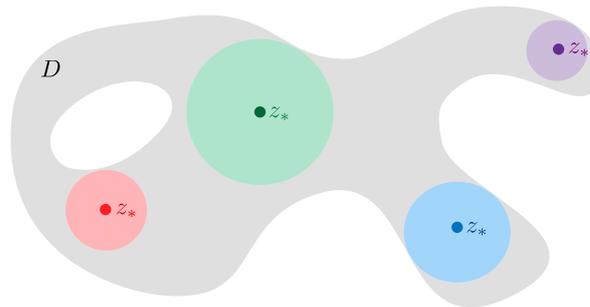
mit

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{k+1}} d\zeta,$$

wobei wir benutzt haben, dass wir die Faktoren $(z - z_*)^k$ aus dem Integral bzgl. ζ herausziehen können. Damit haben wir die lokale Potenzreihendarstellung sowie die Integralformel für die α_k abgeleitet, wobei wir am Ende dort die Integrationsvariable ζ in z umbenennen dürfen. Die Theorie der Potenzreihen (siehe weiter oben) garantiert dann die Existenz aller Ableitungen in z_* sowie die Taylor-Formel für die α_k . \square

Bemerkungen

1. Weil D offen ist, existiert für jedes $z_* \in D$ wirklich ein positiver Radius ϱ mit den gewünschten Eigenschaften (er kann aber sehr klein sein). Da z_* außerdem beliebig gewählt werden kann, besitzt die holomorphe Funktion f unendlich viele Ableitungen auf der ganzen Menge U , wobei dann jede Ableitung auch stetig ist. Im Reellen ist die analoge Aussage falsch, denn aus der Existenz einer Ableitung folgt dort noch lange nicht die Existenz aller Ableitungen.
2. Das Theorem besagt insbesondere, dass jede holomorphe Funktion in der Nähe eines jeden Punktes ihres Definitionsbereichs als Potenzreihe geschrieben werden kann. Auch hier gibt es keine Entsprechung in der reellen Analysis, denn dort gibt es Funktionen, die zwar in jedem Punkt unendlich oft differenzierbar sind, aber trotzdem nicht überall lokal als Taylor-Reihe dargestellt werden können (siehe *Mathe-1* für ein Beispiel).
3. Die im Theorem angegebene Potenzreihen-Darstellung von f mit Entwicklungspunkt z_* gilt im Allgemeinen nicht auf ganz D , d.h. es gibt in der Regel keine *globale* Potenzreihen-Darstellung von f , sondern nur eine *lokale* Darstellung in jedem Punkt $z_* \in D$. Man kann aber mit etwas mehr Aufwand die Konvergenz der Reihe auf der größten offenen Kreisscheibe um z_* garantieren, die noch ganz in D liegt (siehe Bild).



Beispiel für eine offene Menge D (grau). Jede holomorphe Funktion f auf D kann in jedem Punkt $z_* \in D$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, aber diese konvergiert im Allgemeinen nur auf der größten offenen Kreisscheibe, die noch ganz zu D gehört, wobei dann der Rand dieser Kreisscheibe nicht mehr ganz in D enthalten sein wird. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass der Konvergenzkreis größer als vorhergesagt ist (siehe die Beispiele).

Beispiele

1. Wir betrachten das verallgemeinerte Monom $f(z) = 1/z$ als holomorphe Funktion auf der punktierten Ebene $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und berechnen zunächst induktiv ihre Ableitungen zu

$$f^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}} \quad \text{für alle } z \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{N}_0.$$

Für jeden Entwicklungspunkt $z_* \neq 0$ erhalten wir damit die Taylor-Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_*^{k+1}} (z - z_*)^k.$$

Diese gilt aber nur für $z \in B_{|z_*|}(z_*)$, denn die Cauchy-Hadamard-Formel (bzw. die entsprechende Quotientenformel) impliziert, dass $|z_*|$ gerade der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist. Insbesondere gilt $0 \in \partial B_{|z_*|}(z_*)$, d.h. der Konvergenzradius ist hier wirklich die größte Kreisscheibe um z_* , die ganz in D enthalten ist. Mit $z_* = 1$ bzw. $z_* = 2i$ ergibt sich nach kleineren Rechnungen zum Beispiel

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - 1)^k = \frac{1}{z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k+1}}{2^{k+1}} (z - 2i)^k,$$

wobei das linke bzw. das rechte Gleichheitszeichen nur für $|z - 1| < 1$ bzw. $|z - 2i| < 2$ gilt, sodass die Doppelformel nur für $z \in B_1(1) \cap B_1(2i) \neq \emptyset$ verwendet werden darf.

Bemerkung*: Das Theorem liefert die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\varrho(z_*)} \frac{dz}{z(z - z_*)^{k+1}}$$

für jeden Radius $0 < \varrho < |z_*|$, wobei dies im konkreten Fall auch wie folgt begründet werden kann: Wenn wir die Formel

$$\frac{1}{z(z - z_*)^{k+1}} = \frac{1}{(z - z_*)^{k+2}} - \frac{z_*}{z(z - z_*)^{k+2}}$$

auf beiden Seiten über $\partial B_\varrho(z_*)$ integrieren, so fällt der erste Term auf der rechten Seite weg, da es eine entsprechende Stammfunktion gibt. Nach Division durch $2\pi i$ erhalten wir die Rekursionsformel $\alpha_k = -z_* \alpha_{k+1}$, aus der wir induktiv die Taylor-Formel für α_k rekonstruieren können.

2. Für den Hauptwert des Logarithmus, d.h. mit

$$f(z) = \operatorname{Ln}(z), \quad D = \mathbb{C} \setminus S, \quad S = \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0 \text{ und } x \leq 0\}$$

erhalten wir via

$$f^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{z^k} \quad \text{für alle } z \notin S \text{ und } k \geq 1$$

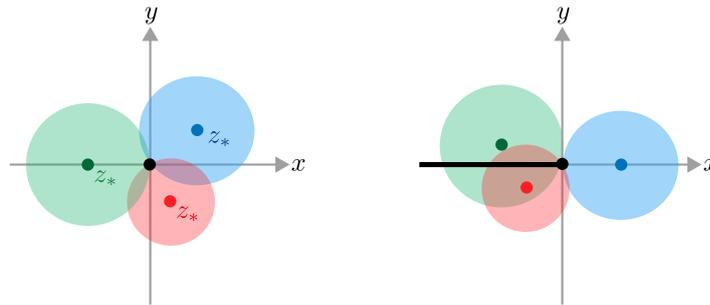
die lokale Taylor-Reihendarstellung

$$\operatorname{Ln}(z) = \operatorname{Ln}(z_*) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k z_*^k} (z - z_*)^k = \operatorname{Ln}(z_*) + \frac{z - z_*}{z_*} - \frac{(z - z_*)^2}{2 z_*^2} + \dots$$

Die Cauchy-Hadamard-Formel liefert wieder $|z - z_*| < |z_*|$ als Konvergenzbedingung für die Potenzreihe, wobei dies wegen $0 \in \partial B_{|z_*|}(z_*)$ im Fall von

$\operatorname{Re}(z_*) \geq 0$ gerade der größten offenen Kreisscheibe um z_* entspricht, die gerade noch in D liegt.

*Bemerkung**: Für $z_* \in D$ mit $\operatorname{Re}(z_*) < 0$ enthält der Konvergenzkreis der Taylor-Reihe auch Punkte aus dem Schlitz S (aber niemals den Ursprung). Diese auf den ersten Blick sehr überraschende Beobachtung deutet an, dass es durchaus möglich ist, komplexe Logarithmusfunktionen einzuführen, die auf dem Schlitz S des Hauptwertes (negative reelle Achse) wohldefiniert und holomorph sind. Wir werden diese *Nebenwerte* unten genauer studieren und sehen, dass diese aber auch einen Schlitz im Definitionsbereich aufweisen, der allerdings woanders liegt.



Ausgewählte Konvergenzkreise der Taylor-Reihenentwicklung für das Monom $f(z) = 1/z$ (links) bzw. für den Hauptwert $f(z) = \operatorname{Ln}(z)$ (rechts), wobei das Komplement des Definitionsbereiches von f (Polstelle bzw. Schlitz) schwarz dargestellt ist. Beachte, dass die Konvergenzkreise rechts (aber nicht links) zum Teil größer sind, als vom lokalen Entwicklungssatz vorhergesagt.

Lemma (Variante der verallgemeinerten Cauchy-Formel) Für jede holomorphe Funktion f und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_*),$$

sofern G ein elementares Cauchy-Gebiet ist und z_* in G liegt.

Beweis: Für jede hinreichend kleine Kreislinie mit Mittelpunkt z_* ergibt sich die Formel direkt aus der Kombination der Taylor- und der Cauchy-Formel im lokalen Entwicklungssatz. Für allgemeine Cauchy-Gebiete G können wir wie im Beweis des Deformationslemma argumentieren (siehe oben) und zeigen, dass das Integral über ∂G denselben Wert wie das Integral über eine Kreislinie um z_* hat. \square

Bemerkung

1. Für die konstante Funktion $f(z) = 1$ ergeben sich gerade die Fundamentalintegrale der verallgemeinerten Monome mit negativem Exponenten.
2. Das Lemma ermöglicht es, gewisse Klassen von Kurvenintegralen sehr einfach zu berechnen (siehe die Beispiele). Beachte dabei, dass der Integrand eine Polstelle in z_* besitzt.
3. Im Fall von $z_* \in \partial G$ können die Integrale nicht ausgewertet werden, da dann die Singularität des Integranden auf dem Integrationsweg liegt. Ist z_* jedoch ein äußerer Punkt von G , so verschwindet das Kurvenintegral für jeden Wert von $k \in \mathbb{N}$ nach dem Integralsatz von Cauchy, da dann der Integrand holomorph auf der offenen Menge $D \setminus \{z_*\}$ ist und diese Menge sowohl G als auch ∂G enthält.
4. Wir werden unten sehen, dass die Formel im Lemma auch als Spezialfall des allgemeineren *Residuentheorems* betrachtet werden kann.

Beispiele

1. Für
- $z_* \in G$
- ergeben sich die Formeln

$$\int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z-z_*)^2} dz = +2\pi i \cos(z_*), \quad \int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z-z_*)^3} dz = -\pi i \sin(z_*)$$

und

$$\int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z-z_*)^4} dz = -\frac{1}{3}\pi i \cos(z_*), \quad \int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z-z_*)^5} dz = +\frac{1}{12}\pi i \sin(z_*)$$

aus der verallgemeinerten Cauchy-Formel für $k=1$, $k=2$, $k=3$ und $k=4$.

2. Die Formel

$$I := \int_{\partial B_3(0)} \frac{\exp(z)}{z^3 + 2z^2} dz = \frac{1}{2} i \pi (3 + e^{-2})$$

kann auch mit der verallgemeinerten Cauchy-Formel hergeleitet werden, obwohl der Nenner $z^3 + 2z = z^2(z+2)$ zwei Nullstellen in $B_3(0)$ besitzt. Wegen der Partialbruchzerlegung

$$\frac{4}{z^3 + 2z^2} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z+2}$$

können wir nämlich drei Einzelintegrale durch Punktauswertung der Exponentialfunktion und ihrer Ableitung bestimmen. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} 4I &= - \int_{\partial B_3(0)} \frac{\exp(z)}{z} dz + 2 \int_{\partial B_3(0)} \frac{\exp(z)}{z^2} dz + \int_{\partial B_3(0)} \frac{\exp(z)}{z+2} dz \\ &= -\frac{2\pi i}{0!} \exp(0) + 2 \frac{2\pi i}{1!} \exp'(0) + \frac{2\pi i}{0!} \exp(-2) \\ &= 2\pi i (3 + \exp(-2)) \end{aligned}$$

und das gewünschte Ergebnis folgt unmittelbar.

3. Es gilt außerdem

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{\exp(z)}{z^3 + 2z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{d}{dz} \frac{\exp(z)}{z+2} \right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \left(\frac{\exp(z)(z+1)}{(z+2)^2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \pi i,$$

wobei in diesem Fall die Polstelle -2 ein äußerer Punkt von $B_1(0)$ ist und die verallgemeinerte Cauchy-Formel für $f(z) = \exp(z)/(z+2)$ ausgewertet wurde.

Lemma* (**Cauchysche Ungleichung**) Mit den Notationen aus dem lokalen Entwicklungssatz gilt

$$|f^{(k)}(z_*)| \leq \frac{k!}{\rho^k} M_\rho(z_*) \quad \text{mit} \quad M_\rho(z_*) := \max_{z \in \partial B_\rho(z_*)} |f(z)|,$$

d.h. alle Ableitungen von f in z_* können durch die Werte von f auf einer Kreislinie um z_* abgeschätzt werden.

Beweis: Wir wenden die Standardabschätzung auf die verallgemeinerte Cauchy-Formel an und erhalten

$$|\alpha_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{f(z)}{(z - z_*)^k} dz \right| \leq \frac{M_\varrho(z_*)}{2\pi \varrho^{k+1}} L(\partial B_\varrho(z_*)).$$

Da die Länge des Integrationsweges durch $L(\partial B_\varrho(z_*)) = 2\pi \varrho$ gegeben ist, ergibt sich die Behauptung nach Einsetzen der Taylor-Formel $\alpha_k = f^{(k)}(z_*)/k!$ und nach einfachen Umformungen. \square

Weitere Folgerungen

Lemma (Satz von Liouville) Jede auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion ist entweder konstant oder unbeschränkt.

Beweis: Wir nehmen an, dass die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ via

$$M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$$

beschränkt ist und wollen zeigen, dass f dann schon konstant sein muss. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jeden Radius $\varrho > 0$ folgt

$$|f'(z)| \leq \frac{M_\varrho(z)}{\varrho} \leq \frac{M}{\varrho}$$

aus der Cauchyschen Ungleichung und wir können nun ϱ bei festem z immer größer werden lassen. Insbesondere erhalten wir

$$|f'(z)| = 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(z) = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ im Limes $\varrho \rightarrow \infty$. Da f aber eine Stammfunktion von f' ist, gilt außerdem

$$\int_{[0,z]} f'(\zeta) d\zeta = f(z) - f(0),$$

wobei $[0, z]$ die Verbindungsstrecke zwischen 0 und z bezeichnet, die wir zum Beispiel durch $c(t) = tz$ mit $t \in [0, 1]$ parametrisieren können. Insgesamt ergibt sich

$$f(z) = f(0) + \int_{[0,z]} 0 d\zeta = f(0)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$, d.h. die beschränkte Funktion f ist in der Tat konstant. \square

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes komplexe Polynom vom Grad $K \geq 1$, d.h. jede Funktion der Bauart

$$f(z) = \alpha_K z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{mit} \quad \alpha_K \neq 0,$$

kann via

$$f(z) = \alpha_K (z - z_K)(z - z_{K-1}) \dots (z - z_2)(z - z_1)$$

als Produkt von genau K Linearfaktoren geschrieben werden. Dabei sind die z_k gerade die Nullstellen von f , die hier aber *nicht* paarweise verschieden sein müssen.

Beweisskizze, funktionentheoretisches Hauptargument: Wir wollen zur Vereinfachung $\alpha_K = 1$ annehmen und zeigen zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, dass f mindestens eine Nullstelle besitzen muss. Dazu nehmen wir an, dass f keine Nullstelle besitzt. In diesem Fall ist die Funktion g mit

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}$$

auf ganz \mathbb{C} wohldefiniert und (nach dem Satz über die Umkehrfunktion) dort auch holomorph. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| \frac{1}{z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^K} \left| \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{K-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{K-1}} + \frac{\alpha_0}{z^K}} \right| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

und wir schließen, dass g beschränkt ist. Der Satz von Liouville impliziert, dass g und damit auch f konstant ist, aber ein Polynom ist nur konstant, wenn es den Grad 0 besitzt. Das ist allerdings ein Widerspruch zur Voraussetzung $K \geq 1$ und unsere Annahme muss daher falsch gewesen sein.

Beweisskizze, Abspaltargument: Wir haben nun gezeigt, dass das Polynom f — das wir im Folgenden auch f_K nennen — mindestens eine Nullstelle besitzt. Wie wählen nun diese bzw. eine und nennen sie z_K . Für $K = 1$ sind wir auch schon fertig und im Fall von $K \geq 2$ schließen wir, dass

$$f_K(z) = (z - z_K) f_{K-1}(z)$$

für ein Polynom f_{K-1} vom Grad $K - 1$ gelten muss. Dieses Argument haben wir schon oft benutzt, denn f_{K-1} kann in jedem konkreten Fall mittels Polynomdivision aus f_K berechnet werden. Die Existenz von f_{K-1} kann aber auch abstrakt wie folgt begründet werden: Wir schreiben f_K als Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt z_K . Dabei werden — wegen $f_K(z_K) = 0$ sowie $f_K^{(k)}(z) = 0$ für $k > K$ und alle $z \in \mathbb{C}$ — höchstens die Terme mit den Potenzen $(z - z_K)^1, \dots, (z - z_K)^K$ nicht verschwinden und wir können anschließend gliedweise durch $(z - z_K)$ dividieren. Dies liefert

$$f_{K-1}(z) = \sum_{k=1}^K \frac{f_K^{(k)}(z_K)}{k!} (z - z_K)^{k-1} = \frac{1}{1!} f_K^{(1)}(z_K) + \dots + \frac{1}{K!} f_K^{(K)}(z_K) (z - z_K)^{K-1},$$

wobei wir dann wieder ausmultiplizieren können.

Beweisskizze, rekursives Argument: Der springende Punkt ist, dass der erste Teil des Beweises sinngemäß auch auf das Polynom f_{K-1} angewendet werden kann. Dies liefert die Existenz von z_{K-1} als Nullstelle von f_{K-1} , sodass wir analog zum zweiten Schritt

$$f_{K-1}(z) = (z - z_{K-1}) f_{K-2}(z)$$

schreiben können, wobei f_{K-2} nun ein Polynom vom Grad $K - 2$ ist, auf dass im Anschluss nochmal der erste Beweisschritt angewendet wird. Diese Argumentationskette kann solange wiederholt werden, bis wir insgesamt K Nullstellen erhalten und sukzessive K Linearfaktoren abgespalten haben. \square

Bemerkungen

1. Oftmals benutzen wir die alternative Darstellungsformel

$$f(z) = \alpha_K (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_L)^{n_L},$$

wobei die z_l nun die paarweise verschiedenen Nullstellen sind und der Exponent $n_l \in \mathbb{N}$ die algebraische Vielfachheit von z_l genannt wird.

2. Wir können den Fundamentalsatz auch wie folgt formulieren: Jedes komplexe Polynom vom Grad K besitzt bei richtiger Zählung genau K Nullstellen.
3. Die Beweisidee kann nicht im Fall $K = \infty$ (Potenzreihen) verwendet werden, da dann die Funktion g aus dem Beweis nicht mehr beschränkt sein muss. Das Standardbeispiel ist die Funktion $f(z) = \exp(z)$, die auf $D = \mathbb{C}$ gar keine Nullstelle (und nicht etwa unendlich viele) besitzt. Für jedes $K < \infty$ hat aber die „abgeschnittene Exponentialreihe“ $f(z) = \sum_{k=0}^K z^k/k!$ als Polynom K Nullstellen.

Theorem (Maximumprinzip) Ist f holomorph, aber nicht konstant, auf einer offenen Menge D , so besitzt $|f|$ kein lokales Maximum in D . Das Maximum von $|f|$ kann also nur am Rand ∂D angenommen werden.

Beweisskizze: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass es einen strikten Maximierer $z_* \in D$ gibt, sodass

$$|f(z_*)| > |f(z)|$$

für alle $z \in D$ mit $z \neq z_*$ gilt. Da D offen ist, gibt es einen Radius $\varepsilon > 0$, sodass die Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_*)$ und ihr Rand ganz in D liegen. Die Integralformel von Cauchy bzw. die aus ihr abgeleitete Mittelwerteigenschaft implizieren

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z - z_*} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_* + \varepsilon \exp(it)) dt$$

und damit auch

$$|f(z_*)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_* + \varepsilon \exp(it))| dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_*)| dt = |f(z_*)|.$$

Diese Ungleichung impliziert den Widerspruch $|f(z_*)| < |f(z_*)|$ und wir schließen, dass die Annahme von oben falsch gewesen sein muss. \square

Bemerkungen

1. Die Funktion $|f|$ ist in natürlicher Weise durch $|f|(z) = |f(z)|$ definiert.
2. Unsere Beweisskizze ist nicht ganz wasserfest, denn es könnte ja nicht-strikte Maximierer von $|f|$ in D geben. Der richtige Beweis enthält daher noch einige argumentative Schlenker, die wir hier aber nicht darstellen wollen.
3. Es gibt kein Minimumprinzip, denn $|f|$ kann sehr wohl sein Minimum in einem inneren Punkt von D annehmen, zum Beispiel in komplexen Nullstellen z_* mit $|f(z_*)| = 0$.
4. Wir haben nur vorausgesetzt, dass der Definitionsbereich D eine offene Menge ist. Insbesondere muss D kein elementares Cauchy-Gebiet sein und darf Löcher und/oder einen fraktalen Rand besitzen.

Beispiele

1. Mit $D = B_1(0)$ und $f(z) = 1/(z - i)$ ergibt sich via $z = x + iy$ die Formel

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{x + i(y-1)} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} - i \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{g(x, y)}}$$

mit $g(x, y) = x^2 + (y-1)^2$. Mit einfachen reellen Rechnungen (zum Beispiel mit Hilfe der Multiplikatorenregel) zeigen wir nun, dass der Punkt $(0, -1)$ bzw. $(0, +1)$ der eindeutige Maximierer bzw. Minimierer von g auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist. Damit erhalten wir

$$\frac{1}{2} |f(-i)| < |f(z)| < \infty = |f(+i)|$$

d.h. in diesem Beispiel nimmt die Funktion $|f|$ in $B_1(0)$ weder ihr Minimum noch ihr Maximum an, sondern beide werden in Randpunkten realisiert.

2. Betrachten wir den Sinus als holomorphe Funktion auf der Menge $D = B_\varrho(0)$, so kann für jedes $z \in B_\varrho(0)$ die Abschätzung

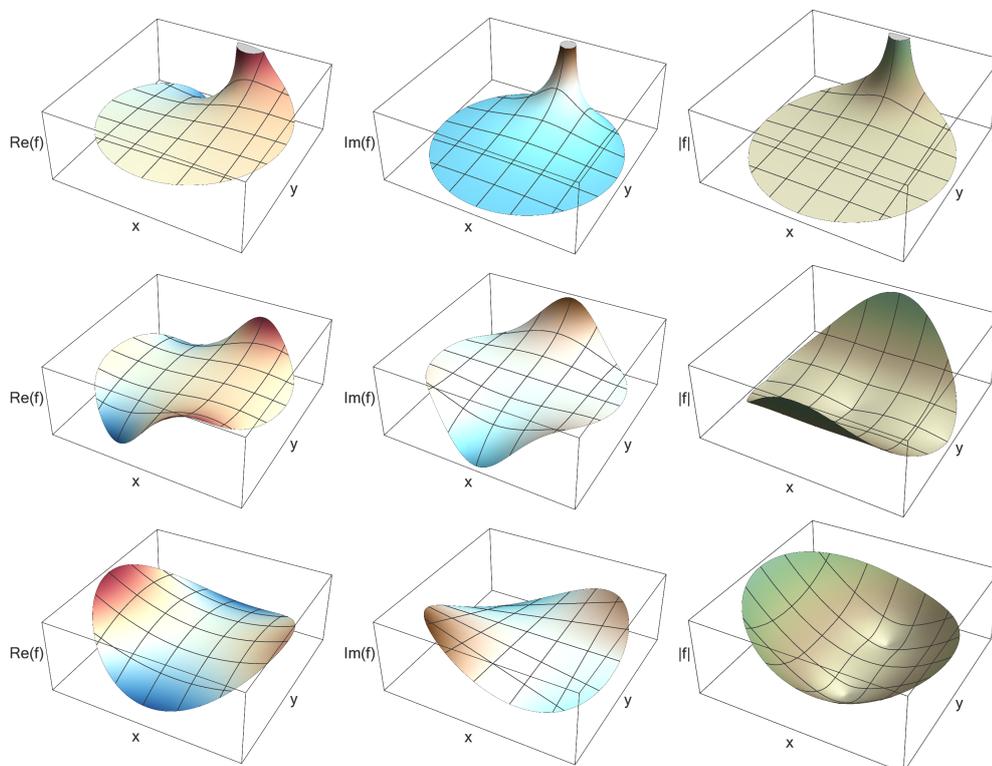
$$|f(z)| < |f(\pm \varrho i)| = \sinh(\varrho)$$

mit reellen Rechnungen und unter Verwendung von

$$f(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$$

gezeigt werden. Das Maximum von $|f|$ wird hier also in zwei Randpunkten angenommen, nämlich in $\pm i \varrho$. Das entsprechende Minimum wird hingegen in jeder Nullstelle der Sinusfunktion und damit insbesondere im Punkt 0 realisiert.

3. Die konstante Funktion $f(z) = 1$ ist holomorph und nimmt in jedem Punkt von $D = \mathbb{C}$ sein Maximum und sein Minimum an. Dieser Entartungsfall wird im Theorem ausgeschlossen.



Drei holomorphe Funktionen f auf der Kreisscheibe $B_\varrho(0)$, wobei in jeder Zeile der Graph von $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$ und $\sqrt{u^2 + v^2} = |f|$ als Funktion in den Variablen $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$ dargestellt sind. *Oben:* $f(z) = 1/(z - i)$ mit $\varrho = 1$, siehe das erste Beispiel. *Mitte:* $f(z) = \sin(z)$ mit $\varrho = \pi$, siehe das zweite Beispiel. *Unten:* $f(z) = z^2 - z + 2$ mit $\varrho = 3$.

2.5 Komplexe Logarithmen und Potenzen

Vorbemerkung In diesem Abschnitt diskutieren wir noch einmal Logarithmen und allgemeine Potenzen im Komplexen, wobei wir zunächst die zugrunde liegenden Mehrdeutigkeiten genauer untersuchen. Anschließend werden wir in Ergänzung der bereits bekannten Hauptwerte weitere Nebenwerte einführen, die jeweils auf einer anderen geschlitzten Ebene einen der vielen Werte auswählen und damit Potenz- und Logarithmusfunktionen liefern, die eindeutig definiert und außerdem holomorph sind.

Logarithmus als mengenwertige Abbildung Das prinzipielle Problem besteht im Komplexen darin, dass es für jede Zahl $z \neq 0$ viele komplexe Zahlen gibt, die man den Logarithmus von z nennen kann. Genauer gesagt, wir definieren

$$\mathbf{Ln}(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \exp(\zeta) = z\}$$

und wollen zunächst verstehen, welche Elemente diese Menge besitzt bzw. welche Kandidaten es für den Logarithmus von z gibt. Dazu schreiben wir

$$z = |z| \exp(i \arg(z)), \quad \zeta = \xi + i v$$

und erhalten nach Einsetzen in $z = \exp(\zeta)$ sowie durch Vergleich der Radius- und Winkelvariablen die Bedingungen

$$|z| = \exp(\xi), \quad \arg(z) = v \pmod{2\pi},$$

aus denen dann unmittelbar die Darstellungsformel

$$\mathbf{Ln}(z) = \left\{ \ln(|z|) + i(\arg(z) + k2\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für den mehrwertigen Logarithmus von z abgelesen werden kann. Insbesondere besitzt jedes Element dieser Menge denselben Realteil (nämlich den reellen Logarithmus von $|z| > 0$), aber die Imaginärteile unterscheiden sich. Die Mehrdeutigkeit ergibt sich dabei aus der Tatsache, dass Polarwinkel nur bis auf Vielfache von 2π festgelegt sind. Oder anders gesagt: Auch der Polarwinkel (bzw. das komplexe Argument) von z ist mehrdeutig, wobei für jedes z die Menge

$$\mathbf{Arg}(z) = \{\arg(z) + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

alle in Frage kommenden Werte enthält. Mit diesen Notationen können wir den Zusammenhang zwischen komplexem Logarithmus und komplexem Argument auch als

$$\mathbf{Ln}(z) = \ln(|z|) + i \mathbf{Arg}(z)$$

schreiben, wobei die Addition und Multiplikation auf der rechten Seite elementweise angewendet werden, d.h. es gilt $a + b\{\zeta_1, \zeta_2, \dots\} = \{a + b\zeta_1, a + b\zeta_2, \dots\}$ für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$.

Insbesondere sehen wir nun, dass alle Schwierigkeiten beim komplexen Logarithmus ausschließlich von der Mehrdeutigkeit des Polarwinkels stammen. Diese Mehrdeutigkeit war natürlich in unserer Vorlesung schon immer da, aber bisher nicht wirklich relevant bzw. relativ harmlos.

Beispiele Wegen $|i| = 1$ und $\arg(i) = \frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi$ erhalten wir

$$\mathbf{Ln}(i) = \left\{ \dots, -i\frac{7}{2}\pi, -i\frac{3}{2}\pi, +i\frac{1}{2}\pi, +i\frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$$

und

$$\mathbf{Ln}(1-i) = \ln(2) + \left\{ \dots, -i\frac{17}{4}\pi, -i\frac{9}{4}\pi, -i\frac{1}{4}\pi, +i\frac{7}{4}\pi, +i\frac{15}{4}\pi, +i\frac{23}{4}\pi, \dots \right\}$$

kann direkt aus der Polardarstellung $1-i = \sqrt{2} \exp(-i\pi/4)$ abgelesen werden.

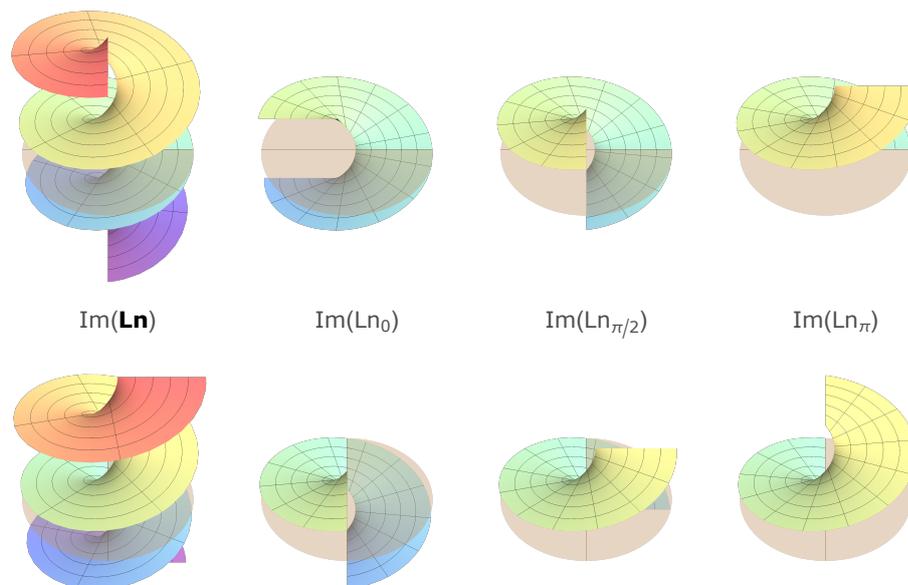
Bemerkung Für jede positive reelle Zahl $z = x + 0i$ gilt

$$\mathbf{Ln}(x) = \ln(x) + \left\{ \dots, -i4\pi, -i2\pi, 0, +i2\pi, +i4\pi, \dots \right\} \quad \text{für } x > 0,$$

d.h. auch in diesem Fall existieren unendlich viele komplexe Zahlen ζ mit $\exp(\zeta) = x$. Unter diesen gibt es aber nur eine reelle, nämlich $\ln(x)$. Für negative reelle Zahlen ergibt sich analog

$$\mathbf{Ln}(x) = \ln(-x) + \left\{ \dots, -i3\pi, -i\pi, +i\pi, +i3\pi, \dots \right\} \quad \text{für } x < 0,$$

aber diesmal finden wir keine reellen Elemente in dieser Menge. Der Logarithmus von 0 existiert aber auch im Komplexen nicht, da auch die komplexe Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt.



Zur Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus. *Linke Spalte:* Für jeden Punkt z aus der Einheitskreisscheibe (braun, mit markierter x -Achse) wurden senkrecht alle Werte für den Polarwinkel, d.h. alle Elemente aus $\mathbf{Arg}(z)$ aufgetragen. Insgesamt entsteht eine Wendelfläche, die gerade den Imaginärteil des mehrdeutigen Logarithmus beschreibt und die in der oberen bzw. unten Reihe von oben-vorne bzw. oben-links betrachtet wird. *Andere Spalten:* Jeder der unten eingeführten θ -Nebenwerte weist jedem z außerhalb des entsprechenden Schlitzes S_θ einen eindeutigen Polarwinkel bzw. Imaginärteil des komplexen Logarithmus zu, wodurch ein bestimmtes Stück der Wendelfläche ausgewählt wird. Diese Teilfläche schließt sich aber nicht, denn über dem Schlitz S_θ passen ihre Ränder nicht zusammen, sondern unterscheiden sich um den Wert 2π .

Potenzen als mengenwertige Abbildung Die zweite Beobachtung ist, dass wir mit Hilfe des Logarithmus auch allgemeine Potenzen (zum Beispiel Wurzeln) definieren bzw. berechnen können. Wir betrachten dazu für jedes $z \neq 0$ die Menge

$$\begin{aligned} \mathbf{Pow}_p(z) &:= \left\{ \exp(p\zeta) : \zeta \in \mathbf{Ln}(z) \right\} \\ &= \left\{ \exp(p \ln(|z|) + ip \arg(z) + ipk2\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\}, \end{aligned}$$

die alle Kandidaten für die p -te Potenz von z enthält. Dabei ist $p \in \mathbb{C}$ eigentlich ein beliebiger komplexer Exponent, aber wir wollen uns zunächst auf reelle p beschränken, da man für diese die Formel $\exp(p \ln(|z|)) = |z|^p$ benutzen kann.

Ein ganz wesentlicher Punkt ist nun, dass für gewisse Werte von p die Menge $\mathbf{Pow}_p(z)$ gar nicht unendlich viele, sondern nur endlich viele Werte enthält. Für einen ganzzahligen Exponenten $p = m \in \mathbb{Z}$ erhalten wir zum Beispiel mit der Nebenrechnung

$$\begin{aligned} \zeta \in \mathbf{Pow}_m(z) &\Rightarrow \zeta = \exp\left(m \ln(|z|) + i m \arg(z)\right) \exp(i m k 2\pi) \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \zeta = \left(\exp(\ln(|z|) + i \arg(z))\right)^m \\ &\Rightarrow \zeta = z^m \end{aligned}$$

die Formel

$$\mathbf{Pow}_m(z) = \{z^m\} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z}.$$

Die Mehrdeutigkeit des Logarithmus ist hier also verschwunden und die Menge $\mathbf{Pow}_m(z)$ besteht für jedes $z \neq 0$ aus einem einzigen Element, nämlich gerade der m -ten Potenz von z . Der Grund ist, dass $\exp(i m k 2\pi) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, sodass hier der Parameter k gar keine Rolle spielt. Für andere Wahlen von p erhalten wir jedoch andere Resultate.

Für $p = 1/2$ ergibt sich aus der obigen Definition die Zwei-Elemente-Menge

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(z) = \left\{ \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}}, \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2} + i \pi} \right\},$$

da $\exp(i \frac{1}{2} k 2\pi)$ für alle ganzzahligen k immer einen von genau zwei Werten annimmt, nämlich entweder $\exp(0) = +1$ (falls k gerade ist) oder $\exp(i \pi) = -1$ (für ungerade k). Aus der Mehrdeutigkeit des Logarithmus wird in diesem Fall also eine Zweideutigkeit und $\mathbf{Pow}_{1/2}(z)$ enthält gerade die beiden komplexen Quadratwurzeln von z . Oder anders gesagt: es gilt

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^2 = z\},$$

wobei wir die beiden Quadratwurzeln von z alternativ auch ohne Verwendung von Logarithmen berechnen können (siehe dazu den Anfang dieses Skriptes). Man benutzt manchmal auch die Kurzschreibweisen

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(z) = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}} \{-1, +1\} = \{\pm \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}}\},$$

da sich die beiden Wurzeln von z nur um den Faktor $\exp(i \pi) = -1$ unterscheiden.

Für $p = 1/3$ erhalten wir hingegen

$$\mathbf{Pow}_{1/3}(z) = \left\{ \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3}}, \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3} + i \frac{1}{3} 2\pi}, \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3} + i \frac{2}{3} 2\pi} \right\},$$

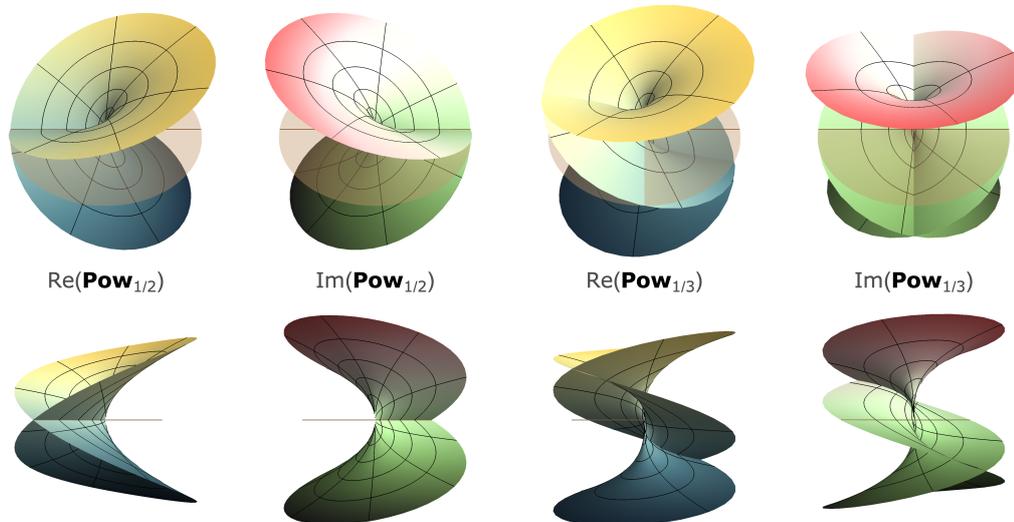
d.h. die Mehrdeutigkeit des Logarithmus ist diesmal eine Dreideutigkeit geworden. Der Grund ist, dass $\exp(i \frac{1}{3} k 2\pi)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ genau einen der Werte $\exp(i \frac{0}{3} 2\pi) = 1$, $\exp(i \frac{1}{3} 2\pi)$ oder $\exp(i \frac{2}{3} 2\pi) = \exp(-i \frac{1}{3} 2\pi)$ annimmt (je nachdem, welchen Rest

k bei Division durch 3 läßt). Insbesondere ist jedes der drei Elemente von $\mathbf{Pow}_{1/3}(z)$ eine dritte Wurzel von z und es gilt

$$\mathbf{Pow}_{1/3}(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3}} \left\{ 1, e^{i \frac{2}{3} \pi}, e^{i \frac{4}{3} \pi} \right\} = \{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta^3 = z \},$$

wobei der mittlere Ausdruck wieder eine Kurzschreibweise darstellt und diesmal die dritten Einheitswurzeln, also die drei Lösungen der Gleichung $\zeta^3 = 1$, enthält.

Ganz allgemein kann man sagen: Ist $p = m/n$ ein rationaler Exponent, so enthält $\mathbf{Pow}_{m/n}(z)$ genau n Elemente, nämlich die n -ten komplexen Wurzeln von z^m . Für jede andere Potenz p müssen wir aber davon ausgehen, dass $\mathbf{Pow}_p(z)$ unendlich viele Elemente besitzt.



Die zweite und dritte komplexe Wurzel als mehrdeutige Abbildung, wobei für jedes $z \neq 0$ aus der Einheitskreisscheibe (braune Fläche) die Real- bzw. Imaginärteile der zwei bzw. drei entsprechenden Wurzeln in senkrechter Richtung aufgetragen wurden. Insgesamt entstehen sogenannte Riemannsche Flächen, die sich in endlich vielen Raumkurven selbst durchdringen. Die obere bzw. untere Reihe der Bilder entspricht dabei einem Blick von vorne-oben bzw. vorne-links. Die unten eingeführten Nebenwerte wählen für jedes z eine Wurzel aus, so dass die Mehrdeutigkeit eliminiert wird und jeweils eine holomorphe Funktion entsteht. Siehe dazu das Bild weiter unten.

Beispiele

1. Für $z = 1$ und $p = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir via

$$\mathbf{Pow}_{1/n}(1) = \left\{ e^{i \frac{0}{n} 2\pi}, e^{i \frac{1}{n} 2\pi}, \dots, e^{i \frac{n-1}{n} 2\pi} \right\}$$

die n -ten Einheitswurzeln bzw. die Eckpunkte des regulären Standard- n -Ecks (siehe auch *Mathe-1*), wobei natürlich $e^{i \frac{0}{n} 2\pi} = 1$ gilt.

2. Für $z = i$ und $p = i$ erhalten wir

$$\mathbf{Ln}(i) = i \mathbf{Arg}(i), \quad \mathbf{Arg}(i) = \left\{ \dots, -\frac{3}{2} \pi, +\frac{1}{2} \pi, +\frac{5}{2} \pi, +\frac{9}{2} \pi, \dots \right\}$$

sowie

$$\mathbf{Pow}_i(i) = \left\{ e^{-\zeta} : \zeta \in \mathbf{Arg}(i) \right\} = \left\{ \dots, e^{+\frac{3}{2} \pi}, e^{-\frac{1}{2} \pi}, e^{-\frac{5}{2} \pi}, e^{-\frac{9}{2} \pi}, \dots \right\},$$

d.h. alle Kandidaten für die i -te Potenz von i sind reell und positiv.

Bemerkungen

1. Bei allen Betrachtungen ist $z = 0$ immer ausgeschlossen, denn es gibt keine komplexe Zahl ζ mit $\exp(\zeta) = 0$. Insbesondere gilt $\mathbf{Ln}(0) = \emptyset$ (leere Menge) und damit auch $\mathbf{Pow}_p(0) = \emptyset$ für alle Exponenten $p \in \mathbb{C}$. Im Fall $p \in \mathbb{R}_+$ könnte man aber auch $\mathbf{Pow}_p(0) = \{0\}$ als Ausnahme von der Regel vereinbaren.
2. Die Mehrdeutigkeit von \mathbf{Ln} und \mathbf{Pow} kann auch geometrisch interpretiert bzw. verstanden werden (siehe die Bilder), aber die entsprechende Theorie liegt jenseits unserer Möglichkeiten.
3. Es ist mühsam, mit mehrdeutigen Größen bzw. mengenwertigen Abbildungen zu rechnen, und alles andere als trivial, geeignete Differentiations- und Integrationskonzepte einzuführen. Auf der anderen Seite will man in vielen Anwendungen mit komplexen Wurzeln und Logarithmen rechnen. Aus diesem Grund werden wir nun lokal eindeutige Varianten des Logarithmus bzw. allgemeiner Potenzen einführen, wobei wir die wesentlichen Ideen bereits in einem Spezialfall kennengelernt hatten.

eindeutige Logarithmen und Potenzen auf geschlitzten Ebenen Für jeden Winkelparameter $\theta \in \mathbb{R}$ betrachten wir die geschlitzte Ebene

$$D_\theta = \mathbb{C} \setminus S_\theta, \quad S_\theta := \{-r \exp(i\theta) : r \in [0, \infty)\}$$

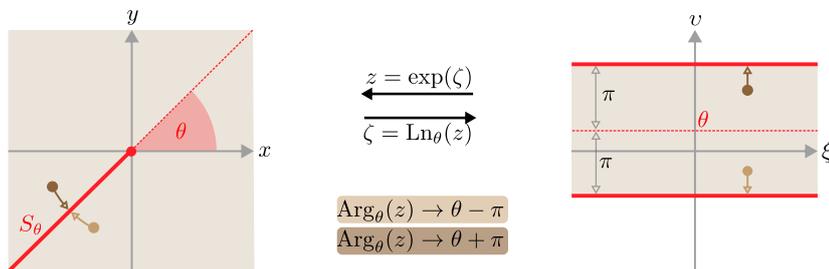
sowie die dazugehörige Argumentfunktion

$$\text{Arg}_\theta : D_\theta \rightarrow (\theta - \pi, \theta + \pi),$$

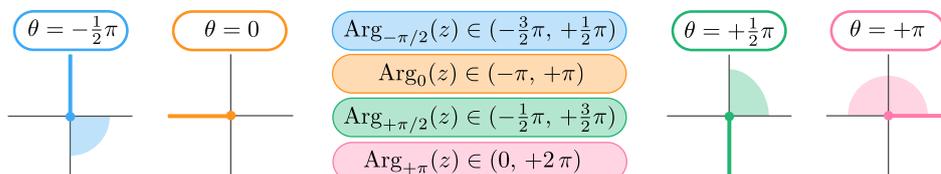
die jeder komplexen Zahl $z \notin S_\theta$ in *eindeutiger Weise* denjenigen Winkel aus $\mathbf{Arg}(z)$ zuweist, dessen Wert *größer als* $\theta - \pi$ und *kleiner als* $\theta + \pi$ ist (siehe Bild). Mithilfe dieses eindeutigen Winkels $\text{Arg}_\theta(z)$ können wir nun durch

$$\text{Ln}_\theta(z) := \ln(|z|) + i \text{Arg}_\theta(z), \quad \text{Pow}_{p,\theta}(z) := \exp(p \text{Ln}_\theta(z))$$

den entsprechenden θ -Nebenwert (auch θ -Zweig oder θ -Ast genannt) des komplexen Logarithmus bzw. der p -ten Potenz einführen.



Zur Definition der Nebenwerte Ln_θ und Arg_θ auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus S_\theta$, die das Bild eines horizontalen Streifens unter der Exponentialfunktion ist. Beachte, dass der Ursprung immer zum Schlitz gehört und dass $\mathbb{C} \setminus S_\theta$ immer offen sowie einfach zusammenhängend ist.



Definitions- und Wertebereich der Argumentfunktion Arg_θ für vier verschiedene Wahlen von θ . Der Fall $\theta = 0$ (orange) entspricht dem Hauptwert.

Bemerkungen

1. Für $\theta = 0$ ergeben sich gerade die früher eingeführten Hauptwerte.
2. In der ingenieurmathematischen Literatur finden sich häufig Logarithmus- oder Wurzelformeln wie zum Beispiel „ $f(z) = \ln(z^2 - 1)$ “ oder „ $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ “ mit dem Zusatz „wobei ein geeigneter Ast des Logarithmus bzw. der Wurzel zu wählen ist“. Gemeint ist dann meistens $f(z) = \text{Ln}_\theta(z^2 - 1)$ bzw. $f(z) = \text{Pow}_{1/2, \theta}(z^2 - 1)$ für ein zu wählendes θ , wobei die richtige Wahl von θ bzw. des Schlitzes S_θ nicht immer offensichtlich ist. Um solche Unklarheiten zu vermeiden, benutzen wir die Funktion \ln sowie das Wurzelsymbol in dieser Vorlesung ausschließlich für nichtnegative reelle Zahlen, aber niemals für andere komplexe Zahlen.
3. Wir schreiben zum Beispiel

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(-1) = \{-i, +i\}$$

und

$$\text{Pow}_{1/2, -\pi/2}(-1) = -i, \quad \text{Pow}_{1/2, +\pi/2}(-1) = +i,$$

aber niemals „ $\sqrt{-1} = i$ “, obwohl man dies leider sehr oft liest. Die beiden letzten Formeln ergeben sich unmittelbar aus

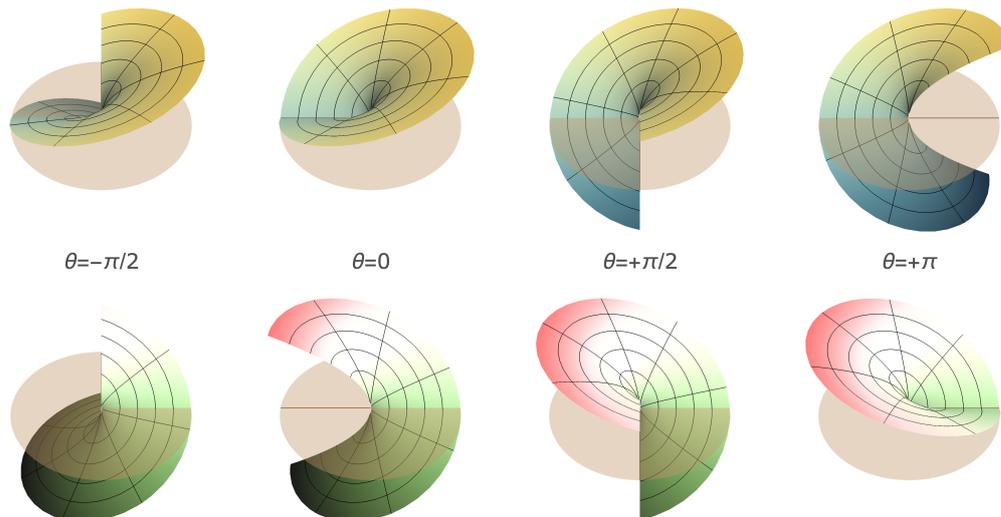
$$\text{Arg}_{-\pi/2}(-1) = -\pi, \quad \text{Arg}_{+\pi/2}(-1) = +\pi,$$

denn für $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ müssen wir den Winkel für $z = -1$ aus dem offenen Intervall $(-\frac{3}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$, für $\theta = +\frac{1}{2}\pi$ jedoch aus $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{3}{2}\pi)$ wählen. Beachte auch, dass $\text{Pow}_{1/2, 0}(-1)$ bei uns nicht definiert ist, da es für $z = -1$ keinen Winkel in $(-\pi, +\pi)$ gibt.

4. Wie schon bei den Hauptwerten können wir mit dem reellen Arkustangens oder dem Arkuskotangens explizite Formeln für Arg_θ herleiten, müssen aber in Abhängigkeit von θ gewisse Fallunterscheidungen treffen (siehe das Beispiel). Dabei dürfen wir nicht vergessen, dass unsere Formel immer Werte zwischen $\theta - \pi$ und $\theta + \pi$ liefern muss.
5. Für $z \in S_\theta$ ist der Nebenwert $\text{Arg}_\theta(z)$ nicht definiert, da sowohl der Wert $\theta - \pi$ als auch der Wert $\theta + \pi$ in Frage kommen. Dementsprechend sind auch Ln_θ und $\text{Pow}_{p, \theta}$ auf S_θ nicht definiert, sondern weisen am Schlitz im Allgemeinen Sprungunstetigkeiten auf.
6. Die Nebenwerte Arg_θ und $\text{Arg}_{\theta+2\pi}$ bzw. Ln_θ und $\text{Ln}_{\theta+2\pi}$ sind nicht gleich, da sie wegen $S_\theta = S_{\theta+2\pi}$ zwar denselben Definitionsbereich, aber unterschiedliche Wertebereiche besitzen. Insbesondere gilt $\text{Arg}_{\theta+2\pi}(z) = \text{Arg}_\theta(z) + 2\pi$ sowie $\text{Ln}_{\theta+2\pi}(z) = \text{Ln}_\theta(z) + i2\pi$ für alle $z \notin S_\theta$. Für jeden Exponenten p ergibt sich damit $\text{Pow}_{p, \theta+2\pi}(z) = \text{Pow}_{p, \theta}(z) \exp(ip2\pi)$.
7. Für reelle Parameter $b > 0$ können über die Formeln

$$\mathbf{Log}_b(z) = \frac{1}{\ln(b)} \mathbf{Ln}(z), \quad \text{Log}_{b, \theta}(z) = \frac{1}{\ln(b)} \text{Ln}_\theta(z)$$

auch mehrdeutige bzw. eindeutige komplexe Logarithmen zur Basis b eingeführt werden, aber diese werden nur selten benutzt.



Graphen des Realteils (oben) sowie des Imaginärteils (unten) der eindeutigen Quadratwurzel $\text{Pow}_{1/2, \theta}$ für vier verschiedene Wahlen von θ , dargestellt über der Einheitskreisscheibe, wobei $\theta = 0$ dem Hauptwert entspricht. Beachte die Unstetigkeiten über dem jeweiligen Schlitz S_θ (braune Linie). Werden zusätzlich noch die Graphen des Real- bzw. Imaginärteils von $-\text{Pow}_{1/2, \theta}$ geplottet, so entsteht für jedes θ insgesamt gerade die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel aus dem Bild oben. Oder anders gesagt: Der Wert von θ entscheidet darüber, wo die Riemannsche Fläche „aufgeschnitten“ und welcher der entstehenden Teile ignoriert bzw. als Wurzelfunktion verwendet wird.

Beispiel Für $\theta = \pi$ gilt zum Beispiel

$$(0, 2\pi) \ni \text{Arg}_\pi(z) = \begin{cases} \text{arccot}(+x/y) & \text{für } y > 0, \\ \pi & \text{für } y = 0, \\ 2\pi - \text{arccot}(-x/y) & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

und impliziert explizite Formeln für Ln_π und $\text{Pow}_{\pi, p}$, aber keiner dieser π -Nebenwerte ist für positive reelle Zahlen definiert. Wir können alternativ auch immer mit den Definitionen sowie einfachen geometrischen Argumenten arbeiten. So gilt zum Beispiel

$$\text{Arg}_\pi(+2i) = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(+2i) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(2) + i \frac{1}{4}\pi\right) = 1 + i$$

sowie

$$\text{Arg}_\pi(-3) = \pi, \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(-3) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(3) + i \frac{1}{2}\pi\right) = i\sqrt{3}$$

und

$$\text{Arg}_\pi(-4i) = \frac{3}{2}\pi, \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(-4i) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(4) + i \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}(-1 + i),$$

wobei die Ergebnisse für $\text{Pow}_{1/2, \pi}(z)$ sich direkt aus der richtigen Wahl des Winkels $\text{Arg}_\pi(z)$ ergeben (der wegen $\theta = \pi$ hier zwischen 0 und 2π liegen muss).

Durch Betrachtung der vier Quadranten sowie der sukzessiven Änderung des Polarwinkels unter $\zeta \mapsto \zeta^2 \mapsto \text{Pow}_{1/2, \pi}(\zeta^2)$ können wir außerdem

$$\text{Im}(\zeta) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(\zeta^2) = +\zeta$$

sowie

$$\text{Im}(\zeta) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(\zeta^2) = -\zeta$$

herleiten (Übungsaufgabe) und schließen nach Vergleich mit den analogen Ergebnissen für die Hauptwerte, dass das richtige Vorzeichen in der Formel $\text{Pow}_{1/2, \theta}(\zeta^2) = \pm\zeta$ nach Regeln zu wählen ist, die sowohl von ζ als auch von θ abhängen.

Theorem (Eigenschaften der θ -Nebenwerte) Für jede Wahl von θ gelten die folgenden Aussagen auf der offenen Menge D_θ :

1. Ln_θ ist wegen

$$\exp(\text{Ln}_\theta(z)) = z,$$

eine lokale Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und bildet D_θ biholomorph auf den horizontalen Streifen

$$\left\{ \zeta = \xi + i v : \theta - \pi < v < \theta + \pi \right\}$$

ab.

2. Ln_θ ist holomorph und via

$$\text{Ln}'_\theta(z) = \frac{1}{z}$$

eine lokale Stammfunktion des Fundamentalmonoms auf D_θ .

3. Für jeden Exponenten $p \in \mathbb{C}$ ist $\text{Pow}_{p,\theta}$ holomorph mit

$$\text{Pow}'_{p,\theta}(z) = p \text{Pow}_{p-1,\theta}(z).$$

Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gilt darüberhinaus $\text{Pow}_{m,\theta}(z) = z^m$.

4. Arg_θ ist stetig, aber als reellwertige Funktion nicht holomorph.

Beweis: Wir hatten alle Aussagen bereits für die Hauptwerte etabliert und können, mit leichten Modifikationen, dieselben Argumente auch für $\theta \neq 0$ verwenden. \square

Bemerkung

1. Man kann außerdem zeigen: Jede lokale Stammfunktion von $f(z) = 1/z$ ist ein Logarithmus, d.h. eine lokale Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Wir können daher, analog zum Hauptwert, Ln_θ auch durch Wegintegrale in der geschlitzten Ebene D_θ berechnen.
2. Die Sonderrolle des Exponenten -1 bei den Monomen kann auch wie folgt verstanden werden: Die Funktion $f(z) = z^k$ besitzt für $k \leq -2$ und $k \geq 0$ eine globale Stammfunktion auf den gesamten Definitionsbereich von f . Für $k = -1$ gibt es jedoch nur lokale Stammfunktionen auf gewissen Teilmengen des Definitionsbereichs.

Verallgemeinerung* Die oben eingeführten Nebenwerte gehören zu einem Schlitz in Form einer Halbgeraden. Im Prinzip können wir aber als Schlitz jede stetige Kurve verwenden, die in 0 startet, in den unendlich fernen Punkt ∞ läuft und keine Doppelpunkte besitzt (zum Beispiel Spiralkurven). Außerhalb eines solchen Schlitzes werden immer entsprechende Nebenwerte des Logarithmus und der Potenzen sowie eine Stammfunktion zu $f(z) = 1/z$ existieren, obwohl die Formeln natürlich sehr kompliziert sein können.

Die Rolle des Schlitzes S ist dabei immer dieselbe: Er verhindert, dass wir in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus S$ mit einem geschlossenen Weg um den Ursprung herumlaufen können. Oder anders gesagt: Jede geschlossene Kurve, die den Punkt 0 umläuft, muss den Schlitz S in mindestens einem Punkt schneiden und kann daher nicht ganz in $\mathbb{C} \setminus S$ verlaufen. Beachte auch, dass es auf der ganzen punktierten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ weder eine Stammfunktion des Fundamentalmonoms noch einen holomorphen Logarithmus gibt.

Rechenregeln für komplexe Logarithmen und Wurzeln Für positive reelle Zahlen gilt bekanntlich

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad \ln(x^2) = 2 \ln(x)$$

und

$$(x_1 x_2)^{1/n} = x_1^{1/n} x_2^{1/n}, \quad (x^2)^{1/n} = (x^{1/n})^2.$$

Diese und ähnliche Rechenregeln dürfen aber **nicht** direkt ins Komplexe übertragen werden, wobei die Nebenwerte viel kritischer als die mengenwertigen Funktionen sind.

Beispiele

1. Für den Hauptwert $\text{Ln} = \text{Ln}_0$ berechnen wir

$$\text{Ln}_0(-i) = i \text{Arg}_0(-i) = -i \frac{1}{2} \pi, \quad \text{Ln}_0(+i) = i \text{Arg}_0(+i) = +i \frac{1}{2} \pi,$$

aber $-1 = (-i)^2 = (+i)^2$ gehört überhaupt nicht zum Definitionsbereich von Ln_0 . Es kann daher keine einfache Regel geben, wie $\text{Ln}_0(z^2)$ aus $\text{Ln}_0(z)$ berechnet werden kann.

2. Für $\theta = \pi$ sind die entsprechenden Nebenwerte zwar in $-i$, $+i$ und -1 definiert, aber aus

$$\text{Ln}_\pi(-i) = i \frac{3}{2} \pi, \quad \text{Ln}_\pi(+i) = i \frac{1}{2} \pi, \quad \text{Ln}_\pi(-1) = i \pi$$

folgt

$$2 \text{Ln}_\pi(-i) \neq \text{Ln}_\pi(-1) = 2 \text{Ln}_\pi(+i).$$

Wir sehen also auch hier, dass eine naive Übertragung der reellen Logarithmusgesetze ins Komplexe nicht möglich ist. Mit ähnlichen Rechnungen erhalten wir

$$\text{Pow}_{1/2, \pi}(-1) = \exp\left(i \frac{1}{2} \pi\right) = +i$$

sowie

$$\left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(-i)\right)^2 = \left(\exp\left(i \frac{3}{4} \pi\right)\right)^2 = \exp\left(i \frac{3}{2} \pi\right) = -i$$

und

$$\left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(+i)\right)^2 = \left(\exp\left(i \frac{1}{4} \pi\right)\right)^2 = \exp\left(+i \frac{1}{2} \pi\right) = +i.$$

Insbesondere gilt

$$\left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(-i)\right)^2 \neq \text{Pow}_{1/2, \pi}(-1) = \left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(+i)\right)^2,$$

und wir schließen, dass auch die Rechengesetze der reellen Quadratwurzeln im Komplexen im Allgemeinen nicht richtig sind.

Merksätze

1. Bei Logarithmen und allgemeinen Potenzen darf man im Komplexen **nicht** wie im Reellen rechnen!
2. Für *ganzzahlige* Exponenten $m \in \mathbb{Z}$ gilt aber auch im Komplexen die Formel $(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m$, da solche Potenzen ohne Logarithmen, sondern allein durch Multiplikationen und Divisionen, berechnet werden können.
3. Zusatz für Fortgeschrittene**: Wenn die reellen Rechenregeln doch angewendet werden, so kann bei Logarithmen nur ein additiver Fehler der Bauart $i k 2 \pi$ und bei p -ten Potenzen nur ein multiplikativer Fehler der Bauart $\exp(i p 2 \pi)^k$ entstehen, wobei k jeweils eine ganze Zahl ist.

Bemerkungen*

1. Mit den obigen Definitionen verifizieren wir zum Beispiel die Darstellungsformeln

$$\mathbf{Ln}(2i) = \ln(2) + i \frac{1}{2} \pi + \{ \dots, -i 4 \pi, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, +i 4 \pi, \dots \}$$

und

$$\mathbf{Ln}(-4) = 2 \ln(2) + i \pi + \{ \dots, -i 4 \pi, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, +i 4 \pi, \dots \}.$$

Insbesondere gilt zwar $-4 = (2i)^2$, aber eben auch

$$\mathbf{Ln}(-4) \neq 2 \mathbf{Ln}(2i),$$

da nicht jedes Element von $\mathbf{Ln}(-4)$ das Doppelte einer Zahl aus $\mathbf{Ln}(2i)$ ist.

2. Es gilt aber immer

$$\mathbf{Ln}(z^2) - 2 \mathbf{Ln}(z) = \{ \dots, -i 4 \pi, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, +i 4 \pi, \dots \}$$

in dem Sinne, dass die Differenz zwischen irgendeinem Element aus $\mathbf{Ln}(z^2)$ und dem Doppelten irgendeines Elements von $\mathbf{Ln}(z)$ immer ein Vielfaches von $i 2 \pi$ ist. Etwas allgemeiner kann man die mengenwertige Gleichung

$$\mathbf{Ln}(z_1 z_2) - \mathbf{Ln}(z_1) - \mathbf{Ln}(z_2) = \{ \dots, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, \dots \}$$

herleiten, die man aber auch wieder richtig interpretieren muss.

3. Bei den Potenzen gilt immer

$$\mathbf{Pow}_p(z_1 z_2) = \mathbf{Pow}_p(z_1) \mathbf{Pow}_p(z_2),$$

sofern das „Mengenprodukt“ auf der rechten Seite im Sinne von „jeder mit jedem“ verstanden wird.

Weitere abgeleitete Funktionen* Man kann mit Hilfe von Logarithmen auch auch holomorphe Varianten der trigonometrischen Funktionen einführen. Wir wollen diesen Aspekt hier nicht vertiefen, sondern nur ein prototypisches Beispiel angeben. Für jeden Winkelparameter θ liefert die Formel

$$\operatorname{Arctan}_\theta(z) = \frac{\operatorname{Ln}_\theta(1 + iz) - \operatorname{Ln}_\theta(1 - iz)}{2i}$$

einen Ast des komplexen Arkustangens, wobei der entsprechende Definitionsbereich in natürlicher Weise durch die beiden Bedingung

$$1 - iz \notin S_\theta, \quad 1 + iz \notin S_\theta$$

festgelegt ist. Insbesondere kann nun nachgerechnet werden, dass $\operatorname{Arctan}_\theta$ auf einer doppelt geschlitzten Ebene definiert und dort auch holomorph ist. Alternativ können wir natürlich auch wieder die mengenwertige Variante

$$\operatorname{Arctan}(z) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \tan(\zeta) = z \right\}$$

studieren, um einen vollständiges Bild der zugrunde liegenden Mehrdeutigkeit zu erhalten.

2.6 Nullstellen und Polstellen

Theorem (Nullstellen holomorpher Funktionen) Besitzt die holomorphe, aber nicht konstante Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ein Nullstelle in z_* , so kann die Vielfachheit k_* dieser Nullstelle auf die folgenden drei Weisen charakterisiert werden:

1. Die ersten k_* Ableitungen von f verschwinden in z_* , d.h.

$$f^{(0)}(z_*) = 0, \quad f^{(1)}(z_*) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k_*-1)}(z_*) = 0,$$

aber es gilt $f^{(k_*)}(z_*) \neq 0$.

2. Es gilt

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{k_*-1} = 0$$

sowie $\alpha_{k_*} \neq 0$. Insbesondere gilt die lokale Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=k_*}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} + \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*+1} + \dots,$$

wobei $(z - z_*)^{k_*}$ die führende Potenz ist.

3. Die Funktion g mit

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k_*}}$$

besitzt eine lokale Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt z_* , die einen von Null verschiedenen konstanten Anteil, aber keine negativen Potenzen von $z - z_*$ enthält.

4. Die Funktion g ist auch im Punkt z_* im Sinne von

$$0 \neq g(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} g(z)$$

wohldefiniert, d.h. der Grenzwert auf der rechten Seite existiert und verschwindet nicht.

Darüber hinaus ist z_* immer eine isolierte Nullstelle, d.h. es gibt einen positiven (aber vielleicht sehr kleinen) Radius $\varepsilon > 0$, so dass f in $B_\varepsilon(z_*)$ keine weitere Nullstelle besitzt.

Beweisskizze: Die ersten vier Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus dem lokalen Entwicklungssatz, wobei die Eigenschaften von g in der Nähe von z_* aus der lokalen Reihendarstellung

$$g(z) = \alpha_{k_*} + \alpha_{k_*+1}(z - z_*) + \dots$$

abgelesen werden können. Der Beweis der letzten Behauptung (Existenz von ε) ist jedoch deutlich subtiler und soll hier nicht dargestellt werden. \square

Bemerkungen

1. Wir schreiben auch

$$\text{ord}_f(z_*) := k_*$$

und nennen k_* die Ordnung von f in z_* . Ist $z_* \in D$ keine Nullstelle von f , so setzen wir $\text{ord}_f(z_*) := 0$ und die Aussagen des Theorems gelten dann mit $k_* = 0$.

2. Eng verwandt mit dem Theorem über die Nullstellen ist der Identitätssatz für Potenzreihen. Dieser betrifft zwei verschiedene Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z - z_*)^k$$

mit demselben Entwicklungspunkt z_* und besagt das folgende:

Es gilt $\alpha_k = \beta_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ (und damit $f = g$) genau dann, wenn es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ gibt, so dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n gilt.

Die Hinrichtung dieser Aussage ist trivial, aber der Beweis der Rückrichtung erfordert einige Anstrengungen, die wir hier nicht darstellen wollen.

3. Der Identitätssatz impliziert, dass es — außer der trivialen Funktion mit $f(z) = 0$ für alle $z \in D$ — keine holomorphe Funktion gibt, die eine Nullstelle der Ordnung ∞ besitzt bzw. für die in einem Entwicklungspunkt z_* alle Taylor-Koeffizienten verschwinden.
4. Die Formel $g(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} g(z) = \alpha_{k_*}$ kann alternativ auch durch k_* -maliges Anwenden der Regel von l'Hospital begründet werden. Diese gilt auch im Komplexen, wobei die Herleitung ganz analog zum Reellen erfolgt.

Beispiel Die holomorphe Funktion

$$f(z) = \sin(z) - z + \frac{1}{6}z^3$$

besitzt in $z_* = 0$ eine fünffache Nullstelle, d.h. es gilt $\text{ord}_f(0) = 5$. Dies können wir auf vier verschiedene, aber paarweise äquivalente, Arten begründen bzw. interpretieren:

1. Es gilt

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

sowie $f^{(5)}(0) = \cos(0) \neq 0$, wobei wir dies zum Beispiel durch direkte Rechnungen verifizieren können.

2. Aus der Reihenentwicklung des Sinus folgt unmittelbar

$$f(z) = \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots\right) - z + \frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots$$

und wir sehen, dass der erste nicht-verschwindende Taylor-Term den Exponenten 5 besitzt, wobei $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ der entsprechende Koeffizient ist.

3. Die Laurent-Entwicklung von $g(z) = f(z)/z^5$ im Entwicklungspunkt $z_* = 0$ ist durch

$$g(z) = \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}z^2 + \frac{1}{9!}z^4 - \frac{1}{11!}z^6 + \dots$$

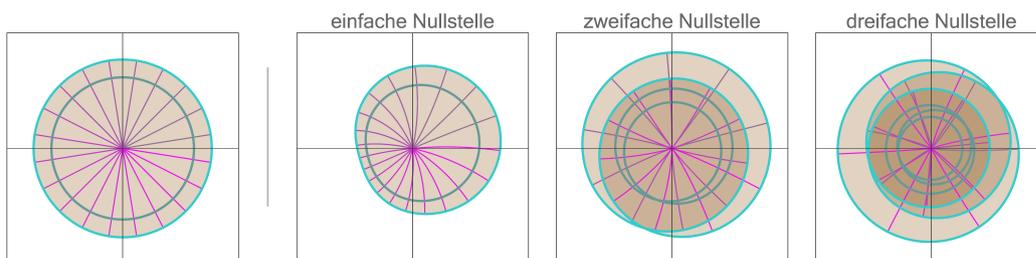
gegeben. Sie enthält keine negativen Potenzen, aber einen nicht verschwindenden konstanten Anteil, nämlich wieder $\frac{1}{120}$.

4. Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \rightarrow z_*$ gilt $g(z_n) \rightarrow \frac{1}{120}$, wobei wir dies bei Bedarf durch mehrfache Anwendung der Regel von l'Hospital (die auch im Komplexen gilt) ableiten können.

über die Anzahl der Nullstellen* Ist f holomorph auf D und G ein elementares Cauchy-Gebiet in D , so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\{z_* \in G : f(z_*)=0\}} \text{ord}_f(z_*),$$

sofern keine Nullstelle von f auf ∂G liegt. Insbesondere zählt das Kurvenintegral auf der linken Seite die Nullstellen von f in G unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit. Für Polynome hatten wir diese Formel (mit leicht anderer Notation auf der rechten Seite) schon mit Windungszahlen hergeleitet und für allgemeinere Funktionen f werden wir sie weiter unten mit einem anderen Argument begründen. Wir werden auch sehen, dass das nullstellenzählende Integral eigentlich eine Windungszahl im Bildraum von f ist. Siehe dazu das Bild.



Drei typische Beispiele für das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion f mit $f(0) = 0$, wobei $\text{ord}_f(0)$ die Werte 1, 2 bzw. 3 annimmt und jeweils dargestellt wird, wie eine kleine Kreisscheibe um 0 (ganz links) unter f deformiert wird. Die Vielfachheit der Nullstelle, also die Zahl $\text{ord}_f(0)$, gibt dabei gerade an, wie oft sich das Bild der Randkreislinie (türkis) im Bildraum um die 0 windet.

Isolierte Singularitäten

Definition Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so wird jeder Punkt $z_* \notin D$ eine isolierte Singularität von f genannt, sofern es einen Radius $\rho > 0$ gibt, so dass die punktierte Kreisscheibe $A_{0,\rho}(z_*) = B_\rho(z_*) \setminus \{z_*\}$ ganz in D liegt. Oder anders gesagt: Die isolierten Singularitäten von f sind gerade die *Einpunktlöcher* in D .

Beispiele

1. Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

besitzt eine isolierte Singularität in $z_* = 0$. Für $z \neq 0$ ergibt sich aber

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots}{z} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots$$

aus der Reihendarstellung des Sinus und wir können auf der rechten Seite problemlos $z = 0$ setzen. Die Singularität von f in 0 ist in diesem Beispiel also harmlos und wir werden sie unten als hebbar klassifizieren. Man könnte auch von einer *nur scheinbaren* Polstelle reden, aber diese Sprechweise hat sich nicht durchgesetzt.

2. Auch die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$$

besitzt eine isolierte Singularität in $z_* = 0$. Für $z \neq 0$ gilt die Reihendarstellung

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots}{z} = z^{-1} + 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots,$$

aber diesmal besitzt der führende Term einen negativen Exponenten und wir können nicht $z = 0$ setzen. Es handelt sich bei diesem Beispiel um eine Polstelle, d.h. um eine *echte* Singularität.

3. Die Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \dots + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-1} + 1$$

ist das Standardbeispiel für eine sogenannte wesentliche Singularität, da hier unendlich viele negative Potenzen von z auftreten bzw. berücksichtigt werden müssen.

Theorem (lokaler Entwicklungssatz für isolierte Singularitäten) Mit den Notationen aus der obigen Definition gilt: Es gibt eine Doppelfolge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen, so dass die lokale Laurent-Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k \quad \text{für alle } z \in A_{0,\rho}(z_*)$$

gilt. Sofern $\partial B_\rho(z_*)$ auch noch zu D gehört, können die Koeffizienten durch

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_*)} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz$$

berechnet werden.

zum Beweis: Wir wollen die Argumente hier nicht im Detail darstellen, da sie etwas länglich und trickreich sind. Wir wollen aber festhalten, dass nur die Existenz bzw. Konvergenz der Laurent-Reihe schwierig zu zeigen ist. Ist diese gesichert, so können wir die Integralformel für die Koeffizienten wie folgt ableiten: Nach Vertauschung von Summation und Integration ergibt sich für jedes $m \in \mathbb{Z}$ die Formel

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\rho(z_*)} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{m+1}} dz &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \int_{\partial B_\rho(z_*)} (z - z_*)^{k-m-1} dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= 2\pi i \alpha_m, \end{aligned}$$

wobei wir wieder benutzt haben, dass das Integral eines verallgemeinerten Monoms nur dann nicht verschwindet, wenn der Exponent -1 ist. \square

Bemerkungen

1. Die Formel im Theorem ist wieder die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel, die diesmal aber auch für negative Exponenten k ausgewertet wird.
2. Mit einem Deformationsargument kann man auch wieder die etwas allgemeinere Variante

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz$$

herleiten, wobei G ein elementares Cauchy-Gebiet ist, sodass $G \setminus \{z_*\}$ sowie ∂G ganz in D enthalten sind. Wir können anstelle von Kreislinien also zum Beispiel auch Rechteckswege benutzen.

3. Es gibt auch einen Identitätssatz für Laurent-Reihen. Dieser garantiert, dass die Koeffizienten α_k auf $A_{0,\rho}(z_*)$ eindeutig durch f bestimmt sind. Beachte aber, dass es daneben noch weitere Laurent-Reihendarstellungen auf anderen Kreisingen geben kann, für die dann ganz andere Koeffizienten zu verwenden sind (siehe dazu weiter unten)
4. Analog zu den Taylor-Reihen kann man zeigen, dass die Laurent-Reihe auf der größten punktierten Kreisscheibe $A_{0,\rho}(z_*)$ konvergiert, die gerade noch in D enthalten ist. Bei Konvergenzbetrachtungen können wir den Radius ρ also maximal wählen. Für die Berechnung der Kurvenintegrale für die α_k sind aber vor allem kleine Radien interessant.



Links: Für jede isolierte Singularität z_* (farbige Punkte) existiert eine entsprechende lokale Laurent-Reihendarstellung von f und diese konvergiert auf der größten punktierten Kreisscheibe $A_{0, \varrho}(z_*)$, die noch ganz in D liegt. Insbesondere wird der maximale Wert von ϱ durch den Rand von D und die Lage der anderen Singularitäten bestimmt. *Rechts:* Zu einem festen Entwicklungspunkt z_* (rot) kann es mehrere Laurent-Reihen mit verschiedenen Koeffizienten geben. Die entsprechenden maximalen Kreisringe (gelb, rosa, orange) sind dann disjunkt und werden durch (andere) isolierte Singularitäten (schwarz) getrennt.

Klassifikation und Ordnung Der Ausdruck

$$\text{ord}_f(z_*) = \inf \{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\}$$

wird die Ordnung der isolierten Singularität z_* genannt.

1. Im Fall von $\text{ord}_f(z_*) = -\infty$ gibt es unendlich viele, jeweils nicht verschwindende Koeffizienten α_k zu negativen Exponenten und z_* wird wesentliche Singularität genannt.
2. Bei einer Polstelle gilt $-\infty < \text{ord}_f(z_*) < 0$ und die entsprechende Laurent-Reihe enthält nur endlich viele, aber mindestens einen nicht-trivialen Term mit negativem Exponent k . Bei $\text{ord}_f(z_*) = -1$ bzw. $\text{ord}_f(z_*) = -2$ sprechen wir auch von einer einfachen bzw. zweifachen Polstelle.
3. Im Fall von $\text{ord}_f(z_*) \geq 0$ heißt z_* hebbare Singularität. Siehe dazu auch die Kommentare unten.

Die Ordnung einer isolierten Singularität liefert also – analog zur Ordnung von Nullstellen – die *führende Potenz* in der lokalen Reihendarstellung von f . Prototypische Beispiele hatten wir bereits oben diskutiert.

Zusammenfassung Isolierte Singularitäten von f können analog zu Nullstellen und anderen Punkten des Definitionsbereichs behandelt werden. Insbesondere gibt es immer eine lokale Reihendarstellung um z_* , wobei die Ordnung von f in z_* angibt, ob es sich dabei um eine Taylor- oder eine Laurent-Reihe handelt.

Klarstellung Es kann auch nicht-isolierte Singularitäten geben, zum Beispiel die Punkte im Schlitz beim Hauptwert des komplexen Logarithmus. Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe solcher Punkte kann deutlich komplizierter sein und wird in unserer Vorlesung nicht weiter untersucht werden. Auch die wesentlichen Singularitäten werden uns nicht weiter interessieren.

über hebbare Singularitäten Ist z_* eine hebbare Singularität von f , so ist die Laurent-Reihe eigentlich eine Taylor-Reihe und f kann mittels der Grenzwertformeln

$$f(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} f(z) = \alpha_0, \quad f'(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} f'(z) = \alpha_1, \quad \dots$$

als holomorphe Funktion im Punkt z_* angesehen werden, wobei $k_* = \text{ord}_f(z_*)$ gerade die entsprechende Ordnung ist. Insbesondere ist z_* im Fall von $k_* > 0$ eigentlich eine k_* -fache Nullstelle von f .

Beispiel Definieren wir die Funktion f durch die Formel

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z},$$

so besitzt f in 0 eine isolierte Singularität im Ursprung, da sowohl der Zähler als auch der Nenner für $z = 0$ verschwinden und $0/0$ auch im Komplexen nicht definiert ist. Es handelt sich aber um eine hebbare (oder *scheinbare*) Singularität, denn die Reihenentwicklung des Kosinus impliziert die Taylor-Darstellung

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \dots\right)}{z} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{24}z^3 + \dots$$

und damit $\text{ord}_f(0) = +1$. Insbesondere ist 0 eigentlich eine einfache Nullstelle von f .

Merkregel Hebbare Singularitäten können „wegdiskutiert“ werden. Für Polstellen gilt dies aber nicht.

Ordnung und Quotienten Gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

für zwei holomorphe Funktionen g und h auf U , so können wir

$$\text{ord}_f(z_*) = \text{ord}_g(z_*) - \text{ord}_h(z_*)$$

für jedes $z_* \in U$ mit lokalen Reihendarstellungen zeigen. Diese Formel ist besonders nützlich, wenn z_* eine gemeinsame Nullstelle von g und h ist. Sie besagt dann, dass eine m_* -fache Nullstelle dividiert durch eine n_* -fache Nullstelle für $m_* > n_*$ eine Nullstelle, bei $m_* < n_*$ aber eine Polstelle ergibt.

Multiple Reihendarstellungen mit gleichem Entwicklungspunkt*

noch ein Entwicklungssatz Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $A_{\varrho_-, \varrho_+}(z_*)$ ein Kreisring, der ganz in D liegt, so kann f auf diesem Kreisring als Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt z_* geschrieben werden. Dies gilt sowohl für Punkte $z_* \in D$ als auch für Punkte $z_* \notin D$ und die Koeffizienten α_k dieser Reihe genügen in jedem Fall der Cauchyschen Integralformel, sofern diese für einen Radius ϱ mit $\varrho_- < \varrho < \varrho_+$ ausgewertet wird.

Damit kann es zu einem gegebenen Entwicklungspunkt z_* mehrere Laurent-Reihen geben, die dann aber disjunkte Konvergenzkreise haben (siehe Bild). Beachte auch, dass im Falle von $z_* \in D$ die entsprechende Taylor-Reihe von f auch als Laurent-Reihe betrachtet werden kann, wobei dann alle Koeffizienten zu negativen Exponenten verschwinden.

Beispiel Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

die die zwei Polstellen 1 und 2 besitzt und holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ ist.

1. f besitzt Laurent-Reihendarstellungen auf den punktierten Kreisscheiben $A_{0,1}(1)$ und $A_{0,1}(2)$, wobei die jeweils andere Polstelle auf dem Rand liegt. Wir können die entsprechenden Laurent-Koeffizienten mithilfe von Kurvenintegralen berechnen, aber in diesem Beispiel ist es einfacher, wieder den *Trick mit der geometrischen Reihe* anzuwenden. Aus

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k$$

bzw.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(-1)(z-2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k$$

ergibt sich

$$\underline{0 < |z-1| < 1} : f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^{k-1} = -(z-1)^{-1} - 1 - (z-1) - \dots$$

bzw.

$$\underline{0 < |z-2| < 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^{k-1} = (z-2)^{-1} - 1 + (z-2) - \dots$$

Damit haben wir die lokalen Laurent-Entwicklungen identifiziert und können mit der Quotientenformel auch leicht nachprüfen, dass $A_{0,1}(1)$ bzw. $A_{0,1}(2)$ wirklich der entsprechende Konvergenzreisring ist.

2. f besitzt aber auch Laurent-Entwicklungen auf den Kreisringen $A_{1,\infty}(1)$ bzw. $A_{1,\infty}(2)$. Die entsprechenden Koeffizienten erfüllen die Gleichung

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(1)} \frac{f(z)}{(z-1)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(1)} \frac{dz}{(z-1)^{k+2} (z-2)}$$

bzw.

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(2)} \frac{f(z)}{(z-2)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(2)} \frac{dz}{(z-1)(z-2)^{k+2}},$$

wobei wir den Integrationsweg so gewählt haben, dass er ganz in $A_{1,\infty}(1)$ bzw. $A_{1,\infty}(2)$ liegt. Wir werden aber erst weiter unten sehen, wie man diese Integrale elegant berechnen kann. Im Moment wollen wir nochmal den *Trick mit der geometrischen Reihe*, aber diesmal leicht abgewandelt, verwenden. Es gilt nämlich auch

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1}\right)^k$$

bzw.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1-\frac{-1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z-2}\right)^k$$

und damit auch

$$\underline{|z - 1| > 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - 1)^{-k-2} = \dots + (z - 1)^{-3} + (z - 1)^{-2}$$

bzw.

$$\underline{|z - 2| > 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - 2)^{-k-2} = \dots - (z - 2)^{-3} + (z - 2)^{-2}.$$

Insgesamt haben wir damit jeweils eine zweite Laurent-Entwicklung für f im Entwicklungspunkt 1 bzw. 2 gefunden. Beachte aber, dass die geometrische Hilfsreihe diesmal nur für $1/|z - 1| < 1$ bzw. $1/|z - 2| < 1$ konvergiert, d.h. die zweite Laurent-Reihe für f konvergiert wirklich nur auf $A_{1,\infty}(1)$ bzw. $A_{1,\infty}(2)$.

3. Im Entwicklungspunkt 0 besitzt f sogar drei Reihendarstellungen, nämlich auf den Kreisingen $A_{0,1}(0)$, $A_{1,2}(0)$ und $A_{2,\infty}(0)$, wobei die erste die Taylor-Reihe von f im Punkt 0 ist. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$f(z) = -\frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z - 2}$$

sowie den vier Trick-Anwendungen

$$\frac{1}{z - 1} = -\frac{1}{1 - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

und

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^k, \quad \frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

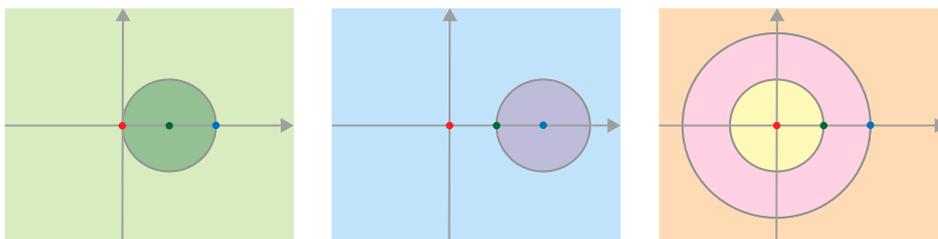
ergeben sich insgesamt die drei gesuchten Darstellungsformeln:

$$\underline{0 \leq |z| < 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) z^k = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \dots$$

$$\underline{1 < |z| < 2} : f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^k = \dots - z^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \dots$$

$$\underline{2 < |z|} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 1) z^{-k-1} = \dots + 7z^{-3} + 3z^{-2} + 1z^{-2}$$

Beachte, dass die Konvergenzbereiche dieser Reihen wieder konsistent mit den theoretischen Vorhersagen sowie den Konvergenzbedingungen für die vier benutzten Hilfsreihen sind.



Die offenen Konvergenzgebiete der insgesamt sieben verschiedenen Laurent-Reihendarstellungen aus dem Beispiel, wobei die Punkte 1 (grün) und 2 (blau) die Polstellen von f sind, beide die Ordnung -1 besitzen und die Größe aller Konvergenzgebiete festlegen. Im Ursprung (rot) ist f holomorph, sodass die Reihe auf der gelben Kreisscheibe eine Taylor-Reihe ist.

2.7 Residuensatz

Definition Ist z_* eine isolierte Singularität von f , so wird

$$\operatorname{res}_f(z_*) := \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(z_*)} f(z) dz$$

das Residuum von f in z_* genannt.

Bemerkungen

1. Es gelten die Notationen aus dem lokalen Entwicklungssatz für Singularitäten. Insbesondere ist es für das Gleichheitszeichen wichtig, dass f holomorph auf der punktierten Kreisscheibe $A_{0,\varrho}(z_*)$ ist und dass diese mit ihrem Außenrand $\partial B_\varrho(z_*)$ ganz in D liegt. In $A_{0,\varrho}(z_*)$ darf es also neben z_* keine weitere isolierte Singularität von f geben.
2. Der Wert von $\operatorname{res}_f(z_*)$ hängt nicht von der Wahl des Radius ϱ ab, solange dieser so klein ist, dass die eben diskutierten geometrischen Bedingungen erfüllt sind.
3. Ist $z_* \in D$ ein Punkt des Definitionsbereichs von f , so setzen wir $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$. Die angegebene Doppelformel gilt dann weiterhin wegen des Integralsatzes von Cauchy und weil f in diesem Fall auf $B_\varrho(0)$ als Taylor-Reihe geschrieben werden kann.
4. Ist z_* eine hebbare Singularität, so gilt auch immer $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$. Ist z_* jedoch Polstelle oder wesentliche Singularität, so kann $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$ oder $\operatorname{res}_f(z_*) \neq 0$ gelten.

Beispiele

1. Für das verallgemeinerte Monom $f(z) = (z - z_*)^m$ gilt

$$\operatorname{res}_f(z_*) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = -1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. auch hier manifestiert sich wieder die Sonderrolle des Exponenten -1 .

2. Aus der Reihendarstellung des Kosinus ergibt sich

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^5} = \frac{1}{z^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = -\frac{1}{2} z^{-3} + \frac{1}{24} z^{-1} - \frac{1}{720} z^{+1} + \dots$$

und damit

$$\operatorname{res}_f(0) = \frac{1}{24}.$$

In allen anderen Punkten $z_* \in \mathbb{C}$ ist f holomorph und daher gilt $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$.

3. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}$$

besitzt die beiden Polstellen $z_* = 1$ und $z_* = i$, für die wir die entsprechenden Residuen zum Beispiel mit den weiter unten diskutierten Methoden ermitteln können. Hier wollen wir aber nochmal den *Trick mit der geometrischen Reihe* verwenden, um zunächst die jeweiligen Laurent-Reihenentwicklungen vollständig anzugeben. Dazu berechnen wir

$$f(z) = \frac{\mu}{z-1} \frac{1}{1+\mu(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^{k+1} (z-1)^{k-1}$$

und

$$f(z) = -\frac{\mu}{z-i} \frac{1}{1-\mu(z-i)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} (z-i)^{k-1},$$

wobei $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ gilt, und erhalten

$$\operatorname{res}_f(1) = +\mu, \quad \operatorname{res}_f(i) = -\mu$$

durch Auswertung der Reihenglieder für $k=0$, da dieser Index hier jeweils der Potenz $(z-z_*)^{-1}$ entspricht.

Setting Wir betrachten im Folgenden

1. eine offene und zusammenhängende Menge U ,
2. endlich viele Punkte z_1, \dots, z_N in U ,
3. eine Funktion f , die holomorph in $D := U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ ist und in jedem z_n eine isolierte Singularität besitzt.

Bemerkungen

1. Prototypische Beispiele sind rationale Funktionen der Bauart

$$f(z) = \frac{g(z)}{q(z)},$$

wobei g holomorph auf U ist und q ein Polynom bezeichnet, dessen Nullstellen gerade die Punkte z_n sind.

2. Es gibt einen wichtigen Unterschied zwischen D und U : Die Punkte z_n sind Einpunktlöcher von D , aber sie gehören zu U .
3. Gilt sogar $\operatorname{ord}_f(z_n) \neq -\infty$ für alle $n = 1 \dots N$, d.h. jedes z_n ist entweder Polstelle oder hebbare Singularität, so wird f oft auch meromorph auf U genannt.
4. Wir könnten im Folgenden auch unendlich viele Punkte z_n zulassen, sofern es für diese keinen Häufungspunkt in U gibt.

Theorem (Residuensatz, Version 1) Ist $G \subset U$ ein elementares Cauchy-Gebiet in U , so gilt

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_n \in G} \operatorname{res}_f(z_n),$$

sofern ∂G ganz in U liegt und keinen der Punkte z_n enthält. Hierbei werden auf der rechten Seite nur die Residuen der isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_N gezählt, die im Inneren von G liegen.

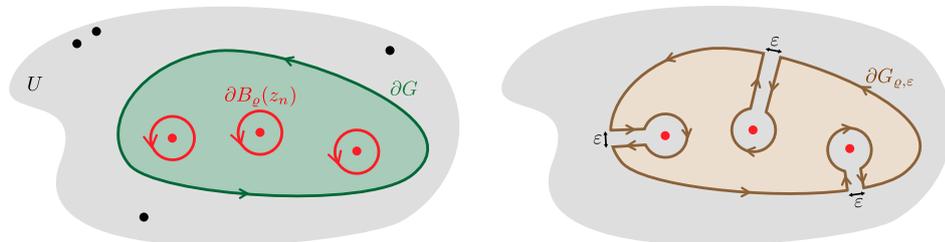
Beweisskizze: Wir wählen einen Radius $\rho > 0$ so klein, dass jede der Kreisscheiben $B_\rho(z_n)$ mit ihrem Rand in D liegt und damit neben z_n keine weitere Singularität enthält. Außerdem wählen wir $\varepsilon > 0$ und betrachten das im Bild illustrierte Cauchy-Gebiet $G_{\rho, \varepsilon}$, auf dem f holomorph ist. Dann gilt einerseits

$$0 = \int_{\partial G_{\rho, \varepsilon}} f(z) dz$$

nach dem Satz von Cauchy und andererseits impliziert unsere Konstruktion

$$\int_{\partial G_{\rho, \varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial G} f(z) dz - \sum_{z_n \in G} \int_{\partial B_\rho} f(z) dz.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus $\int_{\partial B_\rho} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(z_n)$. □



Schematische Darstellung der ersten Version des Residuensatzes. Bei der Integration von f über den Rand von G (grün) sind die Singularitäten im Inneren von G (rot), aber nicht die anderen (schwarz), relevant und das Integral über ∂G kann durch eine Summe von Residuen, d.h. von Integralen über hinreichend kleine Kreislinsen (rot) ersetzt werden. Im Beweis wird eine Variante des Deformationslemmas verwendet. Beachte, dass jede Singularität zu U , aber nicht zu D gehört und auch nicht in ∂G enthalten ist.

Bemerkungen

1. Der Residuensatz ist einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie und spielt auch in den Anwendungswissenschaften eine sehr große Rolle. Er erlaubt es zum Beispiel, komplizierte Integrale im Reellen oder Komplexen relativ einfach auszurechnen. Wir werden das im nächsten Abschnitt genauer studieren.
2. Beachte, dass bei uns der Rand von ∂G mit positiver Orientierung parametrisiert wird. Wird ∂G jedoch im Uhrzeigersinn durchlaufen, so gilt eine Variante des Residuensatzes mit geänderten Vorzeichen (entweder auf der linken oder der rechten Seite der Formel).

Beispiel Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(z) = 1/((z-1)(z-i))$, für die bereits oben die Residuen in den beiden Polstellen 1 und i bestimmt hatten. Die Formeln

$$\int_{\partial B_{1/2}(0)} f(z) dz = 0, \quad \int_{\partial B_2(i)} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_f(1) + \operatorname{res}_f(i)) = 0$$

sowie

$$\int_{\partial B_{3/2}(2)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(1) = -\pi + i\pi$$

ergeben sich nun unmittelbar aus dem Residuensatz.

Verbindung zu den anderen Integralsätzen Der Residuensatz gilt auch in jedem Punkt $z_* \in D$ des Definitionsbereiches D , wobei dann $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$ gilt und wir gerade den Satz von Cauchy erhalten. In einem solchen Punkt kann der Residuensatz für jedes $m \in \mathbb{Z}$ auch auf die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_*)^{m+1}}$$

angewendet werden und liefert gerade die verallgemeinerte-Cauchy-Formel (mit Index m statt Index k auf beiden Seiten). Dies erkennen wir an den lokalen Taylor- bzw. Laurent-Reihendarstellungen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$ bzw.

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^{k-m-1} = \alpha_0 z^{-m-1} + \alpha_1 z^{-m} + \dots = \sum_{l=-m-1}^{\infty} \alpha_{l+m+1} (z - z_*)^l,$$

denn diese implizieren

$$\operatorname{res}_g(z_*) = \alpha_m = \frac{f^{(m)}}{m!}(z_*).$$

Eine analoge Rechnung kann auch in jeder isolierten Singularität $z_* = z_n$ durchgeführt werden, wobei dann die Taylor-Reihe von f durch die entsprechende Laurent-Reihe zu ersetzen ist.

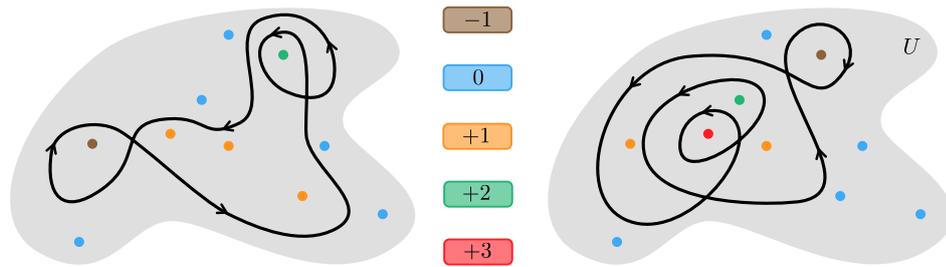
Insgesamt schließen wir: Der Residuensatz enthält alle bisher abgeleiteten Integralformeln als Spezialfall.

Theorem* (**Residuensatz, Version 2**) Ist U einfach zusammenhängend, so gilt

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{wnd}_c(z_n) \operatorname{res}_f(z_n)$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg c in U , sofern dieser durch keinen der Punkte z_n läuft.

Beweisidee: Durch sukzessives Aufspalten in Doppelpunkten kann die allgemeinere Fassung auf die erste Version zurückgeführt werden. \square



Bei der zweiten Version des Residuensatzes sind beliebige geschlossene Integrationswege (schwarze Kurve links bzw. rechts) zugelassen, wobei aber der Beitrag jeder isolierten Singularität (Punkte) aus dem Produkt ihrer Windungszahl bzgl. c (die verschiedenen Farben) und dem entsprechenden Residuum von f besteht. Auch hier darf der Integrationsweg c durch keine Singularität laufen.

Beispiel* Wir betrachten $f(z) = 1/z$ mit $U = \mathbb{C}$ und $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sowie die zwei Integrationswege

$$c_{\pm}(t) = \exp(i n t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit $n \in \mathbb{N}$, die beide den Ursprung genau n mal, aber eben mit unterschiedlicher Orientierung, umlaufen. In diesem einfachen Beispiel gibt es nur die Singularität bei $z_1 = 0$ und wir haben bereits alles ausgerechnet. Insbesondere gilt

$$\operatorname{res}_f(0) = 1, \quad \operatorname{wnd}_{c_{\pm}}(0) = \pm n, \quad \int_{c_{\pm}} f(z) dz = \pm 2\pi i n,$$

und wir sehen, dass im Allgemeinen das Kurvenintegral von f nicht nur von Residuen (Eigenschaften der Funktion), sondern auch von Windungszahlen (Eigenschaften des Integrationsweges) abhängt. In der ersten Version des Residuensatzes gilt übrigens immer $\operatorname{wnd}_{\partial G}(z_n) = 0$ oder $\operatorname{wnd}_{\partial G}(z_n) = 1$.

Bemerkung* In der zweiten Version des Residuensatzes ist es sehr wichtig, dass U selbst keine Löcher besitzt, denn andernfalls kann die Formel falsch sein. Ein einfaches Gegenbeispiel ist $U = D = A_{1,3}(0)$ mit $f(z) = 1/z$ und c als Standardparametrisierung von $\partial B_2(0)$. In diesem Fall ist f holomorph auf U und die rechte Seite der Residuenformel verschwindet (eine Summe von $N = 0$ Summanden ist selbst 0), aber die linke Seite liefert den Wert $2\pi i$. In der ersten Version des Satzes wird dieses Gegenbeispiel durch die Forderung ausgeschlossen, dass das elementare Cauchy-Gebiet G ganz in U liegen muss.

Berechnung von Residuen Ist eine lokale Laurent-Reihendarstellung auf einer punktierten Kreisscheibe um z_* bekannt, so kann das Residuum einfach abgelesen werden, nämlich als der Koeffizient vor $(z - z_*)^{-1}$. Darüber hinaus gibt es die folgenden, aber letztlich äquivalenten Möglichkeiten:

als Grenzwert Ist z_* eine einfache Polstelle von f (d.h. $\operatorname{ord}_f(z_*) = -1$), so gilt

$$\operatorname{res}_f(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) f(z).$$

Für zwei- oder mehrfache Polstellen kann diese Formel aber nicht verwendet werden, denn der Grenzwert wird wegen $\lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) f(z) = \infty$ nicht in \mathbb{C} existieren. Siehe dazu auch weiter unten.

Beispiel: Für

$$f(z) = \frac{\exp(i z)}{z^2 + 1} = \frac{\exp(i z)}{(z + i)(z - i)}$$

erhalten wir

$$\operatorname{res}_f(\pm i) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{\exp(i z)}{z \pm i} = \frac{e^{\mp 1}}{\pm 2i} = \mp i \frac{1}{2} e^{\mp 1}$$

in den beiden Polstellen.

als Quotient Gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{mit} \quad h(z_*) = 0 \quad \text{und} \quad h'(z_*) \neq 0,$$

für zwei holomorphe Funktionen g und h , so folgt

$$\operatorname{res}_f(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_*)}{z - z_*}} = \frac{g(z_*)}{h'(z_*)}$$

aus der ersten Regel.

Beispiel: Beim komplexen Kotangens ergibt sich

$$\operatorname{res}_{\cot}(m\pi) = \frac{\cos(m\pi)}{\sin'(m\pi)} = 1$$

für jedes $m \in \mathbb{Z}$.

in Form einer Ableitung Im Fall einer n -fachen Polstelle z_* , also für $\operatorname{ord}_f(z_*) = -n$, kann die Formel

$$\operatorname{res}_f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_*)^n f(z) \right)$$

verwendet werden, wobei wir im Spezialfall $n = 1$ wieder die Formel von oben erhalten.

Beispiel: In den beiden Polstellen von

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^5}$$

gilt $\operatorname{ord}_f(-1) = -5$ und

$$\operatorname{res}_f(-1) = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^4}{dz^4} \frac{z^2}{z-1} = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{z^2}{z-1} \right)^{''''} = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{24}{(z-1)^5} = -\frac{1}{32}$$

bzw. $\operatorname{ord}_f(+1) = -1$ und $\operatorname{res}_f(+1) = \lim_{z \rightarrow +1} z^2/(z+1)^5 = +\frac{1}{32}$.

mit Näherungsformeln Oftmals berechnen wir nur die führenden Terme in der Laurent-Entwicklung.

Beispiel: Die Reihenentwicklung des Sinus impliziert für $f(z) = 1/(z^2 \sin(z))$ die Formel

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{6} z^2 + O(z^4)} = \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{1}{6} z^2 + O(z^4)\right) = z^{-3} + \frac{1}{6} z^{-1} + O(z)$$

und damit $\text{res}_f(+1) = \frac{1}{6}$, wobei wir im Zwischenschritt die geometrische Summenformel $1/(1 - \zeta) = 1 + \zeta + \dots$ mit $\zeta = \frac{1}{6} z^2 + O(z^4)$ verwendet haben (siehe dazu die Übungen).

Anwendung auf Reihenberechnungen* Man kann mit dem Residuensatz nicht nur Integrale, sondern auch reelle Reihen berechnen. Als prototypisches Beispiel wollen wir noch einmal die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

beweisen, die wir ja schon in *Mathe-1* mit einem anderen Verfahren, nämlich durch Auswertung einer Fourier-Reihe, hergeleitet hatten. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{\cot(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{i}{z^2} \frac{\exp(+iz) + \exp(-iz)}{\exp(+iz) - \exp(-iz)}$$

und wollen diese nun über Kreislinien mit großem Radius integrieren. Wir hatten oben gesehen, dass der Kotangens die Polstellen

$$\text{ord}_{\cot}(m\pi) = -1, \quad \text{res}_{\cot}(m\pi) = 1$$

besitzt und da der komplexe Sinus nur reelle Nullstellen hat (Übungsaufgabe), kann es keine weitere geben. Für alle $m \neq 0$ können wir nun die lokale Reihendarstellung von f im Entwicklungspunkt $m\pi$ mittels

$$f(z) = \left(\frac{1}{m^2 \pi^2} + O(z - m\pi) \right) \left(\frac{1}{z - m\pi} + O(1) \right) = \frac{1}{m^2 \pi^2} \frac{1}{z - m\pi} + O(1)$$

approximieren, wobei wir benutzt haben, dass $1/z^2$ holomorph in diesem Punkt ist, und $O(1)$ einen Fehlerterm bezeichnet, der für $z \rightarrow m\pi$ beschränkt bleibt und nicht gegen ∞ konvergiert. Insbesondere gilt also

$$\text{res}_f(k\pi) = \frac{1}{m^2 \pi^2} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Im Ursprung bzw. für $m = 0$ ist es ein bisschen komplizierter, aber mittels

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1 - \frac{1}{2} z^2 + O(z^4)}{z - \frac{1}{6} z^3 + O(z^5)} = \frac{1}{z^3} \frac{1 - \frac{1}{2} z^2 + O(z^4)}{1 - \frac{1}{6} z^2 + O(z^4)} = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{1}{3} z^2 + O(z^4)\right)$$

verifizieren wir

$$\text{ord}_f(0) = -3, \quad \text{res}_f(0) = -\frac{1}{3}.$$

Der Residuensatz impliziert nun

$$\int_{\partial B_{\varrho_n}(0)} f(z) \, dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3} + 2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2 \pi^2} \right),$$

wobei es wichtig ist, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Kreislinie vom Radius $\varrho_n = (n + 1/2)\pi$ um den Mittelpunkt 0 keine der Singularitäten enthält, und dass die Polstellen bei $-m\pi$ und $+m\pi$ denselben Beitrag liefern. Andererseits gilt auf dem Integrationsweg

$$z = \varrho_n \exp(it), \quad \exp(\pm iz) = \exp(i\varrho_n \cos(t)) \exp(\pm \varrho_n \sin(t))$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ und wir können mit rein reellen Argumenten zeigen, dass dies

$$|\cot(z)| \leq 4 \quad \text{und} \quad |f(z)| \leq \frac{4}{\varrho_n^2} \quad \text{für} \quad z \in \partial B_{\varrho_n}(0)$$

impliziert. Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale liefert daher

$$\left| \int_{\partial B_{\varrho_n}(0)} f(z) \, dz \right| \leq \frac{4L(\partial B_{\varrho_n}(0))}{\varrho_n^2} = \frac{8\pi\varrho_n}{\varrho_n^2} = \frac{8}{n + \frac{1}{2}},$$

d.h. die linke Seite der Residuenformel verschwindet im Limes $n \rightarrow \infty$. Der Grenzwert auf der rechten Seite muss dann auch 0 sein und dies liefert die Behauptung.

Bemerkung*: Die Riemannsche Zeta-Funktion ist formal durch

$$\zeta(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z}$$

definiert und wir haben gerade $\zeta(2)$ berechnet. Für allgemeine komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$ ist diese Funktion aber nicht vollständig verstanden, sondern Gegenstand eines der mathematischen *Millenniumsprobleme*. Siehe dazu die *Riemannsche Vermutung* auf WIKIPEDIA.

Argumentprinzip*

Theorem* (das Null- und Polstellen zählende Integral) Besitzt f keine wesentliche Singularität, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{z \in G, \text{ord}_f(z) \neq 0} \text{ord}_f(z),$$

sofern ∂G keine Null- oder Polstelle von f enthält. Die Summe auf der rechten Seite ist dabei immer endlich und addiert die positiven Ordnungen aller Nullstellen von f in G sowie die negativen Ordnungen aller Polstellen von f in G .

Beweis: Ist $z_* \in U$ entweder eine Nullstelle oder eine Polstelle von f , so gilt die lokale Reihenentwicklung

$$f(z_*) = \sum_{k=k_*}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k,$$

auf $A_{0,\varrho}(z_*)$ mit $\alpha_{k_*} \neq 0$, wobei $k_* = \text{ord}_f(z_*)$ entweder positiv oder negativ ist. In beiden Fällen berechnen wir

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_* \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*-1} + (k_* + 1) \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*} + \dots}{\alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} + \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*+1} + \dots} \\ &= \frac{k_* \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*-1} \left(1 + O(z - z_*)\right)}{\alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} \left(1 + O(z - z_*)\right)} = \frac{k_*}{z - z_*} \left(1 + O(z - z_*)\right) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\text{ord}_g(z_*) = -1, \quad \text{res}_g(z_*) = k_*.$$

Ist jedoch $z_* \in U$ weder Null- noch Polstelle von f , so gilt $k_* = \text{ord}_f(z_*) = 0$ mit $\alpha_0 \neq 0$. In diesem Fall folgt

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2(z - z_*) + 3\alpha_3(z - z_*)^2 + \dots}{\alpha_0 + \alpha_1(z - z_*) + \alpha_2(z - z_*)^2 + \dots} \xrightarrow{z \rightarrow z_*} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \in \mathbb{C}$$

und damit

$$\text{ord}_g(z_*) \geq 0, \quad \text{res}_g(z_*) = 0,$$

wobei die Ordnung von z_* bzgl. g nur dann größer als 0 sein kann, wenn $\alpha_1 = 0$ gilt. Wir haben damit die folgenden Aussagen etabliert:

1. Jede Nullstelle z_* von f (einfach oder mehrfach) ist eine einfache Polstelle von g und es gilt $\text{res}_g(z_*) = \text{ord}_f(z_*)$.
2. Jede Polstelle von f (einfach oder mehrfach) ist auch eine einfache Polstelle von g , wobei wieder $\text{res}_g(z_*) = \text{ord}_f(z_*)$ gilt.
3. Es gibt darüber hinaus keine weiteren isolierten Singularitäten von g .

Mit dieser Erkenntnis folgt die Behauptung aus dem Residuensatz, sofern dieser mit g statt f angewendet wird. \square

Bemerkungen

1. Es gelten wieder die Notationen von oben. Die Summe auf der rechten Seite enthält aber nicht nur die Beiträge der Punkte z_n , sondern zusätzlich weitere Beiträge der Nullstellen.
2. Das Theorem wird Cauchysches Argumentprinzip genannt, aber die Herkunft dieses Namens erschließt sich nicht unmittelbar. Es spielt auch in den Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle und impliziert zum Beispiel das *Nyquist-Kriterium* in der Regelungstechnik.
3. Man schreibt die rechte Seite oftmals auch verkürzt als $\sum_{z \in G} \text{ord}_f(z)$, wobei dann immer gemeint ist, dass nur über die Punkte summiert wird, für die $\text{ord}_f(z) \neq 0$ gilt.
4. Auch hier gibt es eine allgemeinere Variante, bei der Integrale über beliebige geschlossene Integrationswege zugelassen sind, wobei dann auf der rechten Seite zusätzlich Windungszahlen zu berücksichtigen sind.

Beispiele*

1. Die Funktion

$$f(z) = (z - n_1)^3 (z - n_2)$$

besitzt die dreifache Nullstelle n_1 sowie die einfache Nullstelle n_2 , aber gar keine Polstellen. Das Argumentprinzip liefert daher

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \notin G \text{ und } n_2 \notin G, \\ +3 & \text{falls } n_1 \in G \text{ und } n_2 \notin G, \\ +1 & \text{falls } n_1 \notin G \text{ und } n_2 \in G, \\ +4 & \text{falls } n_1 \in G \text{ und } n_2 \in G. \end{cases}$$

Alternativ können wir diese Formel auch mit dem Residuensatz begründen, sofern dieser für $g = f'/f$ ausgewertet wird. Es gilt nämlich

$$g(z) = \frac{3(z - n_1)^2 (z - n_2) + (z - n_1)^3}{(z - n_1)^3 (z - n_2)} = \frac{+3}{z - n_1} + \frac{+1}{z - n_2}$$

und wir erhalten

$$\text{ord}_g(n_1) = -1, \quad \text{res}_g(n_1) = +3 = \text{ord}_f(n_1)$$

sowie

$$\text{ord}_g(n_2) = -1, \quad \text{res}_g(n_2) = +1 = \text{ord}_f(n_2),$$

wobei wir zum Beispiel benutzt haben, dass $1/(z - n_2)$ holomorph im Punkt n_1 ist und daher eine entsprechende Taylor-Entwicklung besitzt. Insbesondere sehen wir (wie schon im Beweis): Jede der beiden Nullstellen von f ist eine einfache Polstelle von g , wobei das Residuum bzgl. g gerade der Ordnung bzgl. f entspricht. Das Kurvenintegral von g über den Rand ∂G zählt hier also die Nullstellen f in G mit ihrer Vielfachheit.

2. Das Argumentprinzip impliziert für

$$f(z) = \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)^2}$$

die Zählformeln

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_1 \notin G \text{ und } p_2 \notin G, \\ -1 & \text{falls } p_1 \in G \text{ und } p_2 \notin G, \\ -2 & \text{falls } p_1 \notin G \text{ und } p_2 \in G, \\ -3 & \text{falls } p_1 \in G \text{ und } p_2 \in G, \end{cases}$$

denn diesmal besitzt f zwei Pol-, aber keine Nullstellen. Auch in diesem Beispiel können wir alternativ den Residuensatz für $g = f'/f$ verwenden, denn mit

$$g(z) = \frac{\frac{-1}{(z - p_1)^2 (z - p_2)^2} + \frac{-2}{(z - p_1)(z - p_2)^3}}{\frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)^2}} = \frac{-1}{z - p_1} + \frac{-2}{z - p_2}$$

ergeben sich

$$\operatorname{ord}_g(p_1) = -1, \quad \operatorname{res}_g(p_1) = -1 = \operatorname{ord}_f(p_1)$$

und

$$\operatorname{ord}_g(p_2) = -1, \quad \operatorname{res}_g(p_2) = -2 = \operatorname{ord}_f(p_2)$$

nach kleinen Hilfsüberlegungen. Oder anders gesagt: Jede der beiden Polstellen von f ist eine einfache Polstelle von g , wobei Residuum bzgl. g und Ordnung bzgl. f dasselbe sind.

3. Die Funktion

$$f(z) = \frac{z - n}{z - p}$$

besitzt die einfache Nullstelle n sowie die einfache Polstelle p und aus

$$g(z) = \frac{(z - p) - (z - n)}{\frac{(z - p)^2}{\frac{z - n}{z - p}}} = \frac{+1}{z - n} + \frac{-1}{z - p}$$

kann

$$\operatorname{ord}_g(n) = \operatorname{ord}_g(p) = -1, \quad \operatorname{res}_f(n) = +1, \quad \operatorname{res}_g(p) = -1$$

abgelesen werden. Insbesondere liefern das Argumentprinzip für f sowie der Residuensatz für g beide die Zählformeln

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \notin G \text{ und } p \notin G, \\ +1 & \text{falls } n \in G \text{ und } p \notin G, \\ -1 & \text{falls } n \notin G \text{ und } p \in G, \\ 0 & \text{falls } n \in G \text{ und } p \in G. \end{cases}$$

Geometrische Bedeutung* Wir betrachten f als Transformation von U nach \mathbb{C}^* (wobei $f(z_n) = \infty$ für jede Polstellen z_n gilt) und schreiben wieder

$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{c}(t) = f(c(t)).$$

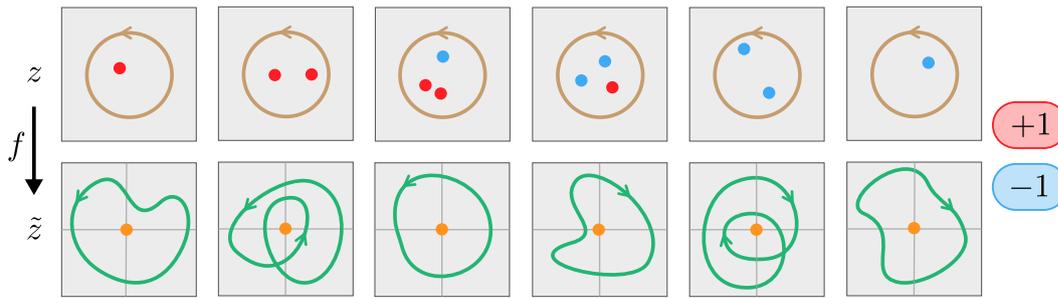
Punkte $z \in U$ werden von f also auf Punkte $\tilde{z} \in \mathbb{C}^*$ abgebildet und jede Kurve c in D entspricht dabei einer transformierten Kurve $\tilde{c} = f \circ c$ in \mathbb{C} . Ist $c : [t_a, t_e]$ nun eine Parametrisierung von ∂G , so gilt

$$\dot{\tilde{c}}(t) = f'(c(t)) \dot{c}(t)$$

und damit

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{t_a}^{t_e} \frac{f'(c(t)) \dot{c}(t)}{f(c(t))} dt = \int_{t_a}^{t_e} \frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\tilde{c}(t)} dt = \int_{\tilde{c}} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}} = 2\pi i \operatorname{wnd}_{\tilde{c}}(0).$$

Oder anders gesagt: Das Kurvenintegral, dass die Null- und Polstellen von f in G zählt, ist gerade die Windungszahl von 0 bzgl. der transformierten Kurve \tilde{c} . Sie gibt an, wie oft sich das Bild von ∂G unter f um den Koordinatenursprung windet (siehe Bild).



Geometrische Deutung des Argumentprinzips, wobei G in jedem der sechs Beispiele eine offene Kreisscheibe ist. Die Funktion f bildet jede ihrer Nullstellen (rot) auf den Ursprung (orange) und jede ihrer Polstellen (blau) auf den unendlich fernen Punkt (nicht dargestellt) ab. Die Randkurve c von G (braun) wird von f in die Bildkurve \tilde{c} (grün) transformiert, wobei die Anzahl der Null- und Polstellen innerhalb von G angibt, wie oft und mit welcher Orientierung sich \tilde{c} um den Ursprung windet. Nicht dargestellt sind Fälle, in denen G dieselbe Anzahl von Null- und Polstellen enthält, da sich die Bildkurve dann gar nicht um den Ursprung windet. Beachte auch, dass hier nur einfache Null- bzw. Polstellen illustriert sind, die den Beitrag $+1$ bzw. -1 liefern, und dass Null- oder Polstellen außerhalb von G keine Rolle spielen.

2.8 Integralberechnung mit Residuen

Vorbemerkung In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie gewisse Klassen reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden können. Man spricht auch vom *Residuenkalkül*, das in den Anwendungswissenschaften vielleicht noch wichtiger als innerhalb der Mathematik ist. Beachte dabei, dass für eine holomorphe Funktion der Ausdruck

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

sowohl als vektorwertiges Riemann-Integral bzgl. der reellen Variablen $x \in [a, b]$ als auch als komplexes Kurvenintegral entlang des Weges $c(t) = t + 0i$ mit $t \in [a, b]$ interpretiert werden kann.

Notation Wir benutzen in diesem Abschnitt spezielle Schreibweisen für Summen, wie zum Beispiel

$$\sum_{z \in B_\varrho(0)} \operatorname{res}_f(z) \quad \text{oder} \quad \sum_{|z| < \varrho} \operatorname{res}_f(z).$$

Damit ist nicht gemeint, dass der Summationsindex z wirklich die ganze Kreisscheibe $B_\varrho(0)$ durchläuft (was aus mathematischer Sicht auch wirklich unsinnig wäre), sondern es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die Summe nur über die Punkte $z \in B_\varrho(0)$ gebildet wird, für die auch $\operatorname{res}_f(z) \neq 0$ gilt. Das werden dann in aller Regel nur endlich viele Punkte sein. In Ausnahmefällen können es auch mal *abzählbar unendlich viele* Punkte sein, wobei dann die Summe eine (absolut konvergente) Reihe ist.

Theorem (reelle Integrale rationaler Funktionen) Seien p und q zwei gegebene Polynome, sodass der Grad von q den von p um mindestens 2 übersteigt und q keine reellen Nullstellen besitzt. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) < 0} \operatorname{res}_{p/q}(z) = +2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_{p/q}(z),$$

wobei die obige Summennotation verwendet wird.

Beweis: Die Nullstellen von q sind gerade die isolierten Singularitäten der Funktion $f = p/q$, die in jedem anderen Punkt komplex differenzierbar ist. Wir betrachten nun einen Radius ϱ , der so groß ist, dass alle Nullstellen von q in $B_\varrho(0)$ enthalten sind, und integrieren f über die im Bild dargestellten Wege $c_{-, \varrho}$, $c_{+, \varrho}$ und $c_{0, \varrho}$. Der Residuensatz kann sowohl auf der unteren als auch auf der oberen Halbkreisscheibe angewendet werden und liefert

$$\int_{c_{0, \varrho} \oplus c_{-, \varrho}} f(z) dz = - \sum_{\operatorname{Im}(z) < 0} \operatorname{res}_f(z), \quad \int_{c_{0, \varrho} \oplus c_{+, \varrho}} f(z) dz = + \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_f(z),$$

wobei wir benutzt haben, dass $c_{0, \varrho} \oplus c_{-, \varrho}$ bzw. $c_{0, \varrho} \oplus c_{+, \varrho}$ den jeweiligen Rand mit negativer bzw. positiver Orientierung parametrisieren. Die Voraussetzung über die Polynomgrade von p und q impliziert außerdem

$$|f(z)| \leq \frac{\mu}{|z|^2} = \frac{\mu}{\varrho^2}$$

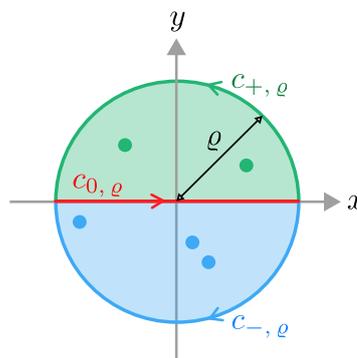
für eine geeignete Konstante μ und alle $z \in B_\varrho(0)$, sodass

$$\left| \int_{c_{\pm, \varrho}} f(z) dz \right| \leq \frac{\mu 2\pi\varrho}{\varrho^2} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$$

eine direkte Konsequenz der Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale ist. Andererseits konvergiert das Integral von f über den Weg $c_{0, \varrho}$ für $\varrho \rightarrow \infty$ gegen die linke Seite der Behauptung und es gilt

$$\int_{c_{0, \varrho} \oplus c_{\pm, \varrho}} f(z) dz = \int_{c_{0, \varrho}} f(z) dz + \int_{c_{\pm, \varrho}} f(z) dz$$

aufgrund der Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals. □



Die Integrationswege aus dem Beweis des vorangegangenen Theorems, wobei die blauen bzw. die grünen Punkte die Nullstellen des Nennerpolynoms q repräsentieren.

Beispiel Die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4}$$

besitzt die vier jeweils einfachen Polstellen

$$z_1 = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \frac{+1 + i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{+1 - i}{\sqrt{2}},$$

die gerade die (jeweils einfachen) Nullstellen des Nennerpolynoms sind. Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2}{(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \\ &= \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \end{aligned}$$

sowie drei analogen Formeln erhalten wir

$$\operatorname{res}_f(z_1) = \frac{+1 - i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res}_f(z_2) = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res}_f(z_3) = \frac{-1 + i}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res}_f(z_4) = \frac{+1 + i}{4\sqrt{2}}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

wobei der Wert auf der rechten Seite entweder als $+2\pi i (\operatorname{res}_f(z_1) + \operatorname{res}_f(z_2))$ oder als $-2\pi i (\operatorname{res}_f(z_3) + \operatorname{res}_f(z_4))$ berechnet werden kann.

Integrale mit trigonometrischen Funktionen Mittels Residuen können auch viele reelle Integrale berechnet werden, in denen Quotienten polynomieller Ausdrücke in Sinus und Kosinus auftauchen. Als einfaches Beispiel berechnen wir

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \cos(t)},$$

wobei $|\mu| > 1$ für den reellen Parameter μ gelten soll. Dazu studieren wir die komplexe Funktion

$$f(z) := \frac{1}{iz} \frac{1}{\left(\mu + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{-2i}{z^2 + 2\mu z + 1},$$

denn die Definition des komplexen Kurvenintegrals kombiniert mit der Euler-Formel sowie der Standardparametrisierung von $\partial B_1(0)$ impliziert

$$\int_{\partial B_1(0)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\exp(it)) i \exp(it) dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \frac{1}{2} \exp(+it) + \frac{1}{2} \exp(-it)} = I.$$

Die Funktion f besitzt die beiden einfachen Polstellen

$$z_{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$$

und wir erhalten

$$\operatorname{res}_f(z_{\pm}) = \lim_{z \rightarrow z_{\pm}} (z - z_{\pm}) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_{\pm}} \frac{-2i}{z - z_{\mp}} = \frac{\mp 2i}{z_+ - z_-} = \frac{\mp i}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

Allerdings liegt für $\mu < -1$ bzw. $\mu > +1$ nur z_- bzw. z_+ im Inneren von $B_1(0)$, sodass

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_f(z_{\operatorname{sgn}(\mu)}) = \operatorname{sgn}(\mu) 2\pi / \sqrt{\mu^2 - 1}$$

aus dem Residuensatz folgt, wobei $\operatorname{sgn}(\mu)$ hier entweder $-$ oder $+$ ist.

Bemerkung: Mit analogen Argumenten können wir auch andere trigonometrische Integrale berechnen. Siehe dazu die Übungen.

Theorem (Jordan-Lemma) Seien p und q zwei Polynome, sodass der Grad von q den von p um mindestens 1 übersteigt und q keine reellen Nullstellen besitzt. Für jeden reellen Parameter $\kappa > 0$ gilt dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\pm\kappa}(x) dx = \pm 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) \geq 0} \operatorname{res}_f(z) \quad \text{mit} \quad f_{\pm\kappa}(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \exp(\pm i \kappa z).$$

Insbesondere sind für das Integral von $f_{+\kappa}$ bzw. $f_{-\kappa}$ nur diejenigen Polstellen relevant, die einen positiven bzw. negativen Imaginärteil aufweisen.

Beweis: Wir leiten nur die Formel mit $f_{+\kappa}$ her, da die Argumente für das Integral von $f_{-\kappa}$ im Wesentlichen dieselben sind. Die Singularitäten von $f_{+\kappa}$ sind wieder die (endlich vielen) Nullstellen von q und liegen entweder in der unteren Halbebene oder in dem im Bild dargestellten Rechteck, sofern der Parameter σ hinreichend groß ist. Der Residuensatz liefert

$$\sum_{j=1}^4 \int_{c_{\sigma,j}} f_{+\kappa}(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_f(z),$$

wobei

$$\int_{c_{\sigma,1}} f_{+\kappa}(z) dz \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\pm\kappa}(x) dx$$

für das Integral über den ersten Teilweg gilt. Es bleibt zu zeigen, dass die anderen Teilwegintegrale im Limes $\sigma \rightarrow \infty$ verschwinden. Die Voraussetzungen implizieren

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{\mu}{|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und eine geeignete Konstante μ . Außerdem gilt $|z| > \sigma$ sowie

$$\left| \exp(+i \kappa z) \right| \leq \exp(-\sigma) \quad \text{für alle } z \in C_{\sigma,3} = \operatorname{spur}(c_{\sigma,3}),$$

und wegen $L(c_{\sigma,3}) = 2\sigma$ folgt damit

$$\left| \int_{c_{\sigma,3}} f_{+\kappa}(z) dz \right| \leq \frac{\mu L(c_{\sigma,3}) \exp(-\sigma)}{\sigma} = 2 \exp(-\sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0$$

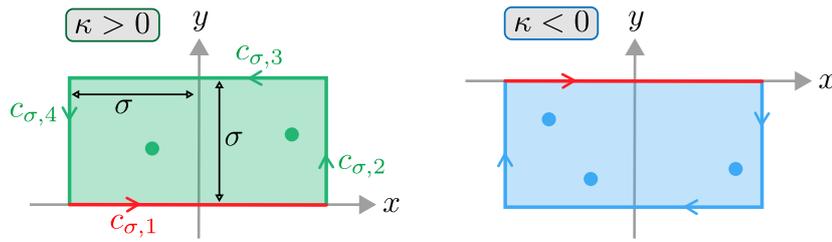
aus der Standardabschätzung für Kurvenintegrale. Mit der Parametrisierungsformel

$$c_{\sigma,2}(t) = \sigma + i t, \quad t \in [0, \sigma]$$

erhalten wir außerdem $|c_{\sigma,2}(t)| > \sigma$ und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_{\sigma,2}} f_{+\kappa}(z) dz \right| &= \left| \int_0^\sigma \frac{p(c_{\sigma,2}(t))}{q(c_{\sigma,2}(t))} \exp(i \kappa \sigma - \kappa t) dt \right| \leq \int_0^\sigma \left| \frac{p(c_{\sigma,2}(t))}{q(c_{\sigma,2}(t))} \right| \exp(-\kappa t) dt \\ &\leq \frac{\mu}{\sigma} \int_0^\sigma \exp(-\kappa t) dt = \frac{\mu}{\sigma \kappa} (1 - \exp(-\kappa \sigma)) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da eine ähnliche Abschätzung für das Integral über $c_{\sigma,4}$ gilt, folgt die Behauptung durch Kombination aller Teilergebnisse. \square



Die Integrationswege aus dem Beweis des Jordan-Lemmas, wobei es wirklich wichtig ist, dass diese für $f_{+\kappa}$ bzw. $f_{-\kappa}$ in der oberen bzw. unteren Halbebene liegen. Andernfalls wären die Beiträge über die nicht-roten Teilwege nicht klein, sondern könnten im Gegenteil sehr groß sein.

Bemerkungen

1. Das Jordan-Lemma erlaubt zum Beispiel die effektive Berechnung gewisser Fourier-Integrale (siehe weiter unten). Dabei kann das reelle Integral im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals oder auch nur im Sinne eines Cauchyschen Integralhauptwertes existieren (siehe *Mathe-1* für den Unterschied).
2. Es gibt Varianten des Jordan-Lemmas, in denen der Polynomquotient $p(z)/q(z)$ durch eine andere Funktionenklasse ersetzt wird. Es wird aber immer der Term $\exp(\pm i \kappa z)$ auftauchen.
3. Wegen der Euler-Formel können mit dem Jordan-Lemma auch Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\kappa x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\kappa x) dx$$

berechnet werden.

Beispiele

1. Mit $p(z) = 1$ und $q(z) = 1 + z^2$ besitzen die beiden Funktionen

$$f_{\pm\kappa}(z) = \frac{\exp(\pm i \kappa z)}{1 + z^2}$$

für jede Wahl von $\kappa > 0$ isolierte Singularitäten in den Punkten $-i$ und $+i$, wobei einfache Rechnungen $\text{ord}_{f_{\pm\kappa}}(-i) = \text{ord}_{f_{\pm\kappa}}(+i) = -1$ sowie

$$\text{res}_{f_{\pm\kappa}}(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{\pm i \kappa z}}{z - i} = +i \frac{1}{2} e^{\pm \kappa}, \quad \text{res}_{f_{\pm\kappa}}(+i) = \lim_{z \rightarrow +i} \frac{e^{\pm i \kappa z}}{z + i} = -i \frac{1}{2} e^{\mp \kappa}$$

liefern. Mit dem Jordan-Lemma erhalten wir schließlich die Riemann-Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i \kappa x}}{1 + x^2} dx = \pi e^{-\kappa} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+i \kappa x}}{1 + x^2} dx = \pi e^{-\kappa},$$

wobei für $f_{-\kappa}$ bzw. $f_{+\kappa}$ nur das Residuum in $-i$ bzw. $+i$ ausgewertet wurde.

Bemerkung: Die Endformel gilt in diesem Beispiel auch für $\kappa = 0$ und kann (vis $\pm \kappa = 2\pi \xi$) im Kontext des nächsten Kapitels wie folgt interpretiert werden: Die Fourier-Transformierte von $u(x) = 1/(1 + x^2)$ ist $\hat{u}(\xi) = \pi \exp(-2\pi |\xi|)$.

2. Um das Integral

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^2} dx$$

zu berechnen, wollen wir das Jordan-Lemma mit $\kappa = 1$ sowie $p(z) = z$ und $q(z) = 1 + z^2$ anwenden, denn es gilt

$$I = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{+1}(x) dx \right), \quad f_{+1}(z) = \frac{z \exp(\mathbf{i} z)}{1+z^2}.$$

Es gibt wieder die beiden einfachen Polstellen $-\mathbf{i}$ und $+\mathbf{i}$, wobei uns aber nur $+\mathbf{i}$ interessiert. Das entsprechende Residuum ist durch

$$\operatorname{res}_{f_{+1}}(+\mathbf{i}) = \lim_{z \rightarrow +\mathbf{i}} (z + \mathbf{i}) f_{+1}(z) = \lim_{z \rightarrow +\mathbf{i}} \frac{z \exp(\mathbf{i} z)}{z - \mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i} \exp(-1)}{2 \mathbf{i}} = \frac{1}{2} e^{-1}$$

gegeben und das Jordan-Lemma liefert via

$$I = \operatorname{Im} (2 \pi \mathbf{i} \frac{1}{2} e^{-1}) = \pi e^{-1}$$

den Wert des gesuchten Integrals.

Integrale mit Logarithmen und allgemeinen Potenzen*

Vorbemerkung Wir wollen schließlich reelle Integrale mit allgemeinen Potenzen berechnen, wobei dann zunächst ein geeigneter Nebenwert des komplexen Arguments (bzw. der Wert des Winkelparameters θ) gewählt werden muss. Wir werden aber keine abstrakten Theoreme formulieren, sondern das prinzipielle Verfahren anhand zweier Beispiele erklären.

Erstes Beispiel Um das reelle Integral

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2} dx$$

mit gegebenem Parameter $-1 < \alpha < +3$ zu berechnen, integrieren wir die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{\operatorname{Pow}_{\alpha, \pi/2}(z)}{(1+z^2)^2} = \frac{\exp(\alpha \operatorname{Ln}_{\pi/2}(z))}{(1+z^2)^2}$$

über den im Bild dargestellten Weg $c_{\varrho, \varepsilon}$, wobei wir hier den Nebenwert der Potenz so gewählt haben, dass der entsprechende Schlitz in der unteren Halbebene enthalten ist. Die Punkte $-\mathbf{i}$ und $+\mathbf{i}$ sind jeweils doppelte Nullstellen des Nennerpolynoms, aber da $-\mathbf{i}$ im Schlitz liegt, ist $+\mathbf{i}$ die einzige isolierte Singularität von f . Diese besitzt die

Ordnung -2 und wir berechnen daher das entsprechende Residuum durch

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(+i) &= \lim_{z \rightarrow +i} \frac{d}{dz} \left(\frac{\operatorname{Pow}_{\alpha, \pi/2}(z)}{(z+i)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow +i} \frac{\alpha \operatorname{Pow}_{\alpha-1, \pi/2}(z) (z+i)^2 - 2 \operatorname{Pow}_{\alpha, \pi/2}(z) (z+i)}{(z+i)^4} \\ &= \frac{-4\alpha \exp(i(\alpha-1)\frac{1}{2}\pi) - i4 \exp(i\alpha\frac{1}{2}\pi)}{16} \\ &= i \frac{1}{4} (\alpha-1) \exp(i\alpha\frac{1}{2}\pi), \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\operatorname{Pow}_{p, \pi/2}(+i) = \exp(ip\frac{1}{2}\pi)$$

für alle p gilt. Der Residuensatz impliziert unter der Annahme $0 < \varepsilon < 1 < \varrho$ daher die Formel

$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon}} f(z) dz = \frac{1}{2} \pi (1-\alpha) e^{i\alpha\pi/2},$$

und wir wollen nun die Beiträge der vier Einzelwege im Doppellimes $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varrho \rightarrow \infty$ berechnen. Für den großen Halbkreisweg erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_{\varrho, \varepsilon, 2}} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{\varrho^\alpha \exp(+i\alpha t) i \varrho \exp(+it)}{(1 + \varrho^2 \exp(+i2t))^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\varrho^{1+\alpha}}{(\varrho^2 - 1)^2} dt \leq \varrho^{\alpha-3} \int_0^\pi \frac{dt}{(1 - 1/\varrho^2)^2} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Standardparametrisierung von Kreislinien sowie die Hilfsabschätzung $|1 + \varrho^2 \exp(i2t)| \geq \varrho^2 - 1$ benutzt haben. Mit ähnlichen Argumenten kann auch

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_{\varrho, \varepsilon, 4}} f(z) dz \right| &\leq \int_\pi^{2\pi} \left| \frac{\varepsilon^\alpha \exp(-i\alpha t) (-i) \varepsilon \exp(-it)}{(1 + \varepsilon^2 \exp(-i2t))^2} \right| dt \\ &\leq \int_\pi^{2\pi} \frac{\varepsilon^{1+\alpha}}{(1 - \varepsilon^2)^2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

gezeigt werden, d.h. auch der kleine Halbkreisweg liefert beim Grenzübergang keinen Beitrag. Andererseits gilt

$$\operatorname{Pow}_{\alpha, \pi/2}(x) = x^\alpha \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Pow}_{\alpha, \pi/2}(x) = (-x)^\alpha e^{i\alpha\pi}$$

für alle reellen Argumente $x > 0$ bzw. $x < 0$ und wir erhalten

$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon, 1}} f(z) dz = \int_{+\varepsilon}^{+\varrho} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} I$$

sowie

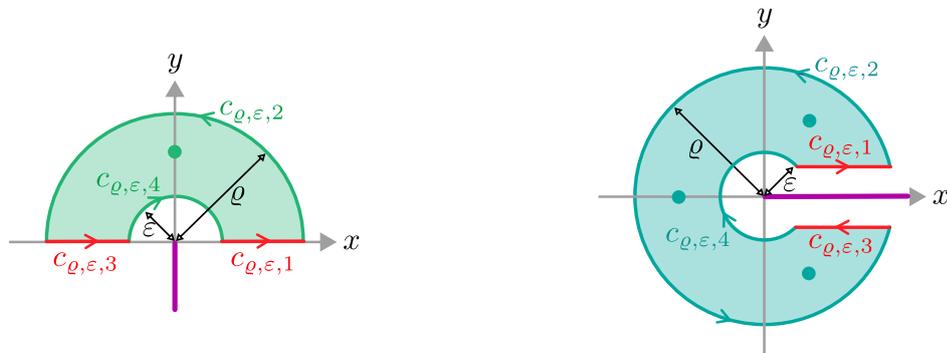
$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon, 4}} f(z) dz = \int_{-\varrho}^{-\varepsilon} \frac{(-x)^\alpha e^{i\alpha\pi}}{(1+x^2)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} e^{i\alpha\pi} I,$$

wobei wir in der letzten Rechnung abschließend $x = -\tilde{x}$ substituiert haben. Insgesamt ergibt sich durch Einsetzen der Wert

$$I = \frac{\frac{1}{2}\pi(1-\alpha)e^{i\alpha\pi/2}}{1+e^{i\alpha\pi}} = \frac{(1-\alpha)\pi}{4\cos(\alpha\pi/2)}$$

für das gesuchte reelle Integral, wobei $I = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{(1-\alpha)\pi}{4\cos(\alpha\pi/2)} = \frac{1}{2}$ für $\alpha = 1$ gilt.

Bemerkung: I ist nur für $\alpha \in (-1, +3)$ im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals definiert und dies spiegelt sich auch in den bei der Herleitung verwendeten Abschätzungen wider.



Links: Der Integrationsweg (grün und rot) aus dem ersten Beispiel sowie der Schlitz (lila) des gewählten Nebenwerts des Logarithmus. Beachte, dass hier nur die Polstelle $+i$ (grüner Punkt) wichtig ist. *Rechts:* Im zweiten Beispiel integrieren wir über die „Schlüssellochkontour“, wobei es diesmal drei Polstellen (türkise Punkte) gibt und der Schlitz des verwendeten Nebenwerts der Wurzel (lila) auf der positiven reellen Halb-achse liegt.

Zweites Beispiel Für das Integral

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

betrachten wir

$$f(z) = \frac{\text{Pow}_{1/2, \pi}(z)}{1+z^3} = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \text{Ln}_{\pi}(z)\right)}{1+z^3},$$

wobei wir diesmal einen anderen Integrationsweg (siehe Bild) sowie den Nebenwert mit $\theta = \pi$ benutzen, dessen Schlitz mit der positiven reellen Halb-achse zusammenfällt. In diesem Beispiel gibt es die drei jeweils einfachen Polstellen

$$z_1 = e^{+i\pi/3}, \quad z_2 = e^{+i\pi} = -1, \quad z_3 = e^{-i\pi/3},$$

deren Argumente durch

$$\text{Arg}_{\pi}(z_1) = \frac{1}{3}\pi, \quad \text{Arg}_{\pi}(z_2) = \pi, \quad \text{Arg}_{\pi}(z_3) = \frac{5}{3}\pi$$

gegeben sind. Wir erhalten also

$$\text{Pow}_{1/2,\pi}(z_1) = e^{i\pi/6}, \quad \text{Pow}_{1/2,\pi}(z_2) = e^{i\pi/2}, \quad \text{Pow}_{1/2,\pi}(z_3) = e^{i5\pi/6}$$

und damit auch

$$\text{res}_f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{\text{Pow}_{1/2,\pi}(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = -\frac{1}{3} i$$

sowie

$$\text{res}_f(z_2) = \frac{\text{Pow}_{1/2,\pi}(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} = +\frac{1}{3} i, \quad \text{res}_f(z_3) = \frac{\text{Pow}_{1/2,\pi}(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} = -\frac{1}{3} i.$$

Im Fall von $\varepsilon < 1 < \varrho$ liefert der Residuensatz das Zwischenergebnis

$$\int_{C_{\varrho,\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^3 \text{res}_f(z_j) = \frac{2}{3} \pi,$$

das wir nun weiter vereinfachen wollen. Die Beiträge der beiden Kreissegmente zum Kurvenintegral können im Doppellimes $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varrho \rightarrow \infty$ wieder vernachlässigt werden, wobei dies mithilfe der Standardabschätzung für Kurvenintegrale und unter Ausnutzung der Hilfsresultate

$$|f(z)| \leq \frac{\varrho^{1/2}}{\varrho^3 - 1} \quad \text{für } z \in C_{\varrho,\varepsilon,2}, \quad |f(z)| \leq \frac{\varepsilon^{1/2}}{1 - \varepsilon^3} \quad \text{für } z \in C_{\varrho,\varepsilon,4}$$

begründet werden kann. Da für alle hinreichend kleinen ε sowie alle $z \in C_{\varrho,\varepsilon,1}$ bzw. $z \in C_{\varrho,\varepsilon,3}$ die Approximationen

$$\text{Arg}_{1/2,\pi}(z) \gtrsim 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{Arg}_{1/2,\pi}(z) \lesssim 2\pi$$

sowie

$$\text{Pow}_{1/2,\pi}(z) \approx +\sqrt{\text{Re}(z)} \quad \text{bzw.} \quad \text{Pow}_{1/2,\pi}(z) \approx -\sqrt{\text{Re}(z)}$$

gelten, ergibt sich außerdem

$$\int_{C_{\varrho,\varepsilon,1}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{+\sqrt{x}}{1+x^3} dx = I$$

sowie

$$\int_{C_{\varrho,\varepsilon,3}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} \int_{\infty}^0 \frac{-\sqrt{x}}{1+x^3} dx = I,$$

wobei in der letzten Formel das negative Vorzeichen vor der Wurzel nach Vertauschen der Integrationsgrenzen verschwindet. Insgesamt folgt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} \int_{C_{\varrho,\varepsilon}} f(z) dz = 2I$ und damit $I = \pi/3$.

Kapitel 3

Fourier-Transformation

Vorlesungswoche 10

3.1 Einführung

Vorbemerkungen

1. Wir betrachten im Folgenden Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei wir die unabhängige Variable zumindest am Anfang mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen und als *Zeit* interpretieren. Insbesondere werden alle Ableitungen und Integrale bzgl. t im Sinne von *Mathe-1* zu verstehen sein, obwohl wir in einigen Beweisen auch komplexe Ableitungen und komplexe Integrale bzgl. einer Variablen z benutzen werden.
2. Die Grundidee der Fourier-Transformation ist, dass jede komplexwertige Funktion in der reellen Variablen t als unendliche Überlagerung der zeitperiodischen Schwingungen $e^{2\pi i t \nu}$ interpretiert werden kann, wobei die Frequenz ν bzw. die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \nu$ jeden reellen Wert annehmen kann. Ein ganz ähnliches Konzept hatten wir schon in *Mathe-1* bei den Fourier-Reihen benutzt, aber damals gab es nur abzählbar viele mögliche Werte für ν bzw. ω und wir konnten mit Reihendarstellungen arbeiten. In diesem Kapitel arbeiten wir hingegen mit einem Kontinuum möglicher Frequenzen und verwenden Integrale an Stelle von Reihen. Wir werden aber sehen, dass die Konzepte *Fourier-Reihe* und *Fourier-Integral* bzw. *Fourier-Transformierte* sehr eng miteinander verwoben sind.
3. Die Fourier-Transformation ordnet jeder Funktion u in der Variablen t eine andere Funktion v in der Variablen ν zu, wobei wir sowohl $v = \mathcal{F}u$ als auch $v = \hat{u}$ schreiben. In der Systemtheorie werden u bzw. v die *Zeitfunktion* bzw. das *Frequenzspektrum* genannt, aber in abweichenden Kontexten werden andere Bezeichnungen verwendet.
4. Bei der Fourier-Transformation, also beim Übergang von u nach v , geht keine Information verloren und wir können aus v die Funktion $u = \mathcal{F}^{-1}v = \check{u}$ mittels der inversen Fourier-Transformation vollständig rekonstruieren (zumindest im Prinzip). Wir werden daher von Fourier-Paaren (u, v) sprechen, wobei Sie sich vorstellen können, dass u und v die zwei Seiten einer einzigen Medaille sind. Exakt dieselbe Dualität besteht in der modernen Physik zwischen der Ortsdarstellung und der Impulsdarstellung, wobei dann der Ort x und die Wellenzahl k die dualen Variablen sind und an die Stelle von t und ν treten. Die Mathematik ist aber in

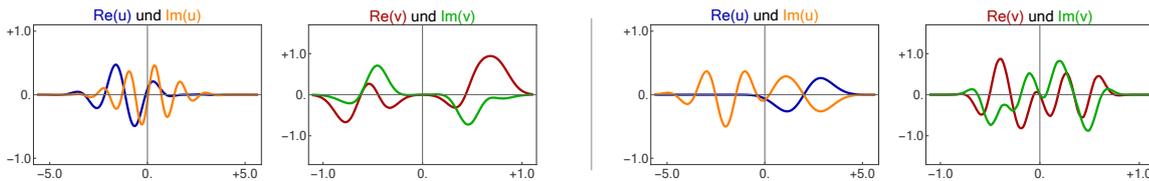
beiden Fällen identisch, denn auch der Wechsel zwischen dem Ort- und dem Impulsbild wird durch die Fourier-Transformation bzw. ihre Inverse vermittelt (die dann nur leicht anders geschrieben werden).

- Die Fourier-Transformation ist schließlich eines der wichtigsten Rechenwerkzeuge in den Natur- und Ingenieurwissenschaften und besitzt zahlreiche Anwendungen. In der Orts-Impuls-Variante kann die Fourier-Transformation außerdem auf Vektorvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ verallgemeinert werden, aber dies wird bei uns keine Rolle spielen.

Definition Formal werden die Fourier-Transformation \mathcal{F} bzw. ihre inverse \mathcal{F}^{-1} durch die folgenden Integralformeln eingeführt:

$$u \xrightarrow{\mathcal{F}} v = \hat{u} = \mathcal{F}u \quad v(\nu) = \hat{u}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

$$v \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u = \check{v} = \mathcal{F}^{-1}v \quad u(t) = \check{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\nu) e^{+2\pi i t \nu} d\nu$$



Zwei Beispiele für Fourier-Paare (u, v) , wobei $v = \hat{u}$ aus u durch Fourier-Transformation bzw. $u = \check{v}$ aus v durch inverse Fourier-Transformation berechnet werden kann. Die Rechnungen können aber sehr kompliziert sein und werden heutzutage oftmals an einen Computer delegiert.

Achtung Die Frage, für welche Funktionen die Fourier-Integrale eigentlich wohldefiniert sind (bzw. sinnvoll definiert werden können), ist ausgesprochen delikat. Für die unten eingeführten Schwartz-Funktionen tritt kein Problem auf und alle bekannten Rechenricks mit Integralen und Ableitungen können gefahrlos angewendet werden. Für die Anwendungen ist es aber wichtig zu verstehen, dass die Operationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} für eine sehr viel größere Klasse von Funktionen — und sogar für gewisse verallgemeinerte Funktionen — in sinnvoller Weise eingeführt werden können. Auf der anderen Seite gibt es aber auch Funktionen, die keine Fourier-Transformierte besitzen. Wir werden weiter unten auf dieses Problem noch einmal zurückkommen, wollen aber im Moment mit Beispielen und direkten Rechnungen fortfahren.

Bemerkungen

- In der Praxis kann man mit Fourier-Transformierten sehr gut rechnen und muss die sehr anspruchsvollen mathematischen Grundlagen gar nicht so genau kennen oder verstehen. Wichtig ist wie immer: viel Übung, Intuition (die kommt mit der Zeit) und etwas Gottvertrauen.
- Es gibt in der Literatur verschiedene Versionen der Fourier-Integrale bzw. der Fourier-Transformation. Das betrifft zum einen natürlich die verwendeten Buchstaben (bei uns u bzw. v und zunächst t bzw. ν), aber auch die Details in den Formeln, vor allem die Frage, wo genau $+$ bzw. $-$ steht und an welchen Stellen

Potenzen von 2π auftreten. Sie dürfen daher niemals Formeln aus verschiedenen Quellen unbesehen miteinander vermischen. Auch bei Computerprogrammen müssen Sie aufpassen. Wenn Sie zum Beispiel Formeln aus dem Skript oder Lösungen von Hausaufgaben mit MATHEMATICA überprüfen wollen, sollten Sie die Option `FourierParameters` $\rightarrow \{0, -2\pi\}$ verwenden.

3. Die Fourier-Transformation \mathcal{F} und ihre Inverse \mathcal{F}^{-1} sind lineare Operationen, d.h. für je zwei Fourier-Paare (u_j, v_j) und je zwei komplexe Zahlen η_j ist auch

$$(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2, \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2)$$

ein Fourier-Paar. Oder anders gesagt: Die (inverse) Fourier-Transformierte einer Linearkombination von Funktionen ist die Linearkombination der (inversen) Fourier-Transformierten.

Beispiele

1. Für den *Rechtecksimpuls*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -a \leq t \leq +a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

können wir die Fourier-Transformierte $v = \hat{u}$ direkt berechnen. Für $\nu \neq 0$ erhalten wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Formel

$$v(\nu) = \int_{-a}^{+a} \exp(-2\pi i t \nu) dt = -\frac{1}{2\pi i \nu} \left[\exp(-2\pi i \nu t) \right]_{t=-a}^{t=+a} = \frac{2 \sin(2\pi a \nu)}{2\pi \nu}$$

und für $\nu = 0$ ergibt sich $v(0) = 2a$. Insgesamt kann dies als

$$v(\nu) = 2a \operatorname{sinc}(2\pi \nu a)$$

geschrieben werden (siehe dazu das nächste Bild). Mit funktionentheoretischen Methoden kann man in diesem Beispiel direkt zeigen, dass wirklich $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u = u$ gilt, siehe [AORS, Seite 432].

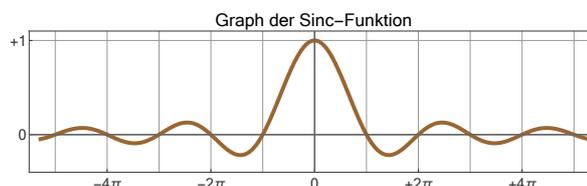
2. Für die ebenfalls unstetige Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0, \\ e^{-at} & \text{falls } t > 0, \end{cases}$$

mit Parameter $a > 0$ ergibt sich die Fourier-Transformierte $v = \hat{u}$ nach analogen Rechnungen zu

$$v(\nu) = -\frac{1}{a + 2\pi i \nu} \left[\exp(-at - 2\pi i \nu t) \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a + 2\pi i \nu},$$

wobei wir benutzt haben, dass die angegebene Stammfunktion für $t \rightarrow \infty$ schnell abklingt.



Der Sinus cardinalis ist bei uns sowie in der mathematischen Literatur durch $\operatorname{sinc}(\xi) = \sin(\xi)/\xi$ für $\xi \neq 0$ und $\operatorname{sinc}(0) = 1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \operatorname{sinc}(\xi)$ definiert. *Achtung:* In einigen Bereichen der Ingenieurwissenschaften wird manchmal die abweichende Definition $\operatorname{sinc}(\xi) = \sin(\pi\xi)/(\pi\xi)$ verwendet, so dass die Nullstellen dann gerade die ganze Zahlen (ohne die 0) sind.

zur Inversionseigenschaft Die Transformationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} sind wirklich invers zueinander, aber das ist gar nicht so einfach zu verstehen. Ein Einsetzen der Formeln liefert

$$\check{u}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{2\pi i \nu (s-t)} dt d\nu \quad \text{bzw.} \quad \widehat{v}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\mu) e^{2\pi i t (\nu-\mu)} d\mu dt,$$

aber es gibt leider kein einfaches Argument, mit dem wir aus diesen Doppelintegralen sofort

$$\check{u}(s) = u(s) \quad \text{bzw.} \quad \widehat{v}(\mu) = v(\mu)$$

herleiten könnten. Wir werden weiter unten noch einmal auf dieses Beweisproblem zurückkommen.

Lemma (Fourier-Transformation und Glockenfunktionen) Für jede Wahl der Parameter $\eta \in \mathbb{C}$ und $\sigma > 0$ wird durch

$$u(t) = \eta \exp(-\sigma t^2), \quad v(\nu) = \frac{\sqrt{\pi} \eta}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{\sigma}\right)$$

und

$$u(t) = \frac{\sqrt{\pi} \eta}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\pi^2 t^2}{\sigma}\right), \quad v(\nu) = \eta \exp(-\sigma \nu^2)$$

jeweils ein Fourier-Paar definiert.

Beweis: Wir fixieren $\sigma > 0$, setzen der Einfachheit halber $\eta = 1$ und benutzen das komplexe Kurvenintegral der holomorphen Funktion $f(z) = e^{-\sigma z^2}$ über den im Bild dargestellten Rechtecksweg, wobei $\varrho > 0$ und $\kappa \neq 0$ zwei weitere reellen Parameter sind, wobei wir zunächst $\kappa > 0$ annehmen. Der Satz von Cauchy impliziert

$$0 = \sum_{j=1}^4 \int_{c_{\kappa, \varrho, j}} e^{-\sigma z^2} dz$$

und wir bemerken, dass die Dreiecksungleichung für vektorwertige Riemann-Integrale die Konvergenzaussage

$$\left| \int_{c_{\kappa, \varrho, 2}} e^{-\sigma z^2} dz \right| \leq \int_0^{\kappa} \left| i e^{-\sigma(\varrho + iy)^2} \right| dy \leq e^{-\sigma \varrho^2} \int_0^{\kappa} e^{\sigma y^2} dy \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$$

und analog auch

$$\left| \int_{c_{\kappa, \varrho, 4}} e^{-\sigma z^2} dz \right| \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$$

impliziert. Andererseits gilt

$$\int_{c_{\kappa, \varrho, 1}} e^{-\sigma z^2} dz = \int_{-\varrho}^{+\varrho} e^{-\sigma x^2} dx \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}}$$

sowie

$$\int_{c_{\kappa,\varrho,3}} e^{-\sigma z^2} dz = \int_{+\varrho}^{-\varrho} e^{-\sigma(x+i\kappa)^2} dx \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(x+i\kappa)^2} dx$$

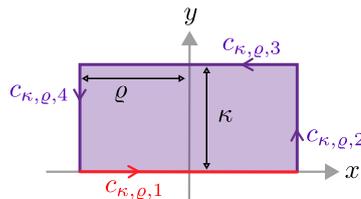
im Sinne uneigentlicher Riemann-Integrale. Im Limes $\varrho \rightarrow \infty$ ergibt sich damit

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(x+i\kappa)^2} dx = e^{+\sigma\kappa^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} e^{-i2\sigma\kappa x} dx$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} e^{-i2\sigma\kappa x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} e^{-\sigma\kappa^2}$$

für jeden Wert $\kappa > 0$, wobei die Endformel offensichtlich auch für $\kappa = 0$ gilt und für $\kappa < 0$ mit analogen Argumenten hergeleitet werden kann. Wenn wir schließlich t statt x im Integral schreiben und außerdem $\kappa = +\pi\nu/\sigma$ wählen, so erhalten wir gerade die Formel für $v(\nu) = \hat{u}(\nu)$ im ersten Fourier-Paar. Analog folgt die zweite Behauptung via $u(t) = \check{v}(t)$ mit $x = \nu$ und $\kappa = -\pi t/\sigma$. \square



Die Integrationswege aus dem Beweis des Lemmas für $\kappa > 0$. Für $\kappa < 0$ wird alles an der x -Achse gespiegelt.

Bemerkung Die letzte Formel im Beweis kann (mittels $\kappa = -\frac{1}{2}\theta/\sigma$) auch als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} e^{i\theta x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{4\sigma}\right)$$

geschrieben werden und gehört in jede gute Formelsammlung zur Ingenieurmathematik.

Rechenregeln Sofern u und v hinreichend gut sind, können die folgenden Gesetze abgeleitet werden (siehe die Übungen), wobei links und rechts die jeweils äquivalenten Operationen gelistet sind:

Zeitbereich	$u(t)$	$v(\nu)$	Frequenzbereich
Ableiten nach t	$\frac{d}{dt}u(t)$	$+2\pi i\nu v(\nu)$	Multiplikation mit $2\pi i\nu$
Multiplikation mit $2\pi i t$	$-2\pi i t u(t)$	$\frac{d}{d\nu}v(\nu)$	Ableiten nach ν
Verschiebung um t_*	$u(t - t_*)$	$e^{-2\pi i t_* \nu} v(\nu)$	Modulation mit t_*
Modulation mit ν_*	$e^{+2\pi i \nu_* t} u(t)$	$v(\nu - \nu_*)$	Verschiebung um ν_*
Streckung/Stauchung	$u(ct)$	$c^{-1}v(c^{-1}\nu)$	Skalierung
Skalierung	$c^{-1}u(c^{-1}t)$	$v(c\nu)$	Streckung/Stauchung

Beispiel Wir hatten bereits oben gesehen, dass

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0, \\ e^{-t} & \text{falls } t > 0, \end{cases}, \quad v(\nu) = \frac{1}{1 + 2\pi i \nu},$$

ein Fourier-Paar ist. Aus der Rechenregeln für die Ableitungen von v nach ν folgt nun unmittelbar, dass auch durch

$$2\pi i t u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0, \\ -2\pi i t e^{-t} & \text{falls } t > 0, \end{cases}, \quad v'(\nu) = -\frac{2\pi i \nu}{(1 + 2\pi i \nu)^2}$$

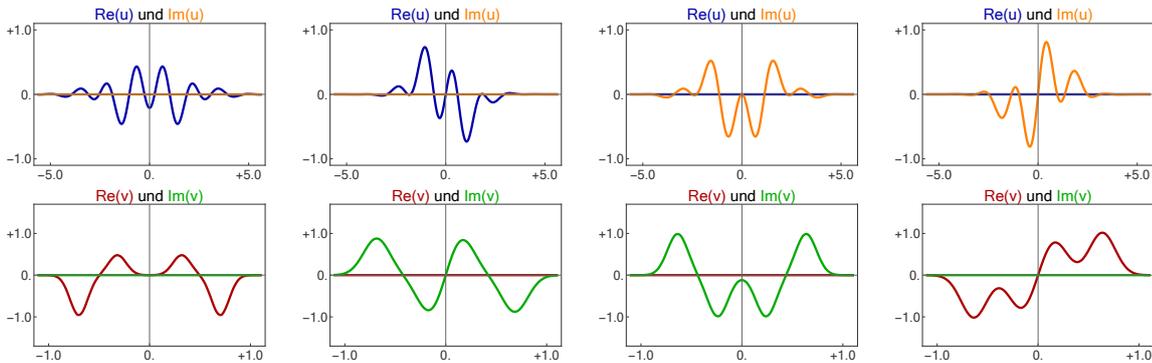
ein Fourier-Paar gegeben ist, wobei wir dies alternativ auch durch die Berechnung von Integralen hätten herleiten können.

Bemerkung: Die erste Ableitungsregel darf hier jedoch nicht so einfach angewendet werden, da u in $t = 0$ unstetig und damit nicht im klassischen Sinne differenzierbar ist. Wir werden aber unten sehen, dass u eine verallgemeinerte Ableitung im Sinne der Distributionen besitzt und dass man die erste Ableitungsformel doch verwenden kann, sofern diese richtig interpretiert bzw. um entsprechende Terme ergänzt wird.

Paritätseigenschaften Für jedes Fourier-Paar (u, v) gelten die folgenden vier Äquivalenzen, die leicht nachgerechnet werden können:

1. u gerade und reellwertig $\Leftrightarrow v$ gerade und reellwertig
2. u ungerade und reellwertig $\Leftrightarrow v$ ungerade und imaginärwertig
3. u gerade und imaginärwertig $\Leftrightarrow v$ gerade und imaginärwertig
4. u ungerade und imaginärwertig $\Leftrightarrow v$ ungerade und reellwertig

Die Begriffe *gerade* und *ungerade* sind dabei im Sinne von *Mathe-1* zu verstehen und *reellwertig* bzw. *imaginärwertig* meint, dass der Imaginärteil bzw. der Realteil der entsprechenden Funktion verschwindet.



Die Paritätseigenschaften von Fourier-Paaren, dargestellt anhand typischer Beispiele. Alle Funktionen sind hier Schwartz-Funktionen (siehe dazu unten).

Bemerkung* Durch die Formeln

$$\begin{aligned} u_{\text{gr}}(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u(t)) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u(-t)), & u_{\text{ur}}(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u(t)) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u(-t)), \\ u_{\text{gi}}(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(u(t)) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(u(-t)), & u_{\text{ui}}(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(u(t)) - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(u(-t)) \end{aligned}$$

wird jede Funktion u via

$$u(t) = u_{\text{gr}}(t) + u_{\text{ur}}(t) + u_{\text{gi}}(t) + u_{\text{ui}}(t)$$

eindeutig in seine vier *Paritätsbestandteile* zerlegt, wobei u_{ur} zum Beispiel ungerade und reellwertig ist. Analoge Formeln gelten für v und die zweite Paritätseigenschaft impliziert, dass die Fourier-Transformierte von u_{ur} durch v_{ui} gegeben ist.

3.2 Weitere Eigenschaften

Unschärfeprinzip Das Lemma über Glockenfunktionen liefert mit $\sigma = 1/\varepsilon^2$ und $\eta = 1/(\sqrt{\pi} \varepsilon)$ die beiden Fourier-Paare

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right), \quad v_\varepsilon(\nu) = \exp(-\varepsilon^2 \pi^2 \nu^2)$$

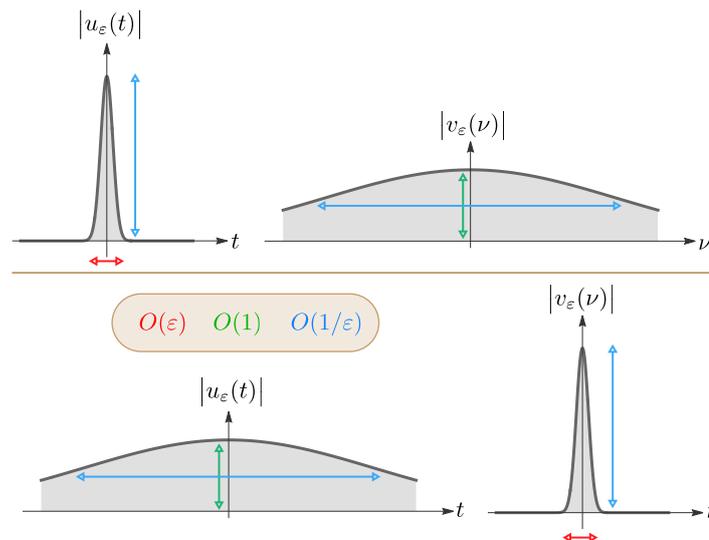
und

$$u_\varepsilon(t) = \exp(-\varepsilon^2 \pi^2 t^2), \quad v_\varepsilon(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} \exp\left(-\frac{\nu^2}{\varepsilon^2}\right),$$

wobei hier $0 < \varepsilon \ll 1$ ein kleiner Parameter sein soll. Diese Beispiele illustrieren das folgende, fundamentale Prinzip, das nicht nur für Glockenfunktionen gilt:

1. Ist u „lokalisiert“, so ist v „ausgeschmiert“ (und umgekehrt).
2. Ist u hingegen „ausgeschmiert“, so ist v „lokalisiert“ (und umgekehrt).

In der Physik wird das die *Heisenbergsche Unschärferelation* genannt, wobei dann meist nicht t (Zeit) und ν (Frequenz), sondern x (Ort) und ξ (Wellenzahl bzw. Impuls) als duale Variablen verwendet werden (siehe dazu weiter unten).



Die beiden ε -Familien von Glockenfunktionen, die das Unschärfeprinzip der Fourier-Transformation beispielhaft verdeutlichen. Die Konzepte „lokalisiert“ und „ausgeschmiert“ können dabei in intuitiver Weise, d.h. ohne präzise Definition, verstanden und benutzt werden.

Faltungen von Funktionen Sind u_1 und u_2 zwei hinreichend gute Funktionen in der Variablen t , so wird durch

$$(u_1 * u_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t-s) u_2(s) ds$$

eine Funktion $u_1 * u_2$ definiert, die man die Faltung (oder das Faltungsprodukt) von u_1 und u_2 nennt. Vollkommen analog gilt

$$(v_1 * v_2)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\nu - \mu) v_2(\mu) d\mu.$$

Bemerkungen

1. Faltungsprodukte spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Physik, vor allem in der Theorie partieller Differentialgleichungen.
2. Die Transformationsformel für Riemann-Integrale impliziert via $\tilde{s} = t - s$ und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t-s) u_2(s) ds = - \int_{+\infty}^{-\infty} u_1(\tilde{s}) u_2(t-\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tilde{s}) u_2(t-\tilde{s}) d\tilde{s}$$

die Kommutativität der Faltung, d.h. es gilt $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ und analog natürlich auch $v_1 * v_2 = v_2 * v_1$.

3. Mit ähnlichen Rechnungen können wir auch $u_1 * (u_2 * u_3) = (u_1 * u_2) * u_3$, also die Assoziativität der Faltung zeigen.
4. Sind u_1 und u_2 differenzierbar, so kann leicht die Formel

$$\frac{d}{dt}(u_1 * u_2) = \left(\frac{d}{dt}u_1\right) * u_2 = u_1 * \left(\frac{d}{dt}u_2\right),$$

nachgerechnet werden, d.h. wenn wir die Faltung zweier Funktionen ableiten möchten, können wir alternativ erst eine der Funktionen ableiten und dann falten.

Beispiel Für die Glockenfunktionen

$$u_1(t) = \exp(-\sigma_1 t^2), \quad u_2(t) = \exp(-\sigma_2 t^2)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (u_1 * u_2)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma_1 (t-s)^2) \exp(-\sigma_2 s^2) ds \\ &= \exp\left(-\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} t^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(\sigma_1 + \sigma_2) \left(s - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} t\right)^2\right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2}} \exp\left(-\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} t^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^2) dr \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2}} \exp\left(-\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} t^2\right), \end{aligned}$$

wobei wir $r = \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2} \left(s - \frac{\sigma_1 t}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)$ substituiert und $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^2) dr = \sqrt{\pi}$ eingesetzt haben.

Bemerkung*: Wir haben gerade gezeigt, dass die Faltung zweier Glockenfunktionen wieder eine Glockenfunktion, nur mit anderen Parametern ist. Diese Beobachtung ist auch in vielen anderen Kontexten sehr fruchtbar und kann zum Beispiel benutzt werden, um zentrale Grenzwertsätze der mathematischen Statistik herzuleiten.

Lemma (Faltungssatz) Für je zwei Fourier-Paare (u_1, v_1) und (u_2, v_2) sind

$$(u_1 * u_2, v_1 v_2), \quad (u_1 u_2, v_1 * v_2)$$

auch Fourier-Paare. Oder anders gesagt: Unter \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} wird aus der Faltung das Produkt und aus dem Produkt die Faltung.

Beweis: Mit dem Satz von Fubini sowie der Substitution $r = t - s$ erhalten wir via

$$\begin{aligned} \widehat{u_1 * u_2}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t-s) u_2(s) ds \right) \exp(-2\pi i \nu t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t-s) u_2(s) \exp(-2\pi i \nu t) dt ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(r) u_2(s) \exp(-2\pi i \nu (r+s)) dr ds \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(r) \exp(-2\pi i \nu r) dr \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(s) \exp(-2\pi i \nu s) ds \right) \\ &= \hat{u}_1(\nu) \hat{u}_2(\nu) \end{aligned}$$

die erste Behauptung. Die zweite kann analog abgeleitet werden. \square

Beispiel Wir betrachten noch einmal die Glockenfunktionen u_1 und u_2 aus dem letzten Beispiel und wollen die Formel für $u = u_1 * u_2$ auf eine andere Weise berechnen. Nach dem Faltungssatz und dem Lemma von oben gilt

$$\begin{aligned} \hat{u}(\nu) &= \hat{u}_1(\nu) \hat{u}_2(\nu) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_1}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{\sigma_1}\right) \right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_2}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{\sigma_2}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \exp\left(-\pi^2 \nu^2 \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \nu^2}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)$ substituiert haben. Auf der rechten Seite steht aber ein Vielfaches der Fourier-Transformierten der Glockenkurve mit Parameter σ , und nach Anwendung der inversen Fourier-Transformation erhalten wir für $u(t)$ das gleiche Ergebnis wie oben.

Anwendung auf Differentialgleichungen Mit der Fourier-Transformation können auch partikuläre Lösungen linearer und inhomogener Differentialgleichungen berechnet werden. Als prototypisches Beispiel betrachten wir die Schwingkreisgleichung

$$\beta_2 \ddot{u}(t) + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t) = g(t)$$

mit komplexen Parametern $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$, wobei die gegebene Funktion g eine äußere Anregung beschreibt. Wir wenden nun die Fourier-Transformation auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$\beta_2 (2\pi i \nu)^2 v(\nu) + \beta_1 (2\pi i \nu) v(\nu) + \beta_0 v(\nu) = h(\nu)$$

bzw.

$$v(\nu) = V(\nu) h(\nu), \quad V(\nu) = \frac{1}{\beta_2 (2\pi i \nu)^2 + \beta_1 (2\pi i \nu) + \beta_0},$$

wobei $v = \hat{u}$ bzw. $h = \hat{g}$ die Fourier-Transformierte von u bzw. g ist. Oder anders gesagt: Aus der Differentialgleichung für u ist eine algebraische Gleichung für v geworden, eben weil das Ableiten von u nach t der Multiplikation von v mit $2\pi i \nu$ entspricht. Durch Rücktransformation ergibt sich schließlich die Lösungsformel

$$u = U * g \quad \text{bzw.} \quad u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t-s) g(s) ds,$$

wobei U die inverse Fourier-Transformierte von V bezeichnet. Diese kann mittels Linearkombination aus den Formeln im nachfolgenden Lemma berechnet werden, da sich V nach Partialbruchzerlegung als

$$V(\nu) = \frac{\eta_1}{\nu - \gamma_1} + \frac{\eta_2}{\nu - \gamma_2}$$

schreiben lässt, wobei η_j und γ_j komplexe Zahlen sind, die in kleinen Nebenrechnungen aus den Werten von $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ermittelt werden können.

Bemerkungen

1. Die Funktion U wird auch die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung genannt. Sie erfüllt die Gleichung

$$\beta_2 \ddot{U}(t) + \beta_1 \dot{U}(t) + \beta_0 U(t) = \delta_0(t)$$

wobei δ_0 die *Diracsche Delta-Distribution* im Punkt 0 ist (siehe unten). Mit dieser Information kann die Lösungsformel auch aus physikalischen Erwägungen und dem allgemeinen Superpositionsprinzip abgeleitet werden.

2. Die eben beschriebene Fourier-Methode kann auch auf andere Differentialgleichungen angewendet werden, wobei dann die Berechnung von U in aller Regel aufwendiger ist. Die Methode versagt aber, wenn die Parameter α und β von der Zeit t oder gar der Lösung u abhängen, d.h. wenn es sich nicht mehr um eine *lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten* handelt.
3. Bei der Fourier-Methode können keine Anfangsbedingungen für die Differentialgleichungen gestellt werden. Insbesondere erhalten wir nicht die allgemeine Lösung, sondern nur eine partikuläre, die via

$$\limsup_{t \rightarrow \pm\infty} |u(t)| < \infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} |\dot{u}(t)| < \infty$$

im Unendlichen mindestens beschränkt ist. Zu dieser kann dann noch die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung addiert werden, wobei die zusätzlichen Freiheitsgrade durch Vorgabe von Anfangswerten eliminiert werden können (wie in *Mathe-2* erklärt). Für Anfangswertprobleme kann alternativ auch die *Laplace-Transformation* (siehe das nächste Kapitel) oder die Variation der Konstanten (siehe wieder *Mathe-2*) verwendet werden.

Lemma (Hilfsresultat über einfache Monome bzw. Pole) Die inverse Fourier-Transformierte u der Funktion

$$v(\nu) = \frac{1}{\nu - \gamma}$$

kann in Abhängigkeit des komplexen Parameters $\gamma \in \mathbb{C}$ wie folgt angegeben werden:

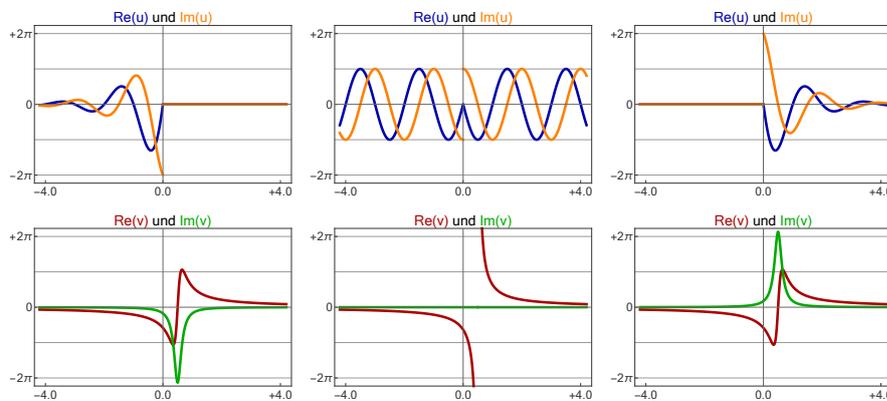
$$\begin{aligned} \underline{\operatorname{Im}(\gamma) < 0} : \quad u(t) &= 2\pi i \exp(2\pi i \gamma t) \begin{cases} -1 & \text{falls } t < 0 \\ 0 & \text{falls } t > 0 \end{cases} \\ \underline{\operatorname{Im}(\gamma) = 0} : \quad u(t) &= 2\pi i \exp(2\pi i \gamma t) \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{falls } t < 0 \\ +\frac{1}{2} & \text{falls } t > 0 \end{cases} \\ \underline{\operatorname{Im}(\gamma) > 0} : \quad u(t) &= 2\pi i \exp(2\pi i \gamma t) \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ +1 & \text{falls } t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

In jedem der drei Fälle ist u beschränkt und besitzt in $t = 0$ eine Unstetigkeit, wobei es sich wegen

$$\lim_{t \searrow 0} u(t) - \lim_{t \nearrow 0} u(t) = 2\pi i$$

um eine Sprungstelle handelt.

Beweis: Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung können wir leicht nachrechnen, dass $v = \hat{u}$ gilt (analog zu einem der Beispiele oben). Mit dem Jordan-Lemma können wir alternativ auch direkt $u = \check{v}$ zeigen. \square



Das Fourier-Paar (u, v) aus dem Lemma für die Parameterwerte $\gamma = 0.5 - 0.15i$ (links), $\gamma = 0.5$ (Mitte) und $\gamma = 0.5 + 0.15i$ (rechts). *Zusatz**: Es handelt sich jeweils um die Fundamentallösung einer Differentialgleichung erster Ordnung. Insbesondere gilt $(2\pi i)^{-1} \dot{u}(t) - \gamma u(t) = \delta_0(t)$.

Gamma-Verteilung* Die Funktion

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ \frac{\lambda^\tau}{\Gamma(\tau)} t^{\tau-1} \exp(-\lambda t) & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

mit reellen Parametern $\lambda > 0$ und $\tau > 0$ ist eine wichtige *spezielle Funktion*, wobei die *Gamma-Funktion*

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} s^{\tau-1} e^{-s} ds$$

eine weitere spezielle Funktion ist. Mit komplexen Wegintegralen (siehe zum Beispiel [P, Seite 284] für die Details) kann die Formel

$$v(\nu) = \hat{u}(\nu) = \text{Pow}_\tau \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\pi i \nu} \right)$$

hergeleitet werden, in der Hauptwert der komplexen Potenzen auftaucht. Nach kleinen Nebenrechnungen kann hieraus die inverse Fourier-Transformierte von $v(\nu) = (\nu - \gamma)^{-\tau}$ abgelesen werden, wobei λ in Abhängigkeit von γ zu wählen ist.

3.3 Abtastproblem in der Signalverarbeitung

Vorbemerkung Wir formulieren nun ein berühmtes mathematisches Theorem, dass in der Nachrichtentechnik und in der ingenieurwissenschaftlichen Informationstheorie sehr wichtig ist und zahlreiche Anwendungen besitzt.

Theorem (Abtasttheorem von Kotelnikov-Nyquist-Shannon-Whittaker)

Seien (u, v) ein Fourier-Paar und $N, \Delta t$ zwei positive Zahlen, sodass

1. v verschwindet außerhalb des Intervalles $[-N, +N]$, d.h. $v(\nu) = 0$ für $|\nu| > N$,
2. Δt ist hinreichend klein im Sinne von $0 < \Delta t \leq 1/(2N)$.

Dann gilt die Interpolationsformel

$$u(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(t_m) \operatorname{sinc}(\pi(t - t_m)/\Delta t), \quad t_m = m \Delta t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei auf der rechten Seite der Sinus cardinalis steht (siehe oben). Insbesondere ist die Funktion u bereits eindeutig durch die Werte bestimmt, die sie zu den Zeitpunkten t_m annimmt.

Beweis: Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\Delta t N = 1/2$$

annehmen, da wir andernfalls N durch den größeren Wert $\tilde{N} = 1/(2\Delta t)$ ersetzen können. Wir hatten in *Mathe-1* gesehen, dass jede Funktion auf einem Intervall in Form einer Fourier-Reihe geschrieben werden kann. Wir wollen dies nun auf die Funktion v anwenden, die wir dazu als Funktion auf dem Intervall $[-N, N]$ betrachten oder alternativ zu einer $2N$ -periodischen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortsetzen. In jedem Fall erhalten die Darstellungsformel

$$v(\nu) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \eta_j \exp(+2\pi i j \Delta t \nu)$$

für alle $\nu \in [-N, +N]$, wobei jeder der harmonischen Bausteine wegen

$$\exp(+2\pi i j \Delta t (\nu + 2N)) = \exp(+2\pi i j \Delta t \nu)$$

$2N$ -periodisch in der Variablen ν ist. Die entsprechenden Fourier-Koeffizienten sind (wieder nach *Mathe-1*) durch

$$\eta_j = \frac{1}{2N} \int_{-N}^{+N} v(\nu) \exp(-2\pi i j \Delta t \nu) d\nu$$

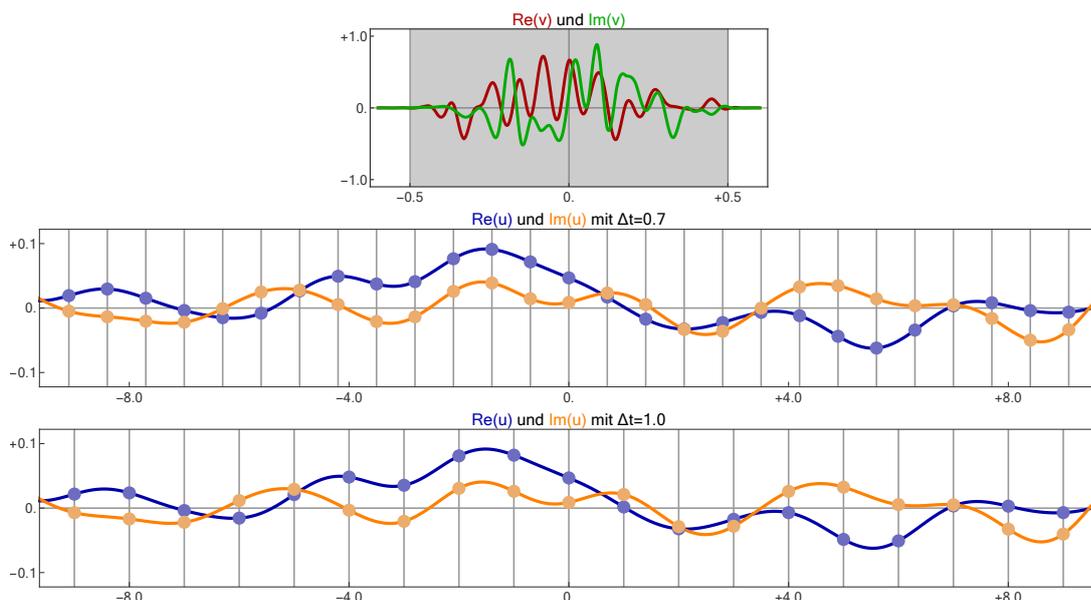
gegeben und mithilfe der Funktion u können wir diese Gleichung auch als

$$\eta_j = \frac{u(-j \Delta t)}{2N} = \frac{u(-t_j)}{2N} = \Delta t u(-t_j)$$

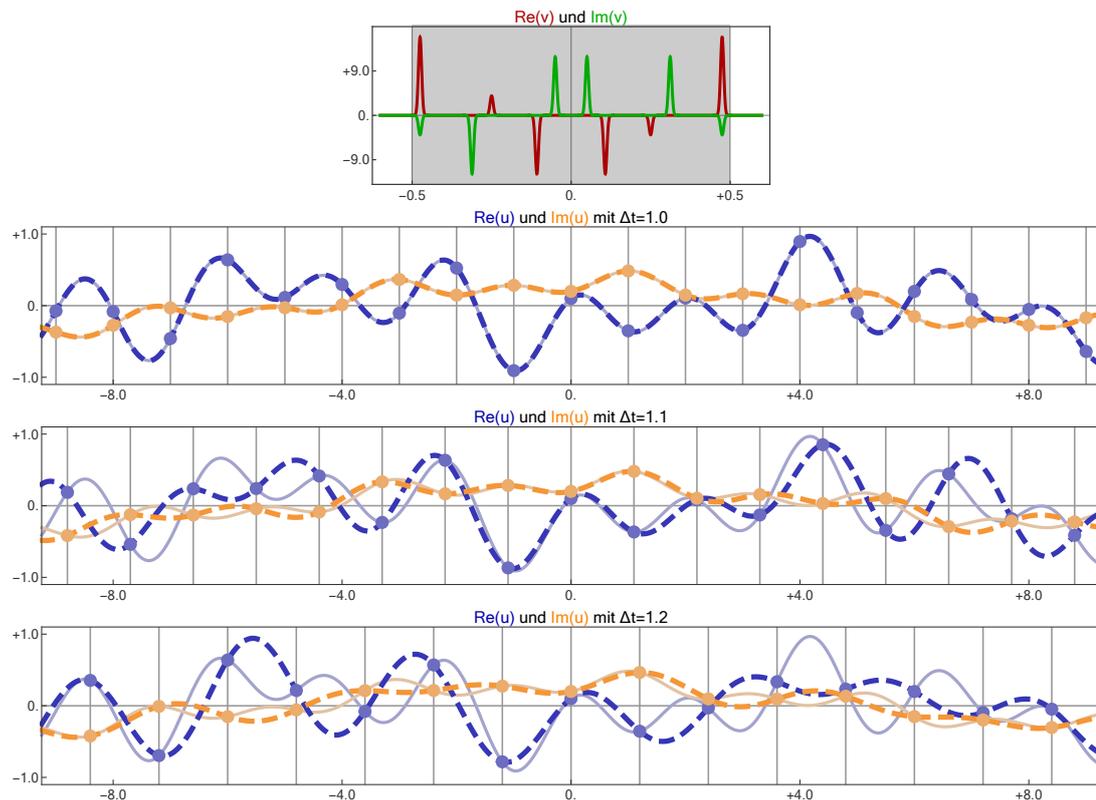
schreiben. Im nächsten Schritt kombinieren wir die Reihendarstellung von v mit der Formel der inversen Fourier-Transformation und erhalten

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \int_{-N}^{+N} v(\nu) \exp(+2\pi i \nu t) d\nu \\
 &= \int_{-N}^{+N} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \eta_j \exp(+2\pi i j \Delta t \nu) \exp(+2\pi i t \nu) d\nu \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \eta_j \int_{-N}^{+N} \exp(+2\pi i (t + t_j) \nu) d\nu \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_j}{2\pi i (t + t_j)} \left[\exp(+2\pi i (t + t_j) \nu) \right]_{\nu=-N}^{\nu=+N} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_j}{2\pi i (t + t_j)} \left(2i \sin(2\pi (t + t_j) N) \right) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{u(-t_j)}{2\pi N (t + t_j)} \sin(2\pi (t + t_j) N) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} u(-t_j) \operatorname{sinc}(2\pi N (t + t_j)) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} u(-t_j) \operatorname{sinc}(\pi (t + t_j) / \Delta t).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass wir Summation und Integration vertauschen dürfen (was streng genommen eine Annahme an die Güte von u bzw. v ist). Die Behauptung folgt nun direkt nach Substitution $j = -m$. \square



Erstes Beispiel für das Abtasttheorem mit Bandbreite $N = 0.5$. Die Fourier-Transformierte $v = \hat{u}$ des Signals u ist oben dargestellt und die Signalabtastung wird in den anderen Zeilen für $\Delta t = 0.7$ und $\Delta t = 1.0$ illustriert, wobei der zweite Wert gerade dem maximalen Zeitabstand (bzw. der minimalen Abtastfrequenz) für eine fehlerfreie Rekonstruktion entspricht.



Zweites Beispiel für das Abtasttheorem, wobei die Bandbreite wieder $N = 0.5$ ist und für drei Werte von Δt jeweils das Ursprungssignal u (blasser Linien) sowie das Ergebnis der Interpolationsformel (gestrichelte Linien) dargestellt werden. In der zweiten und in der dritten Zeile ist die zweite Nyquist-Bedingung $\Delta t \leq 1$ verletzt, d.h. u kann nicht vollständig aus Messungen in den Abtastzeiten (Punkte) rekonstruiert werden.

Bemerkungen

1. Die beiden Bedingungen im Theorem werden Nyquist-Bedingungen genannt, wobei die erste meint, dass das Signal u nur eine *endliche Bandbreite* besitzt. Die Zeiten t_m sind die sogenannten *Abtastzeiten*, an denen das Signal (zum Beispiel durch Messungen) bekannt ist. Natürlich sind in der Praxis die Messdaten fehlerbehaftet, aber dies wird im Theorem nicht berücksichtigt.
2. Das Theorem besagt, dass jedes Signal eindeutig aus Messdaten rekonstruiert werden kann, sofern die Abtastfrequenz $1/\Delta t$ größer als die doppelte Bandbreite des Signals ist (zweite Bedingung). Ist die Abtastfrequenz kleiner, so muss die Formel im Theorem um *Interpolationsfehler* ergänzt werden, die man aber nicht aus den Daten berechnen, sondern bestenfalls abschätzen kann. Insbesondere kann es dann zu einem gegebenen Satz von Messdaten mehrere entsprechende Signale geben. Dasselbe gilt im Fall von $N = \infty$, d.h. wenn die Bandbreite des Signals unendlich ist.
3. In der Praxis kann die Reihe in der Interpolationsformel nicht exakt berechnet werden und man summiert nur über die Indizes $m = -M, \dots, +M$, wobei der Abschneideparameter M hinreichend groß sein sollte. Dadurch entstehen natürlich neue bzw. weitere Fehlerterme.
4. Die genaue Formulierung des Abtasttheorems hängt immer davon ab, welche Variante der Fourier-Transformation benutzt wird. Sie sollten beim Arbeiten mit verschiedenen Literaturquellen daher immer aufpassen und jede Formel gegebenenfalls anpassen. Meist müssen aber nur Vorzeichen geändert, Variablen substituiert und Potenzen von 2π eingefügt oder entfernt werden.

3.4 Distributionen

Vorbemerkung Wir werden in diesem Abschnitt *Distributionen* einführen, wobei man sich diese als *verallgemeinerte Funktionen* vorstellen kann. Die dabei verwendeten Konzepte und Begriffe sind alles andere als einfach zu verstehen, aber am Ende werden wir Formeln für die Fourier-Transformierten wichtiger Distributionen ableiten, die Sie in ihrem Ingenieurstudium an vielen Stellen benutzen können und werden.

Vorbereitungen

Schwartz-Funktionen Eine komplexwertige Funktion in einer reellen Variablen wird Schwartz-Funktion genannt, wenn sie

1. unendlich oft differenzierbar ist (im Sinne von *Mathe-1*), und
2. alle ihre Ableitungen im Unendlichen *schneller* als *jedes* Polynom abklingen.

Die zweite Bedingung wird manchmal etwas salopp als *schnelles Abklingen* bezeichnet.

Bemerkungen

1. Die Menge aller Schwartz-Funktionen wird mit \mathcal{S} bezeichnet, wobei es letztlich egal ist, mit welchen Buchstaben die Funktion und ihr Argument bezeichnet werden. Im Kontext der Fourier-Transformation können sowohl u als auch v zu \mathcal{S} gehören und es gilt

$$u \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |t^n u^{(m)}(t)| = 0 \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}_0$$

bzw.

$$v \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} |\nu^n v^{(m)}(\nu)| = 0 \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $u^{(m)}$ bzw. $v^{(m)}$ wieder die m -te Ableitung von u bzw. v nach t bzw. ν bezeichnet.

2. Für jedes komplexe Polynom p und jedes $a > 0$ wird durch

$$u(t) = p(t) \exp(-at^2) \quad \text{und} \quad u(t) = \frac{p(t)}{\cosh(at)}$$

jeweils eine Schwartz-Funktion im Zeitbereich definiert. Analoge Formeln mit ν statt u und t liefern Schwartz-Funktionen im Frequenzbereich.

3. Polynomielle, trigonometrische oder Exponentialfunktionen gehören nicht zum Schwartz-Raum \mathcal{S} , da sie bei $-\infty$ und/oder $+\infty$ überhaupt nicht abklingen. Genauso wenig sind rationale Funktionen Elemente von \mathcal{S} , da sie zu langsam abklingen.
4. Die folgende Beobachtung ist wichtig: Ist u eine Schwartz-Funktion, so ist *jede* Ableitung von u auch eine Schwartz-Funktion (analog für v). Oder anders gesagt: \mathcal{S} ist invariant unter Differentiation. Bemerkung*: \mathcal{S} ist nach Konstruktion auch invariant unter Multiplikation mit Polynomen.

5. Für jedes Fourier-Paar (u, v) gilt: u ist genau dann eine Schwartz-Funktion (in der Variablen t), wenn v eine Schwartz-Funktion (in der Variablen ν) ist. Dies ist eigentlich ein Theorem, das wir hier aber nicht beweisen wollen.
6. Für Schwartz-Funktionen können die weiter oben angegebenen Rechenregeln der Fourier-Transformation problemlos durch direkte Rechnungen überprüft werden (siehe die Übungen). Wenn u bzw. v jedoch keine Schwartz-Funktion ist, so kann es passieren, dass die entsprechenden Fourier-Integrale nur im Sinne von Cauchyschen Hauptwerten existieren oder für einzelne Werte von t bzw. ν gar nicht definiert sind. Die daraus entstehenden Schwierigkeiten können innerhalb der Theorie der Distributionen gelöst bzw. vermieden werden.

Notation Mit φ bzw. ψ meinen wir im Folgenden immer Schwartz-Funktionen im Zeit- bzw. Frequenzbereich, wohingegen u bzw. v für eine Distribution steht. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass u bzw. v selbst eine Schwartz-Funktion ist.

Skalarprodukt und Norm Wir können durch

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(t)} dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(\nu) \overline{\psi_2(\nu)} d\nu$$

ein *Skalarprodukt* für Schwartz-Funktionen im Zeitbereich bzw. im Frequenzbereich einführen (der Querstrich meint die komplex konjugierte Zahl), wobei die entsprechende *Norm* durch

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 dt} \quad \text{bzw.} \quad \|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\nu)|^2 d\nu}$$

gegeben ist.

1. Das Skalarprodukt in \mathcal{S} spielt eine wichtige Rolle in der Mathematik und den Anwendungswissenschaften. Mit seiner Hilfe können wir zum Beispiel weiter unten die Fourier-Transformation für Distributionen einführen.
2. Das Skalarprodukt ist sesquilinear (siehe dazu *Mathe-1*), d.h. es gilt zum Beispiel

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \overline{\langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle}.$$

Beachte aber, dass $\langle \varphi, \varphi \rangle > 0$ für jede Funktion φ gilt, sofern diese nicht die Nullfunktion mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.

Definition von Distributionen

Vorbemerkungen Wir werden nun das Konzept der temperierten Distributionen einführen, wobei wir eine heuristische Strategie verfolgen. Es gibt natürlich auch einen mathematisch-rigorosen Zugang, aber dieser beruht auf einigen Abstraktionen, deren Notwendigkeit und Nutzen sich erst auf den zweiten oder dritten Blick erschließen.

Wir konzentrieren uns zunächst auf Distributionen im Zeitbereich, aber alle Konstruktionen und Argumente können analog auch im Frequenzbereich durchgeführt werden.

Informelle Definition Für eine temperierte Distribution u in der Variablen t kann das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt$$

für jede Schwartz-Funktion φ in „sinnvoller Weise“ definiert werden. Man spricht auch vom Testintegral und nennt φ die Testfunktion. Jede Distribution u kann also mit einer beliebigen Schwartz Funktion getestet werden, wobei das Ergebnis eine komplexe Zahl ist.

Sprechweise Wir werden im Folgenden das Attribut *temperiert* (das übrigens in etwa *moderat* meint) weglassen und nur von *Distributionen* reden. In der mathematischen Literatur wird aber zwischen den temperierten und den allgemeinen Distributionen unterschieden.

Beispiele

1. Jede Schwartz-Funktion u ist selbst Distribution, denn das Testintegral mit jeder anderen Schwartz-Funktion φ ist als uneigentliches Riemann-Integral wohldefiniert.
2. Jede polynomielle Funktion u ist auch Distribution, denn sie wächst zwar im Unendlichen, aber das Produkt $u \varphi$ mit einer Schwartz-Funktion φ klingt immer noch im Unendlichen ab und kann daher über $(-\infty, +\infty)$ integriert werden.
3. Auch unstetige Funktionen können als Distribution betrachtet werden, sofern sie mit Schwartz-Funktionen getestet werden können. Für die Signums- oder Vorzeichenfunktion gilt zum Beispiel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t) \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt,$$

wobei es nicht wichtig ist, welchen Wert sgn in der Unstetigkeitsstelle $t = 0$ annimmt.

4. Es gibt jedoch auch Distributionen, die nicht von einer Funktion stammen, sondern nur im Sinne einer *verallgemeinerten Funktion* existieren. Das Paradebeispiel ist die Diracsche Delta-Distribution im Punkt t_* , die formal durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_*}(t) \varphi(t) dt = \varphi(t_*)$$

definiert ist. Oder anders gesagt: Wird δ_{t_*} mit einer Schwartz-Funktion φ getestet, so erhalten wir den Funktionswert von φ zur Zeit t_* .

Gegenbeispiel Die Exponentialfunktion $u(t) = \exp(t)$ ist in unserem Sinne *keine* Distribution, da sie für $t \rightarrow +\infty$ zu schnell anwächst. Insbesondere kann nach Multiplikation mit einer beliebigen Schwartz-Funktion φ nicht garantiert werden, dass $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \varphi(t) = 0$ gilt bzw. dass das entsprechende Testintegral existiert. In der Mathematik ist u übrigens eine Distribution, allerdings keine temperierte.

Bemerkung Es ist nicht wichtig, ob oder wie einer Distribution u in sinnvoller Weise ein Wert in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ zugewiesen werden kann. Wichtig ist nur, dass man sie mit beliebigen Schwartz-Funktionen testen kann.

Linearkombinationen Distributionen können in natürlicher Weise linear kombiniert werden. Zum Beispiel wird für je zwei Zeiten t_1 und t_2 und je zwei komplexe Zahlen η_1 und η_2 durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\eta_1 \delta_{t_1}(t) + \eta_2 \delta_{t_2}(t) \right) \varphi(t) dt = \eta_1 \varphi(t_1) + \eta_2 \varphi(t_2)$$

die Distribution $\eta_1 \delta_{t_1} + \eta_2 \delta_{t_2}$ definiert.

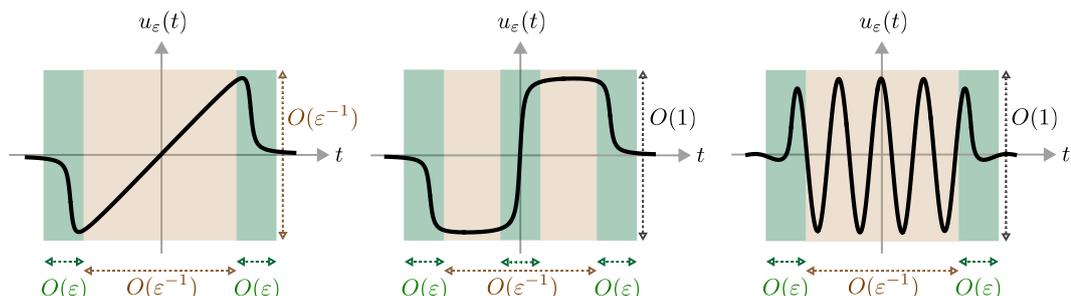
Approximation und Konvergenz Wir können uns jede Distribution auch als Grenzwert von Schwartz-Funktionen vorstellen, wobei der folgende Konvergenzbegriff zu Grunde liegt: Eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Distributionen konvergiert genau dann gegen eine Distribution u , wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t) \varphi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt$$

für jede Testfunktion φ gilt. Besonders interessant ist dabei der Fall, dass die u_n sehr gute Eigenschaften besitzen (zum Beispiel Schwartz-Funktionen sind), der Grenzwert u aber nicht.

Bemerkungen

1. Die gerade eingeführte Konvergenz von Distributionen hat sehr viel mit der sogenannten *schwachen Konvergenz* in der Mathematik zu tun und wird auch distributionelle Konvergenz genannt.
2. Wir betrachten oftmals Distributionen u_ε , die von einem reellen Parameter ε abhängen. Dann ist die distributionelle Konvergenz $u_\varepsilon \rightarrow u$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ ganz analog zu verstehen, nur dass ε im Limes klein und nicht groß wird.
3. Zusatz*: In der Mathematik wird die Menge aller temperierten Distributionen mit \mathcal{S}' bezeichnet und als *Dualraum* des topologischen Vektorraumes \mathcal{S} verstanden, wobei dann zusätzlich ein dualer Konvergenzbegriff in \mathcal{S} zum Einsatz kommt. Eine detaillierte Darstellung dieser sehr modernen Sicht können und wollen wir in dieser Vorlesung nicht geben.



Zur Approximation von Distributionen durch Schwartz-Funktionen, wobei hier der Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine lineare Funktion (links), die Signumfunktion (Mitte) oder eine periodische Funktion (rechts) ist. Die Approximation ist nicht eindeutig, d.h. für gegebenes u und $\varepsilon > 0$ gibt es viele Möglichkeiten, u_ε zu wählen.

Standard-Approximation der Dirac-Distribution im Ursprung Für eine gegebene nichtnegative Funktion $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(t) dt = 1$$

und jeden reellen Parameter $\varepsilon > 0$ betrachten wir die mit ε skalierte Funktion

$$\varrho_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \varrho(\varepsilon^{-1} t).$$

Mit der Integralsubstitution $t = \varepsilon s$ folgt zum einen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_\varepsilon(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-1} \varrho(\varepsilon^{-1} t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(s) ds = 1$$

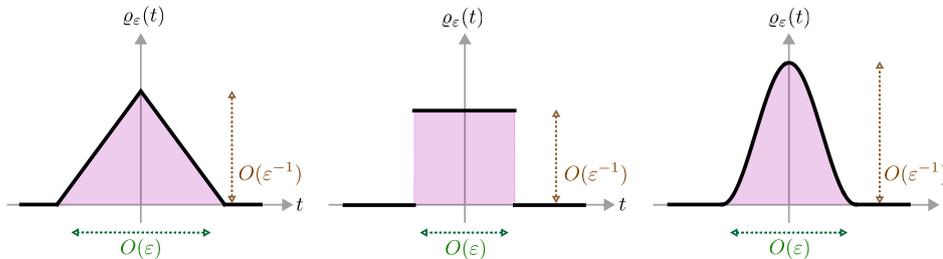
und zum anderen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_\varepsilon(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(s) \varphi(\varepsilon s) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(s) \varphi(0) ds = \varphi(0)$$

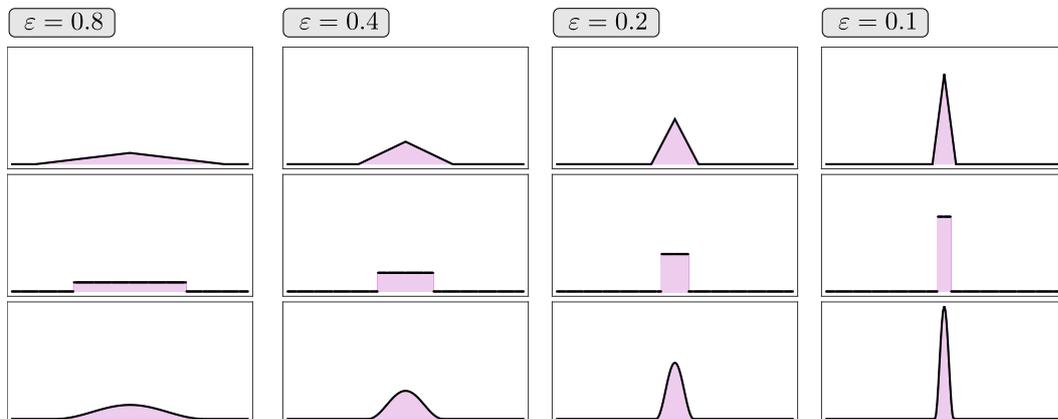
für jede Testfunktion φ , wobei wir benutzt haben, dass diese immer stetig im Ursprung ist und abklingt. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\varrho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0$$

im Sinne der Distributionen gilt.



Schematische Darstellung von drei Standard-Approximationen der Dirac-Distribution δ_0 mit verschiedenen Grundfunktionen ϱ . Beachte, dass die rosa Fläche immer den Flächeninhalt 1 besitzt.



Die Funktionen aus dem vorherigen Bild für vier verschiedene Werte von ε . Auch hier besitzt der rosa Flächeninhalt immer den Wert 1, wobei für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Dicke immer kleiner und die Höhe immer größer wird. Im Limis $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir immer δ_0 .

Bemerkungen

1. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varrho_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0, \\ +\infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Insbesondere konvergiert ϱ_ε *nicht* punktweise bzgl. t gegen eine sinnvolle Grenzfunktion, sondern nur im distributionellen Sinne, wobei der entsprechende Limes eben keine Funktion, sondern nur eine Distribution ist (nämlich δ_0).

2. Die Funktion $\varrho = \varrho_1$ wird auch die Grundfunktion genannt, wobei zunächst nicht wichtig ist, ob ϱ differenzierbar ist oder nicht (siehe die beiden Bild oben). Wichtig ist aber die Bedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(t) dt = 1$, da andernfalls der Grenzwert nicht δ_0 , sondern ein Vielfaches von δ_0 ist.
3. Besonders illustrativ ist der Fall, dass ϱ eine Schwarz-Funktion ist. Dann sind auch

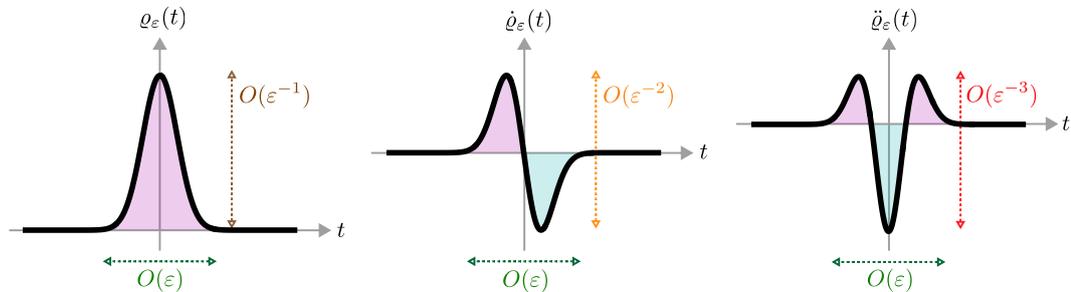
$$\varrho_\varepsilon, \quad \dot{\varrho}_\varepsilon, \quad \ddot{\varrho}_\varepsilon, \quad \dots$$

Schwarz-Funktionen und wir werden sehen, dass diese für $\varepsilon \rightarrow 0$ im Sinne der Distributionen gegen einen sinnvollen Grenzwert konvergieren. Ein Standardbeispiel ist die Glockenfunktion $\varrho(t) = \exp(-t^2)/\sqrt{\pi}$, die wir schon beim Unschärfepinzipp verwendet hatten (siehe dazu auch das nächste Bild).

4. Die Standard-Approximation von δ_{t_*} ist durch

$$\varrho_{t_*,\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1} \varrho(\varepsilon^{-1} (t - t_*)) = \varrho_\varepsilon(t - t_*)$$

gegeben und entsteht durch Verschiebung von ϱ_ε um t_* .



Zur Standard-Approximation der Dirac-Distribution δ_0 mittels einer skalierten Glockenfunktion, wobei positive bzw. negative Flächeninhalte rosa bzw. türkis gefärbt wurden. *Links*: Die Funktion ϱ_ε besitzt die kleine Dicke $O(\varepsilon)$, aber die große Höhe $O(\varepsilon^{-1})$, und konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ im Sinne der Distributionen gegen δ_0 . *Mitte bzw. Rechts*: Die erste bzw. zweite Ableitung $\dot{\varrho}_\varepsilon$ bzw. $\ddot{\varrho}_\varepsilon$ entspricht der Höhe $O(\varepsilon^{-1})$ bzw. $O(\varepsilon^{-2})$ und konvergiert gegen δ_0 bzw. $\dot{\delta}_0$. Wenn Sie sich im Geiste die Graphen für immer kleiner werdende Werte von ε vorstellen, so erhalten Sie einen „Steckbrief“ für die nullte, erste und zweite Ableitung der Dirac-Distribution im Ursprung.

Dirac-Distributionen und Faltungen Es gilt

$$(\delta_0 * \varphi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t - s) \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(r) \varphi(t - r) dr = \varphi(t)$$

für jede Schwartz-Funktion φ und alle $t \in \mathbb{R}$, wobei wir dies auch als

$$\delta_0 * \varphi = \varphi = \varphi * \delta_0$$

schreiben können. Diese Formel besagt, dass δ_0 das *neutrale Element* bzgl. des Faltungsproduktes ist, und kommt auch in den Ingenieurwissenschaften sehr oft zur Anwendung.

Distributionen und Skalarprodukt Wird eine Distribution u mit einer Schwartz-Funktion φ getestet, so können wir formal auch

$$\langle u, \bar{\varphi} \rangle \quad \text{statt} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \langle u, \varphi \rangle \quad \text{statt} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{\varphi(t)} dt$$

schreiben, und dies liefert oftmals kompaktere und intuitivere Formeln als die explizite Verwendung des Testintegrals. Allerdings müssen wir immer beachten, dass das Skalarprodukt die komplexe Konjugation der Testfunktion benutzt. Die Definition der Dirac-Distribution δ_{t_*} ist zum Beispiel äquivalent zu

$$\langle \delta_{t_*}, \varphi \rangle = \overline{\varphi(t_*)}.$$

*Bemerkung**: Der Term $\langle u, \varphi \rangle$ bezeichnet im Allgemeinen kein Skalarprodukt (sondern ist eine *Dualpaarung*), da u und φ aus unterschiedlichen Mengen stammen dürfen (Distributionen und Testfunktionen), aber diese Subtilität wird bei uns keine Rolle spielen. Wichtig ist jedoch, dass mindestens auf einer Seite (meist auf der rechten) eine Schwartz-Funktion steht, denn das Skalarprodukt von zwei Distributionen kann im Allgemeinen nicht definiert werden. Insbesondere hat der Ausdruck $\langle \delta_0, \delta_0 \rangle$ keinen Sinn.

Achtung Obwohl sich Distributionen in vielen Aspekten genauso verhalten wie Funktionen, können gewisse Operationen nicht mit allen Distributionen durchgeführt werden. So gibt es zum Beispiel weder das Quadrat noch die Wurzel einer Dirac-Distribution.

*Bemerkung**: Wir können jedoch durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(t) \delta_{t_*}(t) \right) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_*}(t) \left(u(t) \varphi(t) \right) dt = u(t_*) \varphi(t_*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(t_*) \delta_{t_*}(t) \right) \varphi(t) dt$$

in sinnvoller Weise das Produkt zwischen der Dirac-Distribution δ_{t_*} und einer Funktion u definieren, wobei das Ergebnis ein Vielfaches der Dirac-Distribution ist, nämlich $u(t_*) \delta_{t_*}$.

Ableitungen von Distributionen

Vorbemerkung Eine wichtige Erkenntnis ist, dass Distributionen auch differenziert werden können, sofern der klassische Ableitungsbegriff aus *Mathe-1* verallgemeinert wird.

Erinnerung Für zwei Schwartz-Funktionen u und φ gilt nach partieller Integration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt,$$

wobei wir nach konsistenter Ersetzung von φ durch $\bar{\varphi}$ und wegen

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\operatorname{Re}(\varphi(t)) - \operatorname{Im}(\varphi(t)) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right) - \operatorname{Im} \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right) = \overline{\dot{\varphi}(t)}$$

diese Formel auch als

$$\langle \dot{u}, \varphi \rangle = - \langle u, \dot{\varphi} \rangle,$$

schreiben können.

Definition Für jede Distribution u wird durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}(t) \varphi(t) dt := - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \langle \dot{u}, \varphi \rangle := -\langle u, \dot{\varphi} \rangle$$

ihre distributionelle Ableitung (oder Ableitung im Sinne der Distributionen) definiert.

Bemerkung

1. Die Ableitung einer Distribution u wird mit Hilfe der klassischen Ableitung der Testfunktion definiert, d.h. \dot{u} getestet mit φ ist (bis auf das Vorzeichen) dasselbe wie u getestet mit $\dot{\varphi}$. Diese Idee ist ausgesprochen mächtig und analoge bzw. leicht abgewandelte Konzepte können auch auf andere Operationen angewendet werden, zum Beispiel auf die Fourier-Transformation (siehe dazu unten).
2. Die Formel der partiellen Integration stellt sicher, dass die distributionelle Ableitung einer Schwartz-Funktion gerade ihre klassische Ableitung ist. Wir können im distributionellen Sinne aber auch Funktionen differenzieren, die nicht überall eine klassische Ableitung besitzen (siehe die Beispiele), d.h. die obige Definition *verallgemeinert* den Ableitungsbegriff aus *Mathe-1*.
3. Die distributionelle Ableitung kann im Allgemeinen nicht zu einzelnen Zeiten bzw. in einzelnen Punkten ausgewertet werden, sondern hat nur im Kontext von Testintegralen bzw. Skalarprodukten Sinn. Insbesondere kann die distributionelle Ableitung — im Gegensatz zur klassischen Ableitung — nicht unbedingt als *punktweiser* Grenzwert von Differenzenquotienten interpretiert werden.
4. Mit einem rekursiven Argument können wir zeigen, dass jede Distribution beliebig oft differenziert werden kann. Insbesondere gilt

$$\langle \ddot{u}, \varphi \rangle = -\langle \dot{u}, \dot{\varphi} \rangle = \langle u, \ddot{\varphi} \rangle, \quad \langle \ddot{u}, \varphi \rangle = -\langle \dot{u}, \dot{\varphi} \rangle = \langle \dot{u}, \ddot{\varphi} \rangle = -\langle u, \ddot{\ddot{\varphi}} \rangle$$

sowie ganz allgemein

$$\langle u^{(k)}, \varphi \rangle = -\langle u^{(k-1)}, \varphi^{(1)} \rangle = +\langle u^{(k-2)}, \varphi^{(2)} \rangle = \dots = (-1)^k \langle u, \varphi^{(k)} \rangle.$$

Oder anders gesagt: Wir können alle Ableitungen sukzessive von der linken Seite im Skalarprodukt auf die rechte Seite überführen, wobei in jedem Schritt ein Faktor -1 einzubauen ist. Analog können wir Ableitungen auch von rechts nach links verschieben.

Konsistenz von Differentiation und Approximation Wird eine Distribution u durch Schwartz-Funktionen u_ε approximiert, konvergieren die klassischen Ableitungen \dot{u}_ε im distributionellen Sinne gegen \dot{u} (siehe die Beispiele unten). Insbesondere gilt die Implikation

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \implies \quad \dot{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{u}$$

und wir können daher distributionelle Ableitungen generell auf zwei verschiedenen Arten ermitteln:

1. Verwenden der Formel aus der Definition

2. Approximation durch Schwartz-Funktionen

Der erste Weg erlaubt zwar sehr effektive Berechnungen, aber leider geht dabei sehr schnell jede Anschauung verloren. Beim zweiten Weg ist es genau anders herum: Durch Approximation kann man sehr gut ein qualitatives Verständnis erhalten, aber die Bestimmung von exakten Formeln ist sehr aufwendig und meist nicht praktikabel (Ausnahmen bestätigen hier die Regel).

Beispiele

1. Jede Dirac-Distribution besitzt unendlich viele distributionelle Ableitungen, die wir direkt mit der obigen Definition berechnen können. Wir erhalten

$$\langle \dot{\delta}_{t_*}, \varphi \rangle = -\langle \delta_{t_*}, \dot{\varphi} \rangle = -\overline{\dot{\varphi}(t_*)}, \quad \langle \ddot{\delta}_{t_*}, \varphi \rangle = -\langle \dot{\delta}_{t_*}, \dot{\varphi} \rangle = \langle \delta_{t_*}, \ddot{\varphi} \rangle = \overline{\ddot{\varphi}(t_*)}$$

sowie analog

$$\langle \delta_{t_*}^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \overline{\varphi^{(k)}(t_*)}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$, wobei die letzte Formel äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_*}^{(k)}(t) \varphi(t) dt = (-1)^k \varphi^{(k)}(t_*)$$

ist. Oder anders gesagt: Wenn wir die k -te Ableitung von δ_{t_*} mit φ testen, so erhalten wir gerade den Wert der k -ten Ableitung von φ zur Zeit t_* , multipliziert mit $(-1)^k$.

Bemerkung: Die Formeln können auch durch Approximation begründet werden, denn für jede Standard-Dirac-Approximation mit Schwartzscher Grundfunktion gilt

$$\varrho_\varepsilon^{(k)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0^{(k)}$$

im Sinne der Distributionen (siehe das dritte Bild zur Standard-Approximation von Dirac-Distributionen).

2. Um die distributionelle Ableitung der Signumsfunktion zu bestimmen, testen wir mit der Ableitung einer Schwartz-Funktion. Dies liefert

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t) \dot{\varphi}(t) dt &= \int_0^{+\infty} (+1) \dot{\varphi}(t) dt + \int_{-\infty}^0 (-1) \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^{+\infty} \dot{\varphi}(t) dt - \int_{-\infty}^0 \dot{\varphi}(t) dt \\ &= (+\varphi(0)) - (-\varphi(0)) = 2\varphi(0), \end{aligned}$$

wobei wir bei jedem der beiden Teilintegrale den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet haben. Insbesondere folgt

$$\operatorname{sgn} = 2\delta_0$$

und damit auch $\operatorname{sgn}^{(m)} = 2\delta_0^{(m-1)}$.

Bemerkung: Alternativ können wir die Ergebnisse mit der Approximation

$$u_\varepsilon(t) := 2\pi^{-1} \arctan(\varepsilon^{-1}t)$$

herleiten, wobei u_ε diesmal keine Schwartz-Funktion ist (sie ist unendlich oft differenzierbar, aber klingt wegen $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u_\varepsilon(t) = \pm 1$ nicht ab). Trotzdem gilt

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{sgn}$$

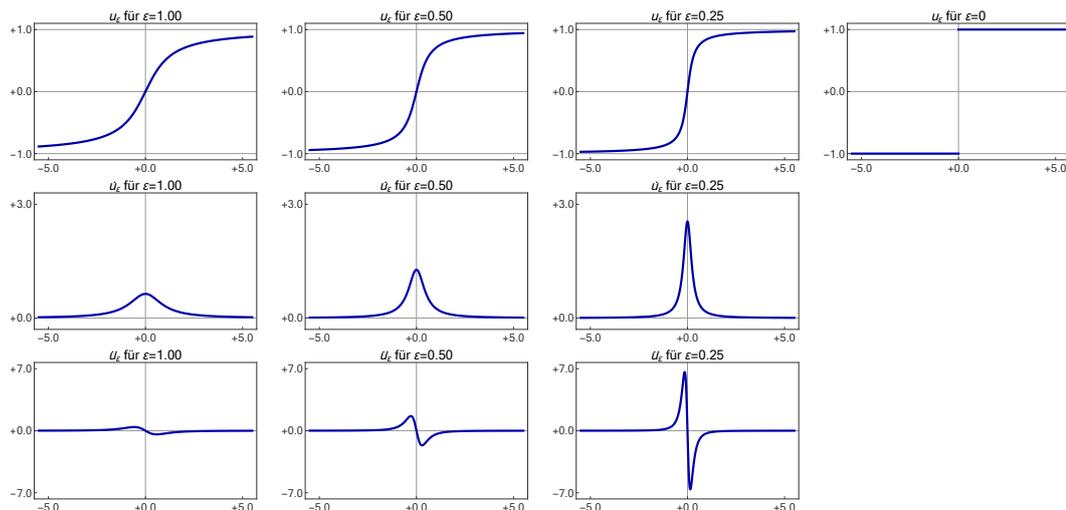
im Sinne der Distributionen und durch einfache Rechnungen erhalten wir

$$\dot{u}_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}(2\pi^{-1} \arctan(\varepsilon^{-1}t)) = 2 \frac{\varepsilon^{-1} \pi^{-1}}{1 + \varepsilon^{-2}t^2} = 2 \varrho_\varepsilon(t),$$

wobei auf der rechten Seite gerade die Standard-Dirac-Approximation zur Grundfunktion $\varrho(t) = \pi^{-1}(1+t^2)^{-1}$ steht. Hieraus folgt

$$\dot{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\delta_0$$

im Sinne der Distributionen und wir erhalten wieder das gleiche Ergebnis. Siehe auch das Bild.



Die Approximation der Signumsfunktion aus dem Beispiel. Die ersten bzw. zweiten Ableitungen konvergieren als Distributionen für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $2\delta_0$ bzw. $2\dot{\delta}_0$.

Lemma (Ableitung stückweise differenzierbarer Funktionen) Sei u eine beschränkte Funktion, die zu den Zeiten t_1, \dots, t_N Sprungunstetigkeiten aufweist, aber zu allen anderen Zeiten t stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\dot{u}(t) = w(t) + \sum_{n=1}^N \llbracket u(t_n) \rrbracket \delta_{t_n}(t), \quad w(t) = \begin{cases} \dot{u}(t) & \text{für } t \notin \{t_1, \dots, t_N\} \\ \text{n.d.} & \text{für } t \in \{t_1, \dots, t_N\} \end{cases}$$

im Sinne der Distributionen, wobei

$$\llbracket u(t_n) \rrbracket = u(t_n + 0) - u(t_n - 0), \quad u(t_n + 0) := \lim_{t \searrow t_n} u(t) \quad u(t_n - 0) := \lim_{t \nearrow t_n} u(t)$$

den Sprung von u zur Zeit t_n bezeichnet und die Funktion w in den Sprungzeiten nicht definiert (n.d.) ist. Oder anders gesagt: Die distributionelle Ableitung von u enthält

neben den Beiträgen von den klassischen Ableitungen zusätzlich für jede Sprungstelle t_n ein Vielfaches der Dirac-Distribution δ_{t_n} .

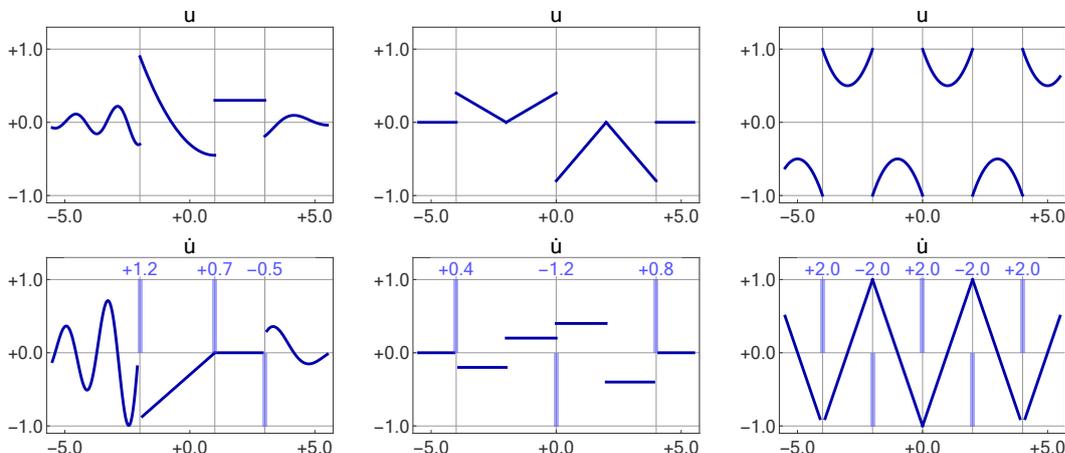
Beweis: Wir diskutieren nur den Fall $N = 3$ und testen u mit der Ableitung einer Schwartz-Funktion φ . Nach Aufspaltung des Integrals und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf die Teilintegrale erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt &= \int_{-\infty}^{t_1} u(t) \dot{\varphi}(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} u(t) \dot{\varphi}(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} u(t) \dot{\varphi}(t) dt + \int_{t_3}^{+\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt, \\ &= \left(+u(t_1 - 0) \varphi(t_1 - 0) - \int_{-\infty}^{t_1} w(t) \varphi(t) dt \right) + \\ &\quad \left(u(t_2 - 0) \varphi(t_2 - 0) - u(t_1 + 0) \varphi(t_1 + 0) - \int_{t_1}^{t_2} w(t) \varphi(t) dt \right) + \\ &\quad \left(u(t_3 - 0) \varphi(t_3 - 0) - u(t_2 + 0) \varphi(t_2 + 0) - \int_{t_2}^{t_3} w(t) \varphi(t) dt \right) + \\ &\quad \left(-u(t_3 + 0) \varphi(t_3 + 0) - \int_{t_3}^{+\infty} w(t) \varphi(t) dt \right), \end{aligned}$$

wobei es keine Randterme bei $t = -\infty$ und $t = +\infty$ gibt, da φ im Unendlichen abklingt. Da φ als Schwartz-Funktion stetig ist, gilt $\varphi(t_n \pm 0) = \varphi(t_n)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \dot{\varphi}(t) dt &= -\llbracket u(t_1) \rrbracket \varphi(t_1) - \llbracket u(t_2) \rrbracket \varphi(t_2) - \llbracket u(t_3) \rrbracket \varphi(t_3) - \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \varphi(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\llbracket u(t_1) \rrbracket \delta_{t_1}(t) + \llbracket u(t_2) \rrbracket \delta_{t_2}(t) + \llbracket u(t_3) \rrbracket \delta_{t_3}(t) + w(t) \right) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

durch Umsortierung der Terme und Zusammenfassung der Integrale. Das ist aber nach der obigen Definition gerade die Behauptung. \square



Drei Beispiele für stückweise differenzierbare Funktionen (oben) und ihre distributionellen Ableitungen (unten), wobei der Einfachheit halber alles reellwertig ist. In den Unstetigkeitsstellen von u besitzt \dot{u} Dirac-Anteile, die durch die schmalen blauen Streifen repräsentiert werden. Die blaue Zahl quantifiziert dabei jeweils den entsprechenden Koeffizienten, d.h. den Sprung von u .

3.5 Fourier-Transformation und Distributionen

Vorbemerkung Wir wollen die Fourier-Transformation für Distributionen einführen, wobei wir eine ganz ähnliche Strategie wie bei den Ableitungen benutzen. Dazu identifizieren wir zunächst das Gegenstück zur partiellen Integrationsformel.

Theorem (Satz von Parseval-Plancherel) Es gilt

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$$

für je zwei Schwartzsche Fourier-Paare (φ_1, ψ_1) und (φ_2, ψ_2) .

Beweis: Wir können die Formel einfach nachrechnen. Es gilt

$$\overline{\varphi_2(t)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(\nu) e^{+2\pi i t \nu} d\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(\nu)} e^{-2\pi i t \nu} d\nu$$

und nach Einsetzen in die linke Seite der Behauptung erhalten wir via

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(t)} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(\nu)} e^{-2\pi i t \nu} d\nu \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \overline{\psi_2(\nu)} e^{-2\pi i t \nu} d\nu dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) e^{-2\pi i \nu t} \overline{\psi_2(\nu)} dt d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \right) \overline{\psi_2(\nu)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(\nu) \overline{\psi_2(\nu)} d\nu \end{aligned}$$

die rechte Seite, wobei wir bei den Umformungen den Satz von Fubini verwendet haben, was für Schwartz-Funktionen problemlos möglich ist. \square

Bemerkungen

1. Als Spezialfall erhalten wir

$$\|\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\nu)|^2 d\nu = \|\psi\|^2$$

für jedes Fourier-Paar (φ, ψ) und damit auch $\|\varphi\| = \|\mathcal{F}\varphi\|$ oder $\|\psi\| = \|\mathcal{F}^{-1}\psi\|$.

2. Wir können die Formel im Theorem auch als

$$\langle \mathcal{F}u, \psi \rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle \quad \text{oder} \quad \langle \hat{u}, \psi \rangle = \langle u, \check{\psi} \rangle$$

schreiben, wobei u eine Schwartz-Funktion im Zeitbereich und ψ eine Schwartz-Funktion im Frequenzbereich ist. Diese Umformulierung ist der Schlüssel, um die Fourier-Transformation von Distributionen einzuführen.

Definition Für jede Distribution u im Zeitbereich wird durch

$$\langle \mathcal{F}u, \psi \rangle := \langle u, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle$$

ihre distributionelle Fourier-Transformierte definiert.

Bemerkungen

1. Für jede Schwartz-Funktion folgt aus dem Theorem von Parseval-Plancherel, dass ihre distributionelle und ihre klassische Fourier-Transformierte identisch sind. Wir können aber nun auch $\mathcal{F}u$ für Funktionen oder Distributionen berechnen, für die Fourier-Integrale gar nicht wohldefiniert sind (siehe die Beispiele). In diesem Sinne verallgemeinert die obige Definition die klassische Definition vom Anfang dieses Kapitels.
2. Die distributionelle Fourier-Transformierte muss nicht in jedem Punkt $\nu \in \mathbb{R}$ des Frequenzbereichs definiert sein.
3. Die inverse Fourier-Transformation kann für Distributionen analog durch

$$\langle \mathcal{F}^{-1}v, \varphi \rangle = \langle v, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

eingeführt werden, wobei nun v eine Distribution im Frequenzbereich und φ eine Testfunktion im Zeitbereich ist.

4. Die Rechenregeln aus dem letzten Abschnitt gelten sinngemäß auch im Sinne von Distributionen und dies erlaubt es uns, viele Formeln auf einfache Weise abzuleiten.

Konsistenz und Methodenübersicht Analog zur obigen Diskussion bei den Ableitungen sind die Fourier-Transformation und die Approximation durch Schwartz-Funktionen konsistente Operationen und dürfen vertauscht werden. Insbesondere gilt die Implikation

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \quad \implies \quad \mathcal{F}u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}u$$

im Sinne von Distributionen und wir können daher die Fourier-Transformierte einer Distribution immer mit den folgenden zwei Methoden bestimmen:

1. Verwenden der Formel aus der Definition
2. Approximation durch Schwartz-Funktionen

Außerdem können wir versuchen, distributionelle Fourier-Transformierte durch

3. formale Integralberechnung
4. Anwendung von Rechenregeln

zu finden, aber die letzten beiden Wege müssen im Gegensatz zu den ersten beiden nicht immer funktionieren.

Beispiele

1. Für die Dirac-Distribution δ_0 benutzen wir formale Rechnungen und erhalten

$$(\mathcal{F}\delta_0)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt = \exp(-2\pi i \nu t) \Big|_{t=0} = 1.$$

Die Fourier-Transformierte von δ_0 ist also die konstante Funktion mit Wert 1. Alternativ könnten wir auch wie schon bei der Diskussion des Unschärfeprinzips die Approximation

$$u_\varepsilon(t) = \pi^{-1/2} \varepsilon^{-1} \exp(-\varepsilon^{-2} t^2), \quad v_\varepsilon(t) = \exp(-\varepsilon^2 \pi^2 \nu^2)$$

verwenden, wobei es sich um die Standard-Dirac-Approximation mit Grundfunktion $\varrho(t) = \pi^{-1/2} \exp(-t^2)$ handelt, d.h. es gilt $u_\varepsilon(t) = \varrho_\varepsilon(t)$. Wir können durch die Auswertung von Testintegralen leicht

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0, \quad v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

im Sinne der Distributionen zeigen oder alternativ dieses Resultat direkt aus dem Bild zum Unschärfeprinzip ablesen. Etwas allgemeiner kann man sagen: Weil die Fourier-Transformierten einer Standard-Dirac-Approximation gegen die konstante Funktion mit Wert 1 konvergieren, gilt $(\mathcal{F}\delta_0)(\nu) = 1$ für alle $\nu \in \mathbb{R}$. Das ist übrigens der Extremfall im Unschärfeprinzip: eine Dirac-Distribution ist „maximal lokalisiert“, wohingegen eine konstante Funktion „maximal ausgeschmiert“ ist.

Bemerkung: Auch die abstrakte Definition liefert via

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, \psi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle = \overline{(\mathcal{F}^{-1}\psi)(0)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\nu) d\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(\nu)} d\nu = \langle 1, \psi \rangle$$

dasselbe Ergebnis. Außerdem gibt es noch eine vierte Beweisstrategie: Wir hatten schon gesehen, dass $\delta_0 * \varphi = \varphi$ gilt und nach Fourier-Transformation dieser Faltungsformel erhalten wir $(\mathcal{F}\delta_0)(\nu) (\mathcal{F}\varphi)(\nu) = (\mathcal{F}\varphi)(\nu)$ für alle $\nu \in \mathbb{R}$. Das kann aber dies nur dann für alle φ gelten, wenn $\mathcal{F}\delta_0$ die konstante Funktion mit Wert 1 ist.

2. Die Fourier-Transformierte von δ_{t_*} ist durch $(\mathcal{F}\delta_{t_*})(\nu) = e^{-2\pi i t_* \nu}$ gegeben, wobei diese Formel analog zu oben berechnet werden kann, d.h. mit formalen Integralberechnungen, durch Approximation oder über die Definition. Zusätzlich können wir hier als vierte Möglichkeit das Ergebnis mit der Rechenregel *Verschiebung* \cong *Modulation* herleiten, denn es gilt $\delta_{t_*}(t) = \delta_0(t - t_*)$ (Nachrechnen).
3. Auch die Ableitungen von δ_{t_*} besitzen eine Fourier-Transformierte im Sinne der Distributionen, wobei wir dies zum Beispiel formal mit

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\delta_{t_*}^{(m)})(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_*}^{(m)}(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt \\ &= (-1)^m \left(\frac{d^m}{dt^m} \exp(-2\pi i \nu t) \right) \Big|_{t=t_*} = (+2\pi i)^m \exp(-2\pi i t_* \nu) \end{aligned}$$

oder alternativ via

$$(\mathcal{F} \delta_{t_*}^{(m)})(\nu) = (2\pi i)^m (\mathcal{F} \delta_{t_*})(\nu) = (2\pi i)^m \exp(-2\pi i t_* \nu)$$

mit der Rechenregel *Ableitung* \cong *Multiplikation* begründen können.

4. Für die Signumsfunktion sind die Fourier-Integrale nicht wohldefiniert, da der Integrand im Unendlichen nicht abklingt. Es existiert aber eine Fourier-Transformierte im Sinne der Distributionen, nämlich

$$(\mathcal{F} \operatorname{sgn})(\nu) = -\frac{i}{\pi \nu},$$

wobei es wieder mehrere Varianten der Herleitung gibt. Am einfachsten ist die folgende: Wir hatten oben gesehen, dass die Ableitung der Signumsfunktion $2\delta_0$ ist. Damit folgt

$$2\pi i \nu (\mathcal{F} \operatorname{sgn})(\nu) = 2 (\mathcal{F} \delta_0)(\nu) = 2$$

aus den Rechenregeln der Fourier-Transformation und das gewünschte Ergebnis folgt nach Division durch $2\pi i \nu$.

Bemerkung*: Die Funktion $\mathcal{F} \operatorname{sgn}$ besitzt eine nicht-integrierbare Singularität im Ursprung und das Testintegral mit ψ existiert nur im Sinne eines Cauchyschen-Hauptwertes, d.h.

$$\langle \mathcal{F} \operatorname{sgn}, \psi \rangle = -\frac{i}{\pi} \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \nu^{-1} \overline{\psi(\nu)} d\nu + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \nu^{-1} \overline{\psi(\nu)} d\nu \right).$$

5. Auch für Polynome können die Fourier-Integrale nicht direkt ausgewertet werden. Ganz analog zu oben können wir aber die Formel

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1} \delta_0^{(m)})(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0^{(m)}(\nu) \exp(+2\pi i t \nu) d\nu \\ &= (-1)^m \left(\frac{d^m}{d\nu^m} \exp(+2\pi i \nu t) \right) \Big|_{\nu=0} = (-2\pi i t)^m \end{aligned}$$

zeigen, wobei δ_0 diesmal eine Dirac-Distribution im Frequenzbereich ist. Nach Division durch $(-2\pi i)^m$ und Anwendung von \mathcal{F} erhalten wir explizite Ausdrücke für die Fourier-Transformierte des Monoms vom Grad m in der Variablen t . Durch Linearkombination können wir anschließend $\mathcal{F}p$ für jedes Polynom p in t ermitteln, wobei im Ergebnis nur Ableitungen der Delta-Distribution δ_0 vorkommen werden.

6. Trigonometrische Funktionen sind weitere Beispiele, in denen die klassische Variante der Fourier-Transformation zu nicht-berechenbaren Fourier-Integralen führt. Wir können aber für jeden Frequenzparameter $\nu_* \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$(\mathcal{F}^{-1} \delta_{-\nu_*})(t) = \exp(-2\pi i \nu_* t), \quad (\mathcal{F}^{-1} \delta_{+\nu_*})(t) = \exp(+2\pi i \nu_* t)$$

ableiten, aus denen wir anschließend mit der Euler-Formel und nach Anwendung von \mathcal{F} die distributionellen Fourier-Transformierten der trigonometrischen Basisfunktionen mit Frequenz ν_* ablesen können (siehe die Tabelle).

distributionelle Fourier-Paare Für praktische Rechnungen ist die folgende Liste hilfreich. Dabei gibt es Redundanzen, denn alle Formeln können durch einfache Manipulationen aus der dritten bzw. vierten Zeile hergeleitet werden (Übungsaufgabe).

	$u(t) = \check{v}(t) = (\mathcal{F}^{-1}v)(t)$	$v(\nu) = \hat{u}(\nu) = (\mathcal{F}u)(\nu)$
	$\delta_{t_*}(t)$ $e^{+2\pi i \nu_* t}$	$e^{-2\pi i t_* \nu}$ $\delta_{\nu_*}(\nu)$
!	$\delta_{t_*}^{(m)}(t)$	$(+2\pi i \nu)^m e^{-2\pi i t_* \nu}$
!	$(-2\pi i t)^m e^{+2\pi i \nu_* t}$	$\delta_{\nu_*}^{(m)}(\nu)$
	t^m $(+2\pi i)^{-m} \delta_0(t)$	$(-2\pi i)^{-m} \delta_0^{(m)}(\nu)$ ν^m
	$\sin(2\pi \nu_* t)$ $-i \frac{1}{2} \delta_{-t_*}(t) + i \frac{1}{2} \delta_{+t_*}(t)$	$+i \frac{1}{2} \delta_{-\nu_*}(\nu) - i \frac{1}{2} \delta_{+\nu_*}(\nu)$ $\sin(2\pi t_* \nu)$
	$\cos(2\pi \nu_* t)$ $+\frac{1}{2} \delta_{-t_*}(t) + \frac{1}{2} \delta_{+t_*}(t)$	$+\frac{1}{2} \delta_{-\nu_*}(\nu) + \frac{1}{2} \delta_{+\nu_*}(\nu)$ $\cos(2\pi t_* \nu)$
	$\text{sgn}(t)$ $+i/(\pi t)$	$-i/(\pi \nu)$ $\text{sgn}(\nu)$

Bemerkung Die erste und die zweite Zeile in der Tabelle liefern die Quintessenz der gesamten Fourier-Theorie: Die harmonische Schwingung $\exp(+2\pi i \nu_* t)$ im Zeitbereich ist gerade $\delta_{\nu_*}(\nu)$ im Frequenzbereich und die harmonische Schwingung $\exp(-2\pi i t_* \nu)$ im Frequenzbereich entspricht $\delta_{t_*}(t)$ im Zeitbereich. Wenn man das verstanden hat, ergeben sich viele Resultate und Formeln fast von selbst.

zur Inversionsformel* Wir hatten am Anfang des Kapitels schon bemerkt, dass der Nachweis, dass \mathcal{F}^{-1} wirklich die inverse Operation zu \mathcal{F} ist, alles andere als trivial ist. Für Schwartz-Funktionen φ können wir dieses Resultat nun mithilfe von Distributionen relativ leicht zeigen: Der Satz von Parseval-Plancherel sowie unsere Erkenntnisse über die Dirac-Distribution liefern nämlich

$$\begin{aligned} \varphi(t_*) &= \overline{\langle \delta_{t_*}, \varphi \rangle} = \overline{\langle \mathcal{F}\delta_{t_*}, \mathcal{F}\varphi \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i t_* \nu) \overline{(\mathcal{F}\varphi)(\nu)} \, d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+2\pi i t_* \nu) (\mathcal{F}\varphi)(\nu) \, d\nu = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi)(t_*) \end{aligned}$$

für alle $t_* \in \mathbb{R}$ und damit $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \check{\check{\varphi}}$. Alternativ könnten wir die Dirac-Distributionen durch eine Standard-Approximation mit skalierten Glockenfunktionen ersetzen, alle Terme in der Rechnung als Integrale oder Doppelintegrale mit Schwartz-Funktionen schreiben und am Ende den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen.

Fourier-Transformation periodischer Funktionen*

Vorbemerkung Wir wollen abschließend herausarbeiten, dass die Fourier-Reihen als Spezialfall der distributionellen Fourier-Transformation verstanden werden können. Dazu fixieren wir eine feste Periode $0 < T < \infty$ und erinnern daran, dass eine Funktion u im Zeitbereich genau dann T -periodisch ist, falls

$$u(t + T) = u(t)$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Fourier-Reihen periodischer Funktionen Wir hatten in *Mathe-1* gesehen, dass jede T -periodische (und hinreichend gute) Funktion u via

$$u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \exp(+2\pi i \nu_j t), \quad \nu_j = \frac{j}{T}$$

als Fourier-Reihe angesehen werden kann, wobei wir damals den Term $2\pi i \nu_j$ als $i j \omega$ mit $\omega = 2\pi/T$ geschrieben hatten. Jeder der Bausteine auf der rechten Seite ist selbst eine T -periodische Funktion und die komplexen Fourier-Koeffizienten berechnen sich zu

$$\gamma_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u(t) \exp(-2\pi i \nu_j t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \exp(-2\pi i \nu_j t) dt.$$

Beachte, dass jede periodische Funktion auch Distribution ist, denn das Testintegral mit jeder Schwarzfunktion besitzt einen abklingenden Integranden und ist daher wohldefiniert im Sinne uneigentlicher Riemann-Integrale.

Theorem (Fourier-Transformation und periodische Funktionen) Mit den obigen Notationen gilt

$$(\mathcal{F}u)(\nu) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \delta_{\nu_j}(\nu)$$

im Sinne der Distributionen für jede T -periodische Funktion u .

Beweis: Um die Formel mit der abstrakten Definition herzuleiten, betrachten wir eine beliebige Testfunktion ψ im Frequenzbereich und benutzen die Abkürzung

$$e_{\nu_j}(t) = \exp(+2\pi i \nu_j t) \quad \text{mit} \quad (\mathcal{F}e_{\nu_j})(\nu) = \delta_{\nu_j}(\nu),$$

wobei wir das Gesetz für $\mathcal{F}e_{\nu_j}$ schon nachgerechnet hatten (siehe auch die Tabelle). Mit der Definition der distributionellen Fourier-Transformation, der obigen Darstellungsformel für u sowie dem Theorem von Parseval-Plancherel ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}u, \psi \rangle &= \langle u, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j e_{\nu_j}, \mathcal{F}^{-1}\psi \right\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \langle e_{\nu_j}, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \langle \mathcal{F}e_{\nu_j}, \psi \rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \langle \delta_{\nu_j}, \psi \rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \delta_{\nu_j}, \psi \right\rangle, \end{aligned}$$

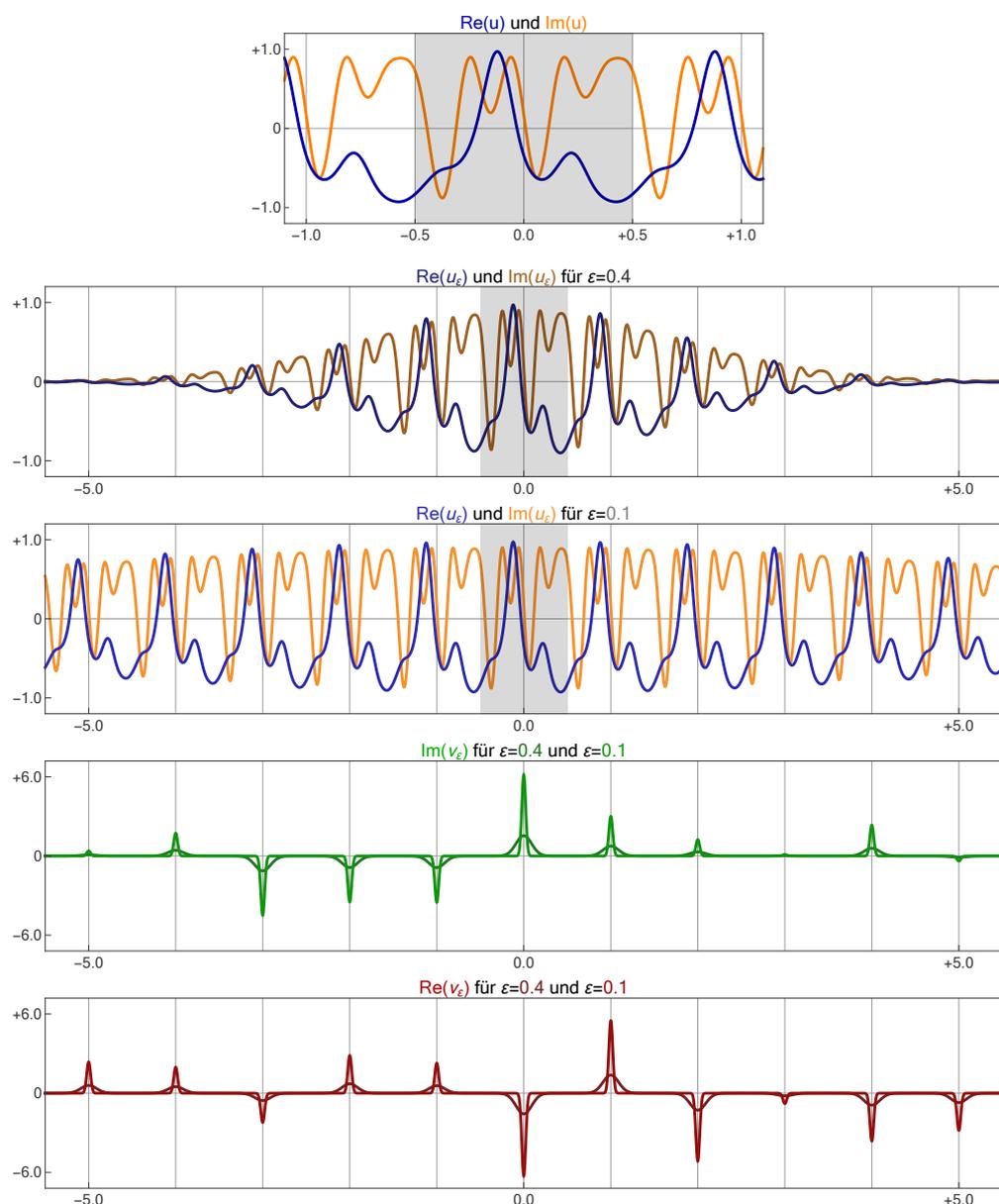
wobei wir zweimal Summation und Integration vertauscht haben (das ist möglich, da die Testfunktion im Unendlichen schnell abklingt). Weil ψ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung

1. Das Theorem besagt, dass die distributionelle Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion aus einer abzählbaren Summe von Vielfachen von Dirac-Distributionen besteht, wobei die entsprechenden Koeffizienten als die Fourier-Koeffizienten von u angesehen werden können. Insbesondere sind in der Fourier-Transformierten nur die Frequenzen $\nu_j = j/T$ angeregt, für die entsprechende harmonische Schwingung e_{ν_j} selbst T -periodisch ist.
2. Wir können die Aussage des Theorem alternativ auch mittels der Approximation

$$u_\varepsilon(t) = u(t) \exp(-\varepsilon^2 t^2)$$

beweisen bzw. verstehen (siehe die Bilder). Beachte dabei, dass die klassischen Fourier-Integrale für u_ε , aber nicht für u , wohldefiniert sind.



Beispiel für die Approximation einer T -periodischen Funktion u mit Schwarz-Funktionen u_ε , wobei $T = 1$ gilt. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\mathcal{F}u_\varepsilon$ eine Schwartz-Funktion im Frequenzbereich, aber diese besteht aus lokalisierten *Peaks* an den Stellen $\nu = \nu_j$. Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert der j -te Peak im Sinne der Distributionen gegen ein Vielfaches von δ_{ν_j} , wobei der entsprechende komplexe Vorfaktor gerade der j -te Fourier-Koeffizient von u ist (also γ_j). In diesem Beispiel ist u selbst unendlich oft differenzierbar, aber ähnliche Approximationsergebnisse gelten auch für periodische Funktionen mit Sprüngen und/oder Knicken.

3.6 Fourier-Transformation und partielle Differentialgleichungen

Vorbemerkung In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache *partielle Differentialgleichungen* in einer Raumdimension lösen. Dazu betrachten wir eine andere Version von Fourier-Paaren (u, v) : Die Funktion u hängt nun von der *Zeitvariablen* t und der *Ortsvariablen* $x \in \mathbb{R}$ ab, wohingegen $v = \hat{u} = \mathcal{F}u$ eine Funktion der Zeit t und der *Wellenzahl* ξ ist.

Bemerkungen

1. Die Wellenzahl ξ verhält sich zum Ort x wie die Frequenzvariable ν zur Zeit t und $1/\xi$ wird *Wellenlänge* genannt. Insbesondere beruht die hier verwendete Variante der Fourier-Transformation auf der Beobachtung, dass jede Funktion in der Variablen x als unendliche Superposition von *räumlichen Schwingungen* interpretiert werden kann, wobei die Koeffizienten dieser Zerlegung — also die Werte von \hat{u} — sich zusätzlich auch mit der Zeit t ändern können. Der Wechsel in der Notation entspricht also einer geänderten physikalischen Sichtweise sowie neuen Anwendungsszenarien. Der mathematische Kern der Fourier-Transformation bleibt aber davon unberührt.
2. Anstelle der Wellenzahl ξ wird manchmal die *Kreiswellenzahl* $k = 2\pi\xi$ als duale Variable zu x verwendet, wobei dann die Integralformeln der Fourier-Transformation eine leicht andere Gestalt annehmen. Auch hier gilt also: Sie dürfen Formeln aus verschiedenen Literaturquellen nicht unbesehen miteinander kombinieren, sondern müssen sie ggf. anpassen.
3. *Ausblick**: Die physikalische Dualität von x und ξ sowie die entsprechende Variante der Fourier-Transformation sind von fundamentaler Bedeutung in der Quantenmechanik und beschreiben den zu Grunde liegenden *Welle-Teilchen-Dualismus*. Insbesondere liefern $u(t, x)$ bzw. $\hat{u}(t, \xi)$ in diesem Kontext die *Wellenfunktion* im *Orts-* bzw. im *Impulsraum*, wobei Impuls und Wellenzahl im Wesentlichen dasselbe sind und sich nur durch einen universellen Faktor unterscheiden. Bei uns spielen quantenmechanische Betrachtungen aber keine Rolle.

formale Definition In diesem Abschnitt gelten die folgenden Integralformeln:

$$\begin{array}{ll}
 u & \xrightarrow{\mathcal{F}} & v = \hat{u} = \mathcal{F}u & v(t, \xi) = \hat{u}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
 v & \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} & u = \check{v} = \mathcal{F}^{-1}v & u(t, x) = \check{v}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, \xi) e^{+2\pi i x \xi} d\xi
 \end{array}$$

Bemerkung Wie schon im letzten Abschnitt gilt: Die Fourier-Transformation kann im distributionellen Sinne auch für Funktionen oder Distributionen eingeführt werden, für die die Fourier-Integrale nicht oder nicht überall wohldefiniert sind (zum Beispiel Polynome, trigonometrische Funktionen oder Dirac-Distributionen, jeweils in der Variablen x).

Rechenregeln Analog zu oben können die folgenden Gesetze abgeleitet werden:

Ortsbereich	$u(t, x)$	$\hat{u}(t, \xi)$	Wellenbereich
Ableiten nach x	$\partial_x u(t, x)$	$+2\pi i \xi \hat{u}(t, \xi)$	Multiplikation
Multiplikation	$-2\pi i x u(t, x)$	$\partial_\xi \hat{u}(t, \xi)$	Ableiten nach ξ
Verschiebung	$u(t, x - x_*)$	$e^{-2\pi i x_* \xi} \hat{u}(t, \xi)$	Modulation
Modulation	$e^{+2\pi i \xi_* x} u(t, x)$	$\hat{u}(t, \xi - \xi_*)$	Verschiebung
Streckung/Stauchung	$u(t, cx)$	$c^{-1} \hat{u}(t, c^{-1} \xi)$	Skalierung
Skalierung	$c^{-1} u(t, c^{-1} x)$	$\hat{u}(t, c \xi)$	Streckung/Stauchung

Weitere Rechenregeln Im Kontext von linearen partiellen Differentialgleichungen sind die folgenden Formeln besonders wichtig:

Ortsbereich	$u(t, x)$	$\hat{u}(t, x)$	Wellenbereich
n -te Zeitableitung	$\partial_t^n u(t, x)$	$\partial_t^n \hat{u}(t, \xi)$	n -te Zeitableitung
m -te Ortsableitung	$\partial_x^m u(t, x)$	$(2\pi i \xi)^m \hat{u}(t, \xi)$	Multiplikation mit Monom
Faltung	$(u_1 * u_2)(t, x)$	$\hat{u}_1(t, \xi) \hat{u}_2(t, \xi)$	Produkt

Strategie Wir betrachten im Folgenden *Anfangswertprobleme* für sogenannte *lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* und gehen wie folgt vor:

1. Transformation in den Wellenbereich: Mittels der Fourier-Transformation überführen wir die partielle Differentialgleichung für u in eine gewöhnliche Differentialgleichung für \hat{u} als Funktion der Zeit t , wobei die Wellenzahl ξ als Parameter auftaucht.
2. Lösung im Wellenbereich: Wir lösen die lineare Differentialgleichung für \hat{u} , zum Beispiel mithilfe der Methoden aus *Mathe-2*, wobei die freien Konstanten von ξ abhängen dürfen bzw. werden.
3. Rücktransformation in den Ortsbereich: Wir setzen die entstehende Formel für \hat{u} in die inverse Fourier-Transformation ein, um eine Lösungsformel für u zu erhalten.
4. Auswertung der Anfangsbedingung: Wir eliminieren die freien Konstanten im Wellenbereich mittels der Anfangsbedingungen im Ortsbereich. Dies kann vor, während oder nach der Rücktransformation geschehen.

Dabei ist es wichtig, dass die Ortsvariable x beliebige Werte in \mathbb{R} annehmen darf. Wir werden unten diskutieren, dass man mit anderen Fourier-Methoden auch sogenannte *Randanfangswertprobleme* lösen kann.

Klarstellung

1. Viele partielle Differentialgleichungen können nicht oder nur sehr schwer mit Fourier-Methoden gelöst werden. Dies gilt insbesondere dann, wenn auch nicht-lineare Terme auftreten oder die Koeffizienten in der partiellen Differentialgleichung – also die Parameter bzw. die physikalischen Konstanten – von x abhängen.
2. Bei den unten betrachteten Differentialgleichungen wird u meistens als reellwertig angenommen. Die meisten Rechnungen können aber bei Bedarf auch mit komplexwertigen Funktionen durchgeführt werden.

Wärmeleitgleichung

Anfangswertproblem Für eine feste Konstante $a > 0$ und eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suchen wir eine Lösung u , sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - a \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0 && \text{(Differentialgleichung)} \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R} && \text{(Anfangsbedingung)} \end{aligned}$$

Lösungsformel Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung ist durch

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(t, x - y) f(y) dy$$

gegeben, wobei

$$K_a(t, x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 a t}\right)$$

der sogenannte Wärmeleitkern (mit Parameter a) ist.

Bemerkungen

1. Die Funktion u beschreibt die Temperaturdifferenz zu einer fixierten Referenztemperatur in einem räumlich eindimensionalen Medium, zum Beispiel einem unendlich langen und unendlich dünnen Stab. Es gibt außerdem Varianten der Gleichung in zwei- oder dreidimensionalen Raumgebieten, aber diese wollen wir hier nicht diskutieren.
2. Der Parameter a ist eine Materialkonstante und beschreibt die *Temperaturleitfähigkeit*. Typische Werte für Metalle und andere Substanzen finden Sie auf WIKIPEDIA.
3. Der Wärmeleitkern ist für jedes feste $t > 0$ eine Glockenfunktion bzgl. x , die die Dicke $O(\sqrt{a t})$ und die Höhe $O(1/\sqrt{a t})$ besitzt.

4. Es gilt

$$K_a(t, x) \xrightarrow{t \searrow 0} \delta_0(x)$$

im Sinne der Distributionen, denn der Wärmeleitkern kann auch als Standard-Dirac-Approximation im Ortsbereich mit Parameter t betrachtet werden. Direkte Rechnungen zeigen außerdem

$$\partial_t K_a(t, x) - a \partial_x^2 K_a(t, x) = 0,$$

d.h. der Wärmeleitkern ist selbst Lösung der partiellen Differentialgleichung, wobei die Anfangsdaten durch die Diracsche Delta-Distribution im Ursprung gegeben sind. Der Wärmeleitkern wird daher auch *Fundamentallösung* der Wärmeleitgleichung genannt.

5. Die Wärmeleitgleichung kann auch als Diffusionsgleichung interpretiert werden, wobei a dann die Diffusionskonstante genannt wird und u die Massendichte bzw. die Konzentration eines Stoffes bezeichnet.
6. Zusatz*: Es kann im Allgemeinen weitere Lösungen des Anfangswertproblems geben, aber diese sind physikalisch nicht relevant und können auch nicht mit Fourier-Methoden konstruiert werden. Die Lösungsformel wird in der Mathematik häufig als

$$u(t, \cdot) = K_a(t, \cdot) * f$$

angegeben, wobei die Faltung sich nur auf die Ortsvariable bezieht, die hier durch den Punkt \cdot repräsentiert wird.

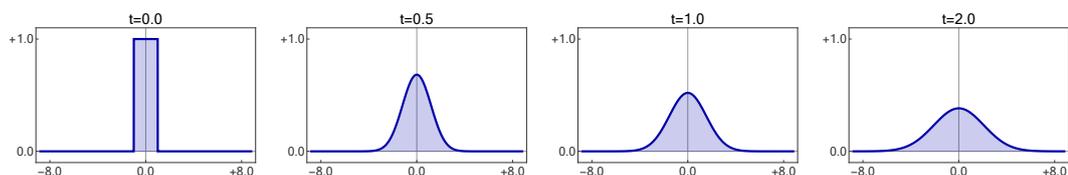
Beispiel Mit $a = 1$ und den Anfangsdaten

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten wir nach Einsetzen und unter Verwendung der Substitution $s = (x - y)/\sqrt{4t}$ mit $dy = -\sqrt{4t} ds$ die Lösungsformel

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-1}^{+1} K_1(t, x - y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-1}^{+1} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4t}\right) dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(x+1)/\sqrt{4t}}^{(x-1)/\sqrt{4t}} \exp(-s^2) ds = \frac{1}{2} \operatorname{Erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{4t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{Erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{4t}}\right), \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{Erf}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x \exp(-s^2) ds$ die Gaußsche Fehlerfunktion ist.



Die Lösung der Wärmeleitgleichung aus dem vorherigen Beispiel, wobei für vier verschiedene Zeiten t die Temperatur $u(t, x)$ über dem Ort x dargestellt ist. Der Wert des schraffierten Flächeninhalts ist in diesem Beispiel immer 2.

Herleitung der Lösungsformel Die entscheidende Beobachtung ist, dass bei Anwendung der Fourier-Transformation — d.h. beim Übergang von u zu \hat{u} bzw. von x zu ξ — jede partiellen Ableitung bzgl. x in einen Produktterm bzgl. ξ überführt wird.

Transformation in den Wellenbereich: Die oben aufgeführten Rechenregeln der Fourier-Transformation implizieren, dass u genau dann eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, wenn

$$\partial_t \hat{u}(t, \xi) - a (2\pi i \xi)^2 \hat{u}(t, \xi) = 0$$

für alle t und alle ξ gilt.

Lösung im Wellenbereich: Bei der transformierten Gleichung handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\hat{u}(t, \xi)$ als Funktion von t , wobei ξ als Parameter angesehen werden kann. Die allgemeine Lösung ist offensichtlich durch

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0, \xi) \exp(-4\pi^2 a \xi^2 t)$$

gegeben.

Auswertung der Anfangsbedingung: Es gilt

$$\hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp(-2\pi i \xi y) dy,$$

wobei wir hier die Integrationsvariable nicht mit x , sondern mit y bezeichnet haben (siehe dazu die Bemerkung unten).

Rücktransformation in den Ortsbereich: Durch Anwendung der inversen Fourier-Transformation, Einsetzen der Integralformel für \hat{f} und Ausnutzung des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(-4\pi^2 a \xi^2 t) \exp(+2\pi i \xi x) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp(-2\pi i \xi y) dy \exp(-4\pi^2 a \xi^2 t) \exp(+2\pi i \xi x) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-4\pi^2 a t \xi^2 + 2\pi i (x - y) \xi) d\xi dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K_a(t, x - y) dy \end{aligned}$$

und damit die Lösungsformel für u , wobei wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-4\pi^2 a t \xi^2 + 2\pi i (x - y) \xi) d\xi &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\pi^2 a t}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 (x - y)^2}{16\pi^2 a t}\right) \\ &= K_a(t, x - y) \end{aligned}$$

mit leicht anderen Notationen bereits in der Bemerkung zum Lemma über die Fourier-Transformierten der Glockenfunktionen abgeleitet hatten.

Bemerkung: Es ist wichtig, dass wir die Integrationsvariable in der Integralformel für $\hat{f}(\xi)$ nicht mit x , sondern mit einem anderen Buchstaben bezeichnen (wir haben y gewählt), da t und x ja die freien Variablen in der Lösungsformel sein sollen.

Eigenschaften der Lösung* Mit Hilfe der Lösungsformel können die folgenden Aussagen abgeleitet werden:

1. Superpositionsprinzip / Linearität: Sind $u_1(t, x)$ bzw. $u_2(t, x)$ die Lösungen der Wärmeleitgleichung mit Anfangsdaten $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ und sind η_1, η_2 zwei Zahlen, so ist $u(t, x) = \eta_1 u_1(t, x) + \eta_2 u_2(t, x)$ die Lösung mit den Anfangsdaten $f(x) = \eta_1 f_1(x) + \eta_2 f_2(x)$.
2. Maximumprinzip: Es gilt

$$\min f \leq u(t, x) \leq \max f$$

für alle $t \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$, wobei die Zahlen $\min f := \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ und $\max f := \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ das Minimum und das Maximum der Anfangsdaten liefern.

3. Erhalt des Integrals: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

für alle $t \geq 0$.

4. Ljapunov-Funktionen: Die drei zeitabhängigen Größen

$$L_1(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t, x))^2 dx, \quad L_2(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u(t, x))^2 dx$$

und

$$L_3(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) \ln(u(t, x)) dx$$

sind monoton fallend, d.h. es gilt $\dot{L}_j(t) \leq 0$ für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$ und alle $t \geq 0$. Diese Ungleichungen kodieren das thermodynamische Verhalten der Lösung.

5. Regularisierung: Die Lösung u ist in jedem Punkt (t, x) mit $t > 0$ unendlich oft differenzierbar (im klassischen Sinn aus *Mathe-2*). Dies gilt selbst dann, wenn die Anfangsdaten f Unstetigkeitsstellen aufweisen.

Bemerkungen*

1. Die Wärmeleitgleichung ist — wie alle partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik — nur ein *Modell* der Wirklichkeit und beschreibt die Ausbreitung von Temperatur *nicht exakt*, sondern nur *näherungsweise* bzw. unter gewissen idealisierenden Vereinfachungen. Zum Beispiel impliziert die Lösungsformel, dass die Informationen der Anfangsdaten sich mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten, aber das ist natürlich unphysikalisch.

2. Die Lösung der Wärmeleitgleichung wird in aller Regel nur für $t \geq 0$, also für zukünftige Zeiten betrachtet. Die Frage, ob bzw. wann es Lösungen für vergangene Zeiten gibt, ist viel subtiler als es auf den ersten Blick scheinen mag. Beachte in diesem Zusammenhang, dass

$$\hat{K}_a(t, \xi) = \exp(-4\pi^2 a \xi^2 t),$$

für jede positive Zeit $t > 0$ sehr schnell mit $\xi \rightarrow \pm\infty$ abklingt, für jede negative Zeit $t < 0$ jedoch sehr schnell anwächst. Insbesondere kann für $t < 0$ im Allgemeinen nicht garantiert werden, dass die inverse Fourier-Transformation des Produktes $\hat{f}(\xi)\hat{K}_a(t, \xi)$ wenigstens im Sinne der Distributionen existiert.

Wellengleichung

Anfangswertproblem Für eine feste Konstante $c > 0$ und zwei gegebene Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suchen wir eine Lösung u , sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0 && \text{(Differentialgleichung)} \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R} && \text{(1. Anfangsbedingung)} \\ \partial_t u(0, x) &= g(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R} && \text{(2. Anfangsbedingung)} \end{aligned}$$

Lösungsformel Die eindeutige Lösung ist durch die d'Alembert-Formel

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

gegeben.

Bemerkungen

1. Sind f bzw. g zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar, so kann mithilfe der Kettenregel direkt nachgerechnet werden, dass die Lösungsformel wirklich eine Lösung der Differentialgleichung liefert (Übungsaufgabe).
2. Die obige Lösungsformel kann allerdings auch für unstetige Funktionen f und g verwendet werden, die nicht in jedem Punkt differenzierbar sind. In diesem Fall sind die Ableitungen von $\partial_t^2 u$ und $\partial_x^2 u$ in einem distributionellen Sinne zu verstehen.
3. Die eindimensionale Wellengleichung ist wieder eine Idealisierung und beschreibt die Ausbreitung von (mechanischen oder elektrischen) Wellen in einem Stab oder Draht, der sowohl als unendlich lang als auch als unendlich dünn modelliert wird. Es gibt auch eine zwei- und eine dreidimensionale Wellengleichung, aber die entsprechenden Lösungsformeln sind viel anspruchsvoller. Dies liegt vor allem daran, dass die Physik von Wellen in höheren Raumdimensionen deutlich komplizierter ist.
4. Der Parameter c ist eine Materialkonstante, nämlich die *Schallgeschwindigkeit* (siehe WIKIPEDIA für typische Werte).

5. Die Wellengleichung ist ein Spezialfall der sogenannten Telegraphengleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) - b \partial_t u(t, x) = c^2 \partial_x^2 u(t, x) + d \partial_x u(t, x) + e u(t, x),$$

die zum Beispiel die raumzeitliche Entwicklung der elektrischen Spannung (oder des Stroms) in einer idealisierten Zweidrahtleitung beschreibt und die reellen Parameter b, c, d, e, f besitzt (siehe dazu *Telegrapher's equations* oder *Leitungsgleichung* auf WIKIPEDIA). Auch diese Gleichung kann mittels der Fourier-Transformation in eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Parameter ξ zurückgeführt werden, nämlich auf

$$\partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) - b \partial_t \hat{u}(t, \xi) = -4 \pi c^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi) + 2 \pi i d \xi \hat{u}(t, \xi) + e \hat{u}(t, \xi).$$

Allerdings ist die allgemeine Lösungsformel recht kompliziert.

Beispiele

1. Im Fall von $c = 1$ und

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad g(x) = 0$$

erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-(x-t)^2) + \frac{1}{2} \exp(-(x+t)^2),$$

wobei die rechte Seite dieser Lösungsformel aus einer nach rechts und einer nach links laufenden Glockenfunktion besteht. Eine analoge Zerlegungseigenschaft gilt auch für andere Anfangsdaten (siehe dazu weiter unten).

2. Mit $c = 1$ und

$$f(x) = +\sin(x), \quad g(x) = -\cos(x)$$

ergibt sich

$$\int_{x-t}^{x+t} g(y) dy = \sin(x-t) - \sin(x+t)$$

und damit

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin(x-t) + \sin(x+t)) + \frac{1}{2} (\sin(x-t) - \sin(x+t)) = \sin(x-t).$$

In diesem Beispiel gibt es also nur eine nach rechts laufende Welle, wobei dies im Allgemeinen genau dann gilt, wenn $g(x) = -f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Im Fall von $g(x) = +f'(x)$ gibt es nur eine nach links laufende Welle.

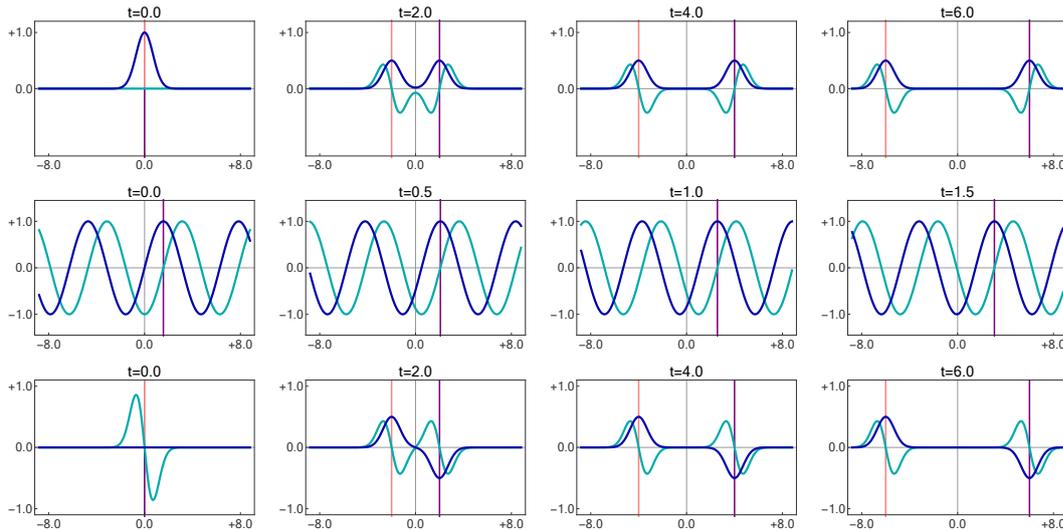
3. Wir setzen wieder $c = 1$, aber betrachten diesmal die Anfangsdaten

$$f(x) = 0, \quad g(x) = -2x \exp(-x^2).$$

Direkte Rechnungen liefern

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy = \frac{1}{2} \exp(-(x+t)^2) - \frac{1}{2} \exp(-(x-t)^2)$$

als explizite Lösungsformel.



Die drei soeben berechneten Lösungen der Wellengleichung mit $c = 1$, wobei für verschiedene Werte von t der räumliche Verlauf von u (blau) und $\partial_t u$ (türkis) dargestellt ist. Die rosa bzw. lila Linien bewegen sich mit Geschwindigkeit $-c$ bzw. $+c$, d.h. sie laufen nach *links* bzw. *rechts*.

Herleitung der Lösungsformel Auch die Wellengleichung können wir mit Fourier-Methoden lösen.

Transformation in den Wellenbereich: Für die Fourier-Transformierte \hat{u} ergibt sich nach Anwendung der Rechenregeln diesmal die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) - c^2 (2\pi i \xi)^2 \hat{u}(t, \xi) = 0,$$

wobei t wieder die Variable und ξ der Parameter ist.

Lösung im Wellenbereich: Die allgemeine Lösung lautet (in komplexer Schreibweise)

$$\hat{u}(t, \xi) = w_-(\xi) \exp(-2\pi i c \xi t) + w_+(\xi) \exp(+2\pi i c \xi t),$$

wobei wir dies durch Scharfes Hinsehen oder mit den Methoden aus *Mathe-2* begründen können. Dabei dürfen und werden die beiden freien Konstanten $w_{\pm}(\xi) \in \mathbb{C}$ von ξ abhängen.

Rücktransformation in den Ortsbereich: Durch Einsetzen in die Formel der inversen Fourier-Transformation erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w_-(\xi) \exp(2\pi i (x - ct) \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} w_+(\xi) \exp(2\pi i (x + ct) \xi) d\xi \\ &= \check{w}_-(x - ct) + \check{w}_+(x + ct), \end{aligned}$$

in dem die inversen Fourier-Transformationen von w_{\pm} auftauchen, die wir nun mithilfe der Anfangsbedingungen bestimmen wollen.

Auswertung der Anfangsbedingung: Mit $t = 0$ soll

$$f(x) = \check{w}_-(x) + \check{w}_+(x) \quad g(x) = -c \check{w}'_-(x) + c \check{w}'_+(x)$$

für alle x gelten, wobei $'$ hier die Ableitung nach x meint, d.h. $\check{w}'_{\pm}(x) = \frac{d}{dx} \check{w}_{\pm}(x)$. Wenn wir die erste Gleichung nach x differenzieren und mit der zweiten Gleichung kombinieren, so ergeben sich nach einfachen Umformungen die Formeln

$$\check{w}'_-(x) = \frac{c f'(x) - g(x)}{2c}, \quad \check{w}'_+(x) = \frac{c f'(x) + g(x)}{2c}$$

für die Ableitungen von \check{w}_\pm . Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert nun

$$\check{w}_-(x) = \mu_- + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_x^0 g(y) dy, \quad \check{w}_+(x) = \mu_+ + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy$$

mit zwei Integrationskonstanten μ_- und μ_+ , wobei die erste Anfangsbedingung

$$\mu_- + \mu_+ = 0$$

erzwingt. Damit haben wir die Funktionen \check{w}_\pm durch die Anfangsdaten f und g ausgedrückt und im letzten Schritt setzen wir diese Formeln in das Zwischenergebnis für u ein, wobei wir x einmal durch $x - ct$ und einmal durch $x + ct$ substituieren. Dies liefert

$$u(t, x) = \left(\frac{f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 g(y) dy \right) + \left(\frac{f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(y) dy \right)$$

und nach kleinen Umformungen erhalten wir schließlich die Formel von d'Alembert.

Bemerkungen

1. Die d'Alembert-Formel kann auch für $t < 0$ verwendet werden, d.h. die Lösung der Wellengleichung existiert immer für alle Zeiten. Darüber hinaus kann die Lösung als

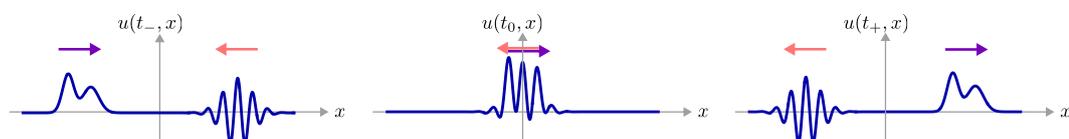
$$u(t, x) = \check{w}_-(x - ct) + \check{w}_+(x - ct)$$

geschrieben werden, wobei der erste bzw. der zweite Summand eine nach *rechts laufende* bzw. eine nach *links laufende* Welle beschreibt (siehe das erste der zwei nachfolgenden Bilder).

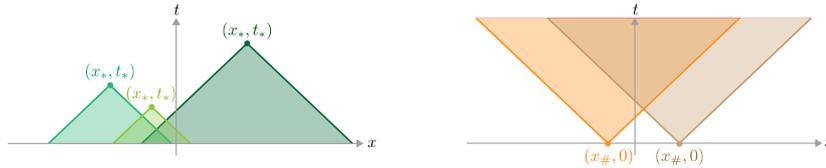
2. Bei der linearen Wellengleichung breiten sich Informationen nur mit endlicher Geschwindigkeit aus, wobei $-c$ bzw. $+c$ gerade der kleinste bzw. größte Wert sind. Heuristisch können wir diese Eigenschaft wie folgt verstehen: Wird die d'Alembertsche Lösungsformel zu einer festen Zeit t_* in einem Raumpunkt x_* ausgewertet, so sind nur die Anfangsdaten in Punkten $x_\#$ mit

$$x_* - ct_* \leq x_\# \leq x_* + ct_*$$

relevant. Oder anders gesagt: Die Anfangsinformation aus allen anderen Punkten kann zur Zeit t_* noch nicht im Raumpunkt x_* angekommen sein. Siehe dazu das zweite Bild unten.



Jede Lösung der linearen Wellengleichung auf dem eindimensionalen Ganzraum kann gemäß der d'Alembert-Formel als Überlagerung einer nach links laufenden und einer nach rechts laufenden Welle betrachtet werden, wobei $-c$ und $+c$ die entsprechenden Geschwindigkeiten sind. Beide Wellen sind dabei eindeutig durch die Anfangsdaten f, g bestimmt und im Bild gilt $t_- < t_0 < t_+$.



Zwei unterschiedliche, aber äquivalente Sichtweisen auf die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der linearen Wellengleichung. *Links*: Der Wert der Lösung $u(t_*, x_*)$ in einem festgehaltenen Punkt (t_*, x_*) hängt von den Anfangsdaten im Intervall $[x_* - ct_*, x_* + ct_*]$ ab (Rückwärtskegel). *Rechts*: Die Anfangsdaten in einem festgehaltenen Punkt $x_\#$ können nur dann einen Beitrag zur Lösung $u(t_*, x_*)$ liefern, wenn x_* in dem Intervall $[x_\# - ct_*, x_\# + ct_*]$ liegt (Vorwärtskegel).

alternative Herleitung der Lösungsformel* Die d'Alembertsche Formel kann alternativ auch ohne Verwendung der Fourier-Transformation abgeleitet werden. Mittels des Ansatzes

$$u(t, x) = U(\lambda, \mu), \quad \lambda = x - ct, \quad \mu = x + ct$$

sowie der Kettenregel kann leicht nachgerechnet werden (Übungsaufgabe), dass u genau dann der Wellengleichung genügt, wenn

$$\partial_\lambda \partial_\mu U(\lambda, \mu) = 0$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt. Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$U(\lambda, \mu) = A(\lambda) + B(\mu),$$

wobei dies mithilfe einer zweifachen Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung abgeleitet werden kann (wieder Übungsaufgabe). Die beiden Anfangsbedingungen implizieren außerdem

$$f(x) = U(x, x) = A(x) + B(x)$$

sowie

$$g(x) = \partial_t u(0, x) = -\partial_\lambda U(x, x) + \partial_\mu U(x, x) = A'(x) + B'(x)$$

und analog zu oben können wir nun A und B durch f und g ausdrücken.

Eigenschaften der Lösung* Die Wellengleichung besitzt zum Teil ganz andere Eigenschaften als die Wärmeleitgleichung. Insbesondere gibt es weder ein Maximum-Prinzip noch eine Regularisierungseigenschaft. Die Differentialgleichung bzw. die d'Alembertsche Lösungsformel impliziert aber wieder ein Superpositionsprinzip und außerdem einige Erhaltungssätze. Insbesondere sind die beiden Größen

$$E_1(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t u(t, x))^2 + (\partial_x u(t, x))^2 dx, \quad E_2(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t u(t, x) \partial_x u(t, x) dx$$

zeitlich konstant, d.h. es gilt $\dot{E}_1(t) = 0 = \dot{E}_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3.7 Anwendung von Fourier-Reihen bei partiellen Differentialgleichungen

Vorbemerkung Wir wollen in diesem Abschnitt einfache partielle Differentialgleichungen auf beschränkten Ortsintervallen mit Hilfe von Fourier-Reihen lösen, wobei neben den Anfangsbedingungen auch noch geeignete Randbedingungen gestellt werden dürfen bzw. müssen. Die wesentlichen Eigenschaften von Fourier-Reihen hatten wir schon in *Mathe-1* kennengelernt, aber wir werden im Folgenden eine andere Version dieser Reihen benutzen, bei der die Bausteine harmonische Schwingungen im Ort, d.h. bzgl. der Variablen x , repräsentieren.

Fourier-Reihen für ortsperiodische Funktionen Wenn u X -periodisch bzgl. der Ortsvariablen ist, d.h. wenn

$$u(t, x) = u(t, x + X)$$

für eine feste Periodenlänge $X > 0$ sowie alle t und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so können wir u via

$$u(t, x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(t) \exp(+2\pi i \xi_j x), \quad \xi_j = \frac{j}{X}$$

als Fourier-Reihe schreiben, wobei die Koeffizienten durch die Integralformeln

$$\gamma_j(t) = \frac{1}{X} \int_0^X u(t, y) \exp(-2\pi i \xi_j y) dy$$

gegeben sind.

Bemerkungen

1. Die Bausteine in der obigen Formel sind gerade die harmonischen Schwingungen bzgl. der Ortsvariablen x , die selbst X -periodisch sind. Oder anders gesagt: Bei Fourier-Reihen betrachten wir nicht alle denkbaren Wellenzahlen, sondern nur die Schwingungen mit den Wellenzahlen

$$\dots, \quad \xi_{-2}, \quad \xi_{-1}, \quad \xi_0, \quad \xi_{+1}, \quad \xi_{+2}, \quad \dots,$$

die jeweils ein ganzzahliges Vielfaches von $1/X$ sind. Dementsprechend werden die unendlichen Überlagerungen solcher Schwingungen nicht durch Integrale, sondern durch Reihen beschrieben.

Zusatz*: Wir hatten schon am Ende des vorletzten Abschnitts gesehen, dass es bei periodischen Funktionen einen intimen Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und der Fourier-Transformation im Sinne der Distributionen gibt. Für X -periodische Funktionen gilt

$$\hat{u}(t, \xi) = (\mathcal{F}u)(t, x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(t) \delta_{\xi_j}(\xi)$$

mit den Notationen aus diesem und dem vorherigen Abschnitt, wobei $\gamma_j(t)$ der j -te Reihen-Koeffizient von oben und $\delta_{\xi_j}(\xi)$ eine Diracsche Delta-Distribution im Wellenbereich ist. Wir werden aber von dieser Darstellungsformel keinen weiteren Gebrauch machen.

2. Wir hatten in *Mathe-1* Fourier-Reihen für Zeitfunktionen studiert, die entweder periodisch bzgl. t oder nur auf einem endlichen Zeitintervall definiert waren. Die wesentlichen Eigenschaften – wie zum Beispiel das Gibbs-Phänomen – gelten sinngemäß auch in dem neuen Setting, aber diesmal bzgl. der Variablen x , wobei diesmal die Reihen-Koeffizienten auch noch von einer zweiten Variablen (nämlich t) abhängen.
3. Die Formel für $\gamma_j(t)$ kann sehr einfach hergeleitet werden: Wir multiplizieren die Darstellungsformel für $u(t, x)$ mit der harmonischen Schwingung zur Wellenzahl ξ_m , integrieren über $x \in [0, X]$, vertauschen die Integration mit der Summation und substituieren $y = 2\pi x/X$. Dies liefert

$$\begin{aligned}
 \int_0^X u(t, x) \exp(-2\pi i \xi_m x) dx &= \int_0^X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(t) \exp(+2\pi i (\xi_j - \xi_m) x) dx \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(t) \int_0^X \exp(+2\pi i (\xi_j - \xi_m) x) dx \\
 &= \frac{X}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(t) \int_0^{2\pi} \exp(i(j-m)y) dy \\
 &= \frac{X}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(t) \begin{cases} 2\pi & \text{falls } j = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= X \gamma_m(t),
 \end{aligned}$$

und nach Umstellung der Terme sowie Umbenennung der Integrationsvariablen erhalten wir die gewünschte Integralformel für $\gamma_m(t)$.

Fourier-Reihen für Funktionen auf beschränkten Ortsintervallen

Vorbemerkung Wir betrachten nun Funktionen u in den Variablen

$$t \geq 0, \quad 0 < x < X,$$

und führen drei verschiedene Varianten der entsprechenden Fourier-Reihe ein. Ganz analoge Konzepte hatten wir schon in *Mathe-1* beim Studium von Zeitfunktionen benutzt.

Fourier-Reihe Wir können jede Funktion auf dem Ortsintervall $[0, X]$ in natürlicher Weise via

$$u_{\text{per}}(t, x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ u(t, x+X) & \text{für } -X < x < 0 \\ u(t, x) & \text{für } 0 < x < X \\ u(t, x-X) & \text{für } X < x < 2X \\ \dots & \dots \end{cases}$$

zu einer X -periodischen Funktion u_{per} fortsetzen (siehe das erste Bild unten). Die Fourier-Reihendarstellung für u_{per} kann natürlich auch für x zwischen 0 und X ausgewertet werden und beschreibt das Verhalten von u . Oder anders gesagt: Die oben

angegebenen Formeln der Fourier-Reihe mit den Koeffizienten $\gamma_j(t)$ und den Bausteinen $\exp(2\pi i \xi_j x)$ können auch für $0 \leq x \leq X$ benutzt werden.

Wir können die Fourier-Reihe auf dem Intervall $[0, X]$ alternativ auch mit Sinus- und Kosinus-Termen ausdrücken, denn die Euler-Formel impliziert die äquivalente Darstellung

$$u(t, x) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \cos(2\pi \xi_m x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) \sin(2\pi \xi_m x),$$

wobei wieder $\xi_m = m/X$ gilt. Die entsprechenden Koeffizienten können durch

$$a_m(t) = \gamma_{+m}(t) + \gamma_{-m}(t) = \frac{2}{X} \int_0^X u(t, y) \cos(2\pi \xi_m y) dy$$

und

$$b_m(t) = i \gamma_{+m}(t) - i \gamma_{-m}(t) = \frac{2}{X} \int_0^X u(t, y) \sin(2\pi \xi_m y) dy$$

berechnet werden, wobei die Formel für $a_m(t)$ auch mit $m = 0$ ausgewertet werden darf und $a_0(t) = 2\gamma_0(t) = \frac{2}{X} \int_0^X u(t, y) dy$ liefert.

Fourier-Sinus-Reihe Wir können jede Funktion u auf dem Ortsintervall $[0, X]$ zunächst zu einer *ungeraden* Funktion auf dem verdoppelten Ortsintervall $[-X, X]$ und anschließend zu einer $2X$ -periodischen Funktion $u_{\text{per,ung}}$ auf ganz \mathbb{R} fortsetzen (siehe das Bild). Die periodische Fourier-Reihe dieser Fortsetzung $u_{\text{per,ung}}$ beinhaltet dann die Wellenzahlen

$$\frac{j}{2X} = \frac{1}{2} \xi_j,$$

für alle ganzzahligen j , wobei die Integralformeln für die entsprechenden Fourier-Koeffizienten deutlich vereinfacht werden können, da $u_{\text{per,ung}}$ eine ungerade Funktion ist. Insgesamt erhalten wir die folgende Reihen-Darstellung

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(t) \sin(\pi \xi_m x), \quad \beta_m(t) = \frac{2}{X} \int_0^X u(t, y) \sin(\pi \xi_m y) dy,$$

wobei wir für die Details der Herleitung auf die Diskussion aus *Mathe-1* verweisen. Beachte, dass hier die Sinus-Bausteine in $\pi \xi_m x$ — und nicht in $2\pi \xi_m x$ wie bei der Fourier-Reihe — ausgewertet werden.

Fourier-Kosinus-Reihe Wird u zu einer Funktion $u_{\text{per,ger}}$ fortgesetzt, die sowohl $2X$ -periodisch als auch *gerade* bzgl. der Ortsvariable x ist, so liefert die Fourier-Reihe dieser Fortsetzung die Formel

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \alpha_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(t) \cos(\pi \xi_m x), \quad \alpha_m(t) = \frac{2}{X} \int_0^X u(t, y) \cos(\pi \xi_m y) dy$$

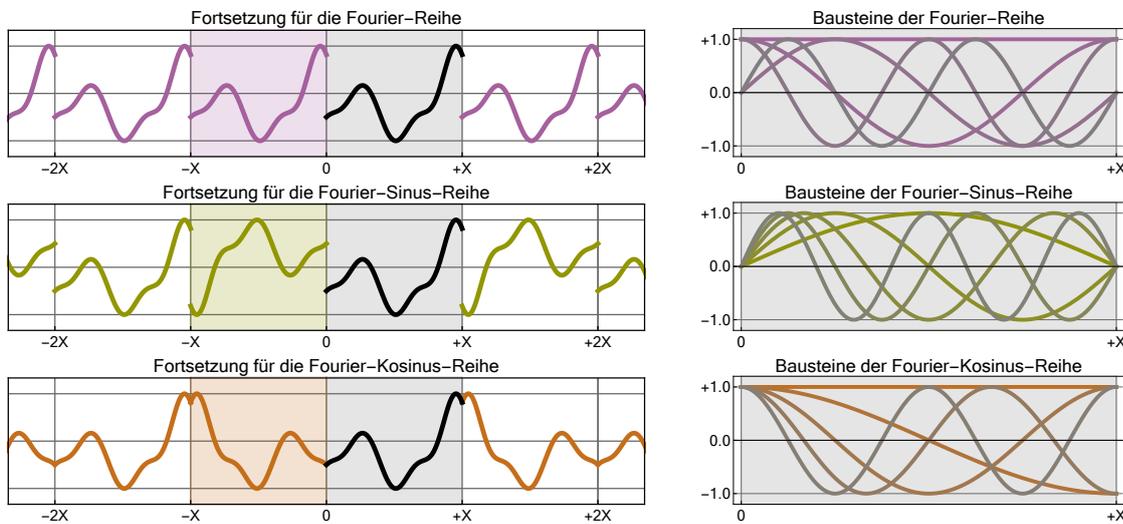
als weitere Reihen-Darstellung für u . Dabei gilt die Integralformel für $\alpha_m(t)$ auch für $m = 0$ und kann wegen $\xi_0 = 0$ zu $\alpha_0(t) = \frac{2}{X} \int_0^X u(t, y) dy$ vereinfacht werden.

Bemerkung In allen unseren Fourier-Reihen-Formeln gilt nach Konstruktion immer $\xi_m = m/X$ sowie $a_0(t) = \alpha_0(t)$ und

$$a_1(t) = \alpha_2(t), \quad b_1(t) = \beta_2(t), \quad a_2(t) = \alpha_4(t), \quad b_2(t) = \beta_4(t), \quad \dots$$

Im Spezialfall $X = 2\pi$ ergeben sich vereinfachte Schreibweisen: Die Fourier-Bausteine werden in $2\pi \xi_m x = m x$ ausgewertet, wohingegen $\pi \xi_m x = \frac{1}{2} m x$ das Argument in den Fourier-Sinus- und den Fourier-Kosinus-Bausteinen ist.

Zusammenfassung Jede Funktion u auf dem Ortsintervall $[0, X]$ kann auf drei verschiedene Weisen als eine Reihe mit trigonometrischen Bausteinen geschrieben werden, wobei die Reihen-Koeffizienten von der Zeit t abhängen dürfen bzw. werden. Je nach Anwendung wird mal die eine und mal die andere Reihen-Darstellung verwendet (siehe die Beispiele).



Links: Für jede Funktion u (schwarz) auf dem Ortsintervall $[0, X]$ (grau) können drei Varianten der Fourier-Reihe eingeführt werden, die jeweils einer anderen Fortsetzung entsprechen, nämlich u_{per} (oben), $u_{\text{per,ung}}$ (Mitte) bzw. $u_{\text{per,ger}}$ (unten). *Rechts:* Dargestellt sind jeweils die ersten Bausteine bzw. Basisfunktionen: ganzzahlige Sinus- und ganzzahlige Kosinus-Schwingungen (oben), halb- und ganzzahlige Sinus-Schwingungen (Mitte) sowie halb- und ganzzahlige Kosinus-Schwingungen (unten). Beachte, dass bei der Fourier-Sinus-Reihe bzw. der Fourier-Kosinus-Reihe jeder Baustein homogenen Dirichlet- bzw. homogenen Neumann-Randbedingungen genügt.

Verallgemeinerung* Wir haben bisher immer angenommen, dass der linke bzw. rechte Rand des Ortsintervalles durch $x = 0$ bzw. $x = X$ gegeben ist. Auf einem allgemeinen Intervall $[X_L, X_R]$ sind die Bausteine der Sinus- bzw. Kosinus-Reihe durch

$$\sin\left(\frac{\pi m}{X_R - X_L}(x - X_L)\right) \quad \text{bzw.} \quad \cos\left(\frac{\pi m}{X_R - X_L}(x - X_L)\right)$$

gegeben und die Integralformeln für die Koeffizienten müssen entsprechend angepasst werden. Insbesondere gilt dann

$$\beta_m(t) = \frac{2}{X_R - X_L} \int_{X_L}^{X_R} u(t, y) \sin\left(\frac{\pi m}{X_R - X_L}(y - X_L)\right) dy$$

sowie eine analoge Formel für $\alpha_m(t)$. In den meisten Fällen können wir uns aber mittels einer Ortverschiebung bzw. durch eine entsprechende Umdefinition von x auf den Spezialfall $X_L = 0$ und $X_R = X$ zurückziehen.

Strategie Wir wollen mit den verschiedenen Varianten der Fourier-Reihe sogenannte *Randanfangswertprobleme* für partielle Differentialgleichungen lösen. Dabei können wir aber nicht die allgemeine Theorie entwickeln, sondern beschränken uns auf das Studium einiger einfacher Beispiele.

Randbedingungen Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Verhalten einer Lösung am linken Rand ($x = 0$) festzulegen, wobei

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= d_L(t) && \text{(inhomogene Dirichlet- Randbedingung)} \\ u(t, 0) &= 0 && \text{(homogene Dirichlet- Randbedingung)} \\ \partial_x u(t, 0) &= -n_L(t) && \text{(inhomogene Neumann- Randbedingung)} \\ \partial_x u(t, 0) &= 0 && \text{(homogene Neumann-Randbedingung)} \end{aligned}$$

die vier wichtigsten sind und die Zeitfunktion d_L bzw. n_L meist als bekannt vorausgesetzt wird. Analoge Randbedingungen können am rechten Rand gestellt werden, wobei man in der Regel bei den inhomogenen Neumann-Randbedingungen $+n_R(t)$ schreibt.

Wärmeleitgleichung mit homogenen Neumann-Bedingungen

Randanfangswertproblem Wir suchen eine Funktion u (die sogenannte Lösung) mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - a \partial_x^2 u(t, x) &= 0 && \text{für } t > 0, x \in (0, X) && \text{(Differentialgleichung)} \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für } x \in (0, X) && \text{(Anfangsbedingung)} \\ \partial_x u(t, 0) &= 0 && \text{für } t > 0 && \text{(linke Randbedingung)} \\ \partial_x u(t, X) &= 0 && \text{für } t > 0 && \text{(rechte Randbedingung)} \end{aligned}$$

Hierbei ist a wieder eine feste Konstante und f eine gegebene Funktion auf $(0, X)$.

Herleitung der Lösungsformel Wir benutzen die Fourier-Kosinus-Reihe, da deren Bausteine wegen

$$\partial_x \cos(\pi \xi_m x) \Big|_{x=0} = 0 = \partial_x \cos(\pi \xi_m x) \Big|_{x=X}$$

mit den vorgeschriebenen Neumann-Randbedingungen verträglich sind.

Transformation der partiellen Differentialgleichung: Wenn wir den Reihenansatz einmal nach t und zweimal nach x ableiten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u(t, x) - a \partial_x^2 u(t, x) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (\dot{\alpha}_m(t) + a \pi^2 \xi_m^2 \alpha_m(t)) \cos(\pi \xi_m x). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle t und x richtig sein, wenn

$$\dot{\alpha}_0(t) = 0, \quad \dot{\alpha}_m(t) = -a \pi^2 \xi_m^2 \alpha_m(t)$$

für alle Indizes m und alle Zeiten t gilt. Insbesondere haben wir wieder die partielle Differentialgleichung für u in eine Familie von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführt, wobei diesmal der Index m die Rolle des freien Parameter spielt und α_m die zu bestimmende Zeitfunktion ist. Die allgemeine Lösung im Wellenbereich ist durch

$$\alpha_m(t) = \alpha_m(0) \exp(-a \pi^2 \xi_m^2 t)$$

gegeben, sodass wir nur noch für jedes m den Wert von $\alpha_m(0)$ ermitteln müssen.

Auswertung der Anfangsbedingung: Zur Zeit $t = 0$ soll

$$f(x) = u(0, x) = \frac{1}{2} \alpha_0(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(0) \cos(\pi \xi_m x)$$

gelten und wir schließen, dass der Anfangswert für α_m via

$$\alpha_0(0) = \frac{2}{X} \int_0^X f(y) dy, \quad \alpha_m(0) = \frac{2}{X} \int_0^X f(y) \cos(\pi \xi_m y) dy$$

aus der Funktion f berechnet werden kann. Die Kombination aller Teilresultate liefert das gewünschte Ergebnis.

Lösungsformel Die Lösung des Randanfangswertproblems ist durch

$$u(t, x) = \frac{2}{X} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^X f(y) dy \right) + \frac{2}{X} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^X f(y) \cos(\pi \xi_m y) dy \right) \exp(-a \pi^2 \xi_m^2 t) \cos(\pi \xi_m x)$$

gegeben.

Bemerkungen

1. Auch hier gilt: Die Herleitung ist wichtiger als die Lösungsformel. Beachte auch, dass die homogenen Randbedingungen letztlich nur indirekt — nämlich durch die Wahl des Reihenansatzes — in unsere Rechnungen eingeflossen sind.
2. In den Übungen werden wir sehen, dass das analoge Randanfangswertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen mittels Fourier-Sinus-Reihen gelöst werden kann.
3. Ausblick*: Fourier-Kosinus-Reihen können auch bei dem allgemeineren Randanfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - a \partial_x^2 u(t, x) &= h(t, x) && \text{(Differentialgleichung)} \\ u(0, x) &= f(x) && \text{(Anfangsbedingung)} \\ \partial_x u(t, 0) &= -n_L(t) && \text{(linke Randbedingung)} \\ \partial_x u(t, X) &= +n_R(t) && \text{(rechte Randbedingung)} \end{aligned}$$

verwendet werden. Die entsprechende Lösungsformel ist aber komplizierter, da zum einen die Funktion h auftritt und zum anderen die inhomogenen Neumann-Randbedingungen in einem Vorbereitungsschritt geschickt auf homogene zurückgeführt werden müssen.

Beispiel Für $X = 4$ und

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{für } 3 < x < 4 \end{cases}$$

berechnen wir die Fourier-Kosinus-Koeffizienten von f bzw. die Anfangsdaten für die gewöhnlichen Differentialgleichungen im Wellenbereich zu

$$\alpha_0(0) = \frac{2}{4} \int_0^4 f(y) \, dy = \frac{2}{4} \int_1^3 1 \, dy = 1$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha_m(0) &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(y) \cos\left(\frac{\pi m}{4} y\right) \, dy = \frac{2}{4} \int_1^3 \cos\left(\frac{\pi m}{4} y\right) \, dy \\ &= \frac{2}{\pi m} \left[\sin\left(\frac{\pi m}{4} y\right) \right]_{y=1}^{y=3} = \frac{4}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) \end{aligned}$$

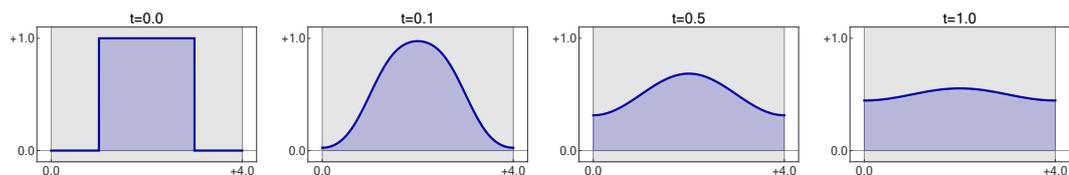
und erhalten nach Einsetzen die explizite Lösungsformel

$$u(t, x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin\left(\frac{1}{4} \pi m\right) \cos\left(\frac{1}{2} \pi m\right)}{\pi m} \exp\left(-\frac{1}{16} \pi^2 m^2 t\right) \cos\left(\frac{1}{4} \pi m^2 x\right).$$

Bemerkung: In diesem Beispiel könnten wir die Formel weiter vereinfachen, denn wegen

$$\sin\left(\frac{\pi m}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{falls } m = 4n + 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sind neben $m = 0$ hier nur die Indizes $m = 2, 6, 10, 14, \dots$ relevant.



Die Lösung der Wärmeleitgleichung aus dem Beispiel mit $X = 4$, wobei für vier verschiedene Zeiten die Temperatur $u(t, x)$ als Funktion des Ortes x dargestellt ist. Die homogenen Neumann-Randbedingungen beschreiben, dass keine Wärme über der Rand entweichen kann (*thermische Isolierung*).

Wellengleichung mit homogenen Dirichlet-Bedingungen

Randanfangswertproblem Die gesuchte Lösung u muß diesmal die folgenden Eigenschaften aufweisen:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \partial_x^2 u(t, x) &= 0 & \text{für } t > 0, x \in (0, X) & \quad \text{(Differentialgleichung)} \\ u(0, x) &= f(x) & \text{für } x \in (0, X) & \quad \text{(1. Anfangsbedingung)} \\ \partial_t u(0, x) &= g(x) & \text{für } x \in (0, X) & \quad \text{(2. Anfangsbedingung)} \\ u(t, 0) &= 0 & \text{für } t > 0 & \quad \text{(linke Randbedingung)} \\ u(t, X) &= 0 & \text{für } t > 0 & \quad \text{(rechte Randbedingung)} \end{aligned}$$

Dabei ist $c > 0$ eine physikalische Konstante und die Anfangsfunktionen f, g sind auf dem Intervall $(0, X)$ gegeben.

Herleitung der Lösungsformel Wir wollen diesmal die Fourier-Sinus-Reihe für u verwenden, da dort jeder der verwendeten Bausteine via

$$\sin(\pi \xi_m x)|_{x=0} = 0 = \sin(\pi \xi_m x)|_{x=X}$$

die homogenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllt.

Transformation der partiellen Differentialgleichung: Der Sinus-Reihenansatz für u impliziert

$$\partial_t^2 u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{\beta}_m(t) \sin(\pi \xi_m x)$$

sowie

$$\partial_x^2 u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} -\pi^2 \xi_m^2 \beta_m(t) \sin(\pi \xi_m x),$$

wobei wir wieder stillschweigend vorausgesetzt haben, dass wir die Ableitungen mit der Reihenbildung vertauschen dürfen. Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\ddot{\beta}_m(t) = -c^2 \pi^2 \xi_m^2 \beta_m(t)$$

und damit eine Familie von gewöhnlichen Differentialgleichungen im Wellenbereich, die äquivalent zur partiellen Differentialgleichung im Ortsbereich ist. Auch in diesem Fall können wir die transformierten Gleichungen — entweder durch Scharfes Hinsehen oder mit den Verfahren aus *Mathe-2* — lösen und erhalten das Zwischenergebnis

$$\beta_m(t) = \beta_m(0) \cos(c \pi \xi_m t) + \dot{\beta}_m(0) \frac{1}{c \pi \xi_m} \sin(c \pi \xi_m t),$$

wobei die reelle Schreibweise mit Sinus und Kosinus für unsere Zwecke besser geeignet ist als die komplexe Variante mit Exponentialfunktionen.

Auswertung der Anfangsbedingung: Wenn wir das Zwischenergebnis mit den beiden Anfangsbedingungen sowie dem Reihenansatz und seiner Zeitableitung kombinieren, so erhalten wir

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_0(0) \sin(\pi \xi_m x)$$

sowie

$$g(x) = \partial_t u(0, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{\beta}_0(0) \sin(\pi \xi_m x).$$

Hieraus schließen wir wieder, dass $\beta_m(0)$ bzw. $\dot{\beta}_m(0)$ durch Fourier-Sinus-Integrale von f bzw. g berechnet werden können.

Lösungsformel Die eindeutige Lösung kann als

$$\begin{aligned} u(t, x) = & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{X} \left(\int_0^X f(y) \sin(\pi \xi_m y) dy \right) \cos(c \pi \xi_m t) \sin(\pi \xi_m x) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{X} \left(\int_0^X g(y) \sin(\pi \xi_m y) dy \right) \frac{1}{c \pi \xi_m} \sin(c \pi \xi_m t) \sin(\pi \xi_m x) \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei die Herleitung wieder wichtiger als die konkrete Formel ist.

Beispiel Im Fall von

$$f(x) = \sin(\pi \xi_{m_*} x), \quad g(x) = 0$$

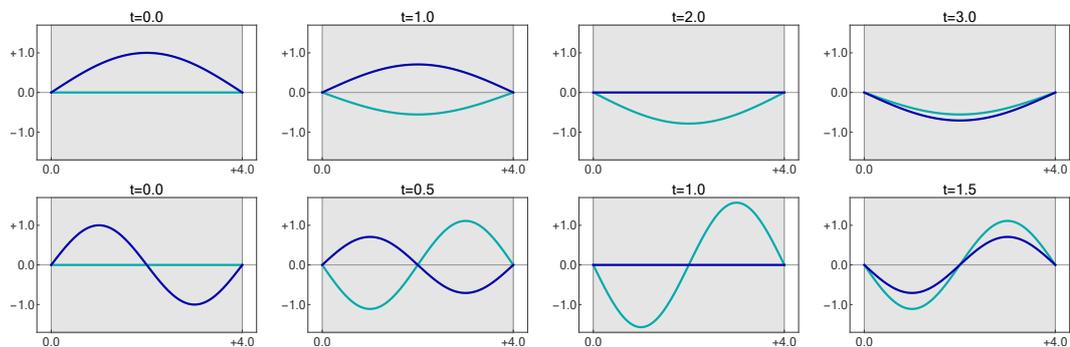
erhalten wir

$$u(t, x) = \cos(c \pi \xi_{m_*} t) \sin(\pi \xi_{m_*} x)$$

wegen

$$\frac{2}{X} \int_0^X \sin(\pi \xi_m y) \sin(\pi \xi_{m_*} y) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(mz) \sin(m_* z) dz = \begin{cases} 1 & \text{für } m = m_*, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wir in der letzten Formel $z = \pi y/X$ substituiert haben.



Die Lösung der Wellengleichung aus dem Beispiel mit $X = 4$, $c = 1$ sowie $m_* = 1$ (oben) und $m_* = 2$ (unten), wobei die vier Darstellungszeiten jeweils anders gewählt wurden und immer u (blau) bzw. $\partial_t u$ (türkis) als Funktion in x gezeigt wird. Dieser wichtige Spezialfall beschreibt die Schwingungen einer bei $x = 0$ und $x = X$ eingespannten Gitarrensaite, wobei $m_* = 1$ dem sogenannten *Grundton* und $m_* = 2$ dem ersten *Oberton* entspricht.

Kapitel 4

Laplace-Transformation

Vorlesungswoche 13

4.1 Definition und Eigenschaften

Vorbemerkungen

1. Die Laplace-Transformation \mathcal{L} ordnet einer gegebenen Funktion u im Zeitbereich in eindeutiger Weise eine Funktion U im *Spektralbereich* zu, wobei letztere von der *komplexen Frequenzvariablen* $s \in \mathbb{C}$ abhängt. Wir werden nur die *einseitige* Laplace-Transformation betrachten, bei der im Zeitbereich immer $t \geq 0$ gilt. Es gibt auch eine zweiseitige Variante mit $t \in \mathbb{R}$, aber diese spielt in Anwendungen meist nur eine untergeordnete Rolle.
2. Die Laplace-Transformation besitzt sehr viele Anwendungen, vor allem in der Kontrolltheorie und Regelungstechnik sowie in der ingenieurwissenschaftlichen Systemtheorie. Insbesondere können mit ihrer Hilfe Anfangswertprobleme für lineare Evolutionsgleichungen und sogenannte LZI-Systeme relativ einfach untersucht und sowohl qualitativ als auch quantitativ charakterisiert werden.
3. Trotz der zum Teil unterschiedlich aussehenden Formeln sind die Laplace- und die Fourier-Transformation sehr eng miteinander verwoben. In unserer anwendungsorientierten Darstellung kann dieser Punkt aber nicht vertieft werden.

Definition Die (einseitige) Laplace-Transformierte $U = \mathcal{L}u$ von u ist durch

$$U(s) = (\mathcal{L}u)(s) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-st) dt$$

definiert, wobei der Definitionsbereich aus allen Werten von $s \in \mathbb{C}$ besteht, für die das obige Integral in sinnvoller Weise definiert werden kann (zum Beispiel im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals).

Bemerkungen

1. Bei der Berechnung des Laplace-Integrals können wir immer versuchen, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anzuwenden, eben weil die Integrationsvariable t reell (und nicht komplex oder vektorwertig) ist. Die Werte des Integranden sowie des Integrals sind im Allgemeinen jedoch komplexe Zahlen.

2. Auch die Laplace-Transformation ist eine lineare Operation, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)(s) = \eta_1 (\mathcal{L}u_1)(s) + \eta_2 (\mathcal{L}u_2)(s),$$

sofern $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ Zahlen sind und die Formel nur für solche Werte von s benutzt werden darf, für die sowohl $U_1(s) = (\mathcal{L}u_1)(s)$ als auch $U_2(s) = (\mathcal{L}u_2)(s)$ wohldefiniert sind.

3. Die Integralformel der inversen Laplace-Transformation \mathcal{L}^{-1} ist komplizierter und wird erst weiter unten diskutiert. Wir werden auch sehen, dass man \mathcal{L}^{-1} oftmals nicht explizit anwenden muss, sondern nur mit *Korrespondenztabelle*n und Rechenregeln zu arbeiten braucht.

Beispiele

1. Für $u(t) = e^{-t}$ berechnen wir

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st-t} dt = \left[-\frac{e^{-st-t}}{s+1} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s+1} \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(s) > -1,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st-t} = 0$ jeden der zugelassenen Werte von s gilt.

*Bemerkung**: Das Laplace-Integral ist in diesem Beispiel nur auf der rechten Halbebene (d.h. für $\operatorname{Re}(s) > 0$) in sinnvoller Weise definiert, denn nur dann klingt der Integrand für $t \rightarrow \infty$ hinreichend schnell ab. Der Ausdruck $1/(1+s)$ kann aber für jedes $s \neq -1$ und damit auf einer deutlich größeren Menge ausgewertet werden. Wegen dieser und ähnlicher Subtilitäten ist die mathematisch rigorose Theorie der Laplace-Transformation alles andere als einfach.

2. Mit $u(t) = t e^{-t}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^{\infty} t e^{-st-t} dt = \left[-t \frac{e^{-st-t}}{s+1} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st-t}}{s+1} dt \\ &= \left[-t \frac{e^{-st-t}}{s+1} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \left[-\frac{e^{-st-t}}{(s+1)^2} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{(s+1)^2}, \end{aligned}$$

wobei wieder $\operatorname{Re}(s) > -1$ gelten muss und wir diesmal zusätzlich die partielle Integration bzgl. t sowie $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-st-t} = 0$ verwendet haben.

3. Für

$$u(t) = \cos(\theta t) \quad \text{bzw.} \quad u(t) = \sin(\theta t)$$

mit festem $\theta \in \mathbb{R}$ berechnen wir in einer analogen Nebenrechnung

$$\int_0^{\infty} e^{-st \pm i \theta t} dt = \left[\frac{e^{-st \pm i \theta t}}{-s \pm i \theta} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s \mp i \theta} = \frac{s \pm i \theta}{s^2 + \theta^2}$$

und erhalten

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + \theta^2} \quad \text{bzw.} \quad U(s) = \frac{\theta}{s^2 + \theta^2} \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

nach Auswertung der Euler-Formel. Alle Rechnungen gelten sogar für $\theta \in \mathbb{C}$, sofern wir $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im}(\theta)|$ annehmen.

4. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Heaviside-Funktion in t_* mit

$$h_{t_*}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < t_* \\ 1 & \text{für } t_* < t < \infty \end{cases}$$

für einen gegebenen Parameter $t_* \geq 0$ und alle $t > 0$. Direkte Rechnungen zeigen

$$H_{t_*}(s) = \int_{t_*}^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=t_*}^{t=\infty} = \frac{e^{-t_* s}}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0,$$

wobei wir im Spezialfall $t_* = 0$ mit $H_0(s) = 1/s$ die Laplace-Transformierte der konstanten Funktion $h_0(t) = 1$ für alle $t > 0$ erhalten.

Bemerkung

1. Die in der Praxis auftretenden Funktionen u sind oftmals zumindest stückweise stetig und erfüllen die Wachstumsbedingung

$$|u(t)| \leq M e^{\gamma t}$$

für einen reellen Exponenten γ (positiv oder negativ), eine positive Konstante M und alle Zeiten $t \geq 0$. Unter diesen Voraussetzungen ist U für alle s mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ durch das obige Integral wohldefiniert.

2. Wir können die Laplace-Transformation auch auf Distributionen im Zeitbereich anwenden. Insbesondere zeigt die Rechnung

$$\Delta_{t_*}(s) = (\mathcal{L}\delta_{t_*})(s) = \int_0^{\infty} \delta_{t_*}(t) e^{-st} dt = e^{-t_* s}$$

für jedes $t_* > 0$, dass die entsprechende Dirac-Distribution einer Exponentialfunktion im Spektralbereich entspricht.

Korrespondenztabelle Mit direkten Rechnungen können die folgenden Aussagen verifiziert werden (Übungsaufgabe), wobei ggf. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, die Euler-Formel und/oder partielle Integration verwendet werden müssen:

Zeitbereich $u(t)$	Spektralbereich $U(s) = (\mathcal{L}u)(s)$	Bedingung
$t^k/k!$	$1/s^{k+1}$	$k \in \mathbb{N}_0, \operatorname{Re}(s) > 0$
$\exp(s_* t)$	$1/(s - s_*)$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_*)$
$\cos(\theta t)$	$s/(s^2 + \theta^2)$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Im}(\theta) $
$\sin(\theta t)$	$\theta/(s^2 + \theta^2)$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Im}(\theta) $
$\delta_{t_*}(t)$	$\exp(-t_* s)$	$t_* \geq 0$
$h_{t_*}(t)$	$\exp(-t_* s)/s$	$t_* \geq 0$

Bemerkung: Diese Liste ist natürlich nicht vollständig. Sie finden in der Literatur bzw. im Internet wesentlich ausführlichere Varianten.

Rechenregeln Auch die folgenden Gesetze können wir mit einfachen Rechnungen ableiten (siehe dazu die Übungen):

Zeitbereich	$u(t)$	$U(s)$	Spektralbereich
Ableitung	$\frac{d^n}{dt^n} u(t)$	$s^n U(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} u^{(j)}(0)$	Multipl.+Korrektur
	$\dot{u}(t)$	$s U(s) - u(0)$	
	$\ddot{u}(t)$	$s^2 U(s) - s u(0) - \dot{u}(0)$	
Multiplikation	$(-1)^n t^n u(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} U(s)$	Ableitung
Verschiebung	(#)	$e^{-t_* s} U(s)$	Modulation
Modulation	$e^{+s_* t} u(t)$	$U(s - s_*)$	Verschiebung
Streck./Stauch.	$u(ct)$	$c^{-1} U(c^{-1} s)$	Skalierung
Skalierung	$c^{-1} u(c^{-1} t)$	$U(c s)$	

Bemerkungen

1. Bei den letzten beiden Regeln gilt $c > 0$.
2. Die Korrekturterme in der Rechenregel für die Differentiation im Zeitbereich beinhalten Anfangswerte bei $t = 0$ und entstehen als Randterme bei der partiellen Integration bzgl. t .
3. Da t bei der Laplace-Transformation nur positive Werte annimmt, muss auch die Verschieberegeln im Zeitbereich angepasst werden. Insbesondere ist der Platzhalter durch

$$(\#) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < t_* \\ u(t - t_*) & \text{für } t_* < t < \infty \end{cases}$$

zu ersetzen, wobei immer stillschweigend $t_* > 0$ vorausgesetzt wird und eine Unstetigkeit bei $t = t_*$ entstehen kann. In der ingenieurmathematischen Literatur benutzt man oftmals die alternative Notation

$$(\#) = h_0(t - t_*) u(t - t_*)$$

mit der Heaviside-Funktion h_0 , aber die Bedeutung ist genau dieselbe. Beachte auch, dass $h_0(t - t_*) = h_{t_*}(t)$ gilt.

Lemma (Faltungsformel) Sind (u_1, U_1) und (u_2, U_2) zwei Laplace-Paare, so ist auch $(u_1 * u_2, U_1 U_2)$ ein Laplace-Paar, wobei das Faltungsprodukt im Zeitbereich durch die modifizierte Formel

$$(u_1 * u_2)(t) = \int_0^t u_1(t - \tau) u_2(\tau) d\tau = \int_0^t u_1(\tau) u_2(t - \tau) d\tau$$

und das Produkt im Spektralbereich wie üblich punktweise in s zu berechnen sind.

Beweis: Mit dem Satz von Fubini, der Substitution $\theta = t - \tau$ sowie der Transformationsformel für zweidimensionale Gebietsintegrale — siehe *Mathe-2* — erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(u_1 * u_2))(s) &= \int_0^\infty \int_0^t u_1(t - \tau) u_2(\tau) \exp(-s t) \, d\tau \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u_1(\theta) u_2(\tau) \exp(-s(\theta + \tau)) \, d\tau \, d\theta \\ &= \left(\int_0^\infty u_1(\theta) \exp(-s\theta) \, d\theta \right) \left(\int_0^\infty u_2(\tau) \exp(-s\tau) \, d\tau \right) \\ &= U_1(s) U_2(s), \end{aligned}$$

wobei wir die infinitesimale Transformationsregel

$$d\tau \, dt = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(t, \tau)}{\partial(\theta, \tau)} \end{pmatrix} d\tau \, d\theta = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau \, d\theta = d\tau \, d\theta$$

sowie die Äquivalenz

$$0 < t < \infty \quad \text{und} \quad 0 < \tau < t \quad \iff \quad 0 < \theta < \infty \quad \text{und} \quad 0 < \tau < \infty$$

benutzt haben. Die letzte Eigenschaft beschreibt die geometrische Beobachtung, dass der erste der insgesamt acht Halbquadranten in der (t, τ) -Ebene gerade dem ersten Quadranten in der (θ, τ) -Ebene entspricht (Nachrechnen!). Das zweite Gleichheitszeichen in der Formel ergibt sich, wenn wir die Integrationsvariable τ im ersten Integral durch $\theta = t - \tau$ ersetzen und für fixiertes t die Transformationsregel für eindimensionale Integrale — siehe *Mathe-1* — anwenden. \square

Bemerkung Die Modifikationen im Faltungsprodukt resultieren wieder aus der Vorzeichenrestriktion an die Zeitvariable t . Wenn wir aber u_1 und u_2 via

$$\tilde{u}_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_j(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

in trivialer Weise zu zwei Funktionen \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 auf ganz \mathbb{R} fortsetzen, so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_1(t - \tau) \tilde{u}_2(\tau) \, d\tau = \int_0^t u_1(t - \tau) u_2(\tau) \, d\tau$$

für alle $t > 0$, d.h. die neue Version der Faltung ist eigentlich ein Spezialfall der Originalvariante. Wir hatten die neue Version auch schon in *Mathe-2* bei der *Variation der Konstanten* kennen gelernt. Das ist, wie wir unten sehen werden, natürlich kein Zufall.

über Partialbruchzerlegungen Ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie und Praxis der Laplace-Transformation ist die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen im Spektralbereich, wobei wir alle wesentlichen Ideen und Methoden bereits in *Mathe-1* diskutiert hatten. Insbesondere gelten im Fall von

$$U(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{mit} \quad M = \text{grad}(P) < N = \text{grad}(Q)$$

die folgenden Aussagen:

1. Standardfall: Sind alle komplexen Nullstellen von Q paarweise verschieden, so gilt

$$U(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \dots + \frac{c_N}{s - s_N}$$

für gewisse komplexe Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$, wobei die s_n die Nullstellen von Q sind. Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich können wir ein lineares Gleichungssystem für die c_n ableiten.

2. Entartungsfall: Gibt es mindestens eine zweifache oder gar mehrfache Nullstelle von Q , so muss die Formel angepasst werden. Besitzt Q zum Beispiel die einfache bzw. zweifache bzw. dreifache Nullstelle s_1 bzw. s_2 bzw. s_3 (aber keine weiteren), so gilt $Q(s) = (s - s_1)^1 (s - s_2)^2 (s - s_3)^3$ sowie

$$U(s) = \frac{c_1}{(s - s_1)^1} + \frac{c_{21}}{(s - s_2)^1} + \frac{c_{22}}{(s - s_2)^2} + \frac{c_{31}}{(s - s_3)^1} + \frac{c_{32}}{(s - s_3)^2} + \frac{c_{33}}{(s - s_3)^3}$$

für gewisse Konstanten. Oder anders gesagt: Zu jeder k -fachen Nullstelle gibt es in der Partialbruchzerlegung insgesamt k entsprechende Monome. Alternativ können wir auch

$$U(s) = \frac{d_1}{(s - s_1)^1} + \frac{d_{21}s + d_{20}}{(s - s_2)^2} + \frac{d_{32}s^2 + d_{31}s + d_{30}}{(s - s_3)^3}$$

mit Polynomen im Zähler und anderen Konstanten schreiben.

Bemerkungen

1. Die Bezeichnung der Konstanten und Nullstellen ist natürlich beliebig.
2. Die allgemeine Formel beinhaltet in jedem Fall N verschiedene Konstanten und führt immer auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem.
3. Im Fall von $M \geq N$ können wir mittels Polynomdivision zunächst ein geeignetes Polynom abspalten und $U(s) = P_1(s) + P_2(s)/Q(s)$ schreiben, wobei dann der Grad von P_2 kleiner als der Grad von Q ist und $P(s) = P_1(s)Q(s) + P_2(s)$ gilt.
4. Es gibt reelle Varianten der Polynomdivision, bei denen Terme der Bauart $1/((s - a_m)^2 + b_m^2)$ auftauchen, die einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen $a_m \pm i b_m$ entsprechen. Die reelle und die komplexe Partialbruchzerlegung können beide im Kontext der Laplace-Transformation verwendet werden und liefern immer äquivalente Endergebnisse. So kann zum Beispiel

$$\frac{s}{s^2 + \theta^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{s + i\theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{s - i\theta} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\theta}{s^2 + \theta^2} = \frac{i}{2} \frac{1}{s + i\theta} - \frac{i}{2} \frac{1}{s - i\theta}$$

als die Laplace-Transformation der Euler-Formel

$$\cos(\theta t) = \frac{1}{2} e^{-i\theta t} + \frac{1}{2} e^{+i\theta t} \quad \text{bzw.} \quad \sin(\theta t) = \frac{1}{2} i e^{-i\theta t} - \frac{1}{2} i e^{+i\theta t}$$

angesehen werden.

Laplace-Transformation und Reihen* Für jedes Laplace-Paar (u, U) sind die zwei Bedingungen

$$(1) \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{t^k}{k!} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2 t^2}{2} + \frac{\alpha_3 t^3}{6} + \dots$$

$$(2) \quad U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s^3} + \frac{\alpha_3}{s^4} + \dots$$

äquivalent, d.h. u kann genau dann im Ursprung in eine Taylor-Reihe entwickelt werden, wenn U eine Laurent-Reihendarstellung im Entwicklungspunkt 0 besitzt, in der nur negative Exponenten auftreten. Insbesondere legen die Koeffizienten der einen Reihe bereits die der anderen fest, wobei die Zuordnung *gliedweise* konsistent mit der ersten Zeile unserer Korrespondenztabelle ist.

4.2 Typische Anwendungsbeispiele

Anfangswertproblem Wir studieren im Folgenden drei einfache, aber prototypische Differential- und Integralgleichungen, die mithilfe von Laplace-Methoden explizit gelöst werden können.

Anwendung auf skalare Differentialgleichung 1. Ordnung

Vorbemerkung Gesucht ist eine Lösung zu

$$\dot{u}(t) + \beta u(t) = f(t), \quad u(0) = \kappa,$$

wobei f eine gegebene Funktion ist und β, κ beliebige komplexe Zahlen sind. Dieses Anfangswertproblem modelliert zum Beispiel einen *Tiefpass 1. Ordnung* oder etwas allgemeiner ein sogenanntes *PT₁-Glied* in der Regelungstechnik, wobei dann f bzw. u dem *Input* (oder *Eingang*) bzw. dem *Output* (oder *Ausgang*) entspricht.

Herleitung der Lösungsformel Für die Laplace-Transformierte der Lösung muss nach den Rechenregeln

$$(sU(s) - \kappa) + \beta U(s) = F(s),$$

gelten, d.h. die Laplace-Transformation überführt die gewöhnliche Differentialgleichung für u in eine algebraische Gleichung für U , in der keine Ableitungen auftauchen. Wir können daher einfach nach $U(s)$ auflösen und erhalten

$$U(s) = \frac{F(s) + \kappa}{s + \beta} = \kappa G(s) + F(s) G(s), \quad G(s) = \frac{1}{s + \beta}$$

als Lösungsformel im Spektralbereich, die wir abschließend zurück in den Zeitbereich transformieren wollen. Wir könnten dies im Prinzip durch Berechnung der inversen Laplace-Integrale erreichen (siehe unten), aber da G die Laplace-Transformierte von

$$g(s) = \exp(-\beta t)$$

ist, können wir die Lösung auch direkt aus dem Faltungslemma und der Korrespondenztabelle zu

$$u(t) = \kappa g(t) + (f * g)(t) = \kappa g(t) + (g * f)(t)$$

ablesen.

Lösungsformel Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist im Zeitbereich durch

$$u(t) = \kappa \exp(-\beta t) + \int_0^t \exp(-\beta(t-\tau)) f(\tau) dt$$

gegeben. Dieses Ergebnis hatten wir schon in *Mathe-2* mit einer anderen Methode, nämlich durch Variation der Konstanten, abgeleitet.

Bemerkung Da die Berechnung von Faltungsintegralen recht aufwendig sein kann, ignoriert man in der Praxis oftmals die allgemeine Lösungsformel im Zeitbereich und versucht, solange wie möglich im Spektralbereich zu arbeiten. Insbesondere berechnet man bei bekanntem F zunächst U explizit und führt anschließend die Rücktransformation nicht abstrakt, sondern konkret durch.

Sprungantwort als spezielle Lösung Von besonderer Bedeutung in der Systemtheorie ist der Fall

$$f(t) = h_{t_*}(t), \quad \kappa = 0,$$

denn er beschreibt, wie der Output u auf einen abrupten Sprung eines sonst zeitlich konstanten Inputs f reagiert, wobei dieser Sprung zur Zeit $t_* > 0$ stattfindet.

Variante 1: Wir wollen u im Zeitbereich durch das Faltungsintegral

$$u(t) = \int_0^t \exp(-\beta(t-\tau)) h_{t_*}(\tau) d\tau$$

berechnen, müssen aber wegen der stückweisen Definition von h_{t_*} zwei Fälle unterscheiden: Für $0 < t < t_*$ verschwindet der Integrand vollständig, sodass sich $u(t) = 0$ ergibt. Für $t > t_*$ erhalten wir hingegen

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{t_*}^t \exp(-\beta(t-\tau)) d\tau = \left[\beta^{-1} \exp(-\beta(t-\tau)) \right]_{\tau=t_*}^{\tau=t} \\ &= \beta^{-1} \left(1 - \exp(-\beta(t-t_*)) \right), \end{aligned}$$

wobei wir hier vorausgesetzt haben, dass $\beta \neq 0$ gilt (der Fall $\beta = 0$ ist entartet).

Variante 2: Mit $F(s) = \exp(-t_* s)/s$ ergibt sich im Spektralbereich die Formel

$$U(s) = \frac{\exp(-t_* s)}{s(s+\beta)} = \exp(-t_* s) W(s), \quad W(s) = \beta^{-1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\beta} \right).$$

Der exponentielle Faktor beschreibt nach den Rechenregeln eine Zeitverschiebung und in der Korrespondenztabelle sehen wir, dass $W(s)$ die Laplace-Transformierte von

$$w(t) = \beta^{-1} (1 - \exp(-\beta t))$$

ist. Wir erhalten

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < t_* \\ w(t-t_*) & \text{für } t_* < t < \infty \end{cases}$$

und damit dieselbe Lösung wie in der ersten Variante, haben aber bei dieser Herleitung kein Integral berechnet.

Variante 3: Mit etwas Erfahrung und Intuition kann man die Sprungantwort für diese einfache Differentialgleichung auch durch Scharfes Hinsehen bestimmen.

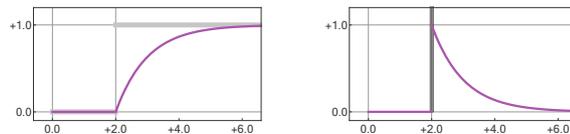
Impulsantwort als spezielle Lösung Im Fall von

$$f(t) = \delta_{t_*}(t), \quad \kappa = 0$$

erhalten wir

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < t_* \\ \exp(-\beta(t - t_*)) & \text{für } t_* < t < \infty \end{cases},$$

wobei man dies wieder auf mehrere Arten herleiten kann (Übungsaufgabe). Die Impulsantwort ist übrigens gerade die Zeitableitung der Sprungantwort.



Die Sprungantwort (links) und die Impulsantwort (rechts) für $t_* = 2$ und $\beta = 1$, wobei die grauen Bereiche die Heaviside-Funktion h_2 (links) und die Dirasche Delta-Distribution δ_2 (rechts) repräsentieren.

Anwendung auf skalare Differentialgleichung 2. Ordnung

Anfangswertproblem Wir suchen eine Lösung u mit

$$\ddot{u}(t) + \mu \dot{u}(t) + \theta^2 u(t) = f(t), \quad u(0) = \kappa_0, \quad \dot{u}(0) = \kappa_1,$$

wobei die Differentialgleichung einen (sehr einfachen) mechanischen oder elektrischen Oszillator bzw. ein sogenanntes PT_2 -Glied modelliert. Die reellen Parameter $\mu > 0$ bzw. $\theta > 0$ quantifizieren die *Dämpfung* bzw. die *Eigenkreisfrequenz*, die Konstanten κ_j sind die Anfangsdaten und die gegebene Funktion f beschreibt eine *äußere Anregung*.

Lösungsformel im Frequenzbereich Beim Übergang zum Spektralbereich — bzw. nach Anwendung der Laplace-Transformation — erhalten wir diesmal

$$(s^2 U(s) - s \kappa_0 - \kappa_1) + \mu(s U(s) - \kappa_0) + \theta^2 U(s) = F(s)$$

und damit

$$U(s) = (s \kappa_0 + \kappa_1 + \mu \kappa_0) G(s) + F(s) G(s), \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + \mu s + \theta^2},$$

wobei die rechte Seite nur von den physikalischen Konstanten, den Anfangsdaten κ_j sowie der Laplace-Transformierten F der Funktion f abhängt.

Wir wollen nun anhand typischer Beispiele verstehen, wie man hieraus eine Lösungsformel im Zeitbereich gewinnen kann. Dabei werden wir in keinem der Fälle die inverse Laplace-Transformation direkt anwenden (die wir ja auch noch gar nicht eingeführt haben). Beachte auch, dass der erste Summand auf der rechten Seite die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung repräsentiert, wobei κ_0 und κ_1 die Rolle der freien Konstanten spielen. Der dritte Summand entspricht einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung, nämlich der mit verschwindenden Anfangsdaten.

allgemeine homogene Lösung (keine Anregung) In diesem Fall verschwindet f bzw. F und unsere Strategie besteht darin, zunächst den Ausdruck für $U(s)$ mittels Partialbruchzerlegung in seine Bestandteile zu zerlegen. Wir unterscheiden dabei in Abhängigkeit von μ zwischen zwei *generischen* Fällen sowie zwei Grenzfällen, wobei das Wort *generisch* mit *robust unter Parameterstörungen* übersetzt werden kann.

kleine Dämpfung — $0 < \mu < 2\theta$: In diesem Parameterregime besitzt das Nennerpolynom von U ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen und wir erhalten

$$U(s) = \frac{c_-}{s - s_-} + \frac{c_+}{s - s_+}, \quad s_{\pm} = -\frac{1}{2}\mu \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4\theta^2 - \mu^2}$$

mit den Koeffizienten

$$c_{\pm} = \frac{1}{2}\kappa_0 \mp i \frac{\kappa_1 + \frac{1}{2}\mu\kappa_0}{\sqrt{4\theta^2 - \mu^2}}.$$

Damit können wir die Lösung aus der Korrespondenztabelle ablesen. Insbesondere gilt

$$u(t) = c_- \exp(s_- t) + c_+ \exp(s_+ t),$$

wobei die Anfangsdaten κ_j nur in die Vorfaktoren c_{\pm} , aber nicht in die komplexen Raten s_{\pm} einfließen. Beachte auch, dass wegen $\mu > 0$ hier zwar $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ gilt, die Lösung aber aufgrund der nicht verschwindenden Imaginärteile von s_{\pm} nicht monoton, sondern in oszillierender Weise abklingt (siehe das Bild unten).

große Dämpfung — $2\theta < \mu < \infty$: Auch in diesem generischen Fall gilt

$$u(t) = c_- \exp(s_- t) + c_+ \exp(s_+ t),$$

aber diesmal gibt es die beiden reellen Nullstellen

$$s_{\pm} = -\frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4\theta^2}$$

und die Koeffizienten berechnen sich zu

$$c_{\pm} = \frac{1}{2}\kappa_0 \pm \frac{\kappa_1 + \frac{1}{2}\mu\kappa_0}{\sqrt{\mu^2 - 4\theta^2}}.$$

Insbesondere enthält die Lösungsformel hier keine oszillierenden Anteile mehr, sondern nur zwei exponentiell abklingende Terme mit rein reeller Rate.

keine Dämpfung — $\mu = 0$: Dieser wichtige Grenzfall besitzt die Lösungsformel

$$U(s) = u(t) = \kappa_0 \cos(\theta t) + \kappa_1 \theta^{-1} \sin(\theta t),$$

wobei wir dieses Ergebnis entweder direkt aus der Korrespondenztabelle ablesen oder alternativ im Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ aus den obigen Formeln für kleine Dämpfungen herleiten können.

Kriechfall — $\mu = 2\theta$: In diesem entarteten Sonderfall gibt es nur eine exponentielle Rate bzw. die doppelte reelle Nullstelle $s_- = s_+ = -\frac{1}{2}\mu = -\theta$ und wir können

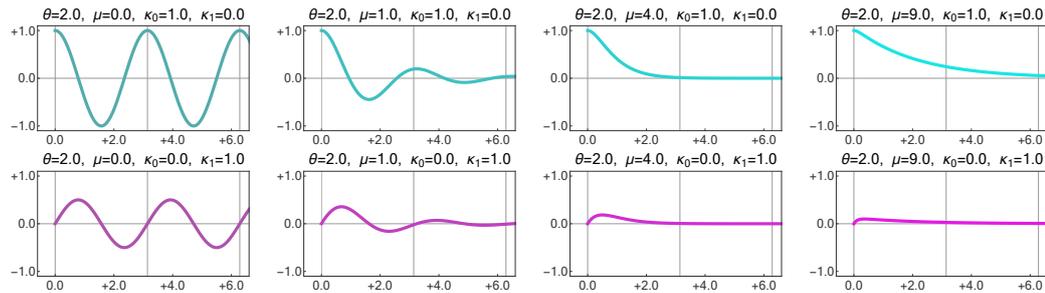
$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{s\kappa_0 + \kappa_1 + 2\theta\kappa_0}{(s + \theta)^2} = \kappa_0 \frac{1}{s + \theta} + (\kappa_1 + \theta\kappa_0) \frac{1}{(s + \theta)^2} \\ &= \kappa_0 \frac{1}{s + \theta} - (\kappa_1 + \theta\kappa_0) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s + \theta} \right) \end{aligned}$$

schreiben. Mithilfe der Rechenregeln ergibt sich daher

$$u(t) = \kappa_0 \exp(-\theta t) + (\kappa_1 + \theta \kappa_0) t \exp(-\theta t) = (\kappa_0 (1 + \theta t) + \kappa_1 t) \exp(-\theta t)$$

unmittelbar aus der Korrespondenztabelle.

Bemerkung Wir können alle Lösungsformeln alternativ auch mit den Methoden aus *Mathe-2* ableiten, aber die Laplace-Transformation ist — etwas Übung und Erfahrung vorausgesetzt — mindestens ebenso effektiv und wird vor allem in den Ingenieurwissenschaften sehr häufig verwendet.



Homogene Lösung des gedämpften Oszillators für verschiedene Parametersätze, wobei die vier Spalten den Bedingungen $\mu = 0$, $0 < \mu < 2\theta$, $\mu = 2\theta$ und $\mu > 2\theta$ entsprechen. Die Zeilen repräsentieren jeweils zwei linear unabhängige Lösungen mit normalisierten Anfangsdaten.

partikuläre Lösung mit Anregung, aber ohne Dämpfung Um den Einfluss der Anregung besser zu verstehen, setzen wir

$$\mu = 0, \quad \kappa_0 = 0, \quad \kappa_1 = 0,$$

d.h. wir vernachlässigen sowohl die Dämpfung als auch die Anfangsdaten. Die zweite Annahme ist nicht wirklich wesentlich, da wir zu der partikulären Lösung immer die allgemeine homogene Lösung addieren können. Die erste Annahme vereinfacht die Berechnungen bzw. die daraus resultierenden Formeln und ist außerdem mit einem wichtigen physikalischen Phänomen verbunden.

Die Lösungsformel im Spektralbereich reduziert sich auf

$$U(s) = \theta^{-1} F(s) \frac{\theta}{s^2 + \theta^2}$$

und nach Konsultation der Korrespondenztabelle sowie Ausnutzung des Faltungslemmas erhalten wir

$$u(t) = \theta^{-1} \int_0^t \sin(\theta(t - \tau)) f(\tau) d\tau$$

als Lösung im Zeitbereich, wobei wir eine analoge Formel schon in *Mathe-2* mittels Variation der Konstanten bewiesen haben. Wir hatten auch schon den Spezialfall

$$f(t) = \cos(\omega t), \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

studiert und die Bedeutung der *Anregungsfrequenz* ω untersucht, indem wir das Laplacesche Faltungsintegral für verschiedene Werte von ω explizit berechnet hatten. Wir wollen die damaligen Resultate noch einmal, aber diesmal mit Laplace-Methoden ableiten.

nicht-resonanter Fall — $\omega \neq \theta$: Mittels Partialbruchzerlegung können wir im Spektralbereich die Lösung auch als

$$U(s) = \frac{F(s)}{s^2 + \theta^2} = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \theta^2)} = \frac{1}{\theta^2 - \omega^2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \theta^2} \right)$$

schreiben und können damit die Formel

$$u(t) = \frac{\cos(\omega t) - \cos(\theta t)}{\theta^2 - \omega^2}$$

erneut aus der Korrespondenztabelle ablesen. Insbesondere ist die Lösung beschränkt in der Zeit, wobei die Amplitude invers proportional zum Wert von $\theta^2 - \omega^2$ ist.

resonanter Fall — $\omega = \theta$: Bei dieser Parameterwahl können weder die Lösungsformel noch die obige Partialbruchzerlegung verwendet werden, denn das Zählerpolynom von U besitzt nun nicht mehr vier verschiedene komplexe Nullstellen, sondern die zwei Doppelnulstellen $-i\theta$ und $+i\theta$. Wir können aber wegen

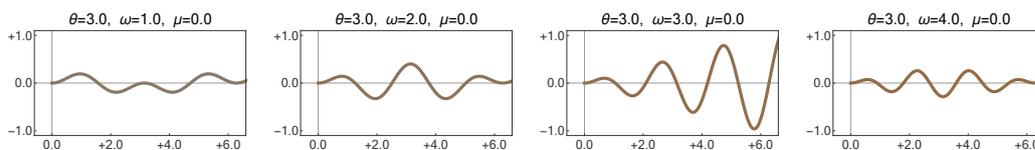
$$U(s) = \frac{s}{(s^2 + \theta^2)^2} = -\frac{1}{2} \theta^{-1} \frac{d}{ds} \left(\frac{\theta}{s^2 + \theta^2} \right)$$

und unter Berücksichtigung der Rechenregeln wieder recht einfach die Formel im Zeitbereich bestimmen. Wir erhalten mit

$$u(t) = \frac{t \sin(\theta t)}{2\theta}$$

eine Lösung, die wegen des linearen Zeitfaktors für $t \rightarrow \infty$ nicht mehr beschränkt ist (*Resonanzkatastrophe*).

Bemerkung: Im Fall von $\mu > 0$ ist auch die Lösung für $\omega = \theta$ beschränkt, da der Nenner von U dann wieder vier verschiedene Nullstellen hat.



Partikuläre Lösung des ungedämpften Oszillators für vier verschiedene Anregungsfrequenzen ω bei gleicher Eigenfrequenz θ . Die Resonanz tritt in der dritten Spalte auf.

Merkregel Für viele lineare gewöhnliche Differentialgleichungen können die Anfangswertprobleme durch eine Kombination von Laplace-Transformation und Partialbruchzerlegung gelöst werden, wobei in Entartungsfällen (etwa mehrfache Nullstellen) zusätzlich geschickte Rechenricks (zum Beispiel mit Ableitungen) hilfreich sind.

Übertragungsfunktion und Bode-Diagramm* Die Funktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \mu s + \theta^2}$$

wird die komplexe Übertragungsfunktion (oder die Systemfunktion) des gedämpften Oszillators genannt und kodiert alle Eigenschaften der linearen Differentialgleichung.

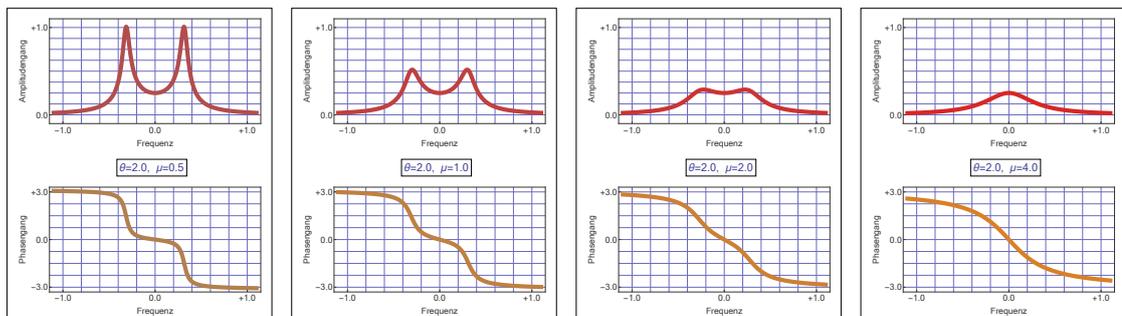
Insbesondere beschreibt G , wie der Output u von den Anfangsdaten κ_0 , κ_1 sowie vom Input f abhängt. Beachte dabei, dass für $\mu > 0$ und bei zeitperiodischer Anregung der Einfluss der Anfangsdaten nach einer gewissen *Übergangs-, Warte- oder Einschwingzeit* vernachlässigt werden kann, sodass dann nur noch der Einfluss von f relevant ist.

Obwohl G eigentlich auf einem Teilbereich der komplexen Zahlenebene definiert ist, studiert man häufig den reduzierten Ausdruck

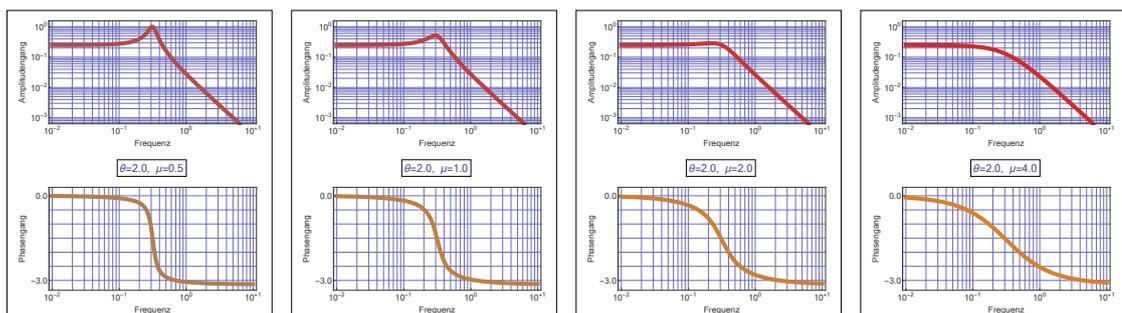
$$G_{\#}(\nu) = G(2\pi i \nu) = \frac{1}{-4\pi^2 \nu^2 + 2\pi i \mu + \theta^2},$$

der die *reelle Frequenz* ν als Variable enthält und in vielen ingenieurwissenschaftlichen Kontexten *Frequenzgang* genannt wird. Zur graphischen Darstellung plottet man im Bode-Diagramm den *Amplitudengang* $|G_{\#}(\nu)|$ sowie den *Phasengang* $\arg(G_{\#}(\nu))$, wobei ν meist in einer logarithmischen Skala aufgetragen wird, damit die Kenngrößen besser abgelesen werden können.

Übertragungsfunktionen können analog auch für andere Differentialgleichungen definiert werden und spielen eine wichtige Rolle bei der qualitativen und quantitativen Untersuchung technischer Systeme. In der Mathematik ist $1/G_{\#}$ die *Symbolfunktion* des zugrunde liegenden Differentialoperators.



Vier typische Bode-Diagramme für den gedämpften Oszillator (oder für ein PT_2 -Glieder), wobei jedes Beispiel einen unterschiedlichen Parametersatz repräsentiert und auf allen Achsen kartesische Koordinaten verwendet wurden. Beachte, dass $|H_{\#}|$ (oben) bzw. $\arg(H_{\#})$ (unten) eine gerade bzw. ungerade Funktion ist und daher nur $\nu > 0$ betrachtet werden muss.



Die beiden Teile des Bode-Diagramms werden oft mit einer logarithmischen Skalierung der reellen Frequenzvariablen $\nu > 0$ gezeichnet und ausgewertet, wobei man im ersten Teil meist auch noch die vertikale Achse logarithmisch skaliert (wie dargestellt) und alle entsprechenden Werte in Dezibel angibt (10^{-1} bzw. 10^{-2} auf der vertikalen Achse wird dann zum Beispiel als -10 dB bzw. -20 dB geschrieben).

Anwendungen auf Volterra-Integralgleichungen

Aufgabe Bestimme für einen gegebenen Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ alle Funktionen u , sodass

$$u(t) = (1 - e^{-\lambda t}) + \lambda \int_0^t u(t - \tau) e^{-\lambda \tau} d\tau$$

für jedes $t \geq 0$ gilt.

Lösung durch Laplace-Transformation Da das Integral auf der rechten Seite ein Faltungsintegral ist, erhalten wir nach Anwendung von \mathcal{L} die algebraische Gleichung

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda} + U(s) \frac{1}{s + \lambda}$$

im Spektralbereich, wobei wir die Laplace-Korrespondenz

$$w(t) = \exp(s_* t), \quad W(s) = \frac{1}{s - s_*}$$

einmal für $s_* = 0$ und einmal für $s_* = -\lambda$ eingesetzt haben. Auflösen nach $U(s)$ liefert

$$U(s) = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda}}{1 - \frac{\lambda}{s + \lambda}} = \frac{(s + \lambda) - s}{s(s + \lambda) - \lambda s} = \frac{\lambda}{s^2} = \lambda \frac{1}{s^{1+1}},$$

sodass die Lösungsformel

$$u(t) = \lambda t$$

eine direkte Konsequenz der Korrespondenztabelle ist. Insbesondere gibt es für jedes λ genau eine Lösung u der Aufgabe.

Bemerkung* In diesem einfachen Beispiel können wir die Lösungsformel alternativ auch mithilfe von Differentialgleichungen herleiten. Die Integralgleichung kann wegen der Symmetrie der Faltung nämlich auch als

$$u(t) = (1 - e^{-\lambda t}) + \lambda \int_0^t u(\tau) e^{\lambda\tau - \lambda t} d\tau$$

geschrieben werden und nach Differentiation beider Seiten nach t ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda \left(\left(u(\tau) e^{\lambda\tau - \lambda t} \right) \Big|_{\tau=t} + \int_0^t u(\tau) \frac{d}{dt} e^{\lambda\tau - \lambda t} d\tau \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda u(t) - \lambda^2 \int_0^t u(\tau) e^{\lambda\tau - \lambda t} d\tau, \end{aligned}$$

wobei wir schließlich das Integral mithilfe der Integralgleichung eliminieren können. Insbesondere gilt

$$\dot{u}(t) = \lambda e^{-\lambda t} + \lambda u(t) - \lambda \left(u(t) - (1 - e^{-\lambda t}) \right) = \lambda$$

und damit $u(t) = u(0) + \lambda t$. Weil außerdem die Auswertung der Integralgleichung für $t = 0$ die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ liefert, folgt insgesamt wieder die Lösungsformel.

4.3 Inverse Laplace-Transformation

Vorbemerkung Wir diskutieren die Existenz der inversen Laplace-Transformation \mathcal{L}^{-1} und zeigen, dass u durch eine geeignete Integralformel eindeutig aus U rekonstruiert werden kann. Diese Erkenntnisse besitzen eine sehr große theoretische, aber nur eine relativ kleine praktische Relevanz.

Theorem (Inversionsformel der Laplace-Transformation) Seien (u, U) ein Laplace-Paar und γ eine reelle Zahl, sodass U auf der komplexen Halbebene

$$H = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \gamma\}$$

wohldefiniert ist (siehe das Bild unten). Dann gilt

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\sigma + 2\pi i \nu) \exp((\sigma + 2\pi i \nu)t) d\nu$$

für jede reelle Zahl $\sigma > \gamma$.

Beweisskizze: Wir betrachten die Funktion

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \exp(-\sigma t) u(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

und berechnen ihre Fourier-Transformierte zu

$$\begin{aligned} \hat{w}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt \\ &= \int_0^{\infty} u(t) \exp(-\sigma t) \exp(-2\pi i \nu t) dt \\ &= U(\sigma + 2\pi i \nu). \end{aligned}$$

In Kombination mit der Fourierschen Inversionsformel erhalten wir damit

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(\nu) \exp(+2\pi i \nu t) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(\sigma + 2\pi i \nu) \exp(+2\pi i \nu t) d\nu \\ &= \exp(-\sigma t) \int_{-\infty}^{+\infty} U(\sigma + 2\pi i \nu) \exp((\sigma + 2\pi i \nu)t) d\nu \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und die Behauptung folgt unmittelbar, wenn wir für $t > 0$ die Definition von $w(t)$ einsetzen und beide Seiten der Gleichung durch $\exp(-\sigma t)$ dividieren. \square

Bemerkungen

1. Die rechte Seite in der Formel wird auch Bromwich-Integral genannt. In der Literatur findet sich oftmals die alternative Schreibweise

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(s) \exp(+st) ds,$$

bei der rechts ein komplexes Kurvenintegral über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ steht. Die Äquivalenz der beiden Darstellungen ergibt sich unmittelbar aus der Definition des komplexen Kurvenintegrals: Wir betrachten ν als reellen Kurvenparameter, parametrisieren die vertikale Gerade in natürlicher Weise durch $s = \sigma + 2\pi i \nu$ und ersetzen in konsistenter Weise ds durch $2\pi i d\nu$.

2. Das Theorem garantiert, dass die inverse Laplace-Transformation \mathcal{L}^{-1} wirklich existiert und dass die Äquivalenz

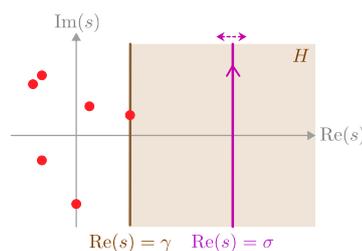
$$u_1 = u_2 \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 = U_2$$

mit $U_j = \mathcal{L}u_j$ gilt.

3. Die Voraussetzungen im Theorem implizieren, dass U holomorph auf H ist, wobei die komplexe Ableitung durch

$$\frac{d}{ds} U(s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t u(t) \exp(-st) dt$$

gegeben ist. Wegen dieser Holomorphie hängt der Wert des Bromwich-Integrals zwar von t , aber nicht von der konkreten Wahl von σ ab (solange $\sigma > \gamma$ gilt).



Schematische Darstellung zur Inversionsformel: H (braun) ist typischerweise die größte offene und sich nach rechts ausdehnende Halbebene, auf der U holomorph ist. Insbesondere liegen alle Singularitäten von U (rote Punkte) links von H oder auf dem Rand von H (dessen Lage durch γ beschrieben wird). Das Bromwich-Integral ist ein komplexes Kurvenintegral entlang der durch die Wahl von σ festgelegten vertikalen Geraden (lila), die innerhalb von H liegen muss.

Klarstellung Die direkte Berechnung des Bromwich-Integrals ist in der Regel alles andere als einfach und erfordert oftmals ausgefeilte Integrationstechniken, etwa aus der Funktionentheorie (siehe das nächste Theorem sowie die dazugehörigen Beispiele).

Bei vorgelegtem U sollten Sie immer versuchen, die Zeitfunktion $u = \mathcal{L}^{-1}U$ durch algebraische Umformungen im Spektralbereich und unter Ausnutzung von Korrespondenztabelle zu bestimmen. Das Bromwich-Integral studiert man nur, wenn es sich wirklich nicht vermeiden lässt.

Theorem (Residuenformel für die inverse Laplace-Transformation) Unter den Voraussetzungen

1. U ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{s_1, \dots, s_N\}$.
2. Es existieren zwei positive Konstanten $m > 0$ und $M > 0$, sodass

$$|U(s)| \leq \frac{M}{|s|^m}$$

für alle s außerhalb einer hinreichend großen Kreisscheibe gilt.

kann $u(t)$ für jedes $t \geq 0$ durch

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \operatorname{res}_{U_t}(s_n) \quad \text{mit} \quad U_t(s) = U(s) \exp(+st)$$

berechnet werden.

Bemerkungen

1. Die Punkte s_n mit $n = 1, \dots, N$ sind die isolierten Singularitäten von sowohl U als auch U_t und $\operatorname{res}_{U_t}(s_n)$ bezeichnet das entsprechende Residuum bzgl. U_t , das im Allgemeinen von t abhängen wird.
2. Die zweite Voraussetzung meint, dass U im Unendlichen hinreichend schnell abklingt. Die konkreten Werte der Konstanten m und M sind dabei nicht wichtig.
3. Das Theorem ist eine Variante des Jordan-Lemmas und kann analog bewiesen werden, wobei die Bromwich-Formel mit

$$\sigma > \gamma = \max \{ \operatorname{Re}(s_1), \dots, \operatorname{Re}(s_N) \}$$

das zugrunde liegende komplexe Kurvenintegral liefert.

Beispiele

1. Im Fall von

$$U(s) = \frac{1}{s - s_*}, \quad U_t(s) = \frac{\exp(ts)}{s - s_*}$$

ist die Abklingbedingung erfüllt (mit $m = 1$) und s_* ist die einzige Singularität (es gilt also $N = 1$ und $s_1 = s_*$). Wir berechnen $\operatorname{ord}_{U_t}(s_*) = -1$ sowie

$$\operatorname{res}_{U_t}(s_*) = \lim_{s \rightarrow s_*} (s - s_*) U_t(s) = \lim_{s \rightarrow s_*} \exp(st) = \exp(s_* t)$$

und erhalten mit $u(t) = \exp(s_* t)$ das erwartete Resultat.

2. Für festes $\theta \in \mathbb{R}$ und

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + \theta^2} = \frac{s}{(s + i\theta)(s - i\theta)}$$

müssen wir nur die zwei, jeweils einfachen Singularitäten $s_1 = -i\theta$ und $s_2 = +i\theta$ berücksichtigen. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{res}_{U_t}(-i\theta) + \operatorname{res}_{U_t}(+i\theta) = \lim_{s \rightarrow -i\theta} \frac{s \exp(ts)}{s - i\theta} + \lim_{s \rightarrow +i\theta} \frac{s \exp(ts)}{s + i\theta} \\ &= \frac{1}{2} \exp(-i\theta t) + \frac{1}{2} \exp(+i\theta t) = \cos(\theta t), \end{aligned}$$

aber auch dieses Ergebnis kannten wir schon.

3. Die Funktion

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2(s-1)}$$

erfüllt alle Voraussetzungen und besitzt die doppelte Polstelle $s_1 = 0$ sowie die einfache Polstelle $s_2 = 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{U_t}(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} (s^2 U_t(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{s+1}{s-1} \exp(ts) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(ts^2 - t - 2) \exp(ts)}{(s-1)^2} = -t - 2 \end{aligned}$$

sowie

$$\operatorname{res}_{U_t}(1) = \lim_{s \rightarrow 1} ((s-1) U_t(s)) = \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{s+1}{s^2} \exp(ts) \right) = 2 \exp(t),$$

und erhalten insgesamt

$$u(t) = \operatorname{res}_{U_t}(0) + \operatorname{res}_{U_t}(1) = 2 \exp(t) - t - 2.$$

Bemerkung: Als Probe können wir $U = \mathcal{L}u$ direkt nachrechnen, denn dazu müssen wir nur relativ einfache Integrale im Zeitbereich auswerten. Alternativ können wir unser Rechenergebnis für u auch nach der Partialbruchzerlegung

$$U(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}$$

durch drei kurze Blicke in die Korrespondenztabelle überprüfen.