



Prof. Dr. Michael Herrmann
Technische Universität Braunschweig
Mathematik – Institut iPDE
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

Skript der Vorlesung
Analysis von Kurven und Flächen

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Bei der Ausarbeitung hat der Autor regelmäßig die folgenden Werke konsultiert:

- [Bob] ALEXANDER BOBENKO: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen* (Vorlesungsskript, TU Berlin, 2006)
- [doC] MANFREDO P. DO CARMO: *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Dover, 2016)
- [Kli] FRANK KLINKER: *Differentialgeometrie I: Kurven und Flächen* (Vorlesungsskript, TU Dortmund, 2010)
- [Kni] GERHARD KNIEPER: *Kurven und Flächen* (Vorlesungsskript, Uni Bochum, 2010)
- [Jae] KLAUS JÄHNISCH: *Vektoranalysis* (Springer, 2016)
- [Kue] WOLFGANG KÜHNEL: *Differentialgeometrie – Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten* (Vieweg, 2003)

Der Autor dankt allen Studenten, Mitarbeitern und Kollegen, die durch ihre Hinweise und Kommentare dieses Skript verbessert haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Kurven	5
1.1	Kurven im \mathbb{R}^d	5
1.1.1	Grundbegriffe	5
1.1.2	Länge und Bogenlänge	8
1.1.3	Grundzüge der Frenet-Theorie	10
1.2	Planare Kurven	15
1.2.1	Frenet-Theorie	15
1.2.2	Windungszahlen	19
1.2.3	Globale Analysis geschlossener Kurven	24
1.2.4	Deformationen von Kurven	27
1.3	Raumkurven	33
1.3.1	Frenet-Theorie	33
2	Flächen	39
2.1	Grundlagen	39
2.1.1	Konzepte und Definitionen	39
2.1.2	Tangentialraum und Erste Fundamentalform	45
2.1.3	Differenzierbarkeit	50
2.1.4	Orientierbarkeit und Normalenfeld	56
2.2	Krümmung von Flächen	59
2.2.1	Gauß- und Weingarten-Abbildung	59
2.2.2	Krümmungsbegriffe	64
2.2.3	Exkurs über Minimalflächen	72
2.2.4	Regelflächen	77
2.3	Die Innere Geometrie von Flächen	83
2.3.1	Kovariante Ableitung	83
2.3.2	Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi	89
2.3.3	Christoffel-Symbole	91
2.3.4	Die Sätze von Gauß und Bonnet	95
2.3.5	Paralleltransport und Geodäten	101
2.3.6	Satz von Gauß-Bonnet	109

Kapitel 1

Kurven

In diesem Kapitel untersuchen wir Kurven, d.h. eindimensionale geometrische Objekte im \mathbb{R}^d , wobei wir vor allem an den Fällen $d = 2$ (planare Kurven) und $d = 3$ (Raumkurven) interessiert sind. Punkte in \mathbb{R}^d bezeichnen wir in der Regel mit

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

aber es ist meist nicht wichtig, ob wir x als Zeilenvektor oder als Spaltenvektor schreiben. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ ist durch

$$\langle x, \tilde{x} \rangle = x \cdot \tilde{x} = \sum_{i=1}^d x_i \tilde{x}_i$$

gegeben, wohingegen

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$$

den Betrag (bzw. die euklidische Norm) von x bezeichnet.

1.1 Kurven im \mathbb{R}^d

1.1.1 Grundbegriffe

Definition 1 (Kurve in \mathbb{R}^d). Eine parametrisierte Kurve ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Die Bildmenge

$$\text{sp}(\alpha) := \{\alpha(t) : t \in I\}$$

wird Spur der Kurve oder unparametrisierte Kurve genannt.

Die Menge $\text{sp} \alpha$ ist eigentlich das geometrische Objekt im \mathbb{R}^d , das man anschaulich *Kurve* nennt. Für die mathematischen Betrachtungen in dieser Vorlesung ist es aber besser, geometrische Kurven immer via

$$\text{Parameterwert } t \in I \quad \xrightarrow{\alpha} \quad \text{Punkt } \alpha(t) \in \mathbb{R}^d \text{ der Kurve,}$$

als durch die Abbildung α parametrisiert zu betrachten. Wir werden im Folgenden meist einfach *Kurve* sagen und damit je nach Kontext eine *parametrisierte* oder eine *unparametrisierte* Kurve meinen.

Beispiel. Wir betrachten die parametrisierte Kurve

$$t \in I := (0, \pi) \quad \mapsto \quad \alpha(t) := (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Dann ist $\text{sp } \alpha$ offensichtlich der obere (und offene) Halbkreis, den wir durch den Winkel t zur x -Achse parameterisiert haben.

Bemerkung.

1. Es gibt zunächst keine Einschränkung an das Intervall, d.h. I kann endlich oder unendlich und offen oder abgeschlossen sein. Später werden wir dann aber ggf. die Menge der zulässigen I einschränken.
2. Ist $I = [a, b]$, so werden $\alpha(a)$ bzw. $\alpha(b)$ der Anfangs- und der Endpunkt der Kurve α genannt.
3. Eine wichtige Rolle spielen k -mal stetig-differenzierbare Kurven α , wobei die Ableitung in den ggf. vorhandenen Randpunkten des Intervalles I im Sinne der Grenzwerte von einseitigen Differenzenoperatoren zu verstehen ist.
4. Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, so heißt

$$\dot{\alpha}(t) := \frac{d\alpha}{dt}(t) \in \mathbb{R}^d$$

der Tangentialvektor an die Kurve im Punkt $\alpha(t)$.

5. Gilt $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ bzw. $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$ so nennen wir t_0 einen singulären bzw. regulären Parameterwert und $\alpha(t_0)$ einen singulären bzw. regulären Punkt der parametrisierten Kurve.
6. Ist α stetig differenzierbar mit $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so heißt α regulär. Wir werden oftmals unsere Betrachtungen auf reguläre Kurven einschränken.

Beispiel (Traktrix). Das Bild der parametrisierten Kurve

$$\alpha(t) := \left(\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(t/2)) \right), \quad t \in I := (0, \pi)$$

ist regulär für alle $t \neq \pi/2$ (siehe Übungsaufgabe).

In unserer Anschauung ist die Spur einer parametrisierten Kurve α eine eindimensionale Teilmenge des \mathbb{R}^d . Dies ist aber nur dann richtig, sofern α hinreichend glatt ist (zum Beispiel stetig differenzierbar), denn es gibt auch raumfüllende Kurven, für die $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig ist aber eine höherdimensionale Spur besitzt.¹

Definition 2 (Parameterwechsel). Zwei k -mal stetig differenzierbare parametrisierte Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißen geometrisch äquivalent (oder einfach äquivalent), falls es eine bijektive Abbildung $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ gibt, so dass sowohl ϕ als auch $\tilde{\phi} := \phi^{-1}$ k -mal stetig differenzierbar sind und so dass

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\alpha}(\tilde{t}) = \alpha(\phi(\tilde{t})) \quad \text{für alle } \tilde{t} \in \tilde{I}$$

Man nennt auch $\tilde{\alpha}$ (bzw. α) eine Umparametrisierung von α (bzw. von $\tilde{\alpha}$), wobei $\tilde{\phi}$ (bzw. ϕ) der Parameterwechsel ist, siehe Abbildung 1.2.

¹Ein weiteres Beispiel ist die Hilbertkurve, siehe etwa WIKEPEDIA.

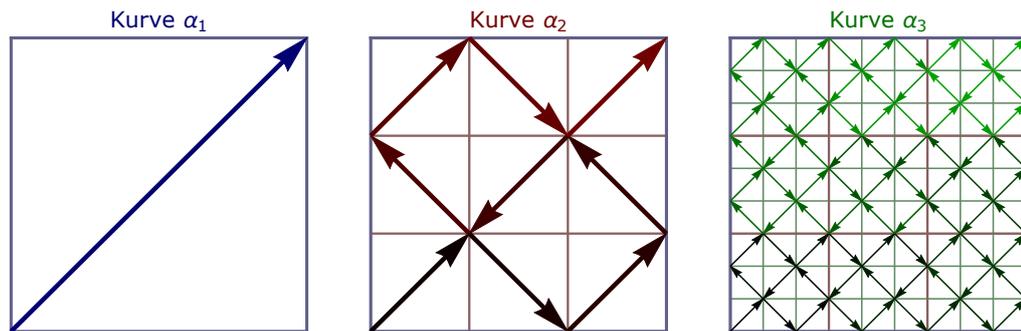


Abbildung 1.1: Beispiel einer *raumfüllenden Kurve*: Durch geschickte rekursive Definitionen kann man Folgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von parametrisierten Kurven $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ konstruieren, die gegen eine stetige Limeskurve α_∞ konvergieren, die das Einheitsintervall surjektiv auf das Einheitsquadrat abbildet. Allerdings wird α_∞ weder rektifizierbar noch glatt sein (nicht mal stückweise), da das Bild einer stetig differenzierbaren Kurve immer eindimensional ist.

Bemerkung.

1. Äquivalente Kurven besitzen dieselbe Spur und geometrische Äquivalenz im Sinne von Definition 2 ist eine Äquivalenzrelation im Sinne der Mengenlehre.
2. Jede stetige Bijektion zwischen zwei Intervallen ist entweder strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend.
3. Ein monoton wachsender bzw. monoton fallender Parameterwechsel wird auch orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend genannt.

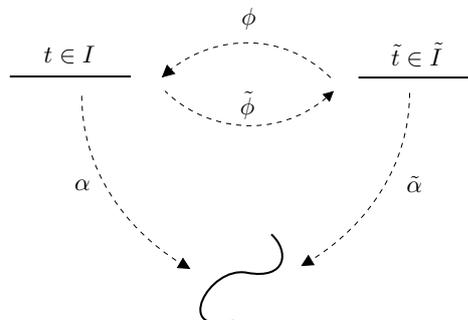


Abbildung 1.2: Parameterwechsel und Äquivalenz von Kurven, siehe Definition 2.

Beispiel.

1. Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine parametrisierte Kurve über dem Intervall $I = [a, b]$ und sei $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ beliebig gegeben. Dann wird durch

$$\tilde{\alpha}(\tilde{t}) := \alpha \left(a \frac{\tilde{t} - \tilde{a}}{\tilde{b} - \tilde{a}} + b \frac{\tilde{b} - \tilde{t}}{\tilde{b} - \tilde{a}} \right)$$

eine zu α äquivalente Kurve $\tilde{\alpha} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiert, wobei sich die Orientierung umkehrt.

2. Die parametrisierte Kurve

$$\tilde{\alpha}(\tilde{t}) := \left(\frac{1 - \tilde{t}^2}{\tilde{t}^2 + 1}, \frac{2\tilde{t}}{\tilde{t}^2 + 1} \right), \quad \tilde{t} \in \tilde{I} := (0, \infty)$$

ist via

$$\tilde{\phi}(t) = \tan(t/2), \quad \phi(\tilde{t}) = 2 \arctan(\tilde{t})$$

äquivalent zur Kurve α aus (1.1), wobei die Orientierung erhalten bleibt. Siehe Übungsaufgabe.

1.1.2 Länge und Bogenlänge

Definition 3 (Länge). Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann wird

$$\text{len}(\alpha) := \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt \in \mathbb{R}$$

die Länge von α genannt.

Ein allgemeineres Konzept von Länge (nämlich die sogenannte *Rektifizierbarkeit*) wird in den Übungsaufgaben behandelt.

Lemma 4 (Länge ist eine geometrische Größe). Sei α wie in Definition 3. Dann gilt

$$\text{len}(\alpha) = \text{len}(\tilde{\alpha})$$

für jede zu α äquivalente Kurve $\tilde{\alpha}$.

Beweis. Aufgrund der Äquivalenz ist $\tilde{\alpha} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^d$ auch stetig differenzierbar. Nach Definition 3 und der Kettenregel gilt

$$\tilde{\alpha}(\tilde{t}) = \alpha(\phi(\tilde{t})), \quad \dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t}) = \dot{\alpha}(\phi(\tilde{t}))\phi'(\tilde{t}),$$

wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass die Parameterwechsel ϕ und $\tilde{\phi}$ monoton wachsend sind. Nach der Transformationsformel für Integrale ergibt sich dann die Identität

$$\text{len}(\tilde{\alpha}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{t})| d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\dot{\alpha}(\phi(\tilde{t}))| \phi'(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt = \text{len}(\alpha),$$

wobei wir benutzt haben, dass $t = \phi(\tilde{t})$ auch $dt = \phi'(\tilde{t}) d\tilde{t}$ impliziert. \square

Definition 5 (Bogenlänge einer Kurve). Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ regulär und $t_* \in I$ beliebig fixiert. Dann heißt die durch

$$\hat{t} \in I \quad \mapsto \quad l_{\alpha, t_*}(\hat{t}) := \int_{t_*}^{\hat{t}} |\dot{\alpha}(t)| dt$$

definierte Funktion auf I die Bogenlänge von α bzgl. t_* . Insbesondere gilt

$$l_{\alpha, t_*}(\hat{t}) = \text{sgn}(\hat{t} - t_*) \text{len}(\alpha|_{[t_*, \hat{t}]})$$

für jedes $\hat{t} \in I$.

Beispiel (Ast der Neilschen² Parabel). Die Kurve

$$\alpha(t) := (t^2, t^3), \quad t \in I := (0, \infty)$$

ist regulär auf I mit

$$l_{\alpha,1}(\hat{t}) = \int_1^{\hat{t}} \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \frac{1}{18} \int_{13}^{4+9\hat{t}^2} \sqrt{s} ds = \frac{1}{27} \left((4 + 9\hat{t}^2)^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}} \right),$$

wobei wir das Integral mit der Substitution $s = 4 + 9t^2$ berechnet haben.

Definition 6 (Parametrisierung nach Bogenlänge). Eine reguläre Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

$$|\dot{\alpha}(t)| = 1 \quad \text{für alle } t \in I$$

heißt nach Bogenlänge parametrisiert.

Für eine Kurve wie in Definition 6 gilt

$$l_{\alpha,t_*}(t) = t - t_* \quad \text{bzw.} \quad t = t_* + l_{\alpha,t_*}(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

das heißt der Parameter t gibt bis auf die Konstante t_* die Bogenlänge der Kurve bzgl. t_* an.

Satz 7 (Existenz einer Parametrisierung nach Bogenlänge). Jede reguläre Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist äquivalent zu einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve.

Beweis. Wir fixieren $t_* \in I$ beliebig und setzen $\tilde{\phi}(t) := l_{\alpha,t_*}(t)$ für $t \in I$, so dass

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dt}(t) = \left| \frac{d\alpha}{dt}(t) \right| > 0.$$

Nach Konstruktion ist $\tilde{\phi}$ eine stetig differenzierbare und monoton wachsende Abbildung, die das gegebene Intervall I bijektiv auf das Intervall $\tilde{I} := \tilde{\phi}(I)$ abbildet. Daher existiert die inverse Abbildung $\phi := \tilde{\phi}^{-1} : \tilde{I} \rightarrow I$, wobei $\tilde{\phi}(\phi(\tilde{t})) = \tilde{t}$ schon

$$\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}}(\phi(\tilde{t})) \cdot \frac{d\phi}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = 1$$

impliziert. Die Kurve

$$\tilde{\alpha} := \alpha \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

besitzt die gewünschten Eigenschaften, denn nach Kettenregel gilt

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \frac{d\alpha}{dt}(\phi(\tilde{t})) = \frac{d\alpha}{dt}(\phi(\tilde{t})) \cdot \frac{d\phi}{d\tilde{t}}(\tilde{t})$$

und wir erhalten

$$\left| \frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt}(\phi(\tilde{t})) \right| \cdot \frac{d\phi}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \left| \frac{d\alpha}{dt}(\phi(\tilde{t})) \right| / \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}}(\phi(\tilde{t})) = 1$$

nach Einsetzen aller Teilresultate. □

Bemerkung.

1. Der im Beweis von Satz 7 konstruierte Parameterwechsel ist orientierungserhaltend und im Wesentlichen — d.h. bis auf die Wahl von t_* — eindeutig.
2. Im Allgemeinen wird es sehr schwierig bzw. unmöglich sein, die Parameterwechsel ϕ oder $\tilde{\phi}$ explizit zu berechnen.

²William Neile (1637–1670), englischer Mathematiker.

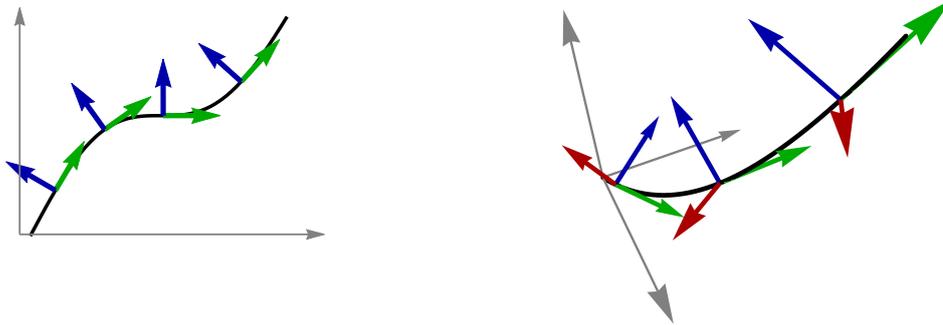


Abbildung 1.3: Frenet-Kurven in 2D und 3D mit ihren Rahmenvektoren (e_1 grün, e_2 blau, e_3 rot), die in 3D verzerrt dargestellt sind.

1.1.3 Grundzüge der Frenet-Theorie

Wenn wir, wie in diesem Abschnitt, nach Bogenlänge parametrisierte Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ betrachten, so schreiben wir oftmals

$$\alpha(s) \quad \text{und} \quad \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s) \quad \text{statt} \quad \alpha(t) \quad \text{und} \quad \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t)$$

wobei $s \in I$ der Bogenlängenparameter ist.

Definition 8 (Frenetsche Kurve). *Eine Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ auf einem Intervall I heißt Frenet-Kurve³, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. α ist m -mal stetig differenzierbar, wobei $m \geq d$ gilt⁴,
2. α ist nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. es gilt $|\alpha'(s)| = 1$
3. für jedes $s \in I$ sind die $d-1$ Vektoren $\alpha^{(j)}(s)$ mit $j \in \{1, \dots, d-1\}$ linear unabhängig in \mathbb{R}^d .

Für $d = 2$ ist jede zweimal stetig-differenzierbare und nach Bogenlänge parametrisierte Kurve schon Frenet-Kurve; für $d = 3$ muss α darüberhinaus sogar dreimal stetig-differenzierbar sein mit $\alpha''(s) \neq 0$ für alle $s \in I$.

Lemma 9 (begleitendes d -Bein). *Zu jeder Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt es eindeutige Abbildungen $e_1, \dots, e_d : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ so dass:*

1. Die Vektoren $e_1(s), \dots, e_d(s)$ bilden für jedes $s \in I$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des \mathbb{R}^d .
2. Es gilt

$$\text{span}\{e_1(s), \dots, e_j(s)\} = \text{span}\{\alpha'(s), \dots, \alpha^{(j)}(s)\} \quad \text{sowie} \quad \langle e_j(s), \alpha^{(j)}(s) \rangle > 0$$

für alle $j = \{1, \dots, d-1\}$ und jedes $s \in I$.

³Jean Frédéric Frenet (1816–1900), französischer Mathematiker, Astronom und Meteorologe.

⁴Bei der ersten Lektüre dieses Abschnittes können Sie $m = \infty$ setzen. Dann sind alle im diesem Abschnitt konstruierten Abbildungen unendlich oft differenzierbar.

3. Für $j = \{1, \dots, d-1\}$ ist die Abbildung e_j ist $(m-j)$ -mal stetig differenzierbar; e_d ist $(m-d) + 1$ -mal stetig differenzierbar.

Das d -Tupel (e_1, \dots, e_d) wird das Frenetsche d -Bein oder der Frenet-Rahmen der Kurve α genannt.

Beweis. Es gilt notwendigerweise

$$e_1(s) = \alpha'(s)$$

sowie

$$e_2 = \alpha''(s) / |\alpha''(s)|,$$

denn $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ impliziert schon $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Die Terme e_3, \dots, e_{d-1} können sukzessive mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren konstruiert werden, d.h.

$$e_3(s) = f_3(s) / |f_3(s)|, \quad f_3(s) = \alpha'''(s) - \langle \alpha'''(s), e_1(s) \rangle e_1(s) - \langle \alpha'''(s), e_2(s) \rangle e_2(s)$$

sowie

$$e_{d-1}(s) = f_{d-1}(s) / |f_{d-1}(s)|, \quad f_{d-1}(s) = \alpha^{(d-1)}(s) - \sum_{i=1}^{d-2} \langle \alpha^{(i)}(s), e_i(s) \rangle e_i(s).$$

Abschließend ist $e_d(s)$ durch die erste Bedingung eindeutig bestimmt. Die behauptete Regularität von e_1, \dots, e_{d-1} ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion mittels des Orthogonalisierungsverfahrens. Die Regularität von e_d ist eine direkte Konsequenz bekannter Resultate über die Lösungen glatter Gleichungen. \square

Die Lemma 9 zugrunde liegende Idee ist, dass für jedes $s \in I$ die Vektoren $e_1(s), \dots, e_d(s)$ ein *mitbewegtes* und *an die Frenet-Kurve α angepasstes* Koordinatensystem liefern, siehe Abbildung 1.3. Die d Vektoren $e_1(s), \dots, e_d(s)$ aus Lemma 9 können als *Zeilen*⁵ einer Matrix $E(s)$ aufgefasst werden, d.h. wir schreiben im Folgenden

$$E(s) := \begin{pmatrix} - & e_1(s) & - \\ & \dots & \\ - & e_d(s) & - \end{pmatrix} \in \text{SO}(d),$$

wobei Lemma 9 sicherstellt, dass $E(s)$ immer eine orthonormale Matrix mit Determinante $+1$ ist.⁶ Eine wesentliche Erkenntnis ist nun, dass die so definierte matrixwertige Abbildung $E : I \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$ einer Differentialgleichung genügt.

Satz 10 (Frenetsche Differentialgleichung). *Für jede Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt es $d-1$ eindeutig bestimmte Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass⁷*

$$E'(s) = K(s) \cdot E(s) \tag{1.2}$$

⁵Würden wir die Vektoren e_1, \dots, e_d in die Spalten der Matrix E schreiben, so müssten einige der nachfolgenden Formeln abgeändert werden.

⁶Die Menge aller orthonormalen $d \times d$ -Matrizen mit Determinante $+1$ ist eine multiplikative Gruppe und wird mit $\text{SO}(d)$ bezeichnet. Insbesondere kann der Frenet-Rahmen einer Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ als die entsprechende Kurve $e : I \rightarrow \text{SO}(d)$ betrachtet werden.

⁷Das Symbol \cdot steht hier die übliche Matrizenmultiplikation.

für alle $s \in I$, wobei

$$K(s) := \begin{pmatrix} 0 & +\kappa_1(s) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1(s) & 0 & +\kappa_2(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2(s) & 0 & +\kappa_3(s) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_{d-2}(s) & 0 & +\kappa_{d-1}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_{d-1}(s) & 0 \end{pmatrix}$$

eine schiefsymmetrische Tridiagonalmatrix ist. Dabei ist die Funktion κ_j $(m-1-j)$ -mal stetig differenzierbar, und die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-2}$ nehmen nur positive Werte an.

Beweis. Konstruktion der Matrix K : Wegen der ON-Eigenschaft des Frenet-Rahmens (siehe Lemma 9) gilt

$$e'_i(s) = \sum_{j=1}^d K_{i,j}(s) e_j(s) \quad \text{mit} \quad K_{i,j}(s) := \langle e'_i(s), e_j(s) \rangle$$

und wir erhalten (Nachrechnen!) die Differentialgleichung (1.2) mit

$$K(s) := (K_{i,j}(s))_{i,j=1\dots d} = \begin{pmatrix} K_{1,1}(s) & \dots & K_{1,d}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{d,1}(s) & \dots & K_{d,d}(s) \end{pmatrix}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die $d \times d$ -Matrix $K(s)$ für jedes $s \in I$ schiefsymmetrisch ist und dass alle Einträge außerhalb der beiden Nebendiagonalen verschwinden.

Eigenschaften der Matrix K : Nach Konstruktion und Produktregel gilt

$$0 = \frac{d}{ds} \langle e_i(s), e_j(s) \rangle = \langle e'_i(s), e_j(s) \rangle + \langle e_i(s), e'_j(s) \rangle = K_{i,j}(s) + K_{j,i}(s),$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$, d.h. die Matrix $K(s)$ ist in der Tat schiefsymmetrisch. Außerdem gilt nach dem Beweis von Lemma 9 die Formel

$$e_j(s) = c_{1,j}(s) \alpha^{(1)}(s) + \dots + c_{j,j}(s) \alpha^{(j)}(s)$$

für jedes $j \in \{1, \dots, d-1\}$ und geeignete Koeffizienten-Funktionen $c_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$, die mindestens stetig differenzierbar sind. Nach Differentiation bzgl. $s \in I$ schließen wir nun für jedes feste s , dass $e'_j(s)$ in dem von $\alpha^{(1)}(s), \dots, \alpha^{(j+1)}(s)$ aufgespannten Unterraum liegt, aber dieser Unterraum wird nach Konstruktion auch von den Vektoren $e_1(s), \dots, e_{j+1}(s)$ aufgespannt. Damit haben wir

$$K_{1,3}(s) = \dots = K_{1,d}(s) = 0, \quad K_{2,4}(s) = \dots = K_{2,d}(s) = 0, \quad K_{d-2,d}(s) = 0$$

gezeigt und schließen mit der schon bewiesenen Schiefsymmetrie, dass in der Tat nur die Nebendiagonalelemente der Matrix $K(s)$ von Null verschieden sein können, wobei die Positivität und die Regularität von $\kappa_j(s) := K_{j,j+1}(s) = \langle e'_j(s), e_{j+1}(s) \rangle$ aus Lemma 9 folgen. \square

Die Größe κ_j wird die j -te Frenet-Krümmung der Kurve genannt und κ_{d-1} heißt auch Torsion der Kurve. K wird auch als Frenet-Matrix der Kurve α bezeichnet.

Lemma 11 (Invarianz unter eigentlichen Euklidischen Bewegungen). *Seien $\mathcal{R} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine lineare, orientierungserhaltende und orthonormale Transformation⁸ des \mathbb{R}^d , $\mathcal{V} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Verschiebung und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Frenet-Kurve wie oben. Dann ist auch $\hat{\alpha} = \mathcal{V} \circ \mathcal{R} \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Frenet-Kurve, wobei $\hat{e}_j = \mathcal{R} \circ e_j$ und $\hat{\kappa}_j = \kappa_j$ für den entsprechenden Frenet-Vektoren \hat{e}_j und die entsprechenden Frenet-Krümmungen $\hat{\kappa}_j$ gilt.*

Beweis. Schreiben wir alle Vektoren als Zeilenvektoren, so existieren eine Matrix $R \in \text{SO}(d)$ sowie ein Vektor $v \in \mathbb{R}^d$, so dass

$$\hat{\alpha}(s) := \alpha(s) \cdot R + v, \quad \hat{\alpha}^{(j)}(s) = \alpha(s) \cdot R, \quad |\hat{\alpha}'(s)| = |\alpha'(s)|$$

für alle t gilt. (Wenn wir Spaltenvektoren benutzen, so wird die Rotation durch die Multiplikation mit einer Matrix von rechts beschrieben). Dies impliziert – vgl. die Beweise von Lemma 9 und Satz 10 – die gewünschten Ergebnisse via

$$\hat{e}_j(t) = e_j(t) \cdot R, \quad \hat{\kappa}_j(t) = \langle e'_j(s) \cdot R, e_{j+1}(s) \cdot R \rangle = \langle e'_j(s), e_{j+1}(s) \rangle = \kappa_j(s),$$

wobei wir $R^{-1} = R^T$ benutzt haben. □

Wir sind nun in der Lage, den Hauptsatz zu beweisen.

Theorem 12 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie). *Sei I ein Intervall und seien die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, wobei κ_j $(m-1-j)$ -mal stetig differenzierbar sei und $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-2}$ nur positive Werte annehmen. Dann existiert eine Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, so dass jedes κ_j gerade die j -te Frenet-Krümmung der Kurve α ist. Insbesondere ist diese Kurve α bis auf affine Transformationen wie in Lemma 11 eindeutig bestimmt.*

Beweis. Existenz des Frenet-Rahmen: Wir wählen $s_* \in I$ beliebig. Dann existiert eine eindeutige⁹ und stetig differenzierbare Lösung $E : I \rightarrow \text{Mat}(d \times d) \cong \mathbb{R}^{d^2}$ zum linearen Anfangswertproblem

$$\frac{dE}{ds}(s) = K(s) \cdot E(s), \quad E(s_*) = \text{id}, \quad (1.3)$$

wobei $K(s)$ wie in Satz 10 die schiefsymmetrische Tridiagonalmatrix ist, deren Einträge die gegebenen Funktionen κ_j sind. Wir wollen nun für festes $s \in I$ zeigen, dass die so konstruierte Matrix $E(s)$ wirklich eine ON-Matrix ist, und betrachten dazu $M(s) := E(s) \cdot E(s)^T$. Dann gilt $M(s_*) = \text{id}$ sowie

$$\begin{aligned} \frac{dM}{ds}(s) &= \left(\frac{dE}{ds}(s) \right) \cdot E(s)^T + E(s) \cdot \left(\frac{dE^T}{ds}(s) \right) \\ &= (K(s) \cdot E(s)) \cdot E(s)^T + E(s) \cdot (E^T(s) \cdot K^T(s)) \\ &= K(s) \cdot M(s) - M(s) \cdot K(s), \end{aligned}$$

d.h. auch $M : I \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$ ist Lösung eines linearen Anfangswertproblems. Da dieses Anfangswertproblem aber die konstante Lösung $s \mapsto \text{id}$ besitzt, muss wegen der Eindeutigkeit von Lösungen schon

$$M(s) = \text{id} \quad \text{für alle } s \in I$$

⁸In $d = 2$ und $d = 3$ sind also Drehungen, aber keine Spiegelungen zugelassen.

⁹Die rechte Seite in (1.3)₁ ist stetig in s und lokal Lipschitz-stetig bzgl. $E(s)$. Die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung folgt daher aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Aufgrund der Linearität der Gleichung existiert die maximale Lösung auf ganz I .

gelten. Dies bedeutet aber, dass die Zeilen von $E(s)$ stets eine ON-Basis von \mathbb{R}^d bilden, und die stetige Abhängigkeit der Abbildung $s \mapsto \det E(s) \in \{-1, +1\}$ impliziert, dass die Orientierung sich nicht ändern kann und wegen $\det E(s_*) = 1$ immer positiv sein muss. Außerdem gilt nach Konstruktion¹⁰

$$\begin{aligned} e'_1(s) &= & & + \kappa_1(s)e_2(s) \\ e'_2(s) &= - \kappa_1(s)e_1(s) & + \kappa_2(s)e_3(s) \\ &\dots & & \\ e'_{d-1}(s) &= - \kappa_{d-2}(s)e_{d-3}(s) & + \kappa_{d-1}(s)e_d(s) \\ e'_d(s) &= - \kappa_{d-1}(s)e_{d-1}(s) \end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei die Vektoren $e_1(s), \dots, e_d(s)$ die Zeilen von $E(s)$ bezeichnen, und induktiv zeigt man, dass e_j mindestens $(m-j)$ -mal stetig differenzierbar ist und das e_d sogar $(m-d+1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

Existenz der Kurve-Rahmen: Wir definieren

$$\alpha(s) := \int_{t_*}^s e_1(\tilde{s}) \, d\tilde{s}, \quad e_1(s) := \alpha'(s) = e_1(s),$$

wobei wir schon wissen, dass die Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -mal stetig differenzierbar ist. Unter Ausnutzung der Differentialgleichungen (1.3) kann nun induktiv und analog zum Gram-Schmidt-Verfahren aus dem Beweis von Lemma 9 gezeigt werden, dass e_1, \dots, e_j gerade das Frenetsche d -Bein der Kurve α ist.

Zur Eindeutigkeit: Sei nun $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine weitere Frenet-Kurve mit Rahmen \tilde{E} und mit vorgeschriebener Krümmungsmatrix $\tilde{K} = K$. Durch Superposition mit orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen können wir aus $\tilde{\alpha}$ eine weitere Frenet-Kurve $\hat{\alpha}$ konstruieren, so dass

$$\hat{\alpha}(s_*) = \alpha(s_*) = 0, \quad \hat{E}(s_*) = E(s_*), \quad \hat{K}(s) = K(s).$$

Satz 10 liefert $\hat{E}'(s) = K(s)\hat{E}(s)$, d.h. \hat{E} und E lösen das gleiche Anfangswertproblem und müssen daher identisch sein. Dies impliziert dann auch $\hat{\alpha} = \alpha$. □

Bemerkung. *Satz 10 und Theorem 12 gelten sinngemäß auch für jede Kurve, die zwar hinreichend regulär, aber nicht unbedingt nach Bogenlänge parametrisiert ist, sofern die Frenetschen Gleichungen in (1.2) als*

$$\dot{E}(t) = |\dot{\alpha}(t)| K(t) \cdot E(t)$$

geschrieben werden.

Von besonderem Interesse sind Kurven α mit konstanten Frenet-Krümmungen κ_j . In diesem Fall hängt K nicht von s ab und die Frenetschen Gleichungen können mit Hilfe des Matrixexponentials explizit zu

$$E(s) = \exp((s - s_*)K) \cdot E(s_*), \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \text{id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \tag{1.5}$$

mit $s \in \mathbb{R}$ berechnet werden.

¹⁰Man rechnet leicht nach, dass (1.4) eine Umformulierung von (1.2)₁ ist.

1.2 Planare Kurven

In diesem Abschnitt gilt $d = 2$.

1.2.1 Frenet-Theorie

Wir betrachten zunächst Frenet-Kurven, also zweimal stetig-differenzierbare Abbildungen

$$s \in I \quad \mapsto \quad \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \in \mathbb{R}^2$$

die nach Bogenlänge parametrisiert sind, d.h.

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{(\alpha_1'(s))^2 + (\alpha_2'(s))^2} = 1 \quad \text{für alle } s \in I.$$

Der entsprechende Frenet-Rahmen ist dann in eindeutiger Weise durch

$$e_1(s) = (+\alpha_1'(s), +\alpha_2'(s)), \quad e_2(s) = (-\alpha_2'(s), +\alpha_1'(s)) \quad (1.6)$$

gegeben, d.h. $e_1 = \alpha'$ ist der Tangentialvektor und e_2 ist der dazu senkrechte Normalenvektor¹¹ an die Kurve, wobei die positive Orientierung verlangt, dass Winkel zwischen $e_1(s)$ und $e_2(s)$ den Wert $+\pi/2$ (und nicht den Wert $-\pi/2$) annimmt. Die Frenetschen Gleichungen aus Satz 10 betreffen die Matrix

$$E(s) = \begin{pmatrix} e_{1,1}(s) & e_{1,2}(s) \\ e_{2,1}(s) & e_{2,2}(s) \end{pmatrix} \quad \text{mit } e_j(s) =: (e_{j,1}(s), e_{j,2}(s))$$

und lauten

$$\begin{pmatrix} e'_{1,1}(s) & e'_{1,2}(s) \\ e'_{2,1}(s) & e'_{2,2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{1,1}(s) & e_{1,2}(s) \\ e_{2,1}(s) & e_{2,2}(s) \end{pmatrix},$$

wobei $\kappa(s) = \kappa_1(s)$ die einzige Frenet-Krümmung für $d = 2$ ist. Alternativ können die Frenetschen Gleichungen in kompakterer Form als die vektorwertigen Differentialgleichungen

$$e'_1(s) = +\kappa(s)e_2(s), \quad e'_2(s) = -\kappa(s)e_1(s) \quad (1.7)$$

geschrieben¹² werden, und die obigen Formeln für $e_1(s)$ und $e_2(s)$ implizieren

$$\kappa(s) = \langle e'_1(s), e_2(s) \rangle = \alpha'_1(s)\alpha''_2(s) - \alpha'_2(s)\alpha''_1(s). \quad (1.8)$$

Desweiteren gilt

$$\alpha''(s) = e'_1(s) = \kappa(s)e_2(s)$$

¹¹In der Literatur wird $e_1(s)$ oftmals als $\mathbf{t}(s)$ und $e_2(s)$ als $\mathbf{n}(s)$ geschrieben.

¹²In der Literatur findet sich auch die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} e'_1(s) \\ e'_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix}$$

wobei die linke Seite und der zweite Faktor auf der rechten Seite dann 'Vektoren von Vektoren' sind, wohingegen die Einträge der schiefssymmetrischen Matrix reelle Zahlen sind.

und damit auch

$$|\kappa(s)| = |\alpha''(s)|, \quad e_2(s) = \pm \alpha''(s) / |\alpha''(s)|,$$

wobei das Vorzeichen in der zweiten Gleichung durch die Bedingung festgelegt ist, dass $e_1(s) = \alpha'(s)$ und $e_2(s)$ immer eine positiv orientierte ON-Basis bilden.

Die Frenetschen Gleichungen offenbaren, dass $|\kappa(s)|$ gerade angibt, wie schnell sich die Vektoren $e_1(s)$ und $e_2(s)$ bei wachsendem s ändern, wobei die folgenden Vorzeichenregeln gelten (siehe auch Abbildung 1.4) :

- $\kappa(s) > 0$: $e_1(s)$ und $e_2(s)$ drehen sich mit wachsendem s gegen den Uhrzeiger und der Winkel zwischen $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ ist $+\pi/2$
 $\kappa(s) < 0$: $e_1(s)$ und $e_2(s)$ drehen sich mit wachsendem s mit dem Uhrzeiger und der Winkel zwischen $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ ist $-\pi/2$

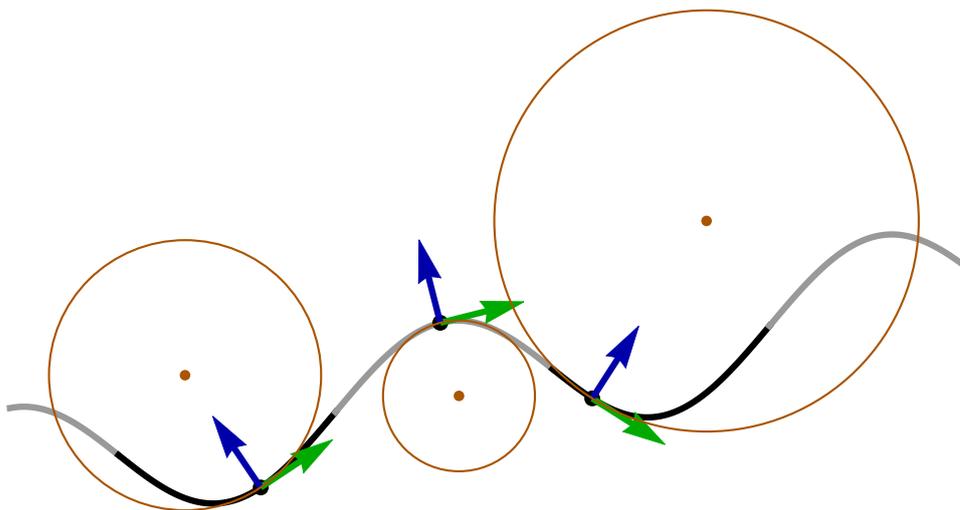


Abbildung 1.4: Planare Frenet-Kurve mit Frenetschem 2-Bein und Krümmungskreisen, wobei die grünen Pfeile in Richtung wachsendes s zeigen. In den grauen bzw. schwarzen Bereichen gilt $\kappa(s) < 0$ bzw. $\kappa(s) > 0$ und es gilt stets $\alpha'(s) = e_1(s)$ sowie $\alpha''(s) = \kappa(s)e_2(s)$. Wie würden sich alle Größen bei einem Wechsel des Durchlaufsinns ändern?

Definition 13 (Krümmung planer Kurven). Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Frenet-Kurve und seien $e_1, e_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sowie $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben.

1. Der Wert $\kappa(s)$ heißt die (orientierte) Krümmung von α im Punkt $\alpha(s)$.
2. Gilt $\kappa(s) \neq 0$, so wird der (unparametrisierte) Kreis vom Radius $1/|\kappa(s)|$ und Mittelpunkt $\alpha(s) + e_2(s)/\kappa(s)$ wird der entsprechende Krümmungskreis genannt.¹³

¹³Für $\kappa(s) = 0$ kann man die Tangentialgerade als den “unendlichen großen” Krümmungskreis interpretieren, dessen Mittelpunkt mit dem “unendlich fernen Punkt” zusammenfällt. Wir werden das in dieser Vorlesung nicht vertiefen, aber diese auf den ersten Blick vielleicht künstliche Interpretation macht sehr viel Sinn.

Beispiel (Kurven konstanter Krümmung). Für konstantes $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und beliebiges $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir (vgl. (1.5))

$$E(s) = \exp \left(s \begin{pmatrix} 0 & +\kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} +\cos(\kappa s) & +\sin(\kappa s) \\ -\sin(\kappa s) & +\cos(\kappa s) \end{pmatrix},$$

d.h. die eindeutige Lösung der Frenetschen Gleichung mit Anfangswert $E(0)=\text{id}$.¹⁴ Dies entspricht dem Frenet-Rahmen

$$e_1(s) = (+\cos(\kappa s), +\sin(\kappa s)), \quad e_2(s) = (-\sin(\kappa s), +\cos(\kappa s))$$

und offensichtlich gilt $e_1'(s) = +\kappa e_2(s)$ sowie $e_2'(s) = -\kappa e_1(s)$. Die entsprechende Frenet-Kurve ist bis auf Verschiebungen durch

$$\alpha(s) = (+\kappa^{-1} \sin(\kappa s), -\kappa^{-1} \cos(\kappa s)) \quad (1.9)$$

gegeben. Dies ist offensichtlich ein nach Bogenlänge parametrisierter Kreis vom Radius $|\kappa|^{-1}$, der in mathematisch positiver ($\kappa > 0$) oder negativer ($\kappa < 0$) Orientierung durchlaufen wird, siehe Abbildung 1.5.

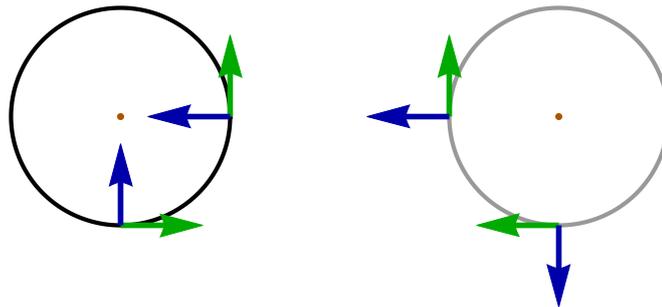


Abbildung 1.5: Eine planare Frenet-Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa \neq 0$ ist ein Kreis vom Radius $|\kappa|^{-1}$, der entweder im positiven (links, $\kappa > 0$) oder im negativen (rechts, $\kappa < 0$) Sinne durchlaufen wird, siehe (1.9). Insbesondere fällt die Spur der Kurve mit den Krümmungskreisen zusammen.

Lemma 14 (Eigenschaften des Krümmungskreises). Seien $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Frenet-Kurve, $s_* \in I$ beliebig fixiert mit $\kappa(s_*) \neq 0$ und

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \beta(t)$$

eine Bogenlängenparametrisierung des entsprechenden Krümmungskreises mit $\beta(0) = \alpha(s_*)$. Dann gilt auch

$$\beta'(0) = \alpha'(s_*), \quad \beta''(0) = \alpha''(s_*),$$

d.h. der Krümmungskreis berührt die Kurve zu zweiter Ordnung.¹⁵ Insbesondere stimmt im Berührungspunkt der Frenet-Rahmen der Kurve α mit dem des Krümmungskreises überein.

¹⁴Andere Anfangswerte für $E(0)$ entsprechen einer globalen Drehung der resultierenden Kurve.

¹⁵Deshalb wird der Krümmungskreis auch *Schmiegekreis* genannt.

Beweis. Nach Anwendung einer Verschiebung und einer Rotation können wir o.B.d.A.

$$\alpha(s_*) = 0, \quad e_1(s_*) = \alpha'(s_*) = (1, 0), \quad e_2(s_*) = (0, 1)$$

annehmen und parametrisieren den Krümmungskreis nach Bogenlänge durch

$$\beta(t) = \left(0, \kappa^{-1}(s_*)\right) + \kappa^{-1}(s_*) \left(+\sin(\kappa(s_*)t), -\cos(\kappa(s_*)t)\right),$$

siehe dazu auch (1.9). Wir berechnen

$$\beta'(0) = (1, 0), \quad \beta''(0) = (0, \kappa(s_*))$$

und bemerken andererseits, dass

$$\alpha''(s_*) = e_1'(s_*) = \kappa(s_*)e_2(s_*) = (0, \kappa(s_*))$$

wegen der Frenetschen Gleichungen gilt. \square

Lemma 15 (Einfachste Darstellungsformel). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine planare Frenet-Kurve mit Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha(s_*) = (0, 0)$ sowie $\alpha'(s_*) = (1, 0)$ für ein gegebenes $s_* \in I$. Dann gilt*

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_*}^s \cos \left(\int_{s_*}^{\bar{s}} \kappa(\tilde{s}) d\tilde{s} \right) d\bar{s}, \int_{s_*}^s \sin \left(\int_{s_*}^{\bar{s}} \kappa(\tilde{s}) d\tilde{s} \right) d\bar{s} \right)$$

für alle $s \in I$. Nach Superposition mit einer Verschiebung und einer Drehung gilt diese Formel sogar für alle planaren Frenet-Kurven.

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Lemma 16 (Frenet-Theorie allgemeiner Kurven). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine reguläre und zweimal stetig differenzierbare, aber nicht unbedingt nach Bogenlänge parameterisierte Kurve mit Parameter $t \in I$. Dann können via*

$$e_1(t) = |\dot{\alpha}(t)|^{-1} (\dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t)), \quad e_2(t) = |\dot{\alpha}(t)|^{-1} (-\dot{\alpha}_2(t), \dot{\alpha}_1(t)),$$

und

$$\kappa(t) = |\dot{\alpha}(t)|^{-3} \left(\dot{\alpha}_1(t)\ddot{\alpha}_2(t) - \dot{\alpha}_2(t)\ddot{\alpha}_1(t) \right)$$

die entsprechenden Größen der Frenet-Theorie direkt berechnet werden.

Beweis. Unsere Beweisstrategie ist es, die Kurve zunächst nach Bogenlänge zu parametrisieren, danach die Frenet-Größen bzgl. der Bogenlänge zu berechnen, und schließlich die Rückparametrisierung durchzuführen. Um die Rechnungen möglichst übersichtlich zu halten, rechnen wir wie die Physiker und bezeichnen mit $\alpha(t)$ bzw. $\alpha(s)$ denselben Punkt im Bild der Kurve, nur einmal in Abhängigkeit von t und das andere Mal in Abhängigkeit vom Bogenlängenparameter s . Die Reparametrisierung ist dann gerade die Angabe von $s(t)$ bzw. $t(s)$, wobei s genau dann – vgl. den Beweis von Satz 7 – die Bogenlänge ist, wenn

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\alpha}| \quad \text{bzw.} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\dot{\alpha}|}.$$

Damit können die t -Ableitung sowie die s -Ableitung einer beliebigen Größe f via

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{df}{ds} = \frac{ds}{dt} f' = |\dot{\alpha}| f'$$

ineinander umgerechnet werden und die Formeln für die Berechnung des Frenet-Rahmens folgen unmittelbar aus

$$\alpha'_j = \dot{\alpha}_j / |\dot{\alpha}|$$

und Formel (1.6). Desweiteren gilt

$$\alpha''_j = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\alpha}_j}{|\dot{\alpha}|} \right) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\alpha}_j}{|\dot{\alpha}|} \right) = \frac{1}{|\dot{\alpha}|} \left(\frac{\ddot{\alpha}_j}{|\dot{\alpha}|} - \frac{\dot{\alpha}_j}{|\dot{\alpha}|^2} \frac{d|\dot{\alpha}|}{dt} \right)$$

und eine kleine Nebenrechnung offenbart

$$\frac{d|\dot{\alpha}|}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2} = \frac{\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 \ddot{\alpha}_2}{\sqrt{\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2}} = \frac{\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}{|\dot{\alpha}|}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\alpha''_j = \frac{\ddot{\alpha}_j}{|\dot{\alpha}|^2} - \frac{\dot{\alpha}_j \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}{|\dot{\alpha}|^4}$$

und in Kombination mit (1.8) schließlich

$$\kappa = \alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha'_2 \alpha''_1 = \frac{\dot{\alpha}_1}{|\dot{\alpha}|} \left(\frac{\ddot{\alpha}_2}{|\dot{\alpha}|^2} - \frac{\dot{\alpha}_2 \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}{|\dot{\alpha}|^4} \right) - \frac{\dot{\alpha}_2}{|\dot{\alpha}|} \left(\frac{\ddot{\alpha}_1}{|\dot{\alpha}|^2} - \frac{\dot{\alpha}_1 \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}{|\dot{\alpha}|^4} \right),$$

wobei sich einige Terme auf der rechten Seite gegenseitig aufheben. □

1.2.2 Windungszahlen

In diesem Abschnitt studieren wir zwei wichtige Eigenschaften geschlossener planarer Kurven.

Lemma 17 (Hilfsresultat über die Existenz eines Polarwinkels). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine m -mal stetig differenzierbare Kurve. Dann existiert eine m -mal stetig differenzierbare Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$\alpha(t) = |\alpha(t)| \left(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)) \right)$$

für alle $t \in I$. Diese Funktion θ ist eindeutig bis auf die Addition einer konstanten Funktion $t \mapsto 2\pi j$ mit $j \in \mathbb{Z}$ bestimmt und wird Polarwinkelfunktion von α genannt.

Beweis. Einfachster Fall: Ist die Spur von α in einer Halbebene

$$H_\eta := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cos(\eta) + x_2 \sin(\eta) > 0\}$$

mit festem Parameter $\eta \in \mathbb{R}$ enthalten, so kann θ mit Hilfe inverser trigonometrischer Funktionen konstruiert werden und alle Behauptungen folgen unmittelbar

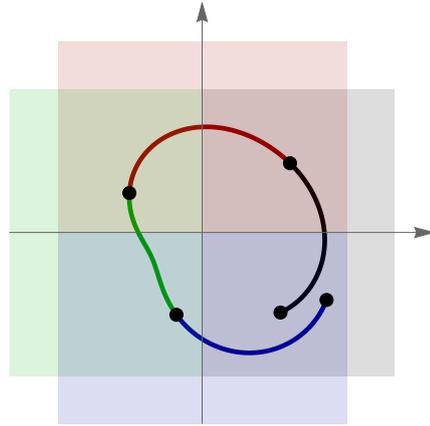


Abbildung 1.6: Zur stückweisen Definition des Polarwinkels im Beweis von Lemma 17: In diesem Beispiel wird die gegebene Kurve in vier Teile zerlegt (schwarz, rot, grün, blau), so dass die Spur jeder Teilkurve in einer entsprechenden Halbebene enthalten ist.

aus bekannten Resultaten aus Analysis I+II. Haben wir zum Beispiel $\eta = 0$, so ist H_η gerade die rechte Halbebene und es gilt notwendigerweise

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}\right) + 2\pi j,$$

wobei die Konstante $j \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber unabhängig von t gewählt werden kann. Für andere Werte von η können analoge Formeln mit Hilfe einer Drehung abgeleitet werden.

Allgemeiner Fall: Für eine allgemeine Kurve auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ existiert – siehe Abbildung 1.6 – wegen der gleichgradigen Stetigkeit von α eine endliche, aber nicht eindeutige Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_M = b$$

des Intervalls $[a, b]$ in M Teile sowie dazugehörige Winkel η_1, \dots, η_M , so dass

$$\text{sp}(\alpha|_{[t_{m-1}, t_m]}) \subset H_{\eta_m} \quad \text{und} \quad |\eta_{m-1} - \eta_m| = \pi/2 \quad \text{für alle } m = 1, \dots, M.$$

Die Funktion $\theta_m|_{[t_{m-1}, t_m]}$ kann nun durch Iteration der Argumente von oben konstruiert werden, wobei die Konstante $j_m \in \mathbb{Z}$ nur im ersten Teilintervall gewählt werden kann und in den anderen Teilintervallen bereits eindeutig durch die Stetigkeitsforderung an θ festgelegt ist. Der Fall allgemeiner Intervalle kann analog behandelt werden, sofern man auch abzählbare Zerlegungen von I zulässt ($m \in \mathbb{N}$ oder $m \in \mathbb{Z}$). \square

Die Winkelfunktion θ aus Lemma 17 quantifiziert für jedes $t \in I$ den Winkel des Vektors $\alpha(t)$ bzgl. der x_1 -Achse. Der Winkel bzgl. der um θ_* gedrehten Achse ist dann $\theta(t) - \theta_*$.

Die Polarwinkelfunktion ist bei geschlossenen Kurven besonders interessant.

Definition 18 (Geschlossene Kurve). *Eine stetige Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt geschlossen, falls $\alpha(a) = \alpha(b)$ gilt, und einfach geschlossen, falls außerdem $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ für alle $a \leq t_1 < t_2 < b$ gilt. Wir sagen, eine geschlossene Kurve ist m -mal stetig differenzierbar, falls die Ableitungen $\alpha', \dots, \alpha^{(m)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ existieren und via*

$$\alpha'(a) = \alpha'(b), \quad \dots, \quad \alpha^{(m)}(a) = \alpha^{(m)}(b)$$

im Anfangs- und im Endpunkt der parametrisierten Kurve übereinstimmen.

Eine wesentliche Beobachtung bei geschlossenen Kurven ist, dass die Polarwinkel von Anfangs- und Endpunkt sich nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden können.

Definition 19 (Windungszahl stetiger Kurven). Seien $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine geschlossene Kurve, $p \notin \text{sp}(\alpha)$ ein gegebener Punkt, und θ_p der Polarwinkel der um p verschobenen Kurve $\alpha_p(t) := \alpha(t) - p$. Dann heißt

$$\text{wn}(\alpha, p) := \frac{\theta_p(b) - \theta_p(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

die Windungszahl der Kurve α bzgl. des Punktes p .



Abbildung 1.7: Links: Die Windungszahl bzw. der Polarwinkel θ_p einer festen Kurve α bzgl. eines Punktes p hängt entscheidend von der Lage von p ab. Rechts: Die Windungszahl einer gegebenen Kurve α (schwarz) für verschiedene Wahlen des Punktes p (bunt). Die Windungszahl ist – für gegebenes α als Funktion in $p \notin \text{sp}(\alpha)$ betrachtet – auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \text{sp}(\alpha)$ konstant.

Das Konzept der Windungszahl kann auch auf Tangentialvektoren angewendet werden, und dies führt zu dem zweiten zentralen Begriff dieses Abschnitts.

Definition 20 (Umlaufzahl regulärer geschlossener Kurven). Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reguläre und geschlossene Kurve. Dann heißt

$$\text{ind}(\alpha) := \text{wn}(\dot{\alpha}, 0) \in \mathbb{Z}$$

die Umlaufzahl (oder der Rotationsindex) der Kurve α .

Man zeigt leicht, dass sowohl die Windungszahl als auch die Umlaufzahl¹⁶ geometrische Größen sind und sich daher unter Reparametrisierungen der Kurve nicht ändern. Beide ändern sich auch nicht bei Drehungen und Verschiebungen von α , sofern bei der Windungszahl der Punkt p entsprechend mitbewegt wird.

Lemma 21 (Umlaufzahl und Krümmung). Für jede reguläre und zweimal stetig differenzierbare Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt¹⁷

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\omega}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

¹⁶Windungszahlen und Umlaufzahlen werden in der Literatur zum Teil anders bezeichnet. Wichtig ist, dass das eine Konzept eine Kurve und einen Punkt, aber keine Ableitungen involviert, wohingegen das andere Konzept eine Eigenschaft differenzierbarer Kurven ist.

¹⁷Ist α nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\kappa(s) = \omega'(s)$.

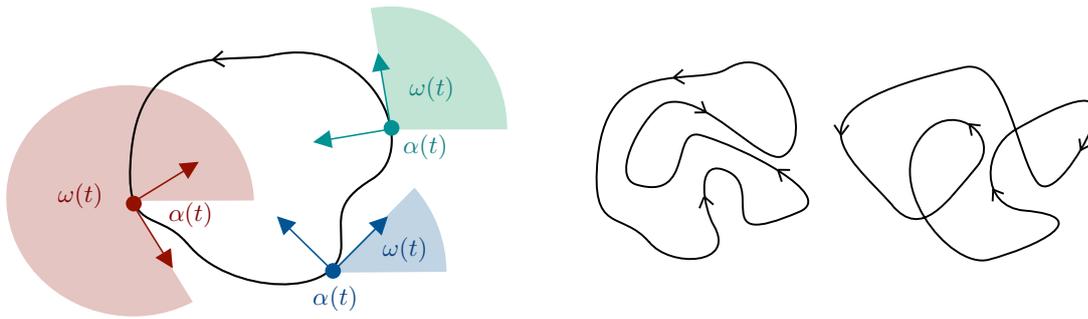


Abbildung 1.8: Links: Die Umlaufzahl einer Kurve α ist über den Polarwinkel ω des Tangentialvektors definiert, dessen Änderung bzgl. der Bogenlänge gerade durch die Krümmung beschrieben wird, siehe (1.10). Rechts: Zwei geschlossene Kurven mit Umlaufzahl +1.



Abbildung 1.9: Beispiele für die Umlaufzahlen +2 und -3.

wobei $\omega : [a, b]$ der Polarwinkel des Tangentialvektors $\dot{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist. Insbesondere gilt¹⁸

$$\text{ind}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) |\dot{\alpha}(t)| dt, \quad (1.11)$$

sofern α auch geschlossen ist.

Beweis. Wir führen den Beweis in dem einfachen Fall, dass α nach Bogenlänge parametrisiert ist, und schreiben daher wieder $\alpha(s)$ und $\alpha'(s)$ statt $\alpha(t)$ und $\dot{\alpha}(t)$. Der allgemeine Fall kann anschließend mittels direkter Rechnungen wie im Beweis von Lemma 16 auf den einfachen Fall zurückgeführt werden.

Nach Konstruktion und vereinfachender Annahme gilt

$$e_1(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s)) = (\cos(\omega(s)), \sin(\omega(s)))$$

und die Kettenregel impliziert

$$e'_1(s) = (\alpha''_1(s), \alpha''_2(s)) = \omega'(s) (-\sin(\omega(s)), \cos(\omega(s))) = \omega'(s) e_2(s).$$

Aus den Frenetschen Gleichungen – siehe (1.7) – folgt nun unmittelbar $\kappa(s) = \omega'(s)$ durch Koeffizientenvergleich und Integration über s ergibt $2\pi \text{ind}(\alpha) = \int_a^b \kappa(s) ds$. \square

Polarwinkelfunktionen existieren nicht nur entlang von Kurven, sondern auch auf hinreichend guten Teilmengen des \mathbb{R}^2 .

¹⁸Das Integral auf der rechten Seite von (1.11) ist gerade das Kurvenintegral erster Art von κ , das invariant unter Reparametrisierungen ist. In diesem Sinne gilt $2\pi \text{ind}(\alpha) = \int_{\alpha} \kappa ds$.

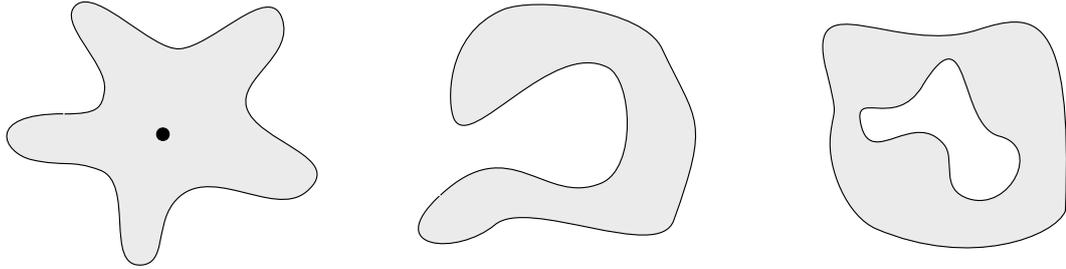


Abbildung 1.10: Beispiele für eine sternförmige Menge (mit markiertem Zentralpunkt), eine einfach-zusammenhängende, aber nicht sternförmige Menge sowie eine nicht einfach-zusammenhängende Menge (jeweils die graue Fläche). Die ersten beiden Beispiele illustrieren auch den Jordanschen Kurvensatz aus Theorem 25, weil der Rand jeweils als Spur einer einfach geschlossenen Kurve betrachtet werden kann.

Lemma 22 (Hilfssatz über Polarwinkelfunktionen auf sternförmigen Gebieten). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sternförmig¹⁹ bzgl. $x_* \in \Omega$ und sei $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein stetiges Vektorfeld. Dann existiert eine stetige Abbildung $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$\psi(x) = |\psi(x)| \left(\cos(\theta(x)), \sin(\theta(x)) \right)$$

für alle $x \in \Omega$. Dabei ist θ eindeutig bis auf die Addition einer konstanten Funktion $x \mapsto 2\pi j$ für festes $j \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Konstruktion von θ : Wir setzen o.B.d.A. $x_* = 0$ und wählen $\theta(0) \in \mathbb{R}$ als Winkel von $\psi(0)$. Für jedes $x \in \Omega$ ist nun nach Voraussetzung die parametrisierte Verbindungsstrecke

$$t \in [0, 1] \mapsto tx \in \Omega$$

in Ω enthalten und mit Lemma 17 ist θ entlang der Kurve

$$t \in [0, 1] \mapsto \psi(tx) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

eindeutig festgelegt und dort auch stetig. Insbesondere ist $\theta(x)$ für jedes $x \in \Omega$ durch diese Konstruktion wohldefiniert, aber wir müssen noch zeigen, dass $\theta(x)$ stetig von x abhängt.

Stetigkeit von θ : Wir führen den Nachweis indirekt und nehmen an, dass θ nicht stetig ist. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gegen einen Grenzwert $x_\infty \in \Omega$ konvergiert, so dass $\theta(x_n)$ nicht gegen $\theta(x_\infty)$ konvergiert. Da aber $\psi(x_n)$ gegen $\psi(x_\infty)$ konvergiert (Stetigkeit von ψ), kann dies nur gelten, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\theta(x_n) - \theta(x_\infty)| \geq 2\pi.$$

Für alle hinreichend großen n betrachten wir nun die nach Konstruktion stetige Funktion

$$t \in [0, 1] \mapsto g_n(t) := |\theta(tx_n) - \theta(tx_\infty)|$$

¹⁹ Ω ist per Definition genau dann sternförmig bzgl. x_* , wenn für jeden Punkt in Ω auch die affine Verbindungsstrecke zwischen x_* und x zu Ω gehört, d.h. $x \in \Omega$ impliziert $\{(1-t)x_* + tx : t \in [0, 1]\} \subset \Omega$. Der Punkt x_* wird auch *Zentrum* von Ω genannt.

für die $g_n(0) = 0$ und $g_n(1) \geq \frac{3}{2}\pi$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $t_n \in [0, 1]$ mit $g_n(t_n) = \pi$, d.h. $\psi(t_n x_n)$ und $\psi(t_n x_\infty)$ sind immer antipodale Vektoren mit

$$\psi(t_n x_n) = -\psi(t_n x_\infty).$$

Nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge können wir außerdem $t_n \rightarrow t_\infty \in [0, 1]$ annehmen, und die Stetigkeit von ψ impliziert via

$$\psi(t_\infty x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n x_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n x_\infty) = -\psi(t_\infty x_\infty)$$

den gewünschten Widerspruch wegen $t_\infty x_\infty \in \Omega$ und $\psi(t_\infty x_\infty) \neq 0$. \square

Lemma 22 gilt auch für *einfach-zusammenhängende* Mengen, d.h. salopp gesprochen, sofern Ω keine Löcher aufweist (siehe Abbildung 1.10). Das Standardgegenbeispiel für nicht einfach zusammenhängende Mengen ist

$$\Omega = B_2(0) \setminus B_1(0), \quad \psi(x_1, x_2) = (-x_2, x_1),$$

also ein um das Loch in einem Kreisring rotierendes Vektorfeld. Für dieses kann *keine* stetige Polarwinkelfunktion auf ganz Ω definiert werden.

Wegen $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ kann Ω auch als Teilmenge von \mathbb{C} interpretiert werden und ψ kann via

$$x_1 + ix_2 \cong (x_1, x_2) \mapsto (\psi_1(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)) \cong \psi_1(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2)$$

als Abbildung von $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet werden. Die entsprechende Funktion θ heißt dann *Argumentfunktion von ψ auf Ω* und spielt eine wichtige Rolle in der Komplexen Analysis. Insbesondere definieren Argument-Funktionen θ_* der Identität $\psi(x) = x$ mittels

$$\log(x_1 + ix_2) = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + i\theta_*(x_1, x_2)$$

einen Zweig des Komplexen Logarithmus auf $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und umgekehrt.

1.2.3 Globale Analysis geschlossener Kurven

Theorem 23 (Hopfscher²⁰ Umlaufsatz für einfach geschlossene Kurven). *Für jede reguläre und einfach geschlossene Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt entweder $\text{ind}(\alpha) = +1$ oder $\text{ind}(\alpha) = -1$.*

Beweis. Wir können o.B.d.A $a = 0$ und $b = 1$ annehmen, setzen

$$\Omega := \{(t_1, t_2) \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\}$$

und definieren die normalisierte Sekantenabbildung $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ durch

$$\psi(t_1, t_2) := \begin{cases} \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|} & \text{für } 0 \leq t_1 < t_2 < 1, \\ \frac{\dot{\alpha}(t_1)}{|\dot{\alpha}(t_1)|} & \text{für } 0 \leq t_1 = t_2 \leq 1, \\ -\frac{\dot{\alpha}(0)}{|\dot{\alpha}(0)|} & \text{für } t_1 = 0 \text{ und } t_2 = 1, \end{cases}$$

²⁰Heinz Hopf (1894-1971), deutsch-schweizerischer Mathematiker.

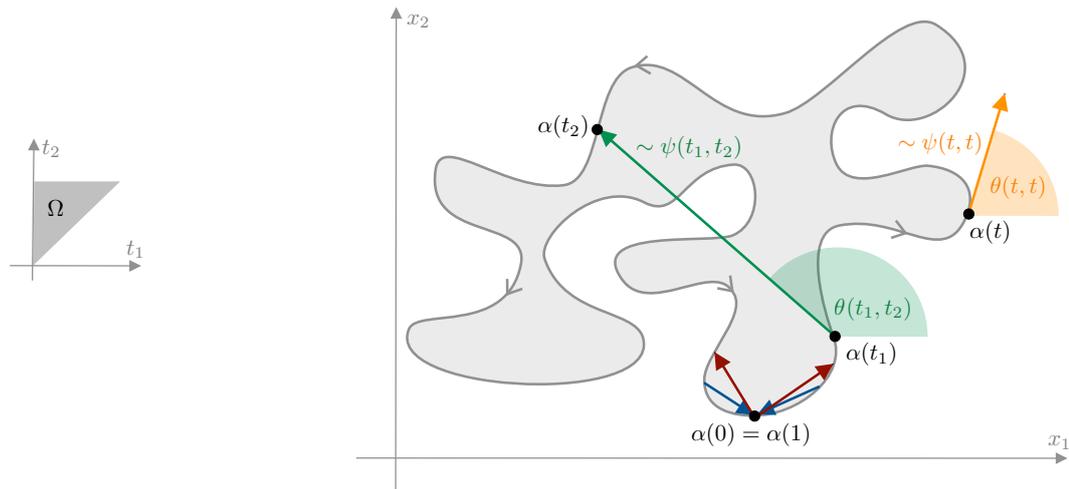


Abbildung 1.11: Zum Beweis von Theorem 23: $\psi(t_1, t_2)$ ist für $t_1 < t_2$ der normierte Sekantenvektor zwischen $\alpha(t_1)$ und $\alpha(t_2)$ und definiert den Polarwinkel $\theta(t_1, t_2)$. Die roten bzw. blauen Pfeile illustrieren die Grenzübergänge $t_2 \rightarrow 0$ und $t_2 \rightarrow 1$ für $t_1 = 0$ bzw. $t_1 \rightarrow 0$ und $t_1 \rightarrow 1$ für $t_2 = 1$.

siehe Abbildung 1.11. Diese Funktion ist wohldefiniert und stetig auf der sternförmigen Menge Ω und nimmt darüber hinaus nur Werte in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an, weil die Kurve α sowohl regulär (Tangentialvektoren verschwinden nicht) als auch einfach geschlossen (Sekantenvektoren verschwinden nicht) ist. Damit existiert eine Polarwinkelfunktion $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Lemma 22 und durch einfache Grenzprozesse verifizieren wir

$$\theta(0, 1) - \theta(0, 0) = +\pi = \theta(1, 1) - \theta(0, 1).$$

Andererseits gilt

$$\omega(t) = \theta(t, t)$$

wobei ω die Polarwinkelfunktion zum Tangentialvektor $\dot{\alpha}$ ist, und dies liefert via

$$\omega(1) - \omega(0) = \theta(1, 1) - \theta(0, 0) = \left(\theta(1, 1) - \theta(0, 1)\right) + \left(\theta(0, 1) - \theta(0, 0)\right) = 2\pi$$

und Definition 20 die Behauptung. □

Folgerung 24 (Wegintegral der Absolutkrümmung). *Sei α wie in Theorem 23. Dann gilt*

$$\int_a^b |\kappa(t)| |\dot{\alpha}(t)| dt \geq 2\pi$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn κ sein Vorzeichen nicht wechselt.

Beweis. Lemma 21 und Theorem 23. □

Wir formulieren schließlich ein weiteres zentrales Resultat der globalen Theorie planarer Kurven, müssen aber für einen Beweis auf die Literatur verweisen (ein Beweis für den Spezialfall reguläre Kurven findet sich in [doC, Seite 400]), da dieser mit den Mitteln dieser Vorlesung nicht zu führen ist.

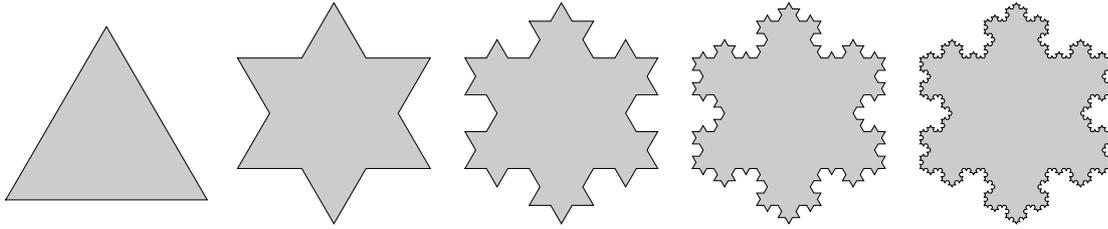


Abbildung 1.12: Der Jordansche Kurvensatz gilt sogar dann, wenn die geschlossene Kurve nicht differenzierbar, sondern nur stetig ist. Ein Beispiel ist der Rand der Kochschen Schneeflocke, die als Grenzkurve einer Folge von geschlossenen Polygonzügen definiert wird. Dargestellt sind die ersten 5 Kurven dieser approximierenden Folge, wobei der graue Bereich immer das Innere der Kurve, also die beschränkte Zusammenhangskomponente aus Theorem 25, repräsentiert. Der Rand der Kochschen Schneeflocke ist übrigens fraktal mit Dimension $\ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$

Theorem 25 (Jordanscher²¹ Kurvensatz). *Die Spur einer einfach geschlossenen Kurve zerlegt den \mathbb{R}^2 in genau zwei Zusammenhangskomponenten, wobei die eine (die innere Menge) beschränkt ist und die andere (die äußere Menge) unbeschränkt ist.*

Wir werden auch den folgenden Satz nicht beweisen, obwohl wir dies mit den Kenntnissen dieser Vorlesung könnten (siehe zum Beispiel [Kue, Seite 29]).

Satz 26. *Sei $\alpha[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, reguläre und zweimal stetig differenzierbare Kurve mit innerer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. Die Menge Ω ist konvex.
2. Jede affine Gerade schneidet $\bar{\Omega}$ entweder überhaupt nicht oder in einer Strecke, wobei letztere auch zu einem Punkt entarten kann.
3. Jede affine Gerade schneidet $\partial\Omega = \text{sp}(\alpha)$ entweder überhaupt nicht, oder in einer Strecke, oder in zwei Punkten.
4. Die Krümmung κ von α wechselt nicht ihr Vorzeichen. d.h. es gilt entweder $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in [a, b]$.
5. Für jedes $t \in [a, b]$ liegt die Spur von α ganz auf einer Seite der Tangentialgerade durch den Punkt $\alpha(t)$.

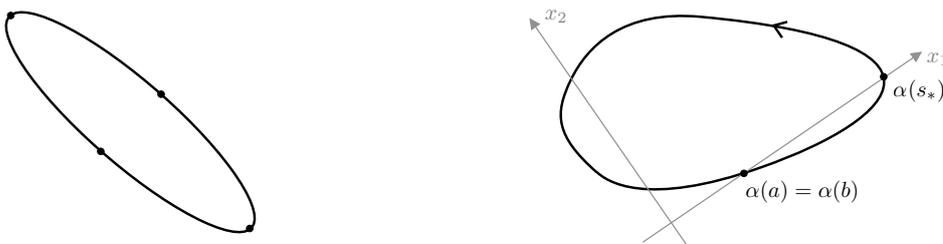


Abbildung 1.13: Links: Die vier Scheitelpunkte einer Ellipse. Rechts: Zum Beweis von Theorem 27.

²¹Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), französischer Mathematiker.

Theorem 27 (Vier-Scheitel-Satz). *Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, reguläre und dreimal stetig differenzierbare Kurve, die darüberhinaus Rand einer konvexen Menge Ω ist. Dann besitzt α mindestens vier Scheitelpunkte, d.h. lokale Extrema der Krümmung κ .*

Beweis. Vorüberlegungen: Wir nehmen o.B.d.A an, dass α nach dem Bogenlängenparameter s parametrisiert ist, und müssen nur den Fall betrachten, dass κ auf keinem Teilintervall konstant ist, da wir andernfalls schon unendlich viele Scheitelpunkte hätten. Damit entsprechen die Scheitelpunkte gerade den Nullstellen mit echtem Vorzeichenwechsel der Funktion $\kappa' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Da aber $\kappa'(a) = \kappa'(b)$ nach Voraussetzung gilt (siehe Definition 18) muss die Anzahl der echten Vorzeichenwechsel von κ gerade sein. Andererseits besitzt die stetige Funktion κ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ mindestens ein globales Minimum und ein globales Maximum, die wegen der obigen Nichtdegeneriertheitsannahme echten Vorzeichenwechseln von κ' entsprechen. Wir müssen also nur zeigen, dass die Funktion κ' noch mindestens einen weiteren Vorzeichenwechsel besitzt.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass κ nur die zwei oben genannten Extremalstellen besitzt. O.B.d.A. können wir außerdem annehmen, dass das Minimum bzw. das Maximum bei $s = a$ bzw. $s = s_*$ angenommen werden und dass sowohl $\alpha(0)$ als auch $\alpha(s_*)$ auf der x_1 -Achse liegen, siehe Abbildung 27. Da Ω konvex ist und κ auf keinem Intervall konstant ist, kann die zweite Kurvenkomponente α_2 weder in dem offenen Intervall (a, s_*) noch in (s_*, b) eine Nullstelle besitzen, und wir schließen, dass $\kappa'\alpha_2$ das Vorzeichen nicht wechselt, dass also entweder $\kappa'(s)\alpha_2(s) \geq 0$ für alle $s \in [a, b]$ oder $\kappa'(s)\alpha_2(s) \leq 0$ für alle $s \in [a, b]$. Die Frenetschen Gleichungen implizieren

$$\alpha_1''(s) = -\kappa(s)\alpha_2'(s)$$

und nach Integration über $s \in [a, b]$ sowie Ausnutzung der partiellen Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa'(s)\alpha_2(s) \, ds &= \left[\kappa(s)\alpha_2(s) \right]_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \kappa(s)\alpha_2'(s) \, ds \\ &= \int_a^b \alpha_1''(s) \, ds = \left[\alpha_1'(s) \right]_{s=a}^{s=b} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Geschlossenheit der Kurve ausgenutzt haben. Wegen der Vorzeichen- und Nullstelleneigenschaften des Integranden auf der linken Seite erhalten wir $\kappa'(s) = 0$ für alle $s \in [a, b]$, aber das widerspricht der Nicht-Konstanz von κ . \square

Theorem (27) gilt auch, wenn die innere Menge von α nicht konvex ist, aber dann ist der Beweis aufwendiger.

1.2.4 Deformationen von Kurven

In diesem Abschnitt betrachten wir einparametrische Schaaren von Kurven.

Definition 28 (Familien von Kurven). *Seien J ein Intervall, $a, b : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen mit $a(\tau) < b(\tau)$ für alle $\tau \in J$ und*

$$\Omega := \{(\tau, t) : \tau \in J, \quad a(\tau) \leq t \leq b(\tau)\}.$$

Eine stetige Familie von m -mal stetig differenzierbaren (parametrisierten) Kurven ist eine stetige Abbildung $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass für jedes $j = 0, \dots, m$ die Abbildungen

$$(\tau, t) \in \Omega \quad \mapsto \quad \partial_t^{(j)} \alpha(\tau, t) \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert und stetig auf Ω sind. Die Familie heißt k -mal stetig differenzierbar, wenn die Terme $\partial_t^{(j)} \alpha(\tau, t)$ sogar k -mal stetig differenzierbar von $\tau \in J$ abhängen.

Bemerkung. Analoge Definitionen gelten für Familien geschlossener Kurven, wobei zusätzlich

$$\partial_t^{(j)} \alpha(\tau, a(\tau)) = \partial_t^{(j)} \alpha(\tau, b(\tau))$$

für alle $\tau \in J$ und alle $j = 0, \dots, m$ gefordert wird. Außerdem können alle Begriffe auch in höheren Dimensionen ($d = 3$ usw.) verwendet werden.

Wir schreiben manchmal auch

$$\alpha_\tau(t) \quad \text{statt} \quad \alpha(\tau, t), \quad \dot{\alpha}_\tau(t) \quad \text{statt} \quad \partial_t \alpha(\tau, t), \quad \text{usw.}$$

um deutlich zu machen, dass wir eine Familie (oder *Schaar*) von Kurven betrachten, wobei τ gerade der sogenannte *Schaarparameter* ist. Wir bemerken außerdem, dass für Familien regulärer Kurven die Frenet-Größen

$$e_j(\tau, t) = e_{\tau,j}(t), \quad \kappa(\tau, t) = \kappa_\tau(t)$$

wohldefiniert sind.

Wir werden nun zunächst eine weitere Interpretation von Krümmung ableiten, die später wichtig werden wird.

Lemma 29 (Krümmung und Variation der Länge). *Sei*

$$(\tau, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \quad \mapsto \quad \alpha(\tau, t) \in \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Familie regulärer Kurven mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten, d.h. $\alpha(\tau, a) = \alpha(0, a)$ und $\alpha(\tau, b) = \alpha(0, b)$ für alle $\tau \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\tau} \text{len}(\alpha_\tau) = - \int_a^b \kappa_\tau(t) \eta_\tau(t) |\dot{\alpha}_\tau(t)| dt,$$

wobei

$$\eta(\tau, t) = \langle \partial_\tau \alpha(\tau, t), e_2(\tau, t) \rangle$$

gerade den Normalenanteil des infinitesimalen Verschiebungsvektors angibt.

Beweis. Es reicht, die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $\tau_* \in J$ zu zeigen und o.B.d.A. können wir annehmen, dass zumindest die Kurve α_{τ_*} nach Bogenlänge parametrisiert ist (ohne diese Annahme sind die nachfolgenden Rechnungen komplizierter). Dann gilt

$$\frac{d}{d\tau} \text{len}(\alpha_\tau) = \int_a^b \partial_\tau \sqrt{\langle \partial_t \alpha(\tau, t), \partial_t \alpha(\tau, t) \rangle} dt = \int_a^b \frac{\langle \partial_t \alpha(\tau, t), \partial_t \partial_\tau \alpha(\tau, t) \rangle}{|\partial_t \alpha(\tau, t)|} dt$$

für jedes $\tau \in J$, sowie die vereinfachte Formel

$$\frac{d}{d\tau} \text{len}(\alpha_\tau) \Big|_{\tau=\tau_*} = \int_a^b \langle \partial_t \alpha(\tau_*, t), \partial_t \partial_\tau \alpha(\tau_*, t) \rangle dt.$$

Nach partieller Integration bzgl. t erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau} \text{len}(\alpha_\tau) \Big|_{\tau=\tau_*} = \left(\partial_t \alpha(\tau_*, t) \partial_\tau \alpha(\tau_*, t) \right)_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \langle \partial_t^2 \alpha(\tau_*, t), \partial_\tau \alpha(\tau_*, t) \rangle dt.$$

wobei die Randterme wegen der fixierten Endpunkte verschwinden. Nun gilt aber auch

$$\partial_t \alpha(\tau_*, t) = e_1(\tau_*, t), \quad \partial_t^2 \alpha(\tau_*, t) = \partial_t e_1(\tau_*, t) = \kappa(\tau_*, t) e_2(\tau_*, t)$$

und Einsetzen liefert den den Spezialfall der Behauptung wegen $|\partial_\tau \alpha(\tau_*, t)| = 1$. \square

Als nächstes wollen wir ein wichtiges topologisches Konzept einführen, das eng mit speziellen Familien geschlossener Kurven zusammenhängt.

Definition 30 (Homotopie planarer Kurven). *Seien $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\tilde{\beta} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei planare Kurven. Eine stetige Familie von Kurven*

$$\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Omega := \{(\tau, t) : 0 \leq \tau \leq 1, (1-\tau)a + \tau\tilde{a} \leq t \leq (1-\tau)b + \tau\tilde{b}\}$$

mit

$$\alpha(0, t) = \beta(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b] \quad \text{und} \quad \alpha(1, t) = \tilde{\beta}(t) \quad \text{für alle } t \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$$

heißt stetige Homotopie zwischen β und $\tilde{\beta}$.

Bemerkung.

1. Analog zur Bemerkung nach Definition 28 können Homotopien m -mal stetig-differenzierbarer Kurven und Homotopien geschlossener Kurven definiert werden. Außerdem können Homotopien k -mal stetig differenzierbar sein.
2. Wir nennen eine Homotopie α regulär, wenn sie stetig differenzierbar ist (bzgl. τ und t) und wenn der Tangentenvektor $\partial_t \alpha$ niemals verschwindet. Eine reguläre Homotopie ist also eine stetig-differenzierbare Familie von regulären Kurven.
3. Die Existenz einer Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation \sim auf der Menge der planaren Kurven (Übungsaufgabe). Insbesondere gilt

$$\beta \sim \beta, \quad \beta \sim \tilde{\beta} \implies \tilde{\beta} \sim \beta, \quad \beta \sim \tilde{\beta} \wedge \tilde{\beta} \sim \bar{\beta} \implies \beta \sim \bar{\beta}$$

4. Analoge Definitionen gelten für $d = 3$ usw.

Lemma 31 (Trivialfälle). *Seien β und $\tilde{\beta}$ zwei reguläre Kurven. Dann sind die folgenden Aussagen hinreichend für die Existenz einer regulären Homotopie.*

1. β und $\tilde{\beta}$ unterscheiden sich nur durch eine orientierungserhaltende Reparametrisierung.

2. β und $\tilde{\beta}$ unterscheiden sich nur durch eine Drehung oder eine Verschiebung oder eine Reskalierung.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 32 (Invarianz der Umlaufzahl unter regulären Homotopien). *Existiert eine reguläre Homotopie zwischen den geschlossenen Kurven β und $\tilde{\beta}$, so gilt $\text{ind}(\beta) = \text{ind}(\tilde{\beta})$.*

Beweis. Nach Definition von regulärer Homotopie ist die Tangentenvektorabbildung

$$\psi := \partial_t \alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit α und Ω wie in Definition 30 wohldefiniert und stetig mit Werten in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Damit – und weil das Trapez Ω sternförmig bzgl. eines jeden inneren Punktes ist – existiert eine entsprechende stetige Polarwinkelfunktion $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Lemma 22. Insbesondere ist die Abbildung

$$\tau \in [0, 1] \quad \mapsto \quad \text{ind}(\alpha_\tau) = \frac{1}{2\pi} \left(\theta(\tau, (1-\tau)b + \tau\tilde{b}) - \theta(\tau, (1-\tau)a + \tau\tilde{a}) \right) \in \mathbb{Z}$$

stetig, aber die einzigen stetigen Funktionen mit Werten in der diskreten Menge \mathbb{Z} sind die konstanten Funktionen. □

Theorem 33 (Satz von Whitney und Graustein²²). *Seien β und $\tilde{\beta}$ zwei reguläre und geschlossene Kurven mit $\text{ind}(\beta) = \text{ind}(\tilde{\beta})$. Dann existiert eine reguläre Homotopie zwischen β und $\tilde{\beta}$.*

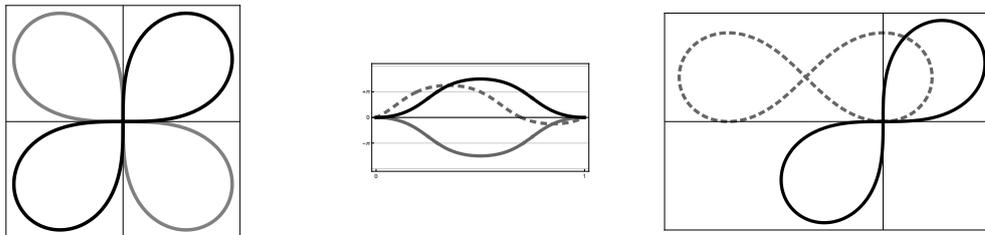


Abbildung 1.14: Illustration des speziellen Entartungsfalls im Beweis von Theorem 33. *Links:* Beispiele für Kurven β und $\tilde{\beta}$ (in Schwarz und Grau), für die die Homotopie in (1.15) entartet. *Mitte:* Die entsprechenden Polarwinkelfunktionen ω und $\tilde{\omega}$, deren Konvexkombination (1.14) für $\tau = \tau_*$ eine konstante Funktion ist. *Rechts:* Der Entartungsfall kann vermieden werden, wenn in (1.15) statt $\tilde{\beta}$ ein homotoper Ersatz (gepunktet) betrachtet wird (die konkrete Konstruktion am Ende des Beweises von Theorem 33 ist etwas anders, aber ganz ähnlich).

Beweis. Vorüberlegungen: Wir müssen die Behauptung nur in dem folgenden Spezialfall beweisen:

(C1) β und $\tilde{\beta}$ besitzen beide die Länge 1 und sind jeweils nach Bogenlänge über dem Intervall $[0, 1]$ parametrisiert.

²²Hassler Whitney (1907-1989) und William Caspar Graustein (1888-1941), US-amerikanische Mathematiker.

(C2) Es gilt

$$\beta(0) = \tilde{\beta}(0) = (0, 0), \quad \beta'(0) = \tilde{\beta}'(0) = (1, 0) \quad (1.12)$$

und damit auch

$$\lambda(0) = \tilde{\lambda}(0), \quad \lambda(1) = \tilde{\lambda}(1) = 2\pi N,$$

wobei $N \in \mathbb{Z}$ die gemeinsame Umlaufzahl von β und $\tilde{\beta}$ bezeichnet und λ bzw. $\tilde{\lambda}$ via

$$\beta'(s) = (\cos(\lambda(s)), \sin(\lambda(s))), \quad \tilde{\beta}'(s) = (\cos(\tilde{\lambda}(s)), \sin(\tilde{\lambda}(s))), \quad (1.13)$$

die Polarwinkelfunktionen von β' bzw. $\tilde{\beta}'$ wie in Lemma 17 darstellen.

In der Tat, im allgemeinen Fall können wir durch Reskalierung und/oder Umparametrisierung und/oder Verschiebung und/oder Drehung β in eine Kurve γ und $\tilde{\beta}$ in eine Kurve $\tilde{\gamma}$ überführen, so dass die transformierten Kurven die gewünschten Eigenschaften besitzen. Nach Lemma 31 gilt dann $\beta \sim \gamma$ und $\tilde{\beta} \sim \tilde{\gamma}$ und die obigen Bemerkungen zur homotopischen Äquivalenzrelation zeigen, dass $\beta \sim \tilde{\beta}$ genau dann gilt, wenn $\gamma \sim \tilde{\gamma}$.

Konstruktion der Homotopie: Wir interpolieren die Polarwinkel der Tangentenvektoren via

$$\omega(\tau, s) := (1 - \tau)\lambda(s) + \tau\tilde{\lambda}(s) \quad (1.14)$$

und definieren eine Abbildung $\hat{\alpha} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\hat{\alpha}(\tau, s) := \int_0^s (\cos(\omega(\tau, \hat{s})), \sin(\omega(\tau, \hat{s}))) d\hat{s}.$$

Diese Abbildung ist stetig differenzierbar (und damit eine hinreichend gute Familie von Kurven), aber es muss nicht unbedingt $\hat{\alpha}(\tau, 0) = \hat{\alpha}(\tau, 1)$ für alle $\tau \in (0, 1)$ gelten. Die modifizierte Familie

$$\alpha(\tau, s) := \hat{\alpha}(\tau, s) - s\hat{\alpha}(\tau, 1) \quad (1.15)$$

besitzt aber alle gewünschten Eigenschaften, wie wir nun zeigen werden.

Nachweis der Homotopie-Eigenschaften: Nach Konstruktion gilt

$$\hat{\alpha}(0, s) = \int_0^s (\cos(\lambda(\hat{s})), \sin(\lambda(\hat{s}))) d\hat{s} = \beta(s)$$

sowie

$$\hat{\alpha}(1, s) = \int_0^s (\cos(\tilde{\lambda}(\hat{s})), \sin(\tilde{\lambda}(\hat{s}))) d\hat{s} = \tilde{\beta}(s),$$

wobei wir (1.13) sowie die Normierung (1.12) verwendet haben. Formel (1.15) liefert daher

$$\alpha(0, s) = \hat{\alpha}(0, s) = \beta(s), \quad \alpha(1, s) = \tilde{\beta}(s) - s\tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta}(s)$$

für alle $s \in [0, 1]$, d.h. α ist wirklich Homotopie zwischen β und $\tilde{\beta}$. Desweiteren gilt

$$\alpha(\tau, 1) = (0, 0) = \alpha(\tau, 0)$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_s \alpha(\tau, 1) - \partial_s \alpha(\tau, 0) &= \partial_s \hat{\alpha}(\tau, 1) - \partial_s \hat{\alpha}(\tau, 0) \\ &= \left(\cos(\omega(\tau, 1)), \sin(\omega(\tau, 1)) \right) - \left(\cos(\omega(\tau, 0)), \sin(\omega(\tau, 0)) \right) \\ &= \left(\cos(2\pi N), \sin(2\pi N) \right) - \left(\cos(0), \sin(0) \right) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

d.h. $s \mapsto \alpha(\tau, s)$ ist für jedes $\tau \in [0, 1]$ wirklich eine geschlossene und stetig differenzierbare Kurve. Es bleibt zu zeigen, dass

$$|\partial_s \alpha(\tau, s)| > 0$$

für alle $(\tau, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ gilt.

Nachweis der Regularität: Angenommen es existiert $(\tau_*, s_*) \in (0, 1) \times [0, 1]$, so dass

$$\partial_s \alpha(\tau_*, s_*) = (0, 0).$$

Dann gilt

$$|\hat{\alpha}(\tau_*, 1)| = 1$$

wegen (1.15) und wir schließen, dass die Kurve

$$s \mapsto \hat{\alpha}(\tau_*, s) \tag{1.16}$$

zwei Punkte verbindet, deren euklidischer Abstand den Wert 1 annimmt. Andererseits ist diese Kurve per Definition nach Bogenlänge parametrisiert und besitzt damit auch die Länge 1. Aus den letzten beiden Überlegungen folgt (siehe Übungsaufgabe), dass die Kurve (1.16) die Gerade ist, die $\hat{\alpha}(\tau_*, 0) = (0, 0)$ mit $\hat{\alpha}(\tau_*, 1)$ verbindet, und dies impliziert

$$c = \omega(\tau_*, s) = (1 - \tau_*)\lambda(s) + \tau_*\tilde{\lambda}(s) \tag{1.17}$$

für eine geeignete Konstante c und alle $s \in [0, 1]$. Aufgrund der Vorüberlegungen gilt aber

$$c = \omega(\tau_*, 0) = 0 \quad \text{sowie} \quad c = \omega(\tau_*, 1) = 2\pi N$$

und wir schließen $c = 0$ und $N = 0$. Damit haben wir im Fall von $N \neq 0$ den gewünschten Widerspruch konstruiert und insbesondere die behauptete Regularität der Homotopie gezeigt.

Nachbetrachtungen: Für $N = 0$ muss die von uns konstruierte Homotopie nicht unbedingt regulär sein, siehe Abbildung 1.14. Wir können aber in diesem Fall durch folgende Überlegungen eine verbesserte Konstruktion angeben. Da nun $\lambda(0) = \lambda(1) = 0$ und $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{\lambda}(1) = 0$ gilt, können sowohl λ als auch $\tilde{\lambda}$ zu einer stetigen periodischen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden, die jeweils ein globales Maximum und ein globales Minimum annehmen (das ist im Fall von $N \neq 0$ nicht möglich). Nach geeigneten Reparametrisierungen von β und $\tilde{\beta}$ können wir deshalb annehmen, dass neben (C1) und (C2) zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt ist:

(C3) Für alle $s \in [0, 1]$ gilt sowohl $\lambda(0) \geq \lambda(s)$ als auch $\tilde{\lambda}(0) \geq \tilde{\lambda}(s)$.

In der Tat, diese Bedingung kann immer erreicht, weil bei einer geschlossenen Kurve jeder Punkt nach einer geeigneten Reparametrisierung der Kurve als Anfangs- und Endpunkt gewählt werden kann. Wir können nun alle Argumente von oben wiederholen und erhalten unter derselben Widerspruchsannahme wieder die Gleichungen (1.17) mit $c = 0$. Insbesondere gilt

$$\lambda(s) = -\frac{\tau_*}{1 - \tau_*} \tilde{\lambda}(s),$$

und in Kombination mit (C3) auch

$$\lambda(0) \geq \lambda(s) \quad \text{sowie} \quad \lambda(0) = -\frac{\tau_*}{1 - \tau_*} \tilde{\lambda}(0) \leq -\frac{\tau_*}{1 - \tau_*} \tilde{\lambda}(s) = \lambda(s),$$

wobei wir $-\infty < -\tau_*/(1 - \tau_*) < 0$ benutzt haben. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass sowohl λ als auch $\tilde{\lambda}$ konstant sind und gar nicht von s abhängen. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass β und $\tilde{\beta}$ geschlossen und regulär sind. \square

1.3 Raumkurven

In diesem Abschnitt gilt $d = 3$.

1.3.1 Frenet-Theorie

In Übereinstimmung mit Definition 8 betrachten wir in diesem Abschnitt nach Bogenlänge parametrisierte und dreimal stetig differenzierbare Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass für jedes $t \in I$ die zwei Vektoren $\alpha'(s)$ und $\alpha''(s)$ linear unabhängig sind (und damit auch nicht verschwinden). Insbesondere existiert nach Lemma 9 das Frenetsche 3-Bein

$$e_1(s) = \alpha'(s), \quad e_2(s) = \alpha''(s)/|\alpha''(s)|, \quad e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s),$$

dessen Vektoren die Tangente, Normale, und Binormale genannt²³ werden. Die Formel für e_3 kann auch als

$$e_3(t) = (\alpha'(t) \times \alpha''(t)) / |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|$$

geschrieben werden.

Bemerkung (Kreuzprodukt in 3D). Seien $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$ zwei beliebige Vektoren im \mathbb{R}^3 . Dann gilt

$$u \times v = -v \times u = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

wobei b_i der i -te Einheitsvektor im \mathbb{R}^3 ist und die Determinantenformel rein symbolisch zu verstehen ist. Insbesondere verschwindet $u \times v$, sofern u und v parallel sind. Andernfalls steht $u \times v$ immer senkrecht auf u und v – wobei die Basis aus u , v , und $u \times v$ immer positiv orientiert ist – und die Länge von $u \times v$ ist gerade der Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms. Hieraus folgen auch die Formel

$$b_1 \times b_2 = b_3, \quad b_2 \times b_3 = b_1, \quad b_3 \times b_1 = b_2$$

die natürlich auch direkt nachgerechnet werden können.

²³In der Literatur wird das Dreibein $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ oft als $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ bezeichnet.

Nach Satz 10 gibt es nun zwei Frenet-Krümmungen κ_1 und κ_2 , wobei κ_1 meist die Krümmung und κ_2 die Torsion der Kurve α genannt werden.²⁴ Beachte, dass κ_1 hier immer positiv ist, wohingegen κ_2 das Vorzeichen wechseln kann. Die Frenetschen Gleichungen können entweder als

$$\begin{pmatrix} e'_{1,1}(s) & e'_{1,2}(s) & e'_{1,3}(s) \\ e'_{2,1}(s) & e'_{2,2}(s) & e'_{2,3}(s) \\ e'_{3,1}(s) & e'_{3,2}(s) & e'_{3,3}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +\kappa_1(s) & 0 \\ -\kappa_1(s) & 0 & +\kappa_2(s) \\ 0 & -\kappa_2(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{1,1}(s) & e_{1,2}(s) & e_{1,3}(s) \\ e_{2,1}(s) & e_{2,2}(s) & e_{2,3}(s) \\ e_{3,1}(s) & e_{3,2}(s) & e_{3,3}(s) \end{pmatrix}$$

oder kompakter in vektorieller Form als

$$e'_1(s) = +\kappa_1(s)e_2(s), \quad e'_2(s) = -\kappa_1(s)e_1(s) + \kappa_2(s)e_3(s), \quad e'_3(s) = -\kappa_2(s)e_2(s)$$

geschrieben werden. Dabei ergeben sich (Nachrechnen!) die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} \kappa_1(s) &= \langle e'_1(s), e_2(s) \rangle = |\alpha''(s)|, \\ \kappa_2(s) &= \langle e'_2(s), e_3(s) \rangle = \langle \alpha'''(s), \alpha'(s) \times \alpha''(s) \rangle / |\alpha''(s)|^2. \end{aligned}$$

Beispiel (planare Kurven als dreidimensionale Frenet-Kurven). Sei $\hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine 2D-Frenet-Kurve. Dann ist die eingebettete Kurve

$$\alpha(s) = (\hat{\alpha}_1(s), \hat{\alpha}_1(s), 0)$$

eine 3D Frenet-Kurve mit $e_3(s) = (0, 0, 1)$, sofern $\hat{\alpha}$ dreimal stetig differenzierbar ist und $\hat{\alpha}''$ nirgends verschwindet. Insbesondere ist eine Gerade zwar eine 2D-Frenet-Kurve, aber keine 3D-Frenet-Kurve.²⁵

Beispiel (Helix als Frenet-Kurve). Die Kurve $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), q \omega t)$$

beschreibt eine Helix in x_3 -Richtung mit Radius r , Winkelgeschwindigkeit ω und Spreizungsparameter q . Sie ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert (und damit Frenet-Kurve), wenn

$$\omega^2 = \frac{1}{r^2 + q^2}.$$

In diesem Fall gilt $s = t$, $\dot{\alpha} = \alpha'$ und es ergeben sich (Nachrechnen!) die Formeln

$$\kappa_1 = \frac{r}{r^2 + q^2}, \quad \kappa_2 = \frac{q}{r^2 + q^2},$$

d.h. die beiden Frenet-Krümmungen einer Helix sind konstant und hängen nicht von s oder t ab.

Beispiel (Kurven mit konstanten Frenet-Krümmungen). Für konstantes $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 \neq 0$ betrachten wir

$$E(s) = \exp \left(s \begin{pmatrix} 0 & +\kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & +\kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

²⁴Viele Autoren schreiben κ statt κ_1 und τ statt κ_2 .

²⁵Oder anders gesagt: Bei einer Geraden in 3D ist – im Gegensatz zu einer Geraden in 2D – der Normalenvektor nicht eindeutig festgelegt.

d.h. die eindeutige Lösung der Frenetschen Gleichungen mit Anfangswert $E(0)=\text{id}$, siehe auch die allgemeine Formel (1.5). Nach einigen Rechnungen erhalten wir

$$\alpha(s) = (\kappa_2^2 \omega^{-2} s + \kappa_1^2 \omega^{-3} \sin(\omega s), -\kappa_1 \omega^{-2} \cos(\omega s), \kappa_1 \kappa_2 \omega^{-2} s - \kappa_1 \kappa_2 \omega^{-3} \sin(\omega s)),$$

mit $\omega = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$, und dies beschreibt via

$$\kappa_1 = \frac{r}{r^2 + q^2}, \quad \kappa_2 = \frac{q}{r^2 + q^2}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{r^2 + q^2}}$$

eine gedrehte Helix, wobei r und q eindeutig aus κ_1 und κ_2 berechnet werden können.

Definition 34 (Lokale Ebenen entlang einer Frenet-Kurve). Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve und $s_* \in I$ beliebig. Dann heißen die affinen Räume

1. $A_{S,t_*} := \alpha(s_*) + e_3(s_*)^\perp = \alpha(s_*) + \text{span}\{e_1(s_*), e_2(s_*)\}$ die Schmiegeebene,
2. $A_{N,t_*} := \alpha(s_*) + e_1(s_*)^\perp = \alpha(s_*) + \text{span}\{e_2(s_*), e_3(s_*)\}$ die Normalebene,
3. $A_{R,t_*} := \alpha(s_*) + e_2(s_*)^\perp = \alpha(s_*) + \text{span}\{e_1(s_*), e_3(s_*)\}$ die Streckebene²⁶

der Kurve im Punkt $\alpha(s_*)$.

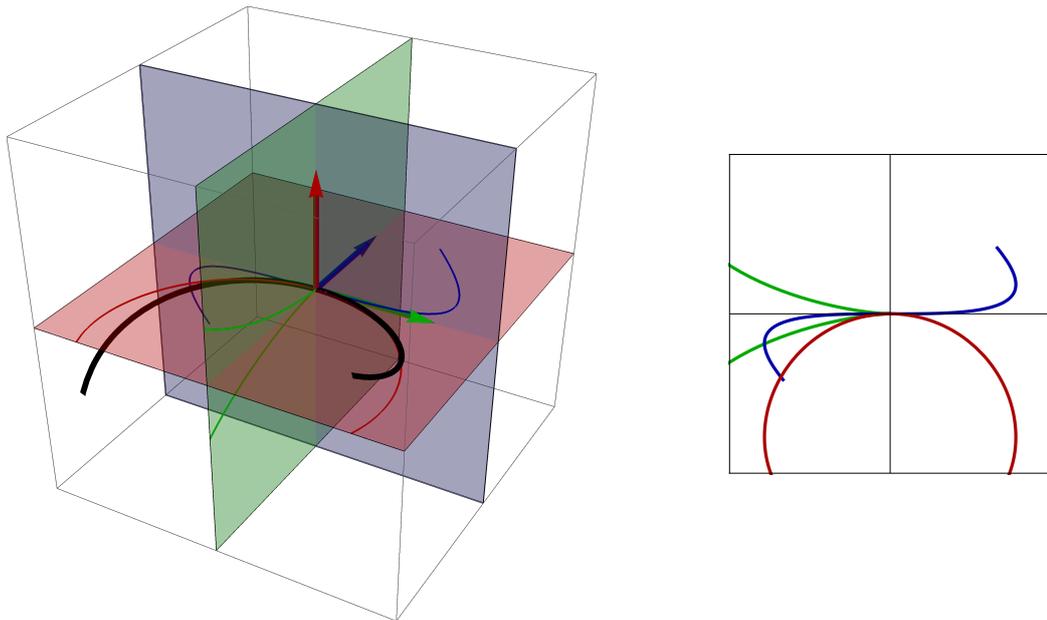


Abbildung 1.15: Links: Frenet-Kurve (schwarz, Teil einer Helix) mit Dreibein e_1 (grün), e_2 (blau) und e_3 (rot), die Ebenen aus Definition 34 sowie die entsprechenden Projektionen der Kurve. Dabei sind die Normal- bzw. die Streck- bzw. die Schmiegeebene grün bzw. blau bzw. rot gefärbt (so wie der jeweils senkrechte Vektor des Dreibeins). Rechts: 2D-Plots der Projektionen der Kurve auf die verschiedenen Ebenen. In der Nähe des Kurvenpunktes (Ursprung im Plot) kann jede dieser Projektionen durch die jeweilige Normalform aus Lemma 35 approximiert werden.

Die drei Ebenen aus Definition 34 stehen offensichtlich in jedem Punkt der Kurve senkrecht zueinander, siehe Abbildung 1.15, und die Projektionen der Kurve in die verschiedenen Ebenen können lokal durch entsprechende Normalformen dargestellt

²⁶ A_{R,t_*} wird auch die rektifizierbare Ebene genannt. Daher der Index R.

werden. Dies ergibt sich aus der folgenden Variante des Satzes von Taylor, der in seiner klassischen Form ja als

$$\alpha(s) = \alpha(s_*) + \alpha'(s_*)(s - s_*) + \frac{1}{2}\alpha''(s_*)(s - s_*)^2 + \frac{1}{6}\alpha'''(s_*)(s - s_*)^3 + o((s - s_*)^3)$$

bzw. als das komponentenweise Analogon geschrieben werden kann, wobei der Fehlerterm für viermal stetig differenzierbare Kurven üblicherweise mit $O((s - s_*)^4)$ bezeichnet wird.

Lemma 35 (Modifizierte Taylor-Entwicklung von Frenet-Kurven). *Für jede Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\alpha(s) - \alpha(s_*) - o(s^3) = + \left[(s - s_*) - \frac{1}{6}\kappa_1^2(s_*)(s - s_*)^3 \right] e_1(s_*) \quad (1.18)$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\kappa_1(s_*)(s - s_*)^2 + \frac{1}{6}\kappa_1'(s_*)(s - s_*)^3 \right] e_2(s_*) \quad (1.19)$$

$$+ \left[\frac{1}{6}\kappa_1(s_*)\kappa_2(s_*)(s - s_*)^3 \right] e_3(s_*) \quad (1.20)$$

für jedes $s_* \in I$. Insbesondere genügen die Projektionen der Kurve auf die Ebenen aus Definition 34 den Formeln

$$\begin{aligned} P_{S,s_*}\alpha(s) &= \alpha(s_*) + \left[(s - s_*) + h.o.t. \right] e_1(s_*) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\kappa_1(s_*)(s - s_*)^2 + h.o.t. \right] e_2(s_*), \\ &\quad \text{(Standardparabel in der Schmiegeebene)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{N,s_*}\alpha(s) &= \alpha(s_*) + \left[\frac{1}{2}\kappa_1(s_*)(s - s_*)^2 + h.o.t. \right] e_2(s_*) \\ &\quad + \left[\frac{1}{6}\kappa_1(s_*)\kappa_2(s_*)(s - s_*)^3 + h.o.t. \right] e_3(s_*) \\ &\quad \text{(Neilsche Parabel in der Normalebene),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{R,s_*}\alpha(s) &= \alpha(s_*) + \left((s - s_*) + h.o.t. \right) e_1(s_*) \\ &\quad + \left[\frac{1}{6}\kappa_1(s_*)\kappa_2(s_*)(s - s_*)^3 + h.o.t. \right] e_3(s_*), \\ &\quad \text{(kubische Parabel in der Streckebene)} \end{aligned}$$

wobei h.o.t. jeweils höhere Ordnungsterme bezeichnet.

Beweis. Aufgrund der Frenetschen Gleichungen gilt

$$\alpha'(s_*) = e_1(s_*), \quad \alpha''(s_*) = e_1'(s_*) = \kappa_1(s_*)e_2(s_*)$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha'''(s_*) &= \kappa_1'(s_*)e_2(s_*) + \kappa_1(s_*)e_2'(s_*) \\ &= \kappa_1'(s_*)e_2(s_*) + \kappa_1(s_*)(-\kappa_1(s_*)e_1(s_*) + \kappa_2(s_*)e_3(s_*)). \end{aligned}$$

Die gewünschte Formel (1.18) folgt nun durch Einsetzen und impliziert sofort alle weiteren Behauptungen. \square

Satz 36 (Existenz und Eindeutigkeit einer Schmiegekugel). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve mit $\kappa_2(s_*) \neq 0$ für ein beliebiges, aber festes $s_* \in I$. Dann berührt die Kugeloberfläche mit Mittelpunkt*

$$m(s_*) = \alpha(s_*) + \frac{1}{\kappa_1(s_*)}e_2(s_*) - \frac{\kappa_1'(s_*)}{\kappa_1^2(s_*)\kappa_2(s_*)}e_3(s_*) \quad (1.21)$$

und Radius

$$\varrho(s_*) = \frac{\sqrt{(\kappa_1(s_*)\kappa_2(s_*))^2 + (\kappa_1'(s_*))^2}}{\kappa_1^2(s_*)\kappa_2(s_*)}$$

die Kurve α im Punkt $\alpha(s_*)$ zu dritter Ordnung. Sie ist die einzige Kugel mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Wir betrachten zunächst einen beliebigen Kugelmittelpunkt

$$m := \alpha(s_*) + c_1 e_1(s_*) + c_2 e_2(s_*) + c_3 e_3(s_*)$$

mit noch freien Konstanten c_1, c_2, c_3 , einen dazugehörigen Radius $\varrho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ sowie die Funktion

$$f(s) := \langle m - \alpha(s), m - \alpha(s) \rangle - \varrho^2,$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite gerade der quadratischen Abstand des Kurvenpunktes $\alpha(s)$ von m ist. Mit Hilfe der Frenetschen Gleichungen berechnen wir

$$f'(s) = -2\langle m - \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = -2\langle m - \alpha(s), e_1(s) \rangle$$

sowie

$$f''(s) = -2\langle m - \alpha(s), \alpha''(s) \rangle + 2 = -2\langle m - \alpha(s), \kappa_1(s)e_2(s) \rangle + 2,$$

und

$$\begin{aligned} f'''(s) &= -2\langle m - \alpha(s), \alpha'''(s) \rangle \\ &= -2\langle m - \alpha(s), \kappa_1'(s)e_2(s) + \kappa_1(s)e_2'(s) \rangle \\ &= -2\langle m - \alpha(s), \kappa_1'(s)e_2(s) - \kappa_1^2(s)e_1(s) + \kappa_1(s)\kappa_2(s)e_3(s) \rangle. \end{aligned}$$

Durch Auswertung bei $s = s_*$ ergibt sich damit

$$f'(s_*) = -2c_1, \quad f''(s_*) = -2\kappa_1(s)c_2 + 2$$

bzw.

$$f'''(s_*) = +2\kappa_1^2(s)c_1 - 2\kappa_1'(s)c_2 - 2\kappa_1(s)\kappa_2(s)c_3.$$

Nach Konstruktion gilt $f(s_*) = 0$, d.h. der Kurvenpunkt $\alpha(s_*)$ liegt für jede Wahl von c_1, c_2, c_3 in der Sphäre vom Radius ϱ um m , wobei die Ordnung des Berührens gerade die Vielfachheit der Nullstelle s_* von f ist. Die obigen Rechnungen zeigen, dass die betrachtete Sphäre die Kurve genau dann zu zweiter Ordnung im Punkt $\alpha(s_*)$ berührt, wenn

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1/\kappa_1(s_*)$$

gilt. Eine Berührung dritter Ordnung ist nur dann möglich, wenn auch c_3 den richtigen Wert annimmt und dies liefert alle Behauptungen. \square

Die Aussage in Satz 36 gilt auch für $\kappa_2(s_*) = 0$, sofern unendlich große Kugeln zugelassen werden. Die Schmiegekugel ist dann gerade die Schmiegebene.

Folgerung 37 (Sphärische Kurven). *Die Spur einer Frenet-Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\kappa_2(s) \neq 0$ für alle $s \in I$ liegt genau dann in einer Sphäre, wenn die Differentialgleichung*

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1^2 \kappa_2} \right)'$$

auf ganz I erfüllt ist.

Beweis. Wir differenzieren die Mittelpunktsformel (1.21) nach dem Argument s_* und erhalten (in Kurzschreibweise)

$$m' = e_1 - \left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1^2} \right) e_2 + \frac{1}{\kappa_1} e_2' - \left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1^2 \kappa_2} \right)' e_3 - \left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1^2 \kappa_2} \right) e_3'$$

und die Frenetschen Gleichungen

$$e_2' = -\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3, \quad e_3' = -\kappa_2 e_2$$

implizieren

$$m' = \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \left(\frac{\kappa_1'}{\kappa_1^2 \kappa_2} \right)' \right) e_3.$$

Insbesondere ist m genau dann konstant, wenn die Differentialgleichung erfüllt ist. Aus $m' = 0$ folgt aber auch

$$(\varrho^2)' = (\langle m - \alpha, m - \alpha \rangle)' = -2\langle m - \alpha, \alpha' \rangle = -2\langle m - \alpha, e_1 \rangle = 0$$

wobei die letzte Identität aufgrund von (1.21) gilt. Damit ist die behauptete Äquivalenz bewiesen. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts formulieren wir wieder die Frenet-Theorie für nicht nach Bogenlänge parametrisierte Kurven.

Lemma 38 (Frenet-Größen für allgemeine Kurven). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dreimal stetig differenzierbar, so dass $\dot{\alpha}(t)$ und $\ddot{\alpha}(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig sind. Dann können via*

$$e_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}, \quad e_2(t) = e_3(t) \times e_1(t), \quad e_3(t) = \frac{\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|}$$

und

$$\kappa_1(t) = \frac{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|}{|\dot{\alpha}(t)|^3}, \quad \kappa_2(t) = \frac{\det(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t))}{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|^2}$$

die entsprechenden Größen der Frenet-Theorie berechnet werden, wobei die Determinante von der Matrix zu berechnen ist, deren Zeilen (oder Spalten) durch die angegebenen Vektoren gegeben sind.

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Kapitel 2

Flächen

2.1 Grundlagen

2.1.1 Konzepte und Definitionen

Wir führen zunächst zwei verwandte, aber unterschiedliche mathematische Konzepte für eine Fläche ein. Das erste Konzept ist das direkte Analogon zum Kurvenbegriff und besonders gut geeignet, um lokale Aussagen über Flächen zu formulieren und zu beweisen.

Definition 39 (parametrisierte Flächenstücke und Reparametrisierung).

1. Ein (reguläres) parametrisiertes Flächenstück ist eine Abbildung $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^d$,
 - (a) die auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist,
 - (b) die stetig differenzierbar ist,
 - (c) so dass für jedes $u = (u_1, u_2) \in U$ die Vektoren $\partial_{u_1}\alpha(u_1, u_2)$ und $\partial_{u_2}\alpha(u_1, u_2)$ linear unabhängig sind.¹
2. Die Bildmenge $\text{sp}(\alpha) := \alpha(U)$ wird Spur von α oder (unparametrisiertes) Flächenstück genannt, und α wird auch als Parametrisierung von $\text{sp}(\alpha)$ bezeichnet.
3. Zwei reguläre und parametrisierte Flächenstücke $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißen (geometrisch) äquivalent, falls es eine invertierbare Abbildung $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ gibt, so dass sowohl ϕ als auch $\tilde{\phi} := \phi^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ stetig differenzierbar sind und

$$\tilde{\alpha}(\tilde{u}) = \alpha(\phi(\tilde{u})) \quad \text{bzw.} \quad \alpha(u) = \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(u))$$

für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$ bzw. $u \in U$ gilt. Die Abbildungen ϕ und $\tilde{\phi}$ heißen Parameterwechsel.

Beispiel (parametrisierte Flächenstücke im Raum).

1. Die Ebene

$$(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \mapsto \quad \alpha(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0) \in \mathbb{R}^3$$

ist natürlich ein Flächenstück im Sinne von Definition 39.

¹Insbesondere besitzt die Jacobi-Matrix $\partial_u\alpha(u)$ immer den maximalen Rang, nämlich 2.

2. Der Einheitszylinder

$$(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \mapsto \quad \alpha(u_1, u_2) = (\cos(u_1), \sin(u_1), u_2) \in \mathbb{R}^3$$

ist auch ein Flächenstück, aber α ist diesmal nicht injektiv.

3. Das parametrisierte Flächenstück

$$(u_1, u_2) \in B_1(0) \quad \mapsto \quad \alpha(u_1, u_2) = (u_1, u_2, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}) \in \mathbb{R}^3$$

beschreibt eine nördliche Hemisphäre und α ist eine Bijektion zwischen $U = B_1(0)$ und $\text{sp}(\alpha)$. Die volle Sphäre erhält man zum Beispiel durch²

$$\alpha(u_1, u_2) = (\cos(u_1) \cos(u_2), \cos(u_1) \sin(u_2), \sin(u_1)) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

mit $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, aber α ist nicht mehr injektiv.

4. Durch

$$\alpha(u_1, u_2) = ((R + r \cos(u_2)) \cos(u_1), (R + r \cos(u_2)) \sin(u_1), r \sin(u_2))$$

mit $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ und $0 < r < R$ wird ein Torus parametrisiert.

5. Das Flächenstück

$$\alpha(u_1, u_2) = (u_2 \cos(u_1), u_2 \sin(u_1), u_1) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

mit $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ wird Helikoid genannt und ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Spur wird erzeugt durch eine Gerade, die parallel zur (x_1, x_2) -Ebene entlang einer Helix rotiert.

6. Der Oloid entspricht

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_1, u_2) &= \frac{u_1}{1 - \cos(u_2)} + (1 - u_1) \cos(u_2) \\ \alpha_2(u_1, u_2) &= (1 - u_1) \sin(u_2) \\ \alpha_3(u_1, u_2) &= \frac{u_1 \sqrt{1 - 2 \cos u_2}}{1 - \cos(u_2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit $(u_1, u_2) \in U := (0, 2) \times (\pi/3, 5\pi/3)$ und kann vollständig abgerollt werden.³

Das zweite Konzept einer Fläche ist eher global.

Definition 40 (reguläre Fläche bzw. Untermannigfaltigkeit).

1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt (reguläre) Fläche, falls für jedes $p \in M$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^d$ mit $p \in V$ sowie eine parametrisiertes Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ existiert, so dass

$$\text{sp}(\alpha) = M \cap V$$

gilt und die Umkehrabbildung $\alpha^{-1} : M \cap V \rightarrow U$ wohldefiniert und stetig ist. Reguläre Flächen werden in der Differentialgeometrie auch als zweidimensionale und eingebettete Untermannigfaltigkeiten bezeichnet.

²In dieser Parametrisierung sind u_1 und u_2 die Eulerwinkel.

³Das Konzept des Abrollens und weitere wichtige Eigenschaften des Oloiden werden bei WIKIPEDIA erklärt.



Abbildung 2.1: Links: Der Helikoid als parametrisiertes Flächenstück mit $u_1 \in (0, 2\pi)$ und $u_2 \in (-5, +5)$, siehe Formel (2.2). Rechts: Der Oliod aus (2.3). Die Kante entspricht $u_1 = 1$ und gehört damit nicht zum Bild der angegebenen Parametrisierung über der offenen Menge U .

2. Die Abbildung α wird auch lokale Parametrisierung von M um p genannt, α^{-1} heißt Karte von $M \cap V$ und $M \cap V$ wird als Kartenumgebung von p bezeichnet. Desweiteren werden $(u_1, u_2) \in U$ die Koordinaten des Punktes $\alpha(u)$ genannt und die Koordinatenfunktionen

$$\alpha(u) \in M \cap V \quad \mapsto \quad u_i \in U$$

sind wohldefiniert und stetig.

3. Ein Liste $(U_j, \alpha_j)_j$ von Parametrisierungen mit

$$\bigcup_j \text{sp}(\alpha_j) = M,$$

wird vollständig genannt und liefert mit $(\text{sp}(\alpha_j), \alpha_j^{-1})_j$ einen Atlas von M .

4. M heißt k -mal stetig differenzierbar, sofern es ein vollständiges System von k -mal stetig differenzierbaren Parametrisierungen gibt.

Merke: ein parametrisiertes Flächenstück ist im wesentlichen durch eine Abbildung bestimmt. Eine Fläche im Sinne von Definition 40 ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^d , die durch mehrere Abbildungen beschrieben werden kann.

Bemerkung (Mehrdeutigkeit von Karten). Karten und Kartenumgebungen sind in aller Regel nicht eindeutig. Sind aber $\alpha : U \rightarrow M \cap V$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \rightarrow M \cap \tilde{V}$ zwei Parametrisierungen, die zwei verschiedenen Kartenumgebungen $M \cap V$ und $M \cap \tilde{V}$ eines festen Punktes p entsprechen, so existieren offene Mengen $W \subset U$ und $\tilde{W} \subset \tilde{U}$ mit $p \in \alpha(W) = \alpha(\tilde{W})$ so dass $\alpha|_W$ und $\tilde{\alpha}|_{\tilde{W}}$ äquivalent im Sinne von Definition 39 sind, siehe Abbildung 2.2. Dies folgt aus einer Anwendung des Satzes über implizite Funktionen (siehe dazu auch den Beweis von Lemma 43).

Ist M kompakte Teilmenge, so gibt es immer einen endlichen Atlas.

Beispiel (zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3).

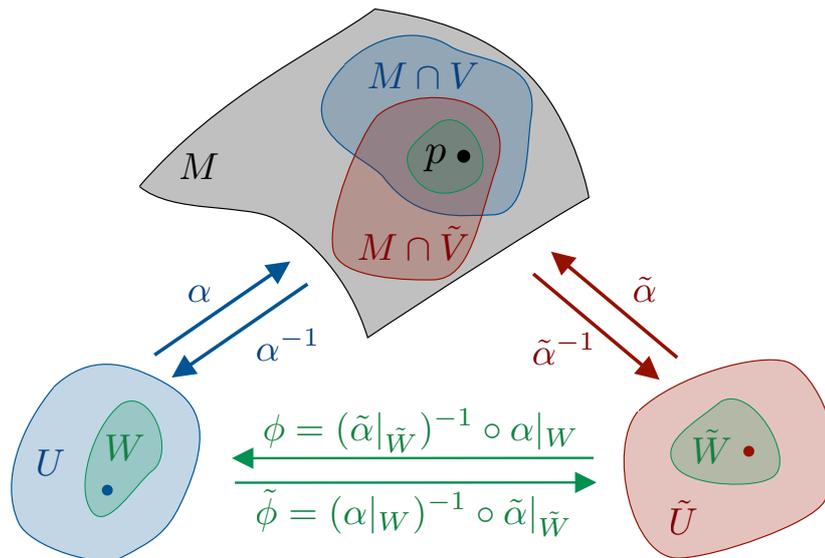


Abbildung 2.2: Zur Mehrdeutigkeit von Karten; siehe auch die Bemerkung zu Definition 40. Die Reparametrisierungen ϕ und $\tilde{\phi} = \phi^{-1}$ beschreiben die lokalen Kartenwechsel.

1. Jedes reguläre Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist eine Fläche, sofern $\alpha^{-1} : \text{sp}(\alpha) \rightarrow U$ existiert und stetig ist.
2. Der Zylinder ist eine Fläche, wobei für gegebenes

$$p_* = (\cos(u_{*,1}), \sin(u_{*,1}), u_{*,2}) \in \mathbb{R}^3$$

durch

$$(u_1, u_2) \in (u_{*,1} - \pi/2, u_{*,1} + \pi/2) \times \mathbb{R} \mapsto (\cos(u_1), \sin(u_1), u_2) \in \mathbb{R}^3$$

eine mögliche lokale Parametrisierung um p_* gegeben ist.

3. Die Sphäre ist eine Fläche, denn zu jedem Punkt kann eine Hemisphäre als Kartenumgebung gewählt werden.

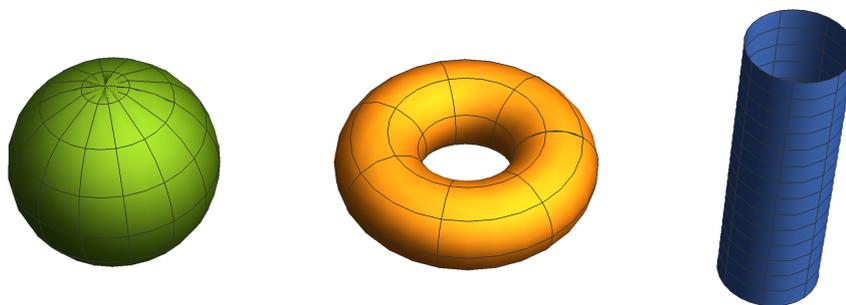


Abbildung 2.3: Die Standardbeispiele für Flächen im Sinne von Definition 40.

Flächen sehen also lokal wie Flächenstücke aus, aber nicht jedes Flächenstück ist auch eine Fläche, siehe Abbildung 2.4. Lokale ist aber jedes Flächenstück auch eine Fläche.

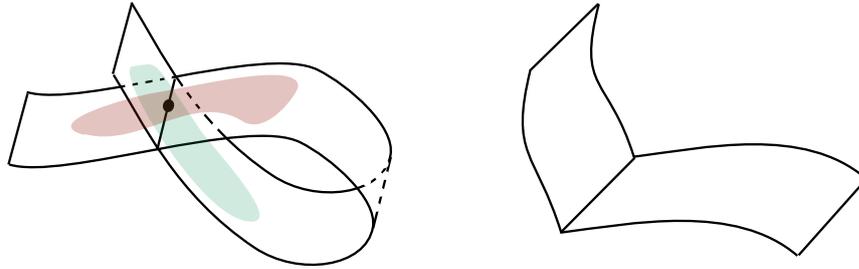


Abbildung 2.4: Beispiele für „Flächen“, die nicht von Definition 40 abgedeckt sind. *Links:* Ein Flächenstück mit „Selbstdurchdringung“ (ist aber in Definition 39 zugelassen). Die farbigen Markierungen illustrieren die Aussage und den Beweis von Lemma 41. *Rechts:* Flächen mit Knick können nicht *regulär* parametrisiert werden.

Lemma 41 (Flächenstücke sind lokale Flächen). *Seien $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein reguläres Flächenstück und $u_* \in U$ beliebig. Dann existiert eine offene Menge U_* mit $u_* \in U_* \subset U$, so dass $\text{sp}(\alpha|_{U_*})$ eine Fläche in Sinne von Definition 40 ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung besitzt die Jacobi-Matrix⁴

$$\text{Jac } \alpha(u_*) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \alpha_1(u_*) & \partial_{u_2} \alpha_1(u_*) \\ \dots & \dots \\ \partial_{u_1} \alpha_d(u_*) & \partial_{u_2} \alpha_d(u_*) \end{pmatrix}$$

den Rang 2 und o.B.d.A können wir annehmen, dass die ersten beiden Zeilen linear unabhängig sind (andernfalls vertauschen wir Indizes). Wir betrachten nun die Abbildung $F : U \times \mathbb{R}^{d-2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

$$F(u, w) := \alpha(u) + (0, w),$$

wobei $w = (w_1, \dots, w_{d-2})$ und $(u, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{d-2} = \mathbb{R}^d$, und zeigen durch Rechnungen für die entsprechende quadratische Jacobi-Matrix

$$\text{Jac } F(u, w) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} F_1(u, w) & \partial_{u_2} F_1(u, w) & \partial_{w_1} F_1(u, w) & \dots & \partial_{w_{d-2}} F_1(u, w) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{u_1} F_d(u, w) & \partial_{u_2} F_d(u, w) & \partial_{w_1} F_d(u, w) & \dots & \partial_{w_{d-2}} F_d(u, w) \end{pmatrix},$$

dass

$$\begin{aligned} \det \text{Jac } F(u_*, 0) &= \det \begin{pmatrix} \partial_{u_1} F_1(u_*, 0) & \partial_{u_2} F_1(u_*, 0) \\ \partial_{u_1} F_2(u_*, 0) & \partial_{u_2} F_2(u_*, 0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \alpha_1(u_*) & \partial_{u_2} \alpha_1(u_*) \\ \partial_{u_1} \alpha_2(u_*) & \partial_{u_2} \alpha_2(u_*) \end{pmatrix} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

gilt, weil viele der Terme $\partial_{w_i} F_j(u_*, 0)$ verschwinden. Der Satz über inverse Funktionen garantiert nun, dass es offene Umgebungen $X_* \subset \mathbb{R}^d$ von $(u_*, 0)$ und $V_* \subset \mathbb{R}^d$ von $\alpha(u_*) = F(u_*, 0)$ gibt, so dass F die Menge X_* bijektiv nach V_* abbildet, wobei sowohl $F : X_* \rightarrow V_*$ als auch $F^{-1} : V_* \rightarrow X_*$ stetig differenzierbar sind. Wir setzen nun

$$U_* := \{u \in U : (u, 0) \in X_*\}$$

⁴Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), deutscher Mathematiker.

und bemerken, dass

$$M := \text{sp}(\alpha|_{U_*}) = F(U_* \times \{0\})$$

nach Konstruktion die gewünschten Eigenschaften hat, denn für jeden Punkt $p \in M$ kann $(U_*, \alpha|_{U_*})$ als Parametrisierung bzw. $M \cap V_*$ als Kartenumgebung gewählt werden. \square

Lemma 42 (Graph einer Funktion in zwei Variablen). *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann definiert*

$$\alpha(u_1, u_2) := (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

eine parametrisiertes Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist

$$M = \text{graph} f = \{(u_1, u_2) f(u_1, u_2)\}$$

eine reguläre Fläche mit globaler Parametrisierung α .

Beweis. Die beiden Vektoren

$$\partial_{u_1} \alpha(u_1, u_2) = (1, 0, \partial_{u_1} f(u_1, u_2)), \quad \partial_{u_2} \alpha(u_1, u_2) = (0, 1, \partial_{u_2} f(u_1, u_2))$$

sind offensichtlich immer linear unabhängig und alle Behauptungen folgen sofort. \square

Lemma 43 (Nullstellenmenge einer Funktion in drei Variablen). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $p \in \Omega$ gegeben mit*

$$g(p) = 0, \quad \partial_x g(p) = (\partial_{x_1} g(p), \partial_{x_2} g(p), \partial_{x_3} g(p)) \neq (0, 0, 0).$$

Dann existiert eine offene Menge V mit $p \in V \subset \Omega$, so dass

$$M := \{x \in V : g(x) = 0\}$$

eine Fläche mit globaler Parametrisierung ist. Gilt sogar $\partial_x g(p) \neq (0, 0, 0)$ für jedes $p \in N := \{p \in \Omega : g(p) = 0\}$, so ist auch die globale Nullstellenmenge N eine Fläche.⁵

Beweis. Der Vektor $\partial_x g(p)$ besitzt mindestens eine von Null verschiedene Komponente und o.B.d.A. können wir $\partial_{x_3} g(p) \neq 0$ annehmen (andernfalls vertauschen wir Indizes). Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren offene Umgebungen V von p in \mathbb{R}^3 und U von (p_1, p_2) in \mathbb{R}^2 sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die Implikation

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = f(x_1, x_2)$$

für alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ gilt. Insbesondere ist M gerade der Graph von f und die Behauptung folgt aus Lemma 42. \square

Jede Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 im Sinne von Definition 40 kann lokal als Graph einer Funktion, als Bild einer Parametrisierung, oder als Nullstellenmenge einer Funktion mit nicht verschwindender Ableitung geschrieben werden (siehe Übungsaufgabe), aber in der Regel wird dies nicht global gelingen. Zum Beispiel kann die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 zwar global parametrisiert und auch als globale Nullstellenmenge von $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ betrachtet werden, aber man kann die Kugel nur lokal als Graph einer Funktion auffassen.

⁵Im Allgemeinen ist die globale Nullstellenmenge einer stetig differenzierbaren Funktion keine Fläche im Sinne von Definition 40. Ein Standardgegenbeispiel ist $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$, deren Nullstellenmenge N aus zwei Ebenen besteht, die sich in der x_3 -Achse schneiden. Für jeden Punkt p auf der x_3 -Achse kann keine Umgebung V wie Definition 40 gefunden werden.

2.1.2 Tangentialraum und Erste Fundamentalform

Wir klären zunächst das Konzept *Tangentialvektor*, das für die gesamte Geometrie und Analysis von Flächen von zentraler Bedeutung ist.

Definition 44 (Tangentialraum).

1. Seien $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein reguläres parametrisiertes Flächenstück und $u_* \in U$ gegeben. Dann heißt der lineare Raum

$$T_{\alpha(u_*)}\alpha(U) := \text{span}\{\partial_{u_1}\alpha(u_*), \partial_{u_2}\alpha(u_*)\} \subset \mathbb{R}^3$$

der (lineare) Tangentialraum im Punkt $\alpha(u_*)$.

2. Seien M eine reguläre Fläche, $p_* \in M$ ein Punkt und $\alpha(U) \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M um $p_* = \alpha(u_*)$. Dann wird

$$T_{p_*}M := T_{\alpha(u_*)}\alpha(U)$$

der (lineare) Tangentialraum von M in p_* genannt.

Bemerkung.

1. Der zweite Teil der Definition macht wirklich Sinn, denn die Definition von $T_{p_*}M$ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Oder anders gesagt: Gilt zusätzlich $p_* = \tilde{\alpha}(\tilde{u}_*)$ für eine weitere lokale Parametrisierung, so folgt $T_{\alpha(u_*)}\alpha(U) = T_{\tilde{\alpha}(\tilde{u}_*)}\tilde{\alpha}(\tilde{U})$. Dies kann einfach nachgerechnet werden⁶ bzw. aus Satz 45 abgeleitet werden.
2. Die Elemente von $T_{\alpha(u_*)}\alpha(U)$ bzw. $T_{p_*}M$ nennt man *Tangentialvektoren an $f(U)$ bzw. M in $f(u_*)$ bzw. p_** .
3. Der Tangentialraum ist wegen der Regularitätsannahmen aus Definition 39 bzw. Definition 40 immer zweidimensional⁷ und enthält als linearer Unterraum des \mathbb{R}^d notwendigerweise den Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^d$. Darüber hinaus gibt es noch den affinen Tangentialraum

$$p_* + T_{p_*}M,$$

der eine Ebene im Raum beschreibt, die die Menge M im Punkt p_* berührt, und der manchmal auch als Tangentialraum bezeichnet wird.⁸ Wir werden im Folgenden meist einfach nur vom Tangentialraum sprechen und dann immer die lineare Variante meinen.

⁶Mit den Notationen aus Definition 40 und Abbildung 2.2 gilt nach Kettenregel

$$\partial_{u_i}\alpha_k(u) = \sum_{j=1}^2 \partial_{\tilde{u}_j}\tilde{\alpha}_k(\tilde{\phi}(u))\partial_{u_i}\tilde{\phi}_j(u)$$

für alle $i = 1, 2$ und alle $k = 1 \dots d$. Da k beliebig ist, folgt für $u_* = \alpha^{-1}(p_*)$ und $\tilde{u}_* = \tilde{\alpha}^{-1}(p_*)$ insbesondere

$$\partial_{u_i}\alpha(u_*) = \sum_{j=1}^2 c_{i,j}(u_*)\partial_{\tilde{u}_j}\tilde{\alpha}(\tilde{u}_*) \in T_{\tilde{\alpha}(\tilde{u}_*)}\tilde{\alpha}(\tilde{U}) \quad \text{mit} \quad c_{i,j}(u) := \partial_{u_i}\tilde{\phi}_j(u)$$

und damit $T_{\alpha(u_*)}\alpha(U) \subseteq T_{\tilde{\alpha}(\tilde{u}_*)}\tilde{\alpha}(\tilde{U})$. Vollkommen analog zeigt man schließlich $T_{\tilde{\alpha}(\tilde{u}_*)}\tilde{\alpha}(\tilde{U}) \subseteq T_{\alpha(u_*)}\alpha(U)$.

⁷Wegen dieser Zweidimensionalität wird der Tangentialraum einer Fläche oftmals Tangentialebene genannt.

⁸Zum Beispiel in [Kue].

4. Der (lineare) Normalenraum an M in p_* ist definiert durch

$$N_{p_*}M := (T_{p_*}M)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^d \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } v \in T_{p_*}M\}$$

und damit immer ein $(d-2)$ -dimensionaler linearer Unterraum des \mathbb{R}^d .

5. Eine wichtige Rolle in der Analysis von Flächen spielen Vektorfelder, d.h. Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ von M in den umgebenden Raum \mathbb{R}^d . Ein solches wird tangential bzw. normal genannt, wenn $f(p_*) \in T_{p_*}M$ bzw. $f(p_*) \in N_{p_*}M$ für alle $p_* \in M$ gilt.

Beispiel (Tangentialräume an die dreidimensionale Einheitssphäre). Für jedes $p \in M := S^2 = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$N_pM = \text{span}\{p\}$$

und damit zum Beispiel

$$T_{(1,0,0)}M = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$T_{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)}M = \text{span}\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Diese Formeln können entweder nachgerechnet werden (zum Beispiel mit Hilfe der Parametrisierung durch die Eulerwinkel) oder einfach aus der geometrischen Anschauung abgeleitet werden.

Satz 45 (Charakterisierung des Tangentialraumes). Für jede reguläre Fläche M und alle $p_* \in M$ gelten die folgenden Aussagen:

1. Für jede stetig differenzierbare Kurve $\beta : I \rightarrow M$ in M die via $\beta(t_*) = p_*$ durch p_* läuft, gilt $\dot{\beta}(t_*) \in T_{p_*}M$.
2. Für jeden Tangentialvektor $v_* \in T_{p_*}\alpha(U)$ existiert eine Kurve $\beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ mit $\beta(0) = p_*$ und $\dot{\beta}(p_*) = v_*$.

Beweis. Es reicht, die Behauptung im Fall von $M = \text{sp}(\alpha)$ und $\alpha : U \rightarrow M$ bijektiv zu zeigen.

Teil 1: Wir definieren die Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ durch

$$\gamma(t) := \alpha^{-1}(\beta(t)).$$

Dann gilt $\beta(t) = \alpha(\gamma(t)) = \alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ und nach Differentiation auch

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\gamma}_1(t)\partial_{u_1}\alpha(\gamma(t)) + \dot{\gamma}_2(t)\partial_{u_2}\alpha(\gamma(t)) \in T_{\beta(t)}\alpha(U),$$

so dass die Behauptung mit $t = t_*$ folgt.

Teil 2: Sei nun $v_* \in T_{\alpha(u_*)}\alpha(U)$ beliebig. Dann existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$v_* = c_1\partial_{u_1}\alpha(u_*) + c_2\partial_{u_2}\alpha(u_*)$$

und für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ ist die planare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow U$ mit

$$\gamma(t) := u_* + (c_1t, c_2t)$$

wegen der Offenheit von U wohldefiniert. Wir setzen $\beta(t) := \alpha(\gamma(t))$ und berechnen

$$\dot{\beta}(t) = c_1\partial_{u_1}\alpha(\gamma(t)) + c_2\partial_{u_2}\alpha(\gamma(t)).$$

Die Behauptung folgt nun mit $t = 0$. □

Jede lokale Parametrisierung $p_* = \alpha(u_*)$ mit $\alpha(U) \rightarrow M$ liefert via

$$\partial_{u_1} \alpha(u_*, =) \frac{d}{dt} \alpha(u_{*,1} + t, u_{*,2})|_{t=0}$$

und

$$\partial_{u_2} \alpha(u_*, =) \frac{d}{dt} \alpha(u_{*,1}, u_{*,2} + t)|_{t=0}$$

zwei Basisvektoren für den Tangentialraum an M in p_* . Insbesondere gilt immer $\partial_i \alpha(u) \in T_{\alpha(u)} M$.

Definition 46 (Erste Fundamentalform I). *Als Erste Fundamentalform eine Fläche M bezeichnet man die Einschränkung des euklidischen Skalarproduktes auf die Tangentialräume. Genauer gesagt, I ist die Abbildung⁹*

$$p \in M \mapsto I_p \in \text{Bilin}(T_p M) \quad \text{mit} \quad I_p(v, w) = \langle v, w \rangle \quad \text{für alle} \quad v, w \in T_p M.$$

Analog wird die erste Fundamentalform für parametrisierte Flächenstücke definiert.

Mit $p = \alpha(u)$ und zwei beliebigen Tangentialvektoren

$$v = v_1 \partial_{u_1} \alpha(u) + v_2 \partial_{u_2} \alpha(u), \quad w = w_1 \partial_{u_1} \alpha(u) + w_2 \partial_{u_2} \alpha(u)$$

gilt

$$I_p(v, w) = (v_1, v_2) \cdot I_{u, \alpha} \cdot (w_1, w_2)^T$$

wobei

$$I_{u, \alpha} := \begin{pmatrix} \langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_1} \alpha(u) \rangle & \langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle \\ \langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle & \langle \partial_{u_2} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle \end{pmatrix} = \text{Jac}^T \alpha(u) \cdot \text{Jac} \alpha(u)$$

eine quadratische, symmetrische und positiv-definite Matrix ist, die aus der Jabobi-Matrix

$$\text{Jac} \alpha(u) := \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \alpha_1(u) & \partial_{u_2} \alpha_1(u) \\ \dots & \dots \\ \partial_{u_1} \alpha_d(u) & \partial_{u_2} \alpha_d(u) \end{pmatrix}, \quad \text{Jac}^T \alpha(u) = (\text{Jac} \alpha(u))^T$$

berechnet werden kann. Die Matrix $I_{p, \alpha}$ ist *nicht* invariant unter Reparametrisierung, sondern mit $\alpha = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi}$ bzw. $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \tilde{\phi}$ gilt

$$\text{Jac} \alpha(u) = \text{Jac} \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(u)) \cdot \text{Jac} \tilde{\phi}(u) \quad \text{bzw.} \quad \text{Jac} \tilde{\alpha}(\tilde{u}) = \text{Jac} \alpha(\phi(\tilde{u})) \cdot \text{Jac} \phi(\tilde{u}).$$

Wir erhalten daher

$$I_{u, \alpha} = \text{Jac}^T \tilde{\phi}(u) \cdot I_{\tilde{u}, \tilde{\alpha}} \cdot \text{Jac} \tilde{\phi}(u) \quad \text{bzw.} \quad I_{\tilde{u}, \tilde{\alpha}} = \text{Jac}^T \phi(\tilde{u}) \cdot I_{u, \alpha} \cdot \text{Jac} \phi(\tilde{u}), \quad (2.4)$$

wobei $p = \alpha(u) = \tilde{\alpha}(\tilde{u})$.

⁹ $\text{Bilin}(V)$ ist die Menge der bilinearen Abbildungen von $V \times V$ nach \mathbb{R} , wobei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist.

Bemerkung.

1. In der Literatur findet sich oft die Schreibweise

$$I_{u,\alpha} = (g_{\alpha,i_1i_2}(u))_{i_1,i_2=1,2} \in \text{Mat}(2 \times 2)$$

und

$$g_\alpha(u) = \det(I_{u,\alpha}) \quad (2.5)$$

wird Gramsche Determinante genannt und definiert via $dA = \sqrt{g_\alpha(u)} du$ das infinitesimale Flächenelement (siehe auch Definition 47). Der Index α wird in der Notation auch oft weggelassen.

2. In drei Raumdimensionen ($d = 3$) gilt

$$g_\alpha(u) = |\partial_{u_1}\alpha(u) \times \partial_{u_2}\alpha(u)|^2.$$

3. Die erste Fundamentalform wird in der Differentialgeometrie oft auch Metrik oder metrischer Tensor genannt, obwohl es eigentlich für jeden Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt auf T_pM definiert, mit dem dann eine Norm im Sinne der Hilbert-Räume eingeführt werden kann.

Beispiel (Fundamentalform des achsenparallelen Ellipsoiden). Mit

$$\alpha(u_1, u_2) = (\lambda_1 \cos(u_1) \cos(u_2), \lambda_2 \cos(u_1) \sin(u_2), \lambda_3 \sin(u_1)) \quad (2.6)$$

ergibt sich

$$\text{Jac } \alpha(u) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \sin(u_1) \cos(u_2) & -\lambda_1 \cos(u_1) \sin(u_2) \\ -\lambda_2 \sin(u_1) \sin(u_2) & +\lambda_2 \cos(u_1) \cos(u_2) \\ +\lambda_3 \cos(u_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \partial_{u_1}\alpha(u) & \partial_{u_2}\alpha(u) \\ | & | \end{pmatrix}$$

und damit

$$I_{\alpha(u),\alpha} = \begin{pmatrix} g_{\alpha,11}(u) & g_{\alpha,12}(u) \\ g_{\alpha,12}(u) & g_{\alpha,22}(u) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} g_{\alpha,11}(u) &= \langle \partial_{u_1}\alpha(u), \partial_{u_1}\alpha(u) \rangle \\ &:= \lambda_1^2 \sin^2(u_1) \cos^2(u_2) + \lambda_2^2 \sin^2(u_1) \sin^2(u_2) + \lambda_3^2 \cos^2(u_1) \\ g_{\alpha,12}(u) &= \langle \partial_{u_1}\alpha(u), \partial_{u_2}\alpha(u) \rangle \\ &:= (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin(u_1) \cos(u_1) \sin(u_1) \cos(u_2) \\ g_{\alpha,22}(u) &= \langle \partial_{u_2}\alpha(u), \partial_{u_2}\alpha(u) \rangle \\ &:= \lambda_1^2 \cos^2(u_1) \sin^2(u_2) + \lambda_2^2 \cos^2(u_1) \cos^2(u_2). \end{aligned}$$

Im Fall von $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \varrho$ (Sphäre von Radius ϱ) erhalten wir

$$I_{u,\alpha} = \varrho^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2(u_1) \end{pmatrix}.$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem ersten Ausblick auf das Thema Integration auf Mannigfaltigkeiten, indem wir das Integral auf parametrisierten Flächen bzw. auf Flächen mit globaler Parametrisierung einführen. Später werden wir dann die Integration auf allgemeinen Flächen genauer studieren.

Definition 47 (Oberflächenintegral auf Flächenstücken). *Seien $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein reguläres und injektives Flächenstück, $f : \alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge von U . Dann ist der Ausdruck*

$$\int_{\alpha(K)} f \, dA := \int_K f(\alpha(u)) \sqrt{g_\alpha(u)} \, du \quad (2.7)$$

wohldefiniert und wird das Oberflächenintegral von f über $\alpha(K)$ genannt, wobei g_α die Gramsche Determinante aus (2.5) ist. Für $f \equiv 1$ wird das Integral auch Flächeninhalt von $\alpha(K)$ genannt.

Die Transformationsformel für Integrale impliziert, dass das Oberflächenintegral invariant unter Reparametrisierung ist, wohingegen die Gramsche Matrix sich sehr wohl bei einem Wechsel der Parametrisierung ändern wird (siehe(2.4)). Wir erinnern auch daran, dass der Integrand auf der rechten Seite in (2.7) stetig ist und damit das Integral sowohl im Riemannschen als auch im Lebesgueschen Sinne interpretiert werden kann.¹⁰

Als Beispiel betrachten wir

$$\alpha(u_1, u_2) = \varrho(\cos(u_1) \cos(u_2), \cos(u_1) \sin(u_2), \sin(u_1))$$

mit

$$(u_1, u_2) \in U := (-\pi/2, +\pi/2) \times (0, 2\pi)$$

als eine Parametrisierung der geschlitzten Sphäre vom Radius ϱ (es fehlt ein halber Großkreis vom Nord- zum Südpol) und mit den Formeln von oben erhalten wir

$$g_\alpha(u_1, u_2) = \varrho^4 \cos^2(u_1)$$

und damit

$$\text{area}(\alpha(K)) := \varrho^2 \int_{\alpha(K)} dA = \varrho^2 \int_K \cos(u_1) \, du.$$

Schöpfen wir schließlich U mit immer größer werdendem K aus, so erhalten wir im Limes und mit dem Satz von Fubini die wohlbekannte Formel

$$\text{area}(\varrho S^2) = \varrho^2 \int_U \cos(u_1) \, du = \varrho^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(u_1) \, du_2 \, du_1 = 4\pi\varrho^2,$$

wobei wir stillschweigend benutzt haben, dass die Flächeninhalte einer Sphäre und einer geschlitzten Sphäre gleich sind.

¹⁰Analog zum \mathbb{R}^d gibt es auch auf Mannigfaltigkeiten eine Riemannsche und eine Lebesguesche Integrationstheorie, wobei letztere ein sehr viel grössere Klasse von Integranden zulässt. Wir werden in dieser Vorlesung nur stetige Funktionen integrieren, für die beide Theorien dasselbe Integral liefern.

2.1.3 Differenzierbarkeit

Definition 48 (Differenzierbarkeit von Funktionen auf Flächen). *Seien M eine k -mal stetig differenzierbare Fläche und $p_* \in M$ gegeben. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig differenzierbar in p_* , falls für eine lokale Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M$ von M um p_* mit $p_* = \alpha(u_*)$ die Abbildung $f \circ \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar in u_* ist.*

Bemerkung.

1. Die Differenzierbarkeit ist unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung: Ist $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \rightarrow M$ eine weitere lokale Parametrisierung von M um p_* , so ist $f \circ \alpha$ genau dann k -mal stetig differenzierbar in u_* , falls $f \circ \tilde{\alpha}$ k -mal stetig differenzierbar in \tilde{u}_* ist. Dies liegt daran, dass bei einer k -mal stetig differenzierbaren Fläche die lokalen Kartenwechsel in Abbildung 2.2 auch k -mal stetig differenzierbar sind.
2. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist k -mal stetig differenzierbar auf M , falls sie es in jedem Punkt $p_* \in M$ ist. Man schreibt dann oft auch $f \in C^k(M)$.¹¹
3. Komponentenweise wird Differenzierbarkeit von Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert. Insbesondere ist ein Vektorfeld $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ k -mal stetig differenzierbar, falls alle Komponentenabbildungen $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar sind.
4. Ganz analog zu Definition 48 — siehe Abbildung 2.5 — wird die Differenzierbarkeit von Abbildungen $f : M \rightarrow \tilde{M}$ zwischen zwei Flächen $M \subset \mathbb{R}^d$ und $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ definiert. Man fordert einfach, dass $\tilde{\alpha}^{-1} \circ f \circ \alpha : U \rightarrow \tilde{U}$ im Punkt $u_* = \alpha^{-1}(p_*)$ stetig differenzierbar ist, wobei α bzw. $\tilde{\alpha}$ lokale Parametrisierungen von M bzw. \tilde{M} um p_* bzw. $\tilde{p}_* = f(p_*)$ sind.

In Definition 48 blieb offen, was genau nun die Ableitung einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f : M \rightarrow \tilde{M}$ sein soll. Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns an die Situation in flachen Räumen: Ist $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit n unabhängigen und m abhängigen Variablen, so gilt nach Analysis II

$$Df : \Omega \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \quad \text{mit} \quad x_* \in \Omega \mapsto (Df)_{x_*},$$

wobei die lineare Abbildung $(Df)_{x_*}$ ausgewertet in $v \in \mathbb{R}^n$ via

$$(Df)_{x_*}(v) := \text{Jac } f(x_*) \cdot v = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_*) & \dots & \partial_{x_n} f_1(x_*) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1} f_m(x_*) & \dots & \partial_{x_n} f_m(x_*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Jacobi-Matrix $\text{Jac } f(x_*) \in \text{Mat}(n \times m)$ dargestellt werden kann. Insbesondere ist $(Df)_{x_*}$ für jedes x_* immer eine lineare Abbildung zwischen den linearen Räumen \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m .

Definition 49 (Differential einer Abbildung zwischen Flächen). *Sei $f : M \rightarrow \tilde{M}$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen den regulären Flächen M und \tilde{M} . Dann wird durch*

$$(Df)_{p_*}(\dot{\beta}(0)) := \dot{\tilde{\beta}}(0)$$

¹¹Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, die hinreichend oft stetig differenzierbar sind, werden oft auch glatt genannt, wobei der Grad der Differenzierbarkeit in der Regel nicht explizit angegeben wird.

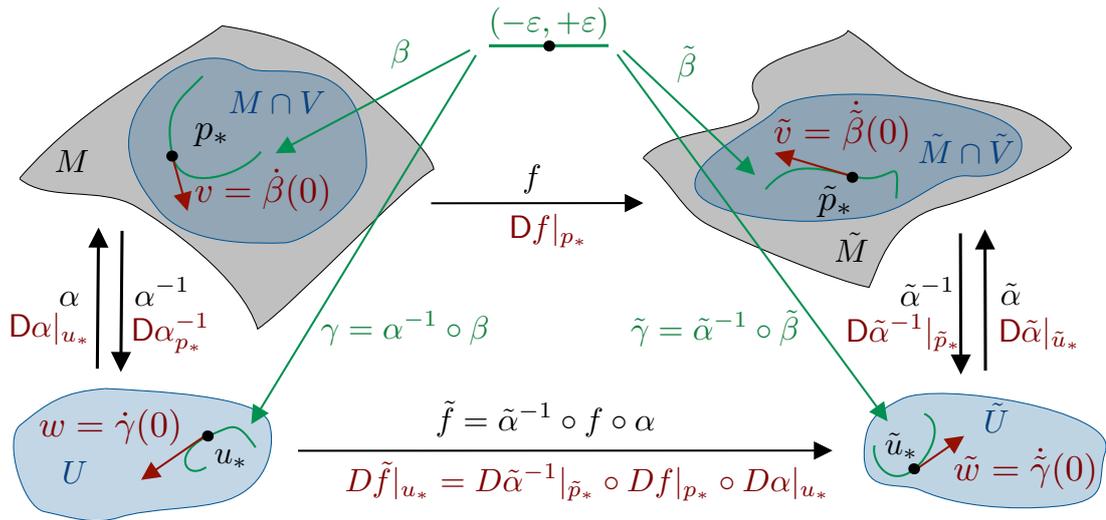


Abbildung 2.5: Illustration für die Differenzierbarkeit und für das Differential einer Abbildung $f : M \rightarrow \tilde{M}$ zwischen zwei Flächen M und \tilde{M} , siehe Definitionen 48 und 49. Die Differentiale $D\alpha|_{u_*}$, $D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}_*}$ und $D\tilde{f}|_{u_*}$ können direkt durch Jacobi-Matrizen dargestellt werden, da die entsprechenden Abbildungen auf den flachen Mengen U bzw. \tilde{U} definiert sind. Die Differentiale $D\alpha^{-1}|_{p_*}$, $D\tilde{\alpha}^{-1}|_{\tilde{p}_*}$ sind zwar keine Jacobi-Matrizen, aber die inversen können als Jacobi-Matrix aufgefasst werden. Das Differential $Df|_{p_*}$ kann dann mit der verallgemeinerten Kettenregel aus Satz 50 berechnet werden.

für jede reguläre Kurve $\beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ mit $\beta(0) = p_*$ und $\tilde{\beta} := f \circ \beta$ eine Abbildung

$$p_* \in M \mapsto (Df)_{p_*} \in \text{Lin}(T_{p_*}M; T_{\tilde{p}_*}\tilde{M})$$

definiert, die das Differential von f genannt wird. Man schreibt oft auch $Df|_{p_*}$ statt $(Df)_{p_*}$ und $Df|_{p_*}v$ statt $Df|_{p_*}(v)$ für $v \in T_{p_*}M$.

Das Differential einer Abbildung zwischen zwei Flächen verallgemeinert das Konzept der Jacobi-Matrix auf Abbildungen zwischen „gekrümmten“ Mengen. Insbesondere kann $(Df)_{p_*}$ als die *Linearisierung* der (im Allgemeinen nichtlinearen) Abbildung f in der Nähe des Punktes p_* betrachtet werden, wobei die linearisierte Abbildung zwischen den *linearisierten* Flächen, d.h. zwischen den Tangentialräumen $T_{p_*}M$ und $T_{f(p_*)}\tilde{M}$ wirkt. Der flache Fall ist dabei natürlich als Spezialfall enthalten.

Beispiel (Spezialfälle in Definition 49).

1. Seien $M = U$ und $\tilde{M} = \tilde{U}$ zwei offene Teilmengen des \mathbb{R}^2 (mit jeweils trivialer Parametrisierung) und $f : U \rightarrow \tilde{U}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$Df|_{u_*} = \text{Jac } f(u_*) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1(u_*) & \partial_{u_2} f_1(u_*) \\ \partial_{u_1} f_2(u_*) & \partial_{u_2} f_2(u_*) \end{pmatrix} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2),$$

denn mit $\tilde{\beta}(t) = f(\beta(t))$ gilt nach Kettenregel auch $\dot{\tilde{\beta}}(0) = (\text{Jac } f(u_*))\dot{\beta}(0)$, sofern alle Vektoren als Spaltenvektoren interpretiert werden.¹² Beachte, dass $T_u U = \mathbb{R}^2$ für alle $u \in U$ gilt, d.h. bei der flachen Fläche $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt es den universalen Tangentialraum \mathbb{R}^2 .

¹²Beim Rechnen mit Jacobi-Matrizen muss man Zeilen- und Spaltenvektoren sauber unterscheiden.

2. Sind $M = \tilde{U}$ und $f = \tilde{\alpha}$ eine Parametrisierung von \tilde{M} , so gilt

$$D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}_*} = \text{Jac } f(u_*) = \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\alpha}_1(\tilde{u}_*) & \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\alpha}_1(u_*) \\ \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\alpha}_2(\tilde{u}_*) & \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\alpha}_2(u_*) \\ \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\alpha}_3(\tilde{u}_*) & \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\alpha}_3(u_*) \end{pmatrix} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^2; T_{\tilde{\alpha}(\tilde{u}_*)} \tilde{M})$$

mit $D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}_*} w = \left(\text{Jac } f(u_*) \right) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ im Sinne der Matrizenmultiplikation.

3. Sind $\tilde{M} = U$ und $f = \alpha^{-1}$ eine Karte von M , so ergibt sich

$$D\alpha^{-1}|_{\alpha(u_*)} = (D\alpha|_{u_*})^{-1} \in \text{Lin}(T_{\alpha(u_*)} M; \mathbb{R}^2)$$

im Sinne von Abbildungen. Dies ist eine Variante der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen. Es gibt aber kein direktes Analogon mit Matrizen, da $\text{Jac } \alpha(u_*)$ keine quadratische Matrix ist.¹³

Wir hatten bereits gesehen, dass jede lokale Parametrisierung $p = \alpha(u)$ mit $\alpha : U \rightarrow M$ mit $\partial_{u_i} \alpha(u)$ eine lokale Basis in $T_{\alpha(u)} M$ liefert. Nach Konstruktion gilt dann

$$Df|_{\alpha(u)} (\partial_{u_i} \alpha(u)) = \partial_{u_i} (f \circ \alpha)(u), \quad (2.8)$$

für $i = 1, 2$ und wegen der Linearität des Differentialial kann hieraus die Abbildung $Df|_p$ rekonstruiert werden.

Satz 50 (Darstellung des Differentialial bzgl. zweier Parametrisierungen). Sei $f : M \rightarrow \tilde{M}$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen den regulären Flächen M und \tilde{M} , und seien $\alpha : U \rightarrow M$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{M}$ zwei lokale Parametrisierungen, so dass f die Menge $\alpha(U)$ nach $\tilde{\alpha}(\tilde{U})$ abbildet. Dann gilt die verallgemeinerte Kettenregel

$$D(\tilde{\alpha}^{-1} \circ f \circ \alpha) = (D\tilde{\alpha}^{-1}) \circ (Df) \circ (D\alpha),$$

wobei die linke Seite als klassische Jacobi-Matrix berechnet werden kann und als Parameterdarstellung von Df bzgl. α und $\tilde{\alpha}$ bezeichnet wird.

Beweis. Wir benutzen die Notation von Abbildung 2.5. Insbesondere fixieren wir $p_* \in M$, betrachten eine beliebige, aber fixierte Kurve $\beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ mit $\beta(0) = p_*$ und definieren die entsprechenden Kurven $\gamma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow U$, $\tilde{\beta} : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \tilde{M}$ und $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \tilde{U}$ durch

$$\gamma(t) := \alpha^{-1}(\beta(t)), \quad \tilde{\beta}(t) = f(\beta(t)), \quad \tilde{\gamma}(t) := \tilde{\alpha}^{-1}(\tilde{\beta}(t)) = \tilde{f}(\gamma(t)).$$

Dann gilt zum einen („kurzer Weg oben“)

$$\dot{\tilde{\beta}}(0) = Df|_{p_*} \dot{\beta}(0)$$

und zum anderen auch („langer Weg über unten“) wegen

$$\dot{\gamma}(0) = D\alpha^{-1}|_{p_*} \dot{\beta}(0), \quad \dot{\tilde{\gamma}}(0) = D\tilde{f}|_{u_*} \dot{\gamma}(0), \quad \dot{\tilde{\beta}}(0) = D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}_*} \dot{\tilde{\gamma}}(0)$$

¹³Für nichtquadratische Matrizen gibt es die Theorie der *Pseudo-Inversen*, aber wir wollen diese hier nicht weiter diskutieren.

auch

$$\dot{\beta}(0) = \left((D\tilde{\alpha})_{\tilde{u}_*} \circ (Df)_{u_*} \circ D\alpha^{-1}|_{p_*} \right) \dot{\beta}(0).$$

Da β beliebig war folgt

$$Df|_{p_*} = D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}_*} \circ D\tilde{f}|_{u_*} \circ D\alpha^{-1}|_{p_*}$$

und wir hatten schon (Bemerkungen oben) gesehen, dass

$$D\alpha^{-1}|_{p_*} = (D\alpha|_{u_*})^{-1}, \quad D\tilde{\alpha}^{-1}|_{\tilde{p}_*} = (D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}_*})^{-1}$$

im Sinne bijektiver Abbildung gilt. Die Behauptung folgt nun in der punktweisen Form

$$D\tilde{\alpha}^{-1}|_{\tilde{p}_*} \circ Df|_{p_*} \circ D\alpha|_{u_*} = D\tilde{f}|_{u_*}$$

nach Umstellen der Terme. □

Wir wollen ein Beispiel rechnen. Dazu bilden wir durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} +\cos(\eta(p_3)) & -\sin(\eta(p_3)) & 0 \\ +\sin(\eta(p_3)) & +\cos(\eta(p_3)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

die Sphäre $M = \tilde{M} = S^2$ bijektiv auf sich ab, wobei die gegebene Funktion $\eta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ angibt, um welchen Winkel jede horizontale Kreislinie gedreht wird.

Variante 1: Wir können $Df|_p$ mit Hilfe von Definition 49 charakterisieren: Ist $\beta(t)$ irgendeine Kurve in M , so ist

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1(t) \\ \tilde{\beta}_2(t) \\ \tilde{\beta}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(\eta(\beta_3(t))) & -\sin(\eta(\beta_3(t))) & 0 \\ +\sin(\eta(\beta_3(t))) & +\cos(\eta(\beta_3(t))) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{pmatrix}$$

die entsprechende Kurve in \tilde{M} und Differentiation nach t liefert

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\beta}}_1(t) \\ \dot{\tilde{\beta}}_2(t) \\ \dot{\tilde{\beta}}_3(t) \end{pmatrix} &= + \begin{pmatrix} +\cos(\eta(\beta_3(t))) & -\sin(\eta(\beta_3(t))) & 0 \\ +\sin(\eta(\beta_3(t))) & +\cos(\eta(\beta_3(t))) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \\ \dot{\beta}_3(t) \end{pmatrix} \\ &+ \eta'(\beta_3(t)) \dot{\beta}_3(t) \begin{pmatrix} -\sin(\eta(\beta_3(t))) & +\cos(\eta(\beta_3(t))) & 0 \\ -\cos(\eta(\beta_3(t))) & -\sin(\eta(\beta_3(t))) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und nach Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix} &= + \begin{pmatrix} +\cos(\eta(p_3)) & -\sin(\eta(p_3)) & 0 \\ +\sin(\eta(p_3)) & +\cos(\eta(p_3)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &+ \eta'(p_3) v_3 \begin{pmatrix} -\sin(\eta(p_3)) & +\cos(\eta(p_3)) & 0 \\ -\cos(\eta(p_3)) & -\sin(\eta(p_3)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Vorschrift für die Abbildung

$$v \in T_p M \quad \mapsto \quad \tilde{v} = Df|_p v \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}.$$

Im Prinzip können wir diese auch in Form von $\tilde{v} = X|_p \cdot c$ mit einer Matrix $X|_p \in \text{Mat}(3 \times 3)$ schreiben, aber die drei Komponenten von v sind nicht unabhängig, da v in dem zweidimensionalen Unterraum $T_p M$ lebt. Oder anders gesagt: $Df|_{p^*}$ kann nicht in natürlicher Weise mit einer 2×2 -Matrix identifiziert werden. Durch Wahl einer Parametrisierung kann man aber – wie wir gleich sehen werden – die lineare Abbildung $D\tilde{f}|_{u^*}$ berechnen, die dann in natürlicher Weise als 2×2 -Matrix dargestellt werden kann, eben weil die Parametrisierung die Basisvektoren $\partial_{u_i} \alpha(u) \in T_p M$ auszeichnet.

Variante 2: Um alles in Koordinaten zu berechnen, parametrisieren wir sowohl M als auch \tilde{M} durch Euler-Winkel wie in (2.1), d.h. wir schreiben

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(u_1, u_2) \\ \alpha_2(u_1, u_2) \\ \alpha_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \cos(u_1) \sin(u_2) \\ \sin(u_1) \end{pmatrix}$$

und analog für $\tilde{p} = \tilde{\alpha}(\tilde{u})$. Die Abbildung f kann (scharfes Hinsehen) bzgl. der gewählten Koordinaten als

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(u_1, u_2) \\ \tilde{f}_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 + \tilde{\eta}(u_1) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{\eta}(u_1) = \eta(\sin(u_1))$$

geschrieben werden, d.h. wir haben $\tilde{f} : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{U} = \mathbb{R}^2$ gefunden, so dass $\tilde{\alpha} \circ \tilde{f} = f \circ \alpha$ wie in Abbildung 2.5 gilt. Mit anderen Worten: \tilde{f} beschreibt die geometrische Transformation f bzgl. der in M und \tilde{M} gewählten Koordinaten.¹⁴ Das Differential von \tilde{f} kann nun einfach in Form einer Jacobi-Matrix ausgerechnet werden, d.h. die Abbildung

$$w \in T_u U = \mathbb{R}^2 \quad \mapsto \quad \tilde{w} = D\tilde{f}|_u w \in T_{\tilde{u}} \tilde{U} = \mathbb{R}^2$$

kann mit Hilfe von $\text{Jac } \tilde{f}(u)$ als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \tilde{f}_1(u_1, u_2) & \partial_{u_2} \tilde{f}_1(u_1, u_2) \\ \partial_{u_1} \tilde{f}_2(u_1, u_2) & \partial_{u_2} \tilde{f}_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +\tilde{\eta}'(u_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 \\ \tilde{\eta}'(u_1)w_1 + w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

geschrieben werden, und die inverse Abbildung ist gerade

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{\eta}'(\tilde{u}_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix}$$

Mit denselben Argumenten kann die Abbildung

$$w \in T_u U \quad \mapsto \quad v = D\alpha|_u w \in T_{\alpha(u)} M$$

¹⁴Der Vorteil von \tilde{f} gegenüber f ist, dass \tilde{f} auf der *flachen* – bzw. *nicht-gekrümmten* – Menge U definiert ist, für die wir die Ergebnisse aus Analysis I+II verwenden können.

als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \alpha_1(u_1, u_2) & \partial_{u_2} \alpha_1(u_1, u_2) \\ \partial_{u_1} \alpha_2(u_1, u_2) & \partial_{u_2} \alpha_2(u_1, u_2) \\ \partial_{u_1} \alpha_3(u_1, u_2) & \partial_{u_2} \alpha_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= w_1 \begin{pmatrix} -\sin(u_1) \cos(u_2) \\ -\sin(u_1) \sin(u_2) \\ \cos(u_1) \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} -\cos(u_1) \sin(u_2) \\ +\cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

identifiziert werden und analoge Formeln gelten für die entsprechenden $\tilde{\sim}$ -Größen. Für jedes $p \in M$ gilt nun lokal

$$Df|_p = D\tilde{\alpha}|_{\tilde{u}} \circ D\tilde{f}|_u \circ D\alpha|_p^{-1} : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M},$$

wobei $D\alpha^{-1}|_p$ die inverse Abbildung zu $D\alpha|_u$ ist und nicht so einfach als Matrix geschrieben werden kann.

Bemerkung.

1. Ist $f : M \rightarrow \tilde{M}$ invertierbar und sind sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar, so gilt

$$Df^{-1}|_{\tilde{p}} = (Df|_p)^{-1}$$

mit $\tilde{p} = f(p)$, also eine Variante der Ableitungsregel für inverse Funktionen. Dies folgt mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 50 direkt aus Definition 49. Analog zeigt man die Kettenregel

$$D(h \circ f)|_p = Dh|_{f(p)} \circ Df|_p,$$

sofern $h : \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ stetig differenzierbar ist.

2. Das Differential kann analog auch für Abbildungen zwischen (flachen oder gekrümmten) Räumen und Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension definiert werden. Zum Beispiel gilt

$$Df|_p \in \text{Lin}(T_p M; \mathbb{R}^k), \quad Df|_p(\dot{\beta}(0)) = \frac{d}{dt} f(\beta(t))|_{t=0}$$

für eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ und jede Kurve $\beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$ mit $\beta(0) = p$. Außerdem kann immer die Formel (2.8) verwendet werden, um Differentiale in lokalen Koordinaten auszudrücken.

3. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion auf M , so ist das Differential $Df|_p$ in jedem Punkt p eine lineare (und damit auch stetige) Abbildung von $T_p M$ nach \mathbb{R} , also ein Element des Dualraumes $T_p^* M := \text{Lin}(T_p M; \mathbb{R})$ und damit kein Tangentialvektor. Wir werden aber später sehen, dass es auch das verwandte Konzept des Gradienten gibt: Es gilt

$$\text{grad } f|_p \in T_p M \quad \text{so dass} \quad I_p(\text{grad } f_p, v) = Df|_p(v) \quad \text{für alle } v \in T_p M.$$

In flachen Räumen ist unterscheiden sich Differential und Gradient nur wie Zeilenvektoren von Spaltenvektoren. In gekrümmten Räumen ist die Unterscheidung aber wesentlich.

4. Das Differential Df aus Definition 49 beschreibt die ersten Ableitungen, aber höhere Ableitungen können rekursiv eingeführt werden. Zum Beispiel kann die zweite Ableitung von $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$D^2 f|_{p*} \in \text{Lin}(T_p M; \text{Lin}(T_p M; \mathbb{R})) \quad (2.9)$$

als das „Differential vom Differential von f “ betrachtet werden.

2.1.4 Orientierbarkeit und Normalenfeld

Wir betrachten im Folgenden Flächen im dreidimensionalen Raum, d.h. bis auf weiteres gilt $d = 3$ und jede Fläche M ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

Für ein parametrisiertes Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ kann man durch

$$\nu_{\pm}(\alpha(u)) := \pm \frac{\partial_{u_1} \alpha(u) \times \partial_{u_2} \alpha(u)}{\|\partial_{u_1} \alpha(u) \times \partial_{u_2} \alpha(u)\|} \in N_{\alpha(u)} \alpha(U) \quad (2.10)$$

zwei normale Vektorfelder auf $\alpha(U)$ definieren, aber diese Definition ist nicht *invariant* unter Reparametrisierung und kann daher nicht auf alle reguläre Flächen übertragen werden. In der Tat, mit den Notationen aus Abbildung 2.2 und elementaren Rechnungen (Übungsaufgabe) folgt

$$\tilde{\nu}(\tilde{\alpha}(\tilde{u})) = \text{sgn}\left(\det(\text{Jac } \phi(\tilde{u}))\right) \nu(\alpha(\phi(\tilde{u})))$$

und wir schließen, dass sich das Vorzeichen der Normalenvektoren unter einem Wechsel der Parametrisierung ändern kann.

Definition 51 (Orientierbarkeit). *Eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt orientierbar, falls es ein stetig differenzierbares Normalenvektorfeld $\nu \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit*

$$\nu(p) \in N_p M \quad \text{und} \quad |\nu(p)| = 1$$

für alle $p \in M$ gibt.

Wir bemerken, dass mit ν auch immer $-\nu$ ein Normalenvektorfeld auf M ist, d.h. man hat immer eine binäre Wahl bzw. die Wahl zwischen zwei *Orientierungen*.

Beispiel (Orientierbare Flächen).

1. $\nu_+(p) = +p/|p|$ und $\nu_-(p) = -p/|p|$ definieren jeweils ein stetig differenzierbares Normalenvektorfeld auf

$$S_\varrho^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \varrho^2\},$$

d.h. auf der Kugel vom Radius ϱ um 0. Die Abbildungen ν_+ bzw. ν_- werden aus offensichtlichen Gründen hier äußeres bzw. inneres Normalenvektorfeld genannt.

2. Auf dem Kreiszyylinder

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2\}$$

liefern

$$\nu_{\pm}(p) = \pm \varrho^{-1}(p_1, p_2, 0)$$

wieder ein äußeres und ein inneres Normalenvektorfeld, wobei beide auch stetig differenzierbar sind.

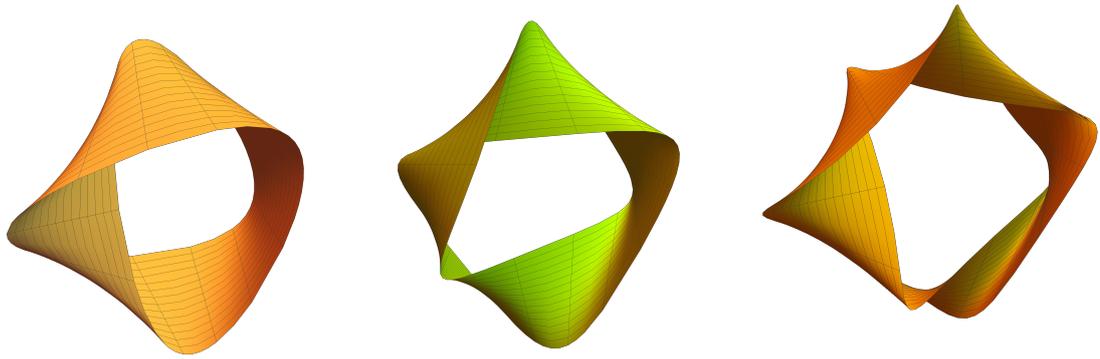


Abbildung 2.6: Die Flächen zu (2.11): Das Möbius-Band ($m = 1$, links) ist das Standardbeispiel für eine nicht-orientierbare Fläche. Für $m = 2$ (Mitte) erhält man eine orientierbare Fläche, für $m = 3$ wieder eine nicht-orientierbare.

3. Der Torus und der Helikoid sind orientierbar.

4. Ist das Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv, so ist $\text{spur}(\alpha)$ orientierbar.

Beispiel (Nicht-orientierbare Fläche). Das Möbius-Band¹⁵ kann auf viele Arten konstruiert werden, zum Beispiel für den Parameter $m = 1$ als Spur der nicht-injektiven Parametrisierung

$$\alpha_m(u) = \left(\sin(u_1) \left(1 + u_2 \sin\left(\frac{m}{2}u_1\right)\right), \cos(u_1) \left(1 - u_2 \sin\left(\frac{m}{2}u_1\right)\right), u_2 \cos\left(\frac{m}{2}u_1\right) \right) \quad (2.11)$$

mit $(u_1, u_2) \in \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, wobei 2ε die Breite des Bandes ist und $m \in \mathbb{Z}$ die Anzahl der Verdrehungen beschreibt. Die Nichtorientierbarkeit für ungerade m kann sehr anschaulich erklärt werden, da das entsprechende Band nur eine Seite besitzt (und nicht – wie zum Beispiel das zylindrische Band für $m = 0$ – eine Außenseite und eine Innenseite). Auf formaler Ebene kann dies wie folgt verstanden werden: Es gilt

$$\alpha(u_1 + \pi, -u_2) = \alpha(u_1, u_2)$$

für alle (u_1, u_2) und damit auch

$$\partial_{u_1} \alpha(u_1 + \pi, -u_2) = +\partial_{u_1} \alpha(u_1, u_2), \quad \partial_{u_2} \alpha(u_1 + \pi, -u_2) = -\partial_{u_2} \alpha(u_1, u_2). \quad (2.12)$$

Die Formeln (2.10) liefern deshalb via

$$\nu_{\pm}(\alpha(u_1 + \pi, -u_2)) = \nu_{\mp}(\alpha(u_1, u_2)), \quad (2.13)$$

zwei verschiedene Normalenvektoren für denselben Punkt in $\text{spur}(\alpha)$.

Satz 52 (Äquivalente Charakterisierung von Orientierbarkeit). Eine Fläche M ist genau dann orientierbar, falls es ein vollständiges System von lokalen Parametrisierungen (U_i, α_i) gibt, so dass für je zwei Parametrisierungen $\alpha_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\alpha_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $M_{ij} := \alpha_i(U_i) \cap \alpha_j(U_j) \neq \emptyset$ die Jacobi-Matrix der entsprechenden Reparametrisierungsabbildung $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i : \alpha_i^{-1}(M_{ij}) \rightarrow \alpha_j^{-1}(M_{ij})$ eine positive Determinante besitzt.

¹⁵August Ferdinand Möbius (1790–1868), deutscher Mathematiker und Astronom.

Beweis. Hinrichtung (\Rightarrow): Sei ν ein gegebenes Normalenvektorfeld auf M und $(\alpha_i, U_i)_i$ ein vollständiges System von Parametrisierungen. Gilt $\nu(\alpha_i(u)) = \nu_{+,i}(\alpha_i(u))$ für alle $u \in U_i$, wobei $\nu_{+,i}$ wie in (2.10) durch das Kreuzprodukt von $\partial_{u_1/2} \alpha_i$ definiert ist, so bleiben U_i und α_i unverändert. Andernfalls ersetzen wir diese lokale Parametrisierung durch

$$\bar{U}_i := \{(u_1, u_2) : (-u_1, u_2) \in U_i\}, \quad \bar{\alpha}_i : \bar{U}_i \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}_i(u_1, u_2) = \alpha_i(-u_1, u_2)$$

und dies impliziert $\bar{\nu}_{+,i} = -\nu_{+,i}$. Wenden wir diesen Schritt auf jedes i an, erhalten wir schließlich ein System von Parametrisierungen mit den gewünschten Eigenschaften.

Rückrichtung (\Leftarrow): Mit Hilfe des gegebenen Systems von Parametrisierungen kann die Formel (2.10) mit globaler Vorzeichenwahl (zum Beispiel immer "+") benutzt werden, um das Normalenvektorfeld auf ganz M zu definieren, denn die Voraussetzungen garantieren, dass diese Definition mit den zugelassenen Kartenwechseln verträglich ist. \square

Theorem 52 zeigt insbesondere, wie man Orientierbarkeit für Flächen $M \subset \mathbb{R}^d$ mit $d > 3$ oder gar höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten definieren kann, nämlich mittels der Funktionaldeterminante von Kartenwechseln. Für Flächen im \mathbb{R}^3 ist aber der Zugang über das Kreuzprodukt intuitiver.

2.2 Krümmung von Flächen

In diesem Abschnitt betrachten wir orientierbare Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$, die mindestens zweimal stetig differenzierbar sind und führen die wesentlichen Krümmungsbegriffe ein.

2.2.1 Gauß- und Weingarten-Abbildung

Die wesentliche Beobachtung für die folgenden Betrachtungen kann wie folgt formuliert werden: Für jede orientierbare Fläche besitzt der Normalenvektor

$$\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$$

als Abbildung zwischen zwei Flächen – nämlich zwischen M und der Einheitssphäre \mathbb{S}^2 – nach Definition 49 ein Differential mit

$$D\nu|_p : T_p M \rightarrow T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2.$$

Nach Konstruktion gilt aber

$$T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \langle \nu(p), v \rangle = 0 \right\} = T_p M,$$

d.h. der Urbildraum und der Bildraum von $D\nu|_p$ sind identisch. Insbesondere ist $D\nu|_p$ immer ein Automorphismus von $T_p M$ und in den nächsten zwei Abschnitten wollen wir herausarbeiten, dass diese Abbildung alle wesentliche lokalen Informationen über die Krümmung von M kodiert. Aus historischen Gründen betrachtet man aber $-D\nu|_p$.

Definition 53 (noch ein paar Namen). *Sei M eine orientierbare Fläche im \mathbb{R}^3 . Das Normalenvektorfeld ν wird auch Gauß-Abbildung¹⁶ von M genannt und die Abbildung*

$$p \in M \mapsto L_p := -D\nu|_p \in \text{Lin}(T_p M; T_p M)$$

heißt Weingarten-Abbildung¹⁷ (oder auch Form-Operator).

Die erste wichtige Eigenschaft von L_p ist eine gewisse Kompatibilität mit der ersten Fundamentalform, die es uns anschließend erlauben wird, weitere symmetrische Bilinearformen auf $T_p M$ zu identifizieren.

Lemma 54 (Symmetrie von L_p bzgl. I_p). *Es gilt*

$$I_p(L_p v, w) = I_p(v, L_p w)$$

für jedes $p \in M$ und alle $v, w \in T_p M$.

Beweis. Wegen der Bilinearität von I_p reicht es, die Behauptung für Basisvektoren in $T_p M$ zu zeigen. Dazu wählen wir eine lokale Parametrisierung $p = \alpha(u)$ mit $\alpha : U \rightarrow M$ und mit

$$L_p \partial_{u_i} \alpha(u) = -\partial_{u_i} (\nu \circ \alpha)(u)$$

¹⁶Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), in Braunschweig geborener „Fürst der Mathematik“.

¹⁷Julius Weingarten (1836–1910), deutscher Mathematiker.

erhalten wir

$$\begin{aligned} I_p(L_p \partial_{u_i} \alpha(u), \partial_{u_j} \alpha(u)) &= -\langle \partial_{u_i} (\nu \circ \alpha)(u), \partial_{u_j} \alpha(u) \rangle \\ &= -\partial_{u_i} \langle (\nu \circ \alpha)(u), \partial_{u_j} \alpha(u) \rangle + \langle (\nu \circ \alpha)(u), \partial_{u_i} \partial_{u_j} \alpha(u) \rangle \\ &= 0 + \langle (\nu \circ \alpha)(u), \partial_{u_i} \partial_{u_j} \alpha(u) \rangle, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\nu(p)$ immer senkrecht auf $T_p M$ steht. Da aber der Ausdruck auf der rechten Seite symmetrisch in i und j ist, erhalten wir via

$$I_p(L_p \partial_{u_i} \alpha(u), \partial_{u_j} \alpha(u)) = I_p(L_p \partial_{u_j} \alpha(u), \partial_{u_i} \alpha(u))$$

das gewünschte Ergebnis. □

Definition 55 (Weitere Fundamentalformen). *Die Abbildung*

$$p \in M \quad \mapsto \quad II_p \in \text{Bilin}(T_p M) \quad \text{mit} \quad II_p(v, w) := I_p(L_p v, w)$$

heißt Zweite Fundamentalform der orientierbaren Fläche M und

$$p \in M \quad \mapsto \quad III_p \in \text{Bilin}(T_p M) \quad \text{mit} \quad III_p(v, w) := I_p(L_p v, L_p w)$$

wird die Dritte Fundamentalform genannt.

Als einfaches Beispiel wollen wir mit $M = \varrho S^2$ die Sphäre vom Radius ϱ betrachten, für die das Normalenvektorfeld und sein Differential durch

$$\nu(p) = \pm \varrho^{-1} p, \quad L_p = \mp \varrho^{-1} \text{id},$$

gegeben sind, wobei das Vorzeichen von der gewählten Orientierung abhängt. Damit¹⁸ gilt

$$I_p = \mp \varrho II_p = +\varrho^2 III_p$$

für alle $p \in M$, aber im Allgemeinen sind die zweite und dritte Fundamentalform nicht durch globale Vielfache der ersten Fundamentalform zu bestimmen. Wir werden weiter unten sehen, wie die Fundamentalformen allgemeinerer Flächen durch lokale Parametrisierungen berechnet werden können.

Bemerkung.

1. *Alle drei Fundamentalformen sind stetig differenzierbar in dem folgenden Sinne: Sind $v, w : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei stetig differenzierbare und tangential¹⁹ Vektorfelder auf M , so sind die Abbildungen*

$$p \in M \mapsto I_p(v(p), w(p)) \quad \text{bzw.} \quad II_p(v(p), w(p)) \quad \text{bzw.} \quad III_p(v(p), w(p))$$

stetig differenzierbar. Dies gilt weil wir per Generalannahme immer voraussetzen, dass M mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Insbesondere sind in diesem Kapitel alle betrachteten Parametrisierungen α immer zweimal stetig differenzierbar und dies impliziert, dass $\nu_\alpha = \nu \circ \alpha$ mindestens einmal stetig differenzierbar ist.

¹⁸Insbesondere impliziert das positive Vorzeichen in der Formel für ν – bzw. die Wahl des äußeren Normalenvektors – dass die zweite Fundamenmentalform negativ definit ist.

¹⁹Erinnerung: $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist tangentiales Vektorfeld, falls $v(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$.

2. Nach Konstruktion und Lemma 54 gilt

$$I_p(v, w) = I_p(w, v) \quad II_p(v, w) = II_p(w, v) \quad III_p(v, w) = III_p(w, v),$$

d.h. alle drei Fundamentalformen sind symmetrische Bilinearformen auf T_pM .

In einer lokalen und invertierbaren Parametrisierung $M \ni p = \alpha(u)$ mit $\alpha : U \rightarrow M$ wird die Gauß-Abbildung durch

$$\nu_\alpha := \nu \circ \alpha : U \rightarrow N_pM \subset \mathbb{R}^3$$

vertreten, wohingegen L_p für jedes $p \in \alpha(U)$ durch

$$L_{u,\alpha} := (D\alpha|_u)^{-1} \circ L_p \circ D\alpha|_u \in \text{Lin}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

repräsentiert wird, und wir werden weiter unten sehen, wie die entsprechende Matrix bzgl. der lokalen Koordinaten berechnet werden kann.

Satz 56 (Fundamentalformen und Koordinaten). *Sei $p = \alpha(u)$ mit $\alpha : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M . Dann entsprechen die drei Fundamentalformen in T_pM den quadratischen 2×2 -Matrizen*

$$\begin{aligned} I_{u,\alpha} &= + \left(\langle \partial_{u_{i_1}} \alpha(u), \partial_{u_{i_2}} \alpha(u) \rangle \right)_{i_1, i_2=1,2}, \\ II_{u,\alpha} &= - \left(\langle \partial_{u_{i_1}} \alpha(u), \partial_{u_{i_2}} \nu_\alpha(u) \rangle \right)_{i_1, i_2=1,2}, \\ III_{u,\alpha} &= + \left(\langle \partial_{u_{i_1}} \nu_\alpha(u), \partial_{u_{i_2}} \nu_\alpha(u) \rangle \right)_{i_1, i_2=1,2} \end{aligned}$$

bzgl. der durch die Parametrisierung induzierten Basiswahl in T_pM .

Beweis. Die lokalen Koordinaten entsprechen der Basiswahl

$$\partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \in T_pM$$

und mit (2.8) schließen wir, dass

$$L_p \partial_{u_i} \alpha(u) = -\partial_{u_i} \nu_\alpha(u)$$

für $i = 1, 2$ gilt. Sind nun

$$v = v_1 \partial_{u_1} \alpha(u) + v_2 \partial_{u_2} \alpha(u), \quad w = w_1 \partial_{u_1} \alpha(u) + w_2 \partial_{u_2} \alpha(u)$$

zwei beliebige Tangentialvektoren in T_pM , so gilt

$$\begin{aligned} I_p(v, w) &= v_1 w_1 I_p(\partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_1} \alpha(u)) + \\ &\quad (v_1 w_2 + v_2 w_1) I_p(\partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u)) + v_2 w_2 I_p(\partial_{u_2} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u)) \end{aligned}$$

und dies ist gerade die quadratische Form, die von der Matrix $I_{u,\alpha}$ erzeugt wird. Analog folgt aus

$$\begin{aligned} II_p(v, w) &= v_1 w_1 II_p(\partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_1} \alpha(u)) + \\ &\quad (v_1 w_2 + v_2 w_1) II_p(\partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u)) + v_2 w_2 II_p(\partial_{u_2} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u)) \\ &= v_1 w_1 I_p(\partial_{u_1} \alpha(u), L_p \partial_{u_1} \alpha(u)) + \\ &\quad (v_1 w_2 + v_2 w_1) I_p(\partial_{u_1} \alpha(u), L_p \partial_{u_2} \alpha(u)) + v_2 w_2 I_p(\partial_{u_2} \alpha(u), L_p \partial_{u_2} \alpha(u)) \end{aligned}$$

dass die zweite Fundamentalform durch die Matrix $II_{u,\alpha}$ vermittelt wird, und die Herleitung der dritten Behauptung ist analog. \square

Bemerkung.

1. $I_{u,\alpha}$, $II_{u,\alpha}$ und $III_{u,\alpha}$ sind wegen Lemma 54 immer symmetrische Matrizen. $I_{u,\alpha}$ und $III_{u,\alpha}$ sind darüberhinaus positiv definit, $II_{u,\alpha}$ im Allgemeinen aber nicht.
2. Die Einträge der Matrizen $I_{u,\alpha}$, $II_{u,\alpha}$, $III_{u,\alpha}$ werden in der Literatur oft mit $g_{\alpha,i_1i_2}(u)$, $h_{\alpha,i_1i_2}(u)$ und $e_{\alpha,i_1i_2}(u)$ bezeichnet, wobei der Index α meist nicht geschrieben wird.
3. Die obigen Formeln implizieren

$$II_{u,\alpha} = I_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} \quad \text{bzw.} \quad L_{u,\alpha} = I_{u,\alpha}^{-1} \cdot II_{u,\alpha}$$

im Sinne der Matrizenmultiplikation, wobei wir benutzt haben, dass $I_{u,\alpha}$ als symmetrische und positiv definite Matrix invertierbar ist. In der Literatur wird oft

$$I_{u,\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{\alpha}^{11}(u) & g_{\alpha}^{12}(u) \\ g_{\alpha}^{12}(u) & g_{\alpha}^{22}(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{\alpha}(u)} \begin{pmatrix} g_{\alpha,22}(u) & -g_{\alpha,12}(u) \\ -g_{\alpha,12}(u) & g_{\alpha,11}(u) \end{pmatrix}$$

geschrieben.

4. $L_{u,\alpha}$ ist im Allgemeinen nicht symmetrisch, sondern es gilt

$$I_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} = L_{u,\alpha}^T \cdot I_{u,\alpha} \quad \text{bzw.} \quad L_{u,\alpha}^T = I_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} \cdot I_{u,\alpha}^{-1} \quad (2.14)$$

wegen der Symmetrie von $I_{u,\alpha}$ und $II_{u,\alpha}$. Die Lineare Algebra garantiert aber trotzdem, dass $L_{u,\alpha}$ zwei reelle Eigenwerte besitzt, die entweder verschieden sind oder aber sowohl die algebraische als auch geometrische Vielfachheit 2 besitzen. Insbesondere ist $L_{u,\alpha}$ stets diagonalisierbar und kann niemals einen Jordan-Block besitzen.²⁰

5. Die zweite Fundamentalform kann wegen

$$\begin{aligned} -\langle \partial_{u_1} \nu_{\alpha}(t), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle &= -\partial_{u_1} \langle \nu_{\alpha}(t), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle + \langle \nu_{\alpha}(t), \partial_{u_1} \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle \\ &= -0 + \langle \nu_{\alpha}(t), \partial_{u_1} \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle \end{aligned}$$

direkt aus den zweiten Ableitungen von α sowie der Formel für ν_{α} – und damit insbesondere ohne die partiellen Ableitungen von ν_{α} – berechnet werden. Analoges gilt für die dritte Fundamentalform mit Lemma 57.

Als (sehr) einfaches Beispiel betrachten wir die natürliche Parametrisierung des Zylinders vom Radius $\varrho > 0$, also

$$(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \mapsto \quad \alpha(u_1, u_2) = (\varrho \cos(u_1), \varrho \sin(u_1), u_2) \in \mathbb{R}^3,$$

²⁰Diese Behauptungen über das Spektrum können wie folgt überprüft werden: Da $I_{u,\alpha}$ symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine invertierbare Matrix $Q_{u,\alpha}$, so dass $I_{u,\alpha} = Q_{u,\alpha}^T \cdot Q_{u,\alpha}$. Für $K_{u,\alpha} := Q \cdot L_{u,\alpha} \cdot Q_{u,\alpha}^{-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned} K_{u,\alpha}^T &:= Q_{u,\alpha}^{-T} \cdot L_{u,\alpha}^T \cdot Q_{u,\alpha}^T = Q_{u,\alpha}^{-T} \cdot L_{u,\alpha}^T \cdot I_{u,\alpha} \cdot Q_{u,\alpha}^{-1} \\ &= Q_{u,\alpha}^{-T} \cdot I_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} \cdot Q_{u,\alpha}^{-1} = Q_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} \cdot Q_{u,\alpha}^{-1} = K_{u,\alpha}, \end{aligned}$$

d.h. $L_{u,\alpha}$ ist zwar nicht symmetrisch aber konjugiert zu der symmetrischen Matrix $K_{u,\alpha}$. Insbesondere besitzen $K_{u,\alpha}$ und $L_{u,\alpha}$ dasselbe Spektrum.

sowie den äußeren Normalenvektor

$$\nu_\alpha(u) = (\cos(u_1), \sin(u_1), 0). \quad (2.15)$$

Durch direkte Rechnungen erhalten wir

$$\partial_{u_1}\alpha(u) = (-\varrho \sin(u_1), +\varrho \cos(u_2), 0), \quad \partial_{u_2}\alpha(u) = (0, 0, 1)$$

bzw.

$$\partial_{u_1}\nu_\alpha(u) = (-\sin(u_1), +\cos(u_2), 0), \quad \partial_{u_2}\nu_\alpha(u) = (0, 0, 0)$$

und damit

$$I_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} \varrho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad III_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$L_{u,\alpha} = I_{u,\alpha}^{-1} \cdot II_{u,\alpha} = \varrho^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere besitzt L_p als linearer Endomorphismus von T_pM in jedem Punkt p die beiden Eigenwerte 0 und ϱ , und wir werden später sehen, dass dies gerade die beiden Hauptkrümmungen des Zylinders sind.

Wie leiten nun eine nützliche Formel zwischen den Fundamentalformen her, die natürlich analog auch für die entsprechenden Matrixdarstellungen in lokalen Koordinaten gilt.

Lemma 57 (punktweise Identität zwischen den Fundamentalformen). *Für alle $p \in M$ gilt*

$$III_p - \operatorname{tr}(L_p)II_p + \det(L_p)I_p = 0,$$

wobei $\operatorname{tr}(L_p) \in \mathbb{R}$ und $\det(L_p) \in \mathbb{R}$ die Spur und die Determinante der linearen Abbildung $L_p \in \operatorname{Lin}(T_pM; T_pM)$ sind.²¹

Beweis. In lokalen Koordinaten entsprechen die drei Fundamentalformen den quadratischen Formen, die durch die Matrizen aus Satz 56 vermittelt werden, und die Matrix $L_{u,\alpha}$ besitzt die beiden reellen Eigenwerte κ_1 und κ_2 mit den dazugehörigen Eigenvektoren e_1 und e_2 (die natürlich von u und α abhängen). Da nun

$$0 = \kappa_i^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_i + \kappa_1\kappa_2 = \kappa_i^2 - \operatorname{tr}(L_p)\kappa_i + \det(L_p)$$

sowohl für $i = 1$ als auch für $i = 2$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= e_{i_1}^T \cdot I_{u,\alpha} \cdot (\kappa_{i_2}^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_{i_2} + \kappa_1\kappa_2) e_{i_2} \\ &= e_{i_1}^T \cdot (I_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} - (\kappa_1 + \kappa_2) I_{u,\alpha} \cdot L_{u,\alpha} + \kappa_1\kappa_2 I_{u,\alpha}) \cdot e_{i_2} \end{aligned}$$

und damit die gewünschte Identität für die Eigenbasis von $L_{u,\alpha}$. Die Behauptung folgt nun aus der Bilinearität. \square

²¹Die Spur einer linearen Abbildung kann als Spur einer Matrixdarstellung berechnet werden, wobei nach *Lineare Algebra I* das Ergebnis nicht von der Wahl der Basis abhängt. Analoges gilt für die Determinante.

Wie schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, dass für eine gegebene Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M$ die lokale Gaußabbildung $\nu_\alpha : U \rightarrow \mathbf{S}^2$ als eine Parametrisierung eines Sphärenstücks interpretiert²² werden kann. Insbesondere gilt

$$III_{u,\alpha} = I_{u,\nu_\alpha},$$

d.h. die dritte Fundamentalform zu α ist gerade die erste Fundamentalform zu ν_α . Man nennt daher die dritte Fundamentalform III von M manchmal auch die *Metrik des sphärischen Bildes* bzgl. der Gauß-Abbildung.

2.2.2 Krümmungsbegriffe

Zum Einstieg in die nachfolgenden Untersuchungen betrachten wir eine Kurve $\beta : I \rightarrow M$ in einer orientierbaren Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$. Ist β eine Frenet-Kurve, so existiert ein Frenet-Rahmen sowie eine Krümmung und eine Torsion (die wir hier mit f_i und λ_i bezeichnen wollen), so dass die Frenetschen Gleichungen

$$f_1'(s) = +\lambda_1(s)f_2(s), \quad f_2'(s) = -\lambda_1(s)f_1(s) + \lambda_2(s)f_3(s), \quad f_3'(s) = -\lambda_2(s)f_2(s)$$

erfüllt sind. Der Vektor $\beta''(s) = f_1'(s)$ steht dabei immer senkrecht auf $f_1(s) = \beta'(s)$, wird aber im Allgemeinen weder tangential noch normal auf M stehen. Wir zerlegen ihn daher

$$\beta''(s) = (\beta''(s))_{\text{tang}} + (\beta''(s))_{\text{norm}}$$

mit

$$(\beta''(s))_{\text{norm}} = \langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle \nu(\beta(s)) \in N_{\beta(s)}M$$

und

$$(\beta''(s))_{\text{tang}} = \beta''(s) - (\beta''(s))_{\text{norm}} \in T_{\beta(s)}M$$

in seine *normale* und *tangentiale Komponente*. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle &= \left\langle \frac{d}{ds} \beta'(s), \nu(\beta(s)) \right\rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle \beta'(s), \nu(\beta(s)) \rangle - \left\langle \beta'(s), \frac{d}{ds} \nu(\beta(s)) \right\rangle \\ &= 0 + \langle \beta'(s), L_{\beta(s)} \beta'(s) \rangle \\ &= II_{\beta(s)}(\beta'(s), \beta'(s)) \\ &= \kappa_\nu(\beta(s), \beta'(s)) \end{aligned}$$

mit

$$\kappa_\nu(p, v) := \frac{II_p(v, v)}{I_p(v, v)} \quad \text{für } p \in M, v \in T_pM, \quad (2.16)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\beta'(s)$ und $\nu(\beta(s))$ immer senkrecht aufeinander stehen mit $I_{\beta(s)}(\beta'(s), \beta'(s)) = 1$ und dass

$$\frac{d}{ds} \nu(\beta(s)) = D\nu|_{\beta(s)} \beta'(s) = -L_{\beta(s)} \beta'(s)$$

²²Streng genommen gilt dies gemäß Definition 39 nur dann, wenn $L_\alpha(u)$ den Rang zwei besitzt, d.h. sofern $\partial_{u_1} \nu_\alpha(u)$ und $\partial_{u_2} \nu_\alpha(u)$ für jedes $u \in U$ linear unabhängig sind.

wegen (2.8) und Definition 2.8 gilt. Mit anderen Worten: Die Normalkomponente von $f_2(s)$ ist bereits eindeutig durch den Tangentialvektor $f_1(s) = \beta'(s)$ und die Fläche festgelegt und beschreibt den Teil der Kurvenkrümmung $\lambda_1(s)$, der durch die Krümmung der Fläche verursacht wird und kann benutzt werden, um die Krümmung der Fläche zu charakterisieren. Der tangentielle Anteil von $\beta''(s)$ beschreibt hingegen die Krümmung der Kurve innerhalb der Fläche.

Der in Formel (2.16) definierte Ausdruck $\kappa_\nu(p, v)$ wird die Normalkrümmung der Fläche M im Punkt p in Richtung v genannt und $\kappa_\nu(\beta(s), \beta'(s))$ ist die entsprechende Normalkrümmung der Kurve β im Punkt $\beta(s)$. Sie erfüllt

$$\kappa_\nu(\beta(s), \beta'(s)) \leq \lambda_1(s),$$

wobei Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn $\beta''(s) = \pm\nu(\beta(s))$. Diese Bedingung meint gerade, dass die affine Tangentialebene der Fläche im Punkt p mit der Streckebene der Kurve im Punkt p zusammenfällt bzw. dass die Flächennormale $\nu(\beta(s))$ immer in der Schmiegeebene der Kurve enthalten ist.

Ein wichtiger Spezialfall – siehe auch Abbildung 2.7 – entsteht, wenn die Kurve β für festgehaltenes $p \in M$ und gegebene Richtung $v \in T_pM$ die Schnittmenge der Fläche M mit der affinen Ebene $E = p + \text{span}\{\nu(p), v\}$ parametrisiert, denn in diesem Fall ist $\kappa_\nu(p, v)$ gerade die *Krümmung der planaren Schnittkurve β* .

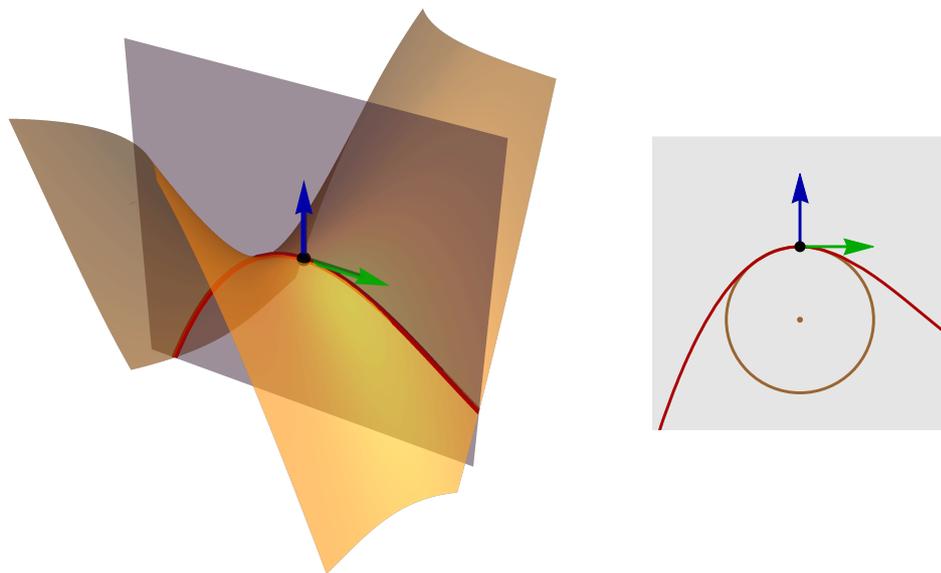


Abbildung 2.7: Zum Inhalt des Satzes von Meusnier über sogenannte Normalenschnitte. *Links:* Orientierbare Fläche M (gelb) mit festgehaltenem Punkt p (schwarz) und entsprechendem Flächennormalenvektor $\nu(p)$ (blau) sowie ein Beispiel für eine zu wählende tangentielle Richtung v (grün), die dann die affine Ebene E (grau) und die planare Schnittkurve β (rot) festlegt. *Rechts:* Blick auf die Ebene E mit Kurve β und entsprechendem Krümmungskreis (braun). In diesem Beispiel ist die Normalkrümmung $\kappa_\nu(p, v)$ negativ.

Lemma 58 (Satz von Meusnier²³). *Seien $p \in M$ und $0 \neq v \in T_pM$ gegeben, $E = p + \text{span}\{\nu(p), v\}$ die von $\nu(p)$ und v aufgespannte affine Ebene durch p und $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \cap E$ eine reguläre und zweimal-stetig differenzierbare Kurve mit*

$$\beta(0) = p, \quad \dot{\beta}(0) = v.$$

²³Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place (1754–1793), französischer Mathematiker.

Dann ist die Krümmung von β im Punkt p gerade durch $\kappa_\nu(p, v)$ gegeben. Außerdem ist der entsprechende Krümmungskreis gerade die Schnittmenge der Ebene E mit der Kugel vom Radius $1/\kappa_\nu(p, v)$ um den Mittelpunkt $p + \nu(p)/\kappa_\nu(p, v)$.

Beweis. Ist β nach Bogenlänge parametrisiert, so folgen beide Behauptungen aus den obigen Betrachtungen sowie Definition 13. Der allgemeine Fall kann mittels einer Re-parametrisierung der Kurve auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden. \square

Es ist nun naheliegend, nach Normalenschnitten zu suchen, die eine minimale oder maximale Krümmung der Schnittkurve produzieren und dies führt in natürlicher Weise auf das Spektralproblem des Weingartenoperators.

Lemma 59 (Normalkrümmung und Spektrum des Weingarten-Operators). *Für jedes $p \in M$ sind*

$$\kappa_1(p) := \min_{0 \neq v \in T_p M} \kappa_\nu(p, v) \quad \text{und} \quad \kappa_2(p) := \max_{0 \neq v \in T_p M} \kappa_\nu(p, v)$$

wohldefiniert und liefern jeweils einen Eigenwert von L_p .

Beweis. Der Beweis folgt einem allgemeinen Prinzip aus der Theorie der quadratischen Formen – siehe *Lineare Algebra I&II* – und kann wie folgt skizziert werden: Wegen

$$\kappa_\nu(p, \lambda v) = \kappa_\nu(p, v) \quad \text{für alle } p \in M, 0 \neq v \in T_p M, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\begin{aligned} \kappa_1(p) &= \min \{ II_p(v, v) : I_p(v, v) = 1 \}, \\ \kappa_2(p) &= \max \{ II_p(v, v) : I_p(v, v) = 1 \}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei das Minimum und das Maximum aus Kompaktheitsgründen wirklich angenommen werden. Nach Satz 56 können wir lokal $v = v_1 \partial_{u_1} \alpha(u) + v_2 \partial_{u_2} \alpha(u)$ schreiben und erhalten

$$I_p(v, v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot I_{u, \alpha} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad II_p(v, v) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot I_{u, \alpha} \cdot L_{u, \alpha} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Die Lagrange Multiplikatorenregel garantiert, dass in jedem lokalen Extremum (\bar{v}_1, \bar{v}_2) der Optimierungsprobleme die Gleichung

$$2 I_{u, \alpha} \cdot L_{u, \alpha} \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} = 2 \bar{\kappa} I_{u, \alpha} \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$$

mit einem Multiplikator $\bar{\kappa}$ erfüllt ist, wobei wir benutzt haben, dass $I_{u, \alpha}$ und $II_{u, \alpha}$ symmetrisch sind und dass $I_{u, \alpha}$ auch invertierbar ist. Die Extremstellen $\bar{v} \in T_{\alpha(u)} M$ zu den Optimierungsproblemen in (2.17) sind also gerade normierte Eigenvektoren der Matrix $L_{u, \alpha}$, die ja gerade die lineare Abbildung $L_{\alpha(u)}$ repräsentiert, und nach linksseitiger Multiplikation mit (\bar{v}_1, \bar{v}_2) folgt $II_p(\bar{v}, \bar{v}) = \bar{\kappa} I_p(\bar{v}, \bar{v})$. \square

Der Zusammenhang zwischen Krümmung von Schnittkurven und Eigenwerten des Weingartenoperators motiviert die folgende Definition.

Definition 60 (Vier skalare Krümmungsbegriffe).

1. $\kappa_1(p)$ und $\kappa_2(p)$ heißen die Hauptkrümmungen von M in p . Die entsprechenden Eigenvektoren aus $T_p M$ entsprechen den Hauptkrümmungsrichtungen.

2. $H(p) := \frac{1}{2}\kappa_1(p) + \frac{1}{2}\kappa_2(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_p)$ bzw. $K(p) := \kappa_1(p)\kappa_2(p) = \det(L_p)$ sind die mittlere Krümmung bzw. die Gauß-Krümmung von M in p .

Bemerkung.

1. Bei uns gilt immer $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$, aber in der Literatur muss das nicht immer so sein (die beiden Krümmungen werden manchmal nur als die zwei Eigenwerte von L_p eingeführt).
2. κ_1 , κ_2 , K und H sind als Abbildungen von M nach \mathbb{R} stetig differenzierbar im Sinne von Definition 48.
3. Bzgl. lokaler Koordinaten $\alpha : U \rightarrow M$ können $\kappa_1(\alpha(u))$ und $\kappa_2(\alpha(u))$ als die Eigenwerte von $L_{u,\alpha}$ berechnet werden. Analog gilt $K(\alpha(u)) = \det(L_{u,\alpha})$ und $H(\alpha(u)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{u,\alpha})$.
4. Bei einem Wechsel der Orientierung²⁴ ändern $\kappa_1(p)$ und $\kappa_2(p)$ in jedem Punkt $p \in M$ ihr Vorzeichen (und damit auch $H(p)$, aber nicht $K(p)$).
5. Alle Krümmungen sind invariant unter affinen Verschiebungen und Rotationen von M . Bei Spiegelungen kann sich die Orientierung ändern.
6. Es gilt

$$H^2(p) - K(p) = \frac{1}{4}(\kappa_2(p) - \kappa_1(p))^2 \geq 0,$$

wobei Gleichheit nur in (eigentlichen oder uneigentlichen) Nabelpunkten erreicht wird (siehe die folgende Definition).

7. $v \in T_p M$ heißt asymptotische Richtung, falls $\kappa_\nu(p, v) = 0$. Eine solche Richtung kann nur existieren, wenn κ_1 und κ_2 verschiedene Vorzeichen besitzen bzw. κ_1 oder κ_2 verschwindet.

Die spektralen Eigenschaften von L_p bestimmen, wie wir gleich sehen werden, die lokale Geometrie der Fläche in der Nähe von p .

Definition 61 (Klassifikation von Punkten). $p \in M$ heißt

1. elliptisch, falls $K(p) > 0$,
2. hyperbolisch, falls $K(p) < 0$,
3. parabolisch, falls $K(p) = 0$ aber $H(p) \neq 0$,
4. eigentlicher Nabelpunkt, falls $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) \neq 0$,
5. Flachpunkt oder uneigentlicher Nabelpunkt, falls $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$,

Diese Benennungen sind historisch entstanden, aber können durch das folgende Resultat sowie Abbildung 2.8 motiviert werden.

²⁴Das meint, dass man $-\nu : M \rightarrow S^2$ an Stelle von $\nu : M \rightarrow S^2$ als Normalenvektorfeld betrachtet.

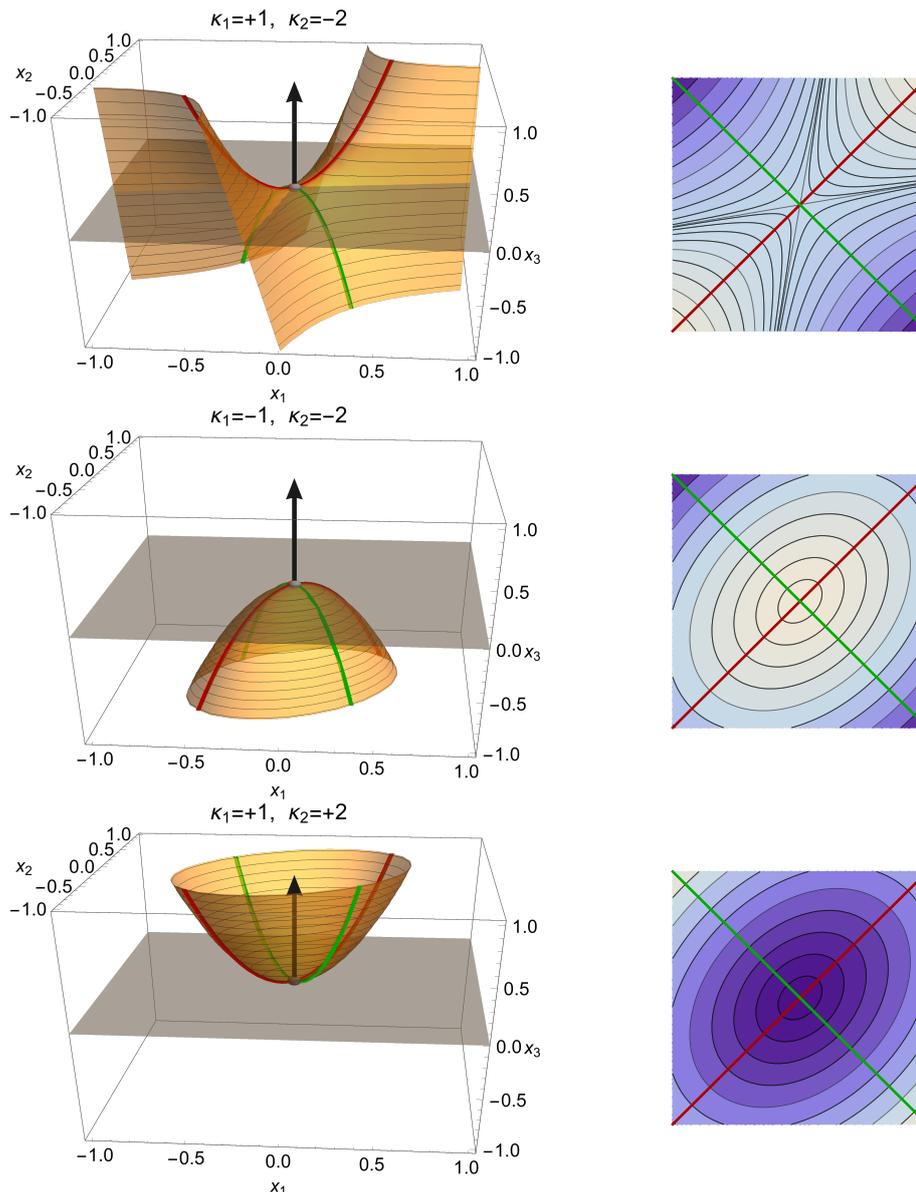


Abbildung 2.8: Links: Typische Beispiel für hyperbolische und elliptische Punkte p mit entsprechender Tangentialebene (grau) und Flächennormale (schwarz) sowie zwei Normalenschnittkurven, entlang derer die Hauptkrümmungen realisiert werden (rot und grün). In allen Beispielen ist f quadratisch und fällt daher mit der Taylor-Approximation \bar{f} aus (2.21) zusammen. Für nicht-quadratische Funktionen f sehen die Graphen von f und \bar{f} in der Nähe des Ursprungs qualitativ gleich aus solange die entsprechende Hesse-Matrix H keine verschwindenden Eigenwerte besitzt. Rechts: Die entsprechenden Contourplots des Graphen von f mit Hyperbeln bzw. Ellipsen als Niveaurkurven. Die Hyperbeln und Ellipsen entstehen auch als Schnittkurven zwischen der Fläche und den gedrehten Tangentialebenen.

Lemma 62 (Graphen von Funktionen). Seien $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(0, 0) = \partial_{u_1} f(0, 0) = \partial_{u_2} f(0, 0) = 0 \quad (2.18)$$

und $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Graphen von f , d.h.

$$\alpha(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann wird $M := \text{graph } f$ durch

$$\nu(u_1, u_2, f(u_1, u_2)) = \frac{n(u_1, u_2)}{|n(u_1, u_2)|},$$

mit

$$n(u_1, u_2) := (-\partial_{u_1}f(u_1, u_2), -\partial_{u_2}f(u_1, u_2), +1)$$

eine orientierbare Mannigfaltigkeit und im Koordinatenursprung gilt

$$I_{(0,0,0)}(v, w) = (v_1 \ v_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad II_{(0,0,0)}(v, w) = (v_1 \ v_2) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

mit

$$H = \text{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1}^2 f(0, 0) & \partial_{u_1} \partial_{u_2} f(0, 0) \\ \partial_{u_1} \partial_{u_2} f(0, 0) & \partial_{u_2}^2 f(0, 0) \end{pmatrix}$$

für alle Tangentialvektoren $v = (v_1, v_2, 0)$ und $w = (w_1, w_2, 0)$ in $T_{(0,0,0)}M$. Insbesondere sind die Hauptkrümmungen von M in $(0, 0, 0)$ gerade die Eigenwerte von H .

Beweis. Teil 1: Wir berechnen

$$\partial_{u_1}\alpha(u_1, u_2) = (1, 0, \partial_{u_1}f(u_1, u_2)), \quad \partial_{u_2}\alpha(u_1, u_2) = (0, 1, \partial_{u_2}f(u_1, u_2))$$

und schließen, dass $n(u_1, u_2)$ für jedes $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ immer senkrecht auf $T_{\alpha(u_1, u_2)}M$ steht und daher ν in der Tat ein zulässiges Normalenvektorfeld ist, wobei die stetige Differenzierbarkeit unmittelbar mit $|n(u_1, u_2)| \neq 0$ folgt.

Teil 2: Im Koordinatenursprung gilt offensichtlich

$$\nu(0, 0, 0) = (0, 0, 1), \quad \partial_{u_1}\alpha(0, 0) = (1, 0, 0), \quad \partial_{u_2}\alpha(0, 0) = (0, 1, 0)$$

und damit auch $T_{(0,0,0)}M = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_3 = 0\}$. Mit

$$\begin{aligned} \partial_{u_i}\nu_\alpha(u_1, u_2) &= \partial_{u_i} \left(\frac{n(u_1, u_2)}{|n(u_1, u_2)|} \right) \\ &= \frac{\partial_{u_i} n(u_1, u_2)}{|n(u_1, u_2)|} - \frac{n(u_1, u_2)}{|n(u_1, u_2)|^3} \sum_{j=1}^3 n_j(u_1, u_2) \partial_{u_i} n_j(u_1, u_2) \end{aligned}$$

und wegen $n(0, 0) = (0, 0, 1)$ erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \partial_{u_1}\nu_\alpha(0, 0) &= \partial_{u_1}n(0, 0) = (-\partial_{u_1}^2 f(0, 0), -\partial_{u_1} \partial_{u_2} f(0, 0), 0), \\ \partial_{u_2}\nu_\alpha(0, 0) &= \partial_{u_2}n(0, 0) = (-\partial_{u_1} \partial_{u_2} f(0, 0), -\partial_{u_2}^2 f(0, 0), 0), \end{aligned}$$

so dass sich für die Matrizen aus Satz 56 die Formeln

$$I_{(0,0),\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II_{(0,0),\alpha} = H, \quad L_{(0,0),\alpha} = I_{(0,0),\alpha}^{-1} \cdot II_{(0,0),\alpha} = H \quad (2.20)$$

ergeben. □

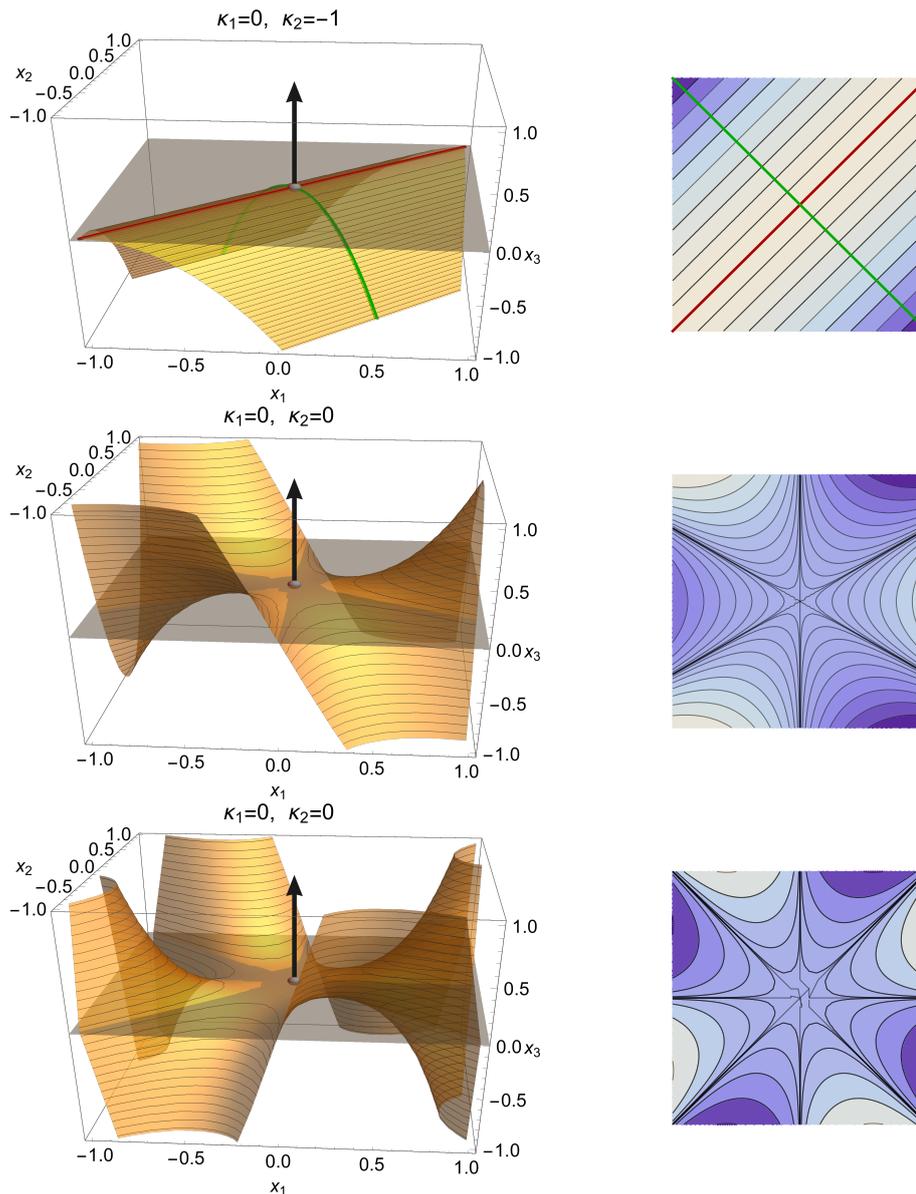


Abbildung 2.9: *Oben:* Beispiel für einen parabolischen Punkt analog zu den Beispielen aus Abbildung 2.8. Parabeln entstehen als Schnittkurven der Fläche (Graph einer quadratischen Funktion) mit gedrehten Tangentialebenen. *Mitte/Unten:* Graph der rein kubischen Funktionen $f(u_1, u_2) = u_1^3 - 3u_1u_2^2$ bzw. $f(u_1, u_2) = u_1u_2(u_1^2 - u_2^2)$ als Beispiele für einen *Affensattel* bzw. einen *Hundesattel*. Im Ursprung verschwinden in diesen entarteten Fällen alle nullten, ersten und zweiten Ableitungen von f . Insbesondere ist der Graph der Approximation \bar{f} die flache (x_1, x_2) -Ebene und unterscheidet sich damit doch sehr vom Graphen von f .

Besonders einfach wird die Situation, wenn f selbst eine quadratische Funktion ist, wenn also

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot H \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

für eine gegebene symmetrische Matrix $H \in \text{Mat}(2 \times 2)$ gilt, siehe Abbildung 2.8 für den elliptischen und den hyperbolischen Fall. Ist nun f eine allgemeine Funktion wie in Lemma 62, so kann f nach dem Satz von Taylor und wegen (2.18) lokal immer durch

$$f(u_1, u_2) = \bar{f}(u_1, u_2) + O(|u|^3)$$

mit

$$\bar{f}(u_1, u_2) := \frac{1}{2} (u_1 \ u_2) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad H = \text{Hess}f(0, 0) = \text{Hess}\bar{f}(0, 0) \quad (2.21)$$

approximiert werden. Verschwindet keiner der beiden Eigenwerte von H (*generischer*²⁵ Fall), so sehen die Graphen von f und \bar{f} lokal gleich aus. Wir wollen das hier weder rigoros formulieren noch beweisen, aber die wesentliche Idee ist, dass in der Nähe von $(0, 0)$ alle höheren Ordnungsterme durch die quadratischen Taylor-Terme dominiert werden, eben weil letztere nicht entartet sind. Besitzt H hingegen einen oder gar zwei verschwindende Eigenwerte (*nicht-generischer, entarteter Fall*), so hängt das qualitative Verhalten des Graphen von f nicht nur von den quadratischen, sondern auch von höheren Ordnungstermen ab. Zwei Beispiele sind in Abbildung 2.9 dargestellt.

Wir erinnern außerdem daran, dass jede Fläche lokal als Graph einer Funktion geschrieben werden kann und durch Drehungen, Verschiebungen und Indexvertauschungen kann man immer die Voraussetzungen von Lemma 62 sicherstellen. Insbesondere sieht jede Fläche M in der Nähe eines jeden Punktes $p \in M$ mit $K(p) \neq 0$ so aus wie eine der Flächen aus Abbildung 2.8.

Lemma 63. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare, zusammenhängende und dreimal stetig differenzierbare Fläche, die nur aus Nabelpunkten besteht. Dann ist M entweder Teilmenge einer Ebene oder Teilmenge einer Kugel.*

Beweis. Wir wählen eine lokale und injektive Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M$ und wissen nach Voraussetzung, dass der Weingartenoperator $L_{u,\alpha}$ für jedes $u \in U$ ein Vielfaches der Identität ist. Insbesondere gibt es eine Funktion $\kappa : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$L_{u,\alpha} = \kappa(u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir wollen nun zeigen, dass κ schon die konstante Funktion sein muss. Dazu bemerken wir, dass

$$\partial_{u_i} \nu_\alpha(u_1, u_2) + \kappa(u_1, u_2) \partial_{u_i} \alpha(u_1, u_2) = 0 \in \mathbb{R}^3$$

sowohl für $i = 1$ als auch für $i = 2$ gilt, und Differentiation nach dem jeweils anderen u_j liefert

$$\partial_{u_j} \partial_{u_i} \nu_\alpha(u_1, u_2) + \kappa(u_1, u_2) \partial_{u_j} \partial_{u_i} \alpha(u_1, u_2) = -\partial_{u_j} \kappa(u_1, u_2) \partial_{u_i} \alpha(u_1, u_2).$$

Da die linke Seite symmetrisch unter Vertauschung von u_1 und u_2 ist, folgt

$$\partial_{u_2} \kappa(u_1, u_2) \partial_{u_1} \alpha(u_1, u_2) = \partial_{u_1} \kappa(u_1, u_2) \partial_{u_2} \alpha(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3,$$

und weil die partiellen Ableitungen von α linear unabhängige Vektoren liefern, erhalten wir $\partial_{u_1} \kappa(u_1, u_2) = \partial_{u_2} \kappa(u_1, u_2) = 0$. Insbesondere muss κ eine konstante Funktion auf U sein und dies impliziert

$$\nu_\alpha(u_1, u_2) = -\kappa(u_1, u_2) + c$$

²⁵ *Generisch* meint, salopp gesprochen, dass eine Situation robust unter kleinen Störungen ist. Zum Beispiel: Besitzt eine quadratische Matrix nur von Null verschiedene Eigenwerte, so wird diese Eigenschaft auch für jede hinreichend kleine Störung der Matrix gelten (Stetigkeit des Spektrums) und ist daher generisch. Einen verschwindenden Eigenwert kann man jedoch durch beliebig kleine Störungen eliminieren, so dass die Existenz eines Nulleigenwerts keine generische, sondern eine sehr spezielle Eigenschaft ist.

für ein geeigneten gewählten Vektor $c \in \mathbb{R}^3$. Ist $\kappa = 0$, so gilt $\nu_\alpha(u_1, u_2) = c$ und $\alpha(U)$ liegt im Bild einer zu c orthogonalen affinen Ebene. Anderfalls gilt

$$|\alpha(u_1, u_2) - \kappa^{-1}c| = |\kappa|^{-1},$$

d.h. $\alpha(u_1, u_2)$ liegt für jedes $(u_1, u_2) \in U$ in der Sphäre vom Radius $|\kappa|^{-1}$ um den Mittelpunkt $\kappa^{-1}c$. Wir haben nun gezeigt, dass M in der Umgebung eines jeden Punktes entweder flach oder Teil eine Sphäre ist. Aufgrund der Zusammenhangsvoraussetzung kann nun durch ein einfaches Überdeckungsargument gezeigt werden, dass es sich immer um dieselbe Sphäre/Ebene handeln muss. \square

Definition 64 (Spezielle Kurven auf Flächen). *Eine reguläre Kurve $\beta : I \rightarrow M$ heißt Krümmungslinie, falls $\dot{\beta}(t)$ für jedes $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung im Punkt $\beta(t)$ ist. Sie heißt Asymptotenlinie, falls $\dot{\beta}(t)$ für jedes $t \in I$ eine asymptotische Richtung ist, d.h. wenn $II_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t)) = 0$.*

Die Existenz von Krümmungslinien kann abstrakt mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen gezeigt werden, so dass es für jeden Punkt $p \in M$ mit $\kappa_1(p) < \kappa_2(p)$ bis auf Kurven-Reparametrisierung genau zwei Krümmungslinien in M gibt, die durch diesen Punkt laufen. Diese Kurven können durch das Anfangswertproblem

$$\dot{\beta}(t) = e_i(\beta(t)), \quad \beta(0) = p$$

bestimmt werden, wobei $e_i(p)$ eine Hauptkrümmungsrichtung zu $\kappa_i(p)$ ist. Analog kann für $\kappa_1(p) < 0 < \kappa_2(p)$ gezeigt werden, dass genau zwei Asymptotenlinien durch p laufen.

Mit Hilfe partieller Differentialgleichungen kann man darüber hinaus zeigen, dass jede Fläche M lokal so durch $\alpha : (-\varepsilon_1, +\varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, +\varepsilon_2) \rightarrow M$ parametrisiert werden kann, dass die Kurven

$$u_1 \mapsto \alpha(u_1, u_2), \quad u_2 \mapsto \alpha(u_1, u_2)$$

Krümmungslinien sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $I_{u,\alpha}$ als auch $II_{u,\alpha}$ für jedes (u_1, u_2) Diagonalmatrizen sind, und das klassische Beispiel ist die Standardparametrisierung von Rotationsflächen (Übungsaufgabe).

2.2.3 Exkurs über Minimalflächen

Definition 65 (Minimalfläche). *Ein orientierbare Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit $H(p) = 0$ für alle $p \in M$ heißt Minimalfläche. Analog werden parametrisierte Minimalflächen eingeführt.*

Zur Motivation betrachten wir injektive Flächenstücke $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einer offenen und beschränkten Menge U , so dass α bis zum Rand ∂U stetig fortgesetzt werden kann und dort gegebene Randwerte $\bar{\alpha} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^3$ annimmt. Dann ist α_* ein kritischer Punkt der Oberflächenfunktionals

$$\alpha \mapsto \text{area}(\alpha(U)) = \int_U \sqrt{g_\alpha(u)} \, du$$

genau dann, wenn α Minimalfläche ist.²⁶ Dies gilt weil die Änderung der Fläche unter normalen Variationen der Bauart

$$\alpha_\varepsilon(u) = \alpha(u) + \varepsilon\phi(u)\nu_\alpha(u) \quad \text{für festes } \phi : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } \phi|_{\partial U} = 0$$

durch den Term

$$\text{area}(\alpha_\varepsilon(U)) = \text{area}(\alpha_0(U)) - 2\varepsilon \int_U \phi(u)H(\alpha(u))\sqrt{g_\alpha(u)} \, du + O(\varepsilon^2)$$

gegeben ist.

Lemma 66 (winkeltreue Parametrisierung). *Ein parametrisiertes Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann winkeltreu²⁷ im Sinne von*

$$\cos(\angle(v, w)) = \cos(\angle(D\alpha|_u v, D\alpha|_u w)) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2 = T_u U,$$

wenn die erste Fundamentalform in jedem Punkt ein Vielfaches der Identität ist, d.h. wenn

$$I_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} g_{11,\alpha}(u) & g_{12,\alpha}(u) \\ g_{12,\alpha}(u) & g_{22,\alpha}(u) \end{pmatrix} = \sqrt{g_\alpha(u)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall gilt auch

$$\partial_{u_1}^2 \alpha(u) + \partial_{u_2}^2 \alpha(u) = 2H(\alpha(u))\sqrt{g_\alpha(u)}\nu_\alpha(u) \quad (2.22)$$

für jedes $u \in U$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Folgerung 67 (Winkeltreue der Gauß-Abbildung von Minimalflächen). *Ist $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine winkeltreue Parametrisierung einer Minimalfläche mit $K(p) \neq 0$, so ist $\nu_\alpha : U \rightarrow S^2$ eine winkeltreue Parametrisierung der Sphäre.*

Beweis. Mit Lemma 57 und wegen der Voraussetzung gilt

$$I_{u,\nu_\alpha} = III_{u,\alpha} = 2H(\alpha(u))II_{u,\alpha} - K(\alpha(u))I_{u,\alpha},$$

und dies impliziert die Behauptung mit $\sqrt{g_{\nu_\alpha}(u)} = -K(\alpha(u))\sqrt{g_\alpha(u)}$ (beachte, dass $K(\alpha(u)) < 0$ gelten muss). □

Der Vektor $H(p)\nu(p)$ wird auch mittlerer Krümmungsvektor an M in $p \in M$ genannt.

Satz 68 (Komplexifizierung eines Flächenstückes). *Für ein stetig differenzierbares Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ seien die drei komplexwertigen Funktionen $\varphi_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch*

$$\varphi_j(u_1 + iu_2) := \partial_{u_1} \alpha_j(u_1, u_2) - i\partial_{u_2} \alpha_j(u_1, u_2). \quad (2.23)$$

Dann gilt

²⁶Im Allgemeinen muss α nicht unbedingt lokaler Minimierer des Oberflächenfunktionals sein, sondern könnte auch einem lokalen Maximum oder einem Sattelpunkt entsprechen. Die Bezeichnung Minimalfläche ist historisch entstanden und hat sich gehalten.

²⁷Statt *winkeltreu* sagt man oft auch *konform*.

1. Die Parametrisierung α ist genau dann winkeltreu, falls $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ im Sinne von Funktionen gilt.
2. Ist α winkeltreu, so ist $\text{sp}(\alpha)$ genau dann eine Minimalfläche, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ holomorph sind bzw. wenn jede Komponente von α harmonisch ist, d.h. $\partial_{u_1}^2 \alpha_j + \partial_{u_2}^2 \alpha_j = 0$.

Hier bei betrachten wir U wahlweise als Teilmenge von \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C} .

Beweis. Teil 1: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \varphi_j^2(u) &= \sum_{j=1}^3 (\partial_{u_1} \alpha_j(u))^2 - \sum_{j=1}^3 (\partial_{u_2} \alpha_j(u))^2 - 2i \sum_{j=1}^3 \partial_{u_1} \alpha_j(u) \partial_{u_2} \alpha_j(u) \\ &= \langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_1} \alpha(u) \rangle - \langle \partial_{u_2} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle - 2i \langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle \\ &= g_{11,\alpha}(u) - g_{22,\alpha}(u) - 2i g_{12,\alpha}(u), \end{aligned}$$

und schließend, dass $\sum_{j=1}^3 \varphi_j^2 = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $g_{11,\alpha} = g_{22,\alpha}$ und $g_{12,\alpha} = 0$. Die erste Behauptung folgt nun mit Lemma 66.

Teil 2: Die Behauptung folgt direkt aus Formel 2.22 sowie der funktionentheoretischen Aussage, dass ϕ_i genau dann holomorph ist, wenn der Realteil $\partial_{u_1} \alpha_i$ und der Imaginärteil $\partial_{u_2} \alpha_i$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Die zweite dieser Differentialgleichungen ist hier trivialerweise erfüllt, aber erste fordert gerade

$$\partial_{u_1}^2 \alpha_i(u_1, u_2) = -\partial_{u_2}^2 \alpha_i(u_1, u_2),$$

für alle i . □

Satz 69 (Komplexe Definition einer Minimalfläche). *Sei U einfach zusammenhängend und seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$. Dann existiert eine winkeltreue Parametrisierung einer Minimalfläche $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass (2.23) erfüllt ist. Dabei ist α genau dann regulär in $u \in U$, wenn die Funktion $\varphi_1 \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \bar{\varphi}_2 + \varphi_3 \bar{\varphi}_3$ in diesem Punkt nicht verschwindet.*

Beweis. Die Funktionen α_i sind durch

$$\partial_{u_1} \alpha_i(u_1, u_2) = \text{Re}(\varphi_i(u_1 + iu_2)), \quad \partial_{u_2} \alpha_i(u_1, u_2) = \text{Im}(\varphi_i(u_1 + iu_2))$$

bis auf Konstanten wohldefiniert, wobei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sicherstellen, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \bar{\varphi}_2 + \varphi_3 \bar{\varphi}_3)(u_1 + iu_2) &= \sum_{j=1}^3 (\partial_{u_1} \alpha_j(u_1, u_2))^2 + (\partial_{u_2} \alpha_j(u_1, u_2))^2 \\ &= \langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_1} \alpha(u) \rangle + \langle \partial_{u_2} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle \end{aligned}$$

und die Winkeltreue von α impliziert

$$\langle \partial_{u_1} \alpha(u), \partial_{u_1} \alpha(u) \rangle = \langle \partial_{u_2} \alpha(u), \partial_{u_2} \alpha(u) \rangle.$$

Die Behauptung über die Regularität von α folgt unmittelbar. □

Satz 69 erlaubt es uns also, winkeltreue Parametrisierungen von Minimalflächen aus holomorphen bzw. harmonischen Funktionen zu gewinnen. Zur Vollständigkeit wollen wir dabei erwähnen, dass lokal jede Minimalfläche winkeltreu parametrisiert werden kann, eben weil jede Fläche lokal durch Krümmungslinienparameter dargestellt werden kann. Oder anders gesagt: Zumindest lokal sehen alle Minimalflächen so aus wie in Satz 69. Den Beweis wollen wir hier nicht führen, da er Kenntnisse über elliptische Differentialgleichungen erfordert. Dieses Resultat impliziert aber zusammen mit Satz 68, dass jede Minimalfläche schon unendlich oft differenzierbar ist, eben weil jede harmonische Funktion bzw. jede holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar ist.

Wir erinnern daran, dass α_j durch komplexe Wegintegration via

$$\alpha_j(u_1, u_2) := \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_u} \varphi_j(\zeta) \, d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^L \varphi_j(\gamma_u(t)) \cdot \dot{\gamma}_u(t) \, dt \right)$$

aus den φ rekonstruiert werden kann, wobei $\gamma_u : [0, L]$ ein stetig differenzierbarer Weg in U ist, der einen festgehaltenen Punkt $u_* \in U$ mit $u \in U$ verbindet, und \cdot für die komplexe Multiplikation steht. Ist U sternförmig bzgl. u_* , so kann

$$L = 1, \quad \gamma_u = (t)(1-t)u_* + tu$$

gewählt werden.

Lemma 70 (Weierstraß-Darstellung von Minimalflächen). *Sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : U \rightarrow \mathbb{C}$ drei holomorphe und nicht identische verschwindende Funktionen mit $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$, so werden durch*

$$F = \varphi_1 - \mathbf{i}\varphi_2, \quad G = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - \mathbf{i}\varphi_2}$$

eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ sowie eine meromorphe²⁸ Funktion $G : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert, wobei $FG^2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ auch holomorph ist. Außerdem gilt

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}F(1 - G^2) \quad \varphi_2 = \frac{\mathbf{i}}{2}F(1 + G^2) \quad \varphi_3 = FG,$$

d.h. F und G legen die φ_j bereits eindeutig fest.

Beweis. Die punktweisen Formeln ergeben sich durch elementare Rechnungen mit komplexen Zahlen und die Behauptungen zur Differenzierbarkeit sind eine direkte Konsequenz der entsprechenden funktionentheoretischen Definitionen. \square

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_u} F(\zeta)(1 - G(\zeta)^2) \, d\zeta \right) \\ \alpha_2(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_u} F(\zeta)(1 + G(\zeta)^2) \, d\zeta \right) \\ \alpha_3(u_1, u_2) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_u} F(\zeta)G(\zeta) \, d\zeta \right) \end{aligned}$$

²⁸meromorph meint, holomorph bis auf isolierte Singularitäten

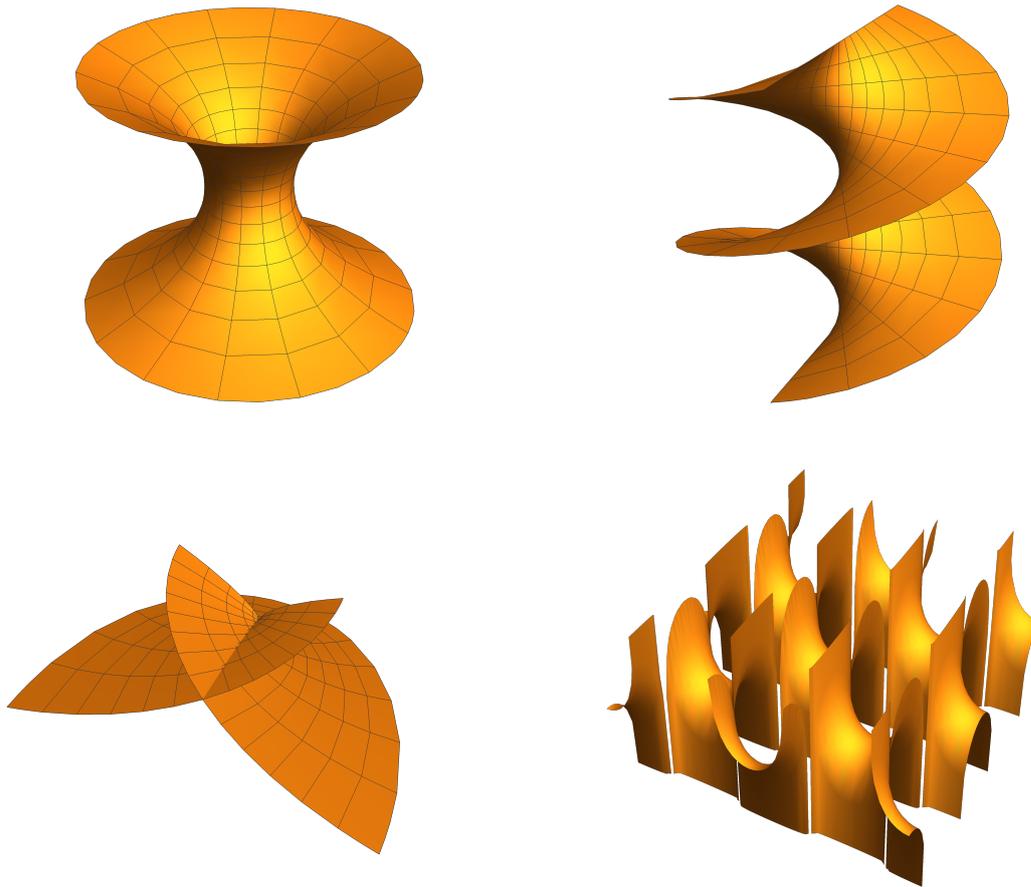


Abbildung 2.10: Beispiele für Minimalflächen, wobei das Gitter (sofern gezeichnet) aus Krümmungslinien besteht: *Oben links:* Der Katenoid aus (2.24). *Oben rechts:* Der Helikoid aus (2.25) *Unten links:* Die Enneper-Fläche aus (2.26). *Unten rechts:* Die Scherksche Fläche aus (2.27).

Beispiel (Minimalflächen). *In Abbildungen 2.10 sind die folgenden Flächen illustriert:*

1. Der Katenoid

$$\alpha(u_1, u_2) = (\cosh(u_1) \cos(u_2), \cosh(u_1) \sin(u_2), u_1) \quad (2.24)$$

ist Minimal- und Rotationsfläche und entspricht

$$\varphi_1(\zeta) = \sinh(\zeta), \quad \varphi_2(\zeta) = -i \cosh(\zeta), \quad \varphi_3(\zeta) = 1$$

bzw.

$$F(\zeta) = -\exp(-\zeta), \quad G(\zeta) = -\exp(+\zeta).$$

im komplexen Kalkül.

2. Die Parametrisierung

$$\alpha(u_1, u_2) = (-\sinh(u_1) \sin(u_2), \sinh(u_1) \cos(u_2), -u_2) \quad (2.25)$$

beschreibt einem Helikoiden (der Minimal- und Regelfäche ist) und wird durch

$$\varphi_1(\zeta) = i \sinh(\zeta), \quad \varphi_2(\zeta) = \cos(\zeta), \quad \varphi_3(\zeta) = i$$

bzw.

$$F(\zeta) = -i \exp(-\zeta), \quad G(\zeta) = -\exp(+\zeta).$$

erzeugt. Insbesondere unterscheiden sich die ϕ_i nur durch einen konstanten Faktor von denen des Katenoiden.

3. Die Weierstraß-Darstellung²⁹ mit

$$F(\zeta) = 2, \quad G(\zeta) = \zeta$$

bzw.

$$\varphi_1(\zeta) = 1 - \zeta^2, \quad \varphi_2(\zeta) = i(1 + \zeta^2), \quad \varphi_3(\zeta) = 2\zeta$$

liefert via

$$\alpha(u_1, u_2) = \left(u_1 - \frac{1}{3}u_1^3 + u_1u_2^2, -u_2 + \frac{1}{3}u_2^3 - u_1^2u_2, u_1^2 - u_2^2 \right) \quad (2.26)$$

eine Parametrisierung der Enneper-Fläche.³⁰

4. Die Scherksche Minimalfläche³¹ entspricht

$$F(\zeta) = \frac{4}{1 - \zeta^2} \quad G(\zeta) = \zeta$$

bzw.

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{2}{1 + \zeta^2}, \quad \varphi_2(\zeta) = \frac{2i}{1 - \zeta^2}, \quad \varphi_3(\zeta) = \frac{4\zeta}{1 - \zeta^4},$$

aber ist singulär für $\zeta \in \{\pm 1, \pm i\}$. Die winkeltreue Parametrisierung kann hieraus berechnet werden, ist aber komplizierter als

$$\alpha(u_1, u_2) = \left(u_1, u_2, \ln \left(\frac{\cos(u_2)}{\cos(u_1)} \right) \right) \quad (2.27)$$

die die Scherksche Fläche nicht-winkeltreu als Graph darstellt.

2.2.4 Regelflächen

Definition 71 (Regelfläche). Sei I ein offenes Intervall. Ein reguläres und dreimal stetig differenzierbares Flächenstück $\alpha : I \times \mathbb{R}$ wird Regelfläche genannt, wenn es zwei Kurven $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass

$$\alpha(u_1, u_2) = \beta(u_1) + u_2\gamma(u_1).$$

Die Kurve β wird dabei auch Leitkurve oder Direktrix genannt und die Menge von affinen Geraden

$$u_2 \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad \alpha(u_1, u_2)$$

heißt die Familie der erzeugenden Geraden.

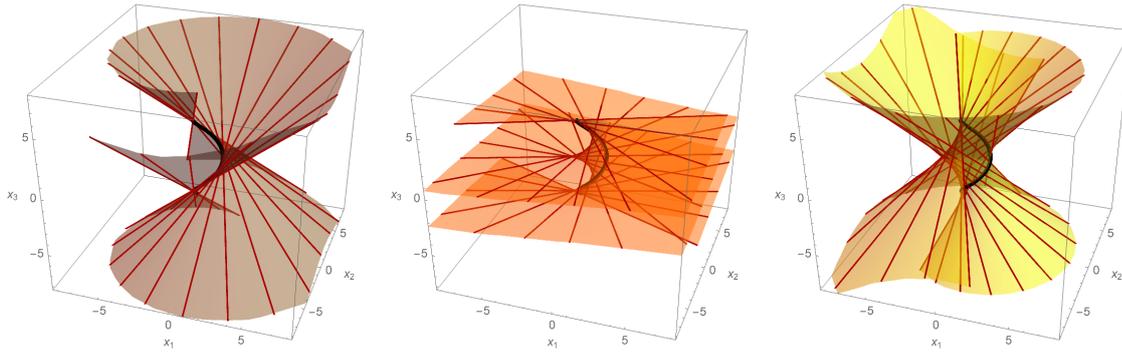


Abbildung 2.11: Für eine gegebene Frenet-Kurve (hier eine Helix) können drei Regelflächen wie in (2.28) definiert werden, wobei diese nicht unbedingt regulär im Sinne von Definition 71 sein müssen.

In der Literatur werden unterschiedlich starke Regularitätsannahmen gemacht. Zum Beispiel liefern für eine Frenet-Kurve β mit Rahmen f_1, f_2, f_3 die Formeln

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \beta'(s) && \text{(Tangentenfläche)} \\ \gamma(s) &= \beta''(s) && \text{(Normalenfläche)} \\ \gamma(s) &= \beta'''(s) && \text{(Binormalenfläche)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

jeweils Regelflächen mit Leitlinie β , siehe Abbildung 2.11, aber die entstehende Fläche ist nicht unbedingt regulär (zum Beispiel gilt bei der Tangentenfläche immer $\partial_{u_1}\alpha(u_1, 0) = \partial_{u_2}\alpha(u_1, 0)$ entlang der Leitkurve).

Die Existenz zweier Kurven β und γ ist eine sehr restriktive Eigenschaft der Fläche bzw. von α , aber die Kurven selbst sind nicht eindeutig. Man kann daher o.B.d.A weitere Eigenschaften vorschreiben (beachte, dass β und γ zweimal stetig differenzierbar sein müssen und dass $\partial_{u_2}\alpha(u_1, u_2) = \gamma(u_1)$ wegen der Regularität von α nicht verschwinden kann).

Lemma 72 (Existenz von Standardparametern). *Zu jeder Regelfläche α existiert eine Umparametrisierung und eine Umdefinition der Kurven β und γ , so dass*

$$(i) \quad |\gamma(u_1)| = 1, \quad (ii) \quad |\gamma'(u_1)| = 1, \quad (iii) \quad \langle \beta'(u_1), \gamma'(u_1) \rangle = 0$$

für alle $u_1 \in I$ gilt. In diesem Fall heißen u_1 und u_2 Standardparameter, β die Kehllinie und α eine Standardregelfläche.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 73 (Weitere Bestimmungsparameter). *Eine Standardregelfläche ist bis auf euklidische Bewegungen eindeutig durch die Ausdrücke*

$$F(u_1) := \langle \beta'(u_1), \gamma(u_1) \rangle,$$

$$\lambda(u) := \langle \beta'(u_1), \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \rangle = \det(\beta'(u_1), \gamma(u_1), \gamma'(u_1))$$

²⁹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), deutscher Mathematiker.

³⁰Alfred Enneper (1830–1885), deutscher Mathematiker.

³¹Heinrich Ferdinand Scherk (1798–1885), deutscher Mathematiker und Astronom.

sowie

$$J(u_1) := \langle \gamma''(u_1), \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \rangle = \det(\gamma(u_1), \gamma'(u_1), \gamma''(u_1))$$

festgelegt, wobei die Funktionen F , λ zweimal stetig differenzierbar und J wenigstens einmal stetig differenzierbar auf I sind. Umgekehrt definiert jede Wahl solcher Funktionen eine Standardregelfläche.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass β und γ bis auf euklidische Bewegungen eindeutig aus der Kenntnis von F , λ und J bestimmt werden können.

Berechnung von γ : Um zu zeigen, dass die nach Bogenlänge parametrisierte und dreimal stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ bereits durch J bestimmt ist, leiten wir zunächst notwendige Bedingungen für γ her. Nach Voraussetzung bzw. Lemma 72 müssen die Formeln

$$\langle \gamma(u_1), \gamma(u_1) \rangle = \langle \gamma'(u_1), \gamma'(u_1) \rangle = 1, \quad \langle \gamma'(u_1), \gamma(u_1) \rangle = 0$$

und damit auch

$$\langle \gamma''(u_1), \gamma'(u_1) \rangle = 0, \quad \langle \gamma''(u_1), \gamma(u_1) \rangle = -\langle \gamma'(u_1), \gamma'(u_1) \rangle = -1$$

sowie

$$\langle \gamma'''(u_1), \gamma'(u_1) \rangle = 0$$

gelten. Insbesondere beschreiben $\gamma(u_1), \gamma'(u_1)$ und $\gamma(u_1) \times \gamma'(u_1)$ immer ein orthonormales 3-Bein entlang von γ (das aber nicht das Frenetsche 3-Bein ist) und mit Blick auf

$$\begin{aligned} \gamma''(u_1) &= \langle \gamma''(u_1), \gamma(u_1) \rangle \gamma(u_1) + \langle \gamma''(u_1), \gamma'(u_1) \rangle \gamma'(u_1) \\ &\quad + \langle \gamma''(u_1), \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \rangle \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \\ &= -\gamma(u_1) + J(u_1) \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1). \end{aligned}$$

schließen wir, dass γ eine Frenet-Kurve mit Krümmung $\eta_1(u_1) := \sqrt{1 + J(u_1)^2}$ sein muss, wobei die ersten beiden Frenetschen Rahmenvektoren gerade $\gamma', \gamma''(u_1)/\eta_1(u_1)$ sind. Die Torsion $\eta_2(u_1)$ berechnet sich dementsprechend zu

$$\begin{aligned} \eta_2(u_1) &= -\langle (\eta_1^{-1}(u_1) \gamma'(u_1) \times \gamma''(u_1))', \eta_1^{-1}(u_1) \gamma''(u_1) \rangle \\ &= -\eta_1^{-2}(u_1) \langle \gamma'(u_1) \times \gamma'''(u_1), \gamma''(u_1) \rangle \\ &= -\eta_1^{-2}(u_1) \det(\gamma''(u_1), \gamma'(u_1), \gamma'''(u_1)) = -J'(u_1)/(1 + J^2(s)). \end{aligned}$$

Wir haben nun Formeln für η_1 und η_2 als notwendige Bedingungen für γ hergeleitet. Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie – siehe Theorem 12 – legen diese Bedingungen aber schon γ bis auf euklidische Bewegungen eindeutig fest.

Berechnung von β : Wir schreiben

$$\begin{aligned} \beta'(u_1) &= \langle \beta'(u_1), \gamma(u_1) \rangle \gamma(u_1) + \langle \beta'(u_1), \gamma'(u_1) \rangle \gamma'(u_1) \\ &\quad + \langle \beta'(u_1), \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \rangle \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \\ &= F(u_1) \gamma(u_1) + 0 \gamma'(u_1) + \lambda(u_1) \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1), \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite nun bereits bekannt ist. Damit kann die Kurve β bis auf Verschiebungen durch Integration rekonstruiert werden. \square

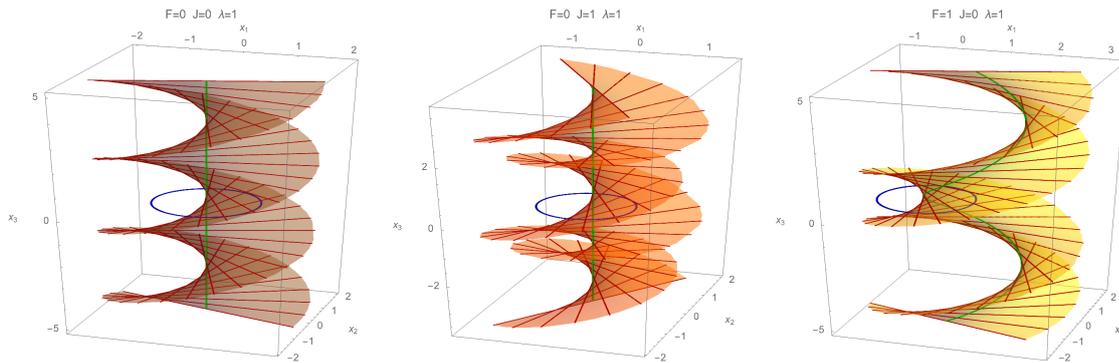


Abbildung 2.12: Beispiele für Schraubregelflächen, also Regelflächen mit konstanten Parametern F , λ , J wie in Lemma 73, wobei β bzw. γ in grün bzw. blau gezeichnet ist. Ganz links sehen wir einen Helikoiden.

Beispiel (Konstante Bestimmungsparameter).

1. Für $F \equiv J \equiv 0$ und $\lambda \equiv c \neq 0$ ist γ eine torsionsfreie Kurve mit konstanter Krümmung 1, also eine Parametrisierung des (verschobenen und gedrehten) planaren Einheitskreises und β eine dazu normale Gerade. Die entstehende Regelfläche ist bis auf euklidische Bewegungen und Stauchungen bzw. Streckungen entlang dieser Geraden der Helikoid aus (2.2).
2. Für $F' \equiv J' \equiv \lambda' \equiv 0$ entstehen etwas allgemeinere Varianten von sogenannten Schraubregelflächen mit Standardparametern, aber γ ist immer noch eine Kreislinie.

Satz 74 (Krümmungen einer Regelfläche). Für eine Standardregelfläche gilt

$$H(\alpha(u_1, u_2)) = -\frac{J(u_1)u_2^2 + \lambda'(u_1)u_2 + \lambda(u_1)(\lambda(u_1)J(u_1) + F(u_1))}{2(\lambda^2(u_1) + u_2^2)^{3/2}}$$

sowie

$$K(\alpha(u_1, u_2)) = -\frac{\lambda^2(u_1)}{(\lambda(u_1)^2 + u_2^2)^2},$$

wobei die Orientierung durch die +-Variante von (2.10) festgelegt ist.

Beweis. Wir hatten schon im Beweis von Lemma 73 gesehen, dass $\gamma(u_1)$, $\gamma'(u_1)$ und $\gamma(u_1) \times \gamma'(u_1)$ ein orthonormales 3-Bein aufspannen, wobei mit

$$\begin{aligned} \partial_{u_1}\alpha(u) &= \beta'(u_1) + u_2\gamma'(u_1) = F(u_1)\gamma(u_1) + u_2\gamma'(u_1) + \lambda(u_1)\gamma(u_1) \times \gamma'(u_1), \\ \partial_{u_2}\alpha(u) &= \gamma(u_1) \end{aligned}$$

auch

$$I_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} F^2(u_1) + \lambda^2(u_1) + u_2^2 & F(u_1) \\ F(u_1) & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$I_{u,\alpha}^{-1} = (\lambda^2(u_1) + u_2^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -F(u_1) \\ -F(u_1) & F^2(u_1) + \lambda^2(u_1) + u_2^2 \end{pmatrix}$$

gilt. Der Normalenvektor erfüllt

$$\nu_\alpha(u) = \pm \frac{n_\alpha(u)}{|n_\alpha(u)|}, \quad n_\alpha(u) := \partial_{u_1}\alpha(u) \times \partial_{u_2}\alpha(u) = \lambda(u_1) \gamma'(u_2) - u_2 \gamma(u_1) \times \gamma'(u_2)$$

und die zweite Fundamentalform kann damit direkt aus den zweiten Ableitungen von α und ohne die partiellen Ableitungen von ν_α zu benutzen berechnet werden (siehe die letzte Bemerkung zu Satz 56). Wegen

$$\partial_{u_1}\partial_{u_2}\alpha(u) = \gamma'(u_1), \quad \partial_{u_2}^2\alpha(u) = 0$$

und weil

$$\gamma''(u_1) = -\gamma(u_1) + J(u_1) \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1), \quad \gamma(u_1) \times \gamma''(u_1) = -J(u_1) \gamma'(u_1)$$

schon

$$\begin{aligned} \partial_{u_1}^2\alpha(u) &= F'(u_1)\gamma(u_1) + F(u_1)\gamma'(u_1) + u_2\gamma''(u_1) \\ &\quad + \lambda'(u_1) \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) + \lambda(u_1) \gamma(u_1) \times \gamma''(u_1) \\ &= (F'(u_1) - u_2)\gamma(u_1) + (F(u_1) - \lambda(u_1)J(u_1)) \gamma'(u_1) \\ &\quad + (u_2J(u_1) + \lambda'(u_1)) \gamma(u_1) \times \gamma'(u_1) \end{aligned}$$

impliziert, erhalten wir

$$H_{u,\alpha} = \frac{1}{(\lambda^2(u_1) + u_2^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} F(u_1)\lambda(u_1) - \mu(u_1, u_2) & \lambda(u_1) \\ \lambda(u_1) & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mu(u_1, u_2) := \lambda^2(u_1) + J(u_1)u_2^2 + \lambda'(u_1)u_2. \quad (2.29)$$

Schließlich ergeben sich via

$$L_{u,\alpha} = \frac{1}{(\lambda^2(u_1) + u_2^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\mu(u_1, u_2) & \lambda(u_1) \\ \lambda^3(u_1) + \lambda(u_1)u_2^2 + F(u_1)\mu(u_1, u_2) & -F(u_1)\lambda(u_1) \end{pmatrix}$$

die gewünschten Formeln als Spur bzw. Determinante von $L_{u,\alpha}$. \square

Lemma 75 (Kriterium für verschwindende Gauß-Krümmung). *Die folgenden Aussagen sind für Regelflächen äquivalent*

1. Die Gauß-Krümmung K der Regelfläche verschwindet in jedem Punkt.
2. Die Gauß-Abbildung ν ist konstant entlang jeder der erzeugenden Geraden.

Beweis. Es gilt stets

$$0 = \langle \nu_\alpha(u_1, u_2), \partial_{u_2}\alpha(u_1, u_2) \rangle = \langle \nu_\alpha(u_1, u_2), \gamma(u_1) \rangle,$$

und nach Differentiation bzgl. u_2 erhalten wir

$$0 = \langle \partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2), \partial_{u_2}\alpha(u_1, u_2) \rangle$$

d.h. der rechte untere Eintrag in der Matrix $II_{u,\alpha}$ muss stets verschwinden. Da nun aber $\partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2)$ immer ein Tangentialvektor ist, folgt hieraus

$$\partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2) = 0 \quad \iff \quad \langle \partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2), \partial_{u_1}\alpha(u_1, u_2) \rangle = 0$$

d.h. $\partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2)$ verschwindet genau dann, wenn auch die Nebendiagonalelemente von $II_{u,\alpha}$ verschwinden. Andererseits gilt

$$K(\alpha(u_1, u_2)) = \det(I_{u,\alpha}^{-1} \cdot II_{u,\alpha}) = \frac{\det II_{u,\alpha}}{\det I_{u,\alpha}} = \frac{\langle \partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2), \partial_{u_1}\alpha(u_1, u_2) \rangle^2}{\det I_{u,\alpha}}$$

und wir schließen

$$K(\alpha(u_1, u_2)) = 0 \quad \iff \quad \partial_{u_2}\nu_\alpha(u_1, u_2) = 0$$

wie behauptet. □

Wir werden später sehen, dass jede Fläche mit verschwindender Gauß-Krümmung abgewickelt werden kann. Ein direkter, aber etwas technischer Beweis dieser Aussage für den Spezialfall von Regelflächen findet sich in [Kue].

2.3 Die Innere Geometrie von Flächen

In diesem Abschnitt betrachten wir orientierbare und dreimal stetig differenzierbare Flächen bzw. Flächenstücke und beschäftigen uns mit der sogenannten *inneren Geometrie* von Flächen, d.h. mit der Frage, welche geometrischen Informationen man allein aus lokalen Messungen/Beobachtungen innerhalb der Fläche gewinnen kann.

2.3.1 Kovariante Ableitung

Ein Vektorfeld X auf einer orientierbaren Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, die im Fall von $X(p) \in T_p M$ bzw. $X(p) \in N_p M$ für alle $p \in M$ üblicherweise *tangential* bzw. *normal* genannt wird.

Definition 76 (Richtungsableitung von Vektorfeldern). *Für gegebenes $p \in M$ und $v \in T_p M$ bezeichnen wir*

$$D_v X(p) := DX|_p v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\beta(t)), \quad (2.30)$$

als die Richtungsableitung von X im Punkt p und in Richtung v , wobei $\beta : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\beta(0) = p$ und $\dot{\beta}(0) = v$ ist.³²

Beachte, dass selbst wenn X ein tangenciales Vektorfeld an M ist, der Vektor $D_v X(p) \in \mathbb{R}^3$ im Allgemeinen kein Tangentialvektor sein wird, sondern sowohl eine tangentielle als auch eine normale Komponente aufweisen wird.

Definition 77 (kovariante Ableitung von Vektorfeldern). *Mit den Notationen aus Definition 76 wird*

$$\nabla_v X(p) := D_v X(p) - \langle D_v X(p), \nu(p) \rangle \nu(p) \in T_p M$$

als die kovariante Ableitung von X im Punkt p und in Richtung v bezeichnet.

Bemerkung.

1. $\nabla_v X(p)$ ist die orthogonale Projektion des dreidimensionalen Vektors $D_v X(p)$ auf den zweidimensionalen Unterraum $T_p M$.
2. Es gilt stets

$$D_v \nu(p) = \nabla_v \nu(p) = -L_p v \quad (2.31)$$

wegen $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(\beta(t)) = -L_p \dot{\beta}(0)$.

3. Der Unterschied zwischen $\nabla_v X(p)$ und $D_v X(p)$ kann für ein tangenciales Vektorfeld X auch durch den Weingartenoperator ausgedrückt werden, denn es gilt

$$D_v X(p) - \nabla_v X(p) = \langle X(p), L_p v \rangle \nu(p) = II_p(X(p), v) \nu(p) \quad (2.32)$$

wegen

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X(\beta(t)), \nu(\beta(t)) \rangle = \langle D_v X(p), \nu(p) \rangle + \langle X(p), D_v \nu(p) \rangle \\ &= \langle D_v X(p), \nu(p) \rangle - \langle X(p), L_p v \rangle, \end{aligned}$$

wobei β wieder eine Kurve wie oben ist.

³²Wir hatten bereits in §2.1.3 gesehen, dass das Differential D nicht nur für Abbildungen zwischen Flächen, sondern analog auch für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension definieren kann.

4. Sind X und Y zwei tangentielle Vektorfelder, so schreiben wir

$$\nabla_Y X(p) := \nabla_{Y(p)} X(p)$$

In diesem Sinne existiert die kovariante Ableitung $\nabla_Y X$ des tangentialen Vektorfeldes X nach dem tangentialen Vektorfeld Y als tangentiales Vektorfeld.

5. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf M , so setzen wir

$$\nabla_v f(p) := D_v f(p) := Df|_p v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\beta(t)) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \nabla_Y f(p) := \nabla_{Y(p)} f(p)$$

d.h. die kovariante Ableitung einer skalaren Funktion auf M in Richtung eines tangentialen Vektorfeldes ist eine skalare Funktion auf M .

6. Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes X bzw. einer Funktion f ist schon eindeutig festgelegt, sofern X bzw. f nur entlang der Kurve β bekannt ist.

Als einfaches Beispiel wollen wir den \mathbb{R}^2 , d.h. die flache Fläche

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\} = \{(u_1, u_2, 0) : (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

sowie ein beliebiges Vektorfeld $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf M mit Komponenten-Darstellung

$$X(p) = \left(X_1(u_1, u_2), X_2(u_1, u_2), X_3(u_1, u_2) \right),$$

betrachten, wobei $p = (u_1, u_2, 0) \in M$. Desweiteren bezeichnen

$$E_1(u_1, u_2, 0) = (1, 0, 0), \quad E_2(u_1, u_2, 0) = (0, 1, 0)$$

die tangentialen Einheitsvektorfelder, für die bei festgehaltenem $p = (u_1, u_2, 0) \in M$ die entsprechenden Integralkurven in M durch

$$\beta_1(t) = (u_1 + t, u_2, 0), \quad \beta_2(t) = (u_1, u_2 + t, 0)$$

gegeben sind (es gilt also $\beta_i(0) = p \in M$ und $\dot{\beta}_j(0) = E_j(p) \in T_p M$). Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{E_1} X(p) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(\beta_1(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(X_1(u_1 + t, u_2), X_2(u_1 + t, u_2), X_3(u_1 + t, u_2) \right) \\ &= \left(\partial_{u_1} X_1(u_1, u_2), \partial_{u_1} X_2(u_1, u_2), \partial_{u_1} X_3(u_1, u_2) \right) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

und mit

$$\nu(u_1, u_2, 0) = E_3(u_1, u_2, 0) = (0, 0, 1)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} X(p) &= D_{E_1} X(p) - \langle D_{E_1} X(p), E_3(p) \rangle E_3(p) \\ &= \left(\partial_{u_1} X_1(u_1, u_2), \partial_{u_1} X_2(u_1, u_2), 0 \right) \in T_p M. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} D_{E_2} X(p) &= \left(\partial_{u_2} X_1(u_1, u_2), \partial_{u_2} X_2(u_1, u_2), \partial_{u_2} X_3(u_1, u_2) \right) \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla_{E_2} X(p) &= \left(\partial_{u_2} X_1(u_1, u_2), \partial_{u_2} X_2(u_1, u_2), 0 \right) \in T_p M. \end{aligned}$$

Ist nun

$$Y(u_1, u_2) = (Y_1(u_1, u_2), Y_2(u_1, u_2), 0)$$

ein beliebiges tangentiales Vektorfeld und $p \in M$ wieder fixiert, so betrachten wir

$$\beta(t) = (u_1 + tY_1(u_1, u_2), u_2 + tY_2(u_1, u_2), 0)$$

als einfachste Wahl für eine Kurve mit $\beta(0) = p$ und $\dot{\beta}(0) = Y(p)$ und berechnen analog zu oben

$$\begin{aligned} D_Y X(p) &= Y_1(p) D_{E_1} X(p) + Y_2(p) D_{E_2} X(p), \\ \nabla_Y X(p) &= Y_1(p) \nabla_{E_1} X(p) + Y_2(p) \nabla_{E_2} X(p). \end{aligned}$$

Insbesondere sind in flachen Räumen und für tangentiale Vektorfelder die Richtungsableitung und die kovariante Ableitungen identisch.

Wir bemerken weiterhin, dass $D_Y X$ und $D_X Y$ (bzw. $\nabla_Y X$ und $\nabla_X Y$) im Allgemeinen verschiedene Vektorfelder sind. Als simples Beispiel betrachten wir

$$X(u_1, u_2, 0) = E_1(u_1, u_2, 0), \quad Y(u_1, u_2, 0) = u_1 E_2(0, 1, 0) = (0, u_1, 0)$$

und berechnen

$$D_Y X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(u_1, u_2 + tu_1, 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u_1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

sowie

$$D_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(u_1 + t, u_2, 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (0, u_1 + t, 0) = (0, 1, 0).$$

Als weiteres Beispiel wollen wir die Einheitssphäre

$$M = S^2 = \{(p_1, p_2, p_3) : p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\}$$

mit $\nu(p) = p$ betrachten. Wir fixieren den Punkt

$$p = \nu(p) = (\cos \theta, 0, \sin \theta) \quad \text{mit} \quad T_p M = \text{span} \{(-\sin \theta, 0, \cos \theta), (0, 1, 0)\}$$

mit gegebenem Breitengradwinkel $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ und betrachten die Kurve

$$\beta(t) = (\cos(\theta + at) \cos(bt), \cos(\theta + at) \sin(bt), \sin(\theta + at)) \in M$$

mit Parametern a, b , so dass

$$\beta(0) = p \quad \dot{\beta}(0) = a(-\sin \theta, 0, \cos \theta) + b \cos \theta (0, 1, 0).$$

Insbesondere entsprechen $b = 0 \neq a$ bzw. $a = 0 \neq b$ einem Rotationskreis um die x_2 -Achse bzw. um die x_3 -Achse. Jede stetig differenzierbare Abbildung $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Komponenten $X_i(x_1, x_2, x_3)$ definiert in natürlicher Weise (d.h. durch Einschränkung) ein Vektorfeld auf M und wir wollen nun verstehen, wie sich dieses Vektorfeld entlang der Kurve β ändert. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} D_{\dot{\beta}(0)} X(\beta(0)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\beta(t)) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_1(\beta(t)), \dots, \dots \right) \\ &= a(-\sin \theta \partial_{x_1} X_1(p) + \cos \theta \partial_{x_3} X_1, \dots, \dots) + b \cos \theta (\partial_{x_2} X_1, \dots, \dots), \end{aligned}$$

wobei ‘...’ für entsprechende Terme mit X_2 oder X_3 statt X_1 steht, und durch Projektion auf den Tangentialraum können entsprechende Ausdrücke für $\nabla_{\dot{\beta}(0)}X(\beta(0))$ hergeleitet werden. Wir wollen nun spezielle Vektorfelder einsetzen. Mit $X_j(x_1, x_2, x_3) = x_j$ erhalten wir via

$$D_{\dot{\beta}(0)}\nu(p) = (-a \sin \theta, +b \cos \theta, +a \cos \theta) = \nabla_{\dot{\beta}(0)}\nu(p)$$

Formeln für die Ableitungen des äußeren Normalenvektors im Punkt p . Für den Breitengradvektor

$$X_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2, \quad X_2(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad X_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{\dot{\beta}(0)}X(p) &= (-b \cos \theta, -a \sin \theta, 0), \\ \nabla_{\dot{\beta}(0)}X(p) &= (b \cos^3 \theta - b \cos \theta, -a \sin \theta, b \cos^2 \theta \sin \theta), \end{aligned}$$

und für den Längengradvektor

$$X_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_3, \quad X_2(x_1, x_2, x_3) = -x_2x_3, \quad X_3(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_3^2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} D_{\dot{\beta}(0)}X(p) &= \cos \theta \sin \theta (0, b, -2a), \\ \nabla_{\dot{\beta}(0)}X(p) &= (2a \cos^2 \theta \sin^2 \theta, b \cos \theta \sin \theta, -2a \cos^3 \theta \sin \theta). \end{aligned}$$

Lemma 78 (Rechenregeln für kovariante Ableitungen und Richtungsableitungen). *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. (Linearität bzgl. der Richtung)

$$\begin{aligned} D_{f_1Y_1+f_2Y_2}X &= f_1 D_{Y_1}X + f_2 D_{Y_2}X, \\ \nabla_{f_1Y_1+f_2Y_2}X &= f_1 \nabla_{Y_1}X + f_2 \nabla_{Y_2}X \end{aligned}$$

2. (Summenregel)

$$\begin{aligned} D_Y(X_1 + X_2) &= D_YX_1 + D_YX_2, \\ \nabla_Y(X_1 + X_2) &= \nabla_YX_1 + \nabla_YX_2 \end{aligned}$$

3. (Produktregel)

$$\begin{aligned} D_Y(fX) &= (D_Yf)X + f D_YX, \\ \nabla_Y(fX) &= (\nabla_Yf)X + f \nabla_YX \end{aligned}$$

4. (Verträglichkeit mit Skalarprodukt)

$$\begin{aligned} D_Y\langle X_1, X_2 \rangle &= \langle D_YX_1, X_2 \rangle + \langle X_1, D_YX_2 \rangle, \\ \nabla_Y\langle X_1, X_2 \rangle &= \langle \nabla_YX_1, X_2 \rangle + \langle X_1, \nabla_YX_2 \rangle \end{aligned}$$

Hierbei bezieht sich der untere Index nicht auf Komponentenfunktionen, sondern unterscheidet verschiedene Funktionen bzw. Vektorfelder.

Beweis. Alle Behauptungen über die Richtungsableitung folgen für fixiertes $p \in M$ unmittelbar aus Definition und den Rechenregeln der üblichen Ableitung. Die Formeln für die kovariante Ableitung ergeben sich dann durch Projektion auf $T_p M$. Wir wollen dies für zwei Aussagen im Detail diskutieren.

Behauptung 1. Sind γ_1 und γ_2 zwei Kurven mit $\gamma_j(0) = p$ und $\dot{\gamma}_j(0) = Y_j(p)$ und $\alpha : U \rightarrow M$ eine lokale und invertierbare Parametrisierung von M um $p = \alpha(u)$, so betrachten wir die entsprechenden Kurven δ_i in U mit

$$\delta_i(t) := \alpha^{-1}(\gamma_i(t)),$$

so dass

$$\gamma_i(t) = \alpha(\delta_i(t)), \quad \dot{\gamma}_i(0) = D\alpha|_u \dot{\delta}_i(0).$$

Wir betrachten weiterhin die Kurven

$$\delta(t) := \sum_{i=1}^2 f_i(p) \delta_i(t), \quad \gamma(t) := \alpha(\delta(t))$$

und berechnen

$$\dot{\gamma}(0) = D\alpha|_u \dot{\delta}(0) = \sum_{i=1}^2 f_i(p) D\alpha|_u \dot{\delta}_i(0) = \sum_{i=1}^2 f_i(p) Y_i(p).$$

Oder anders gesagt: Ausgehend von γ_1 und γ_2 können wir eine konkrete Kurve γ angeben, so dass

$$\dot{\gamma}(0) = f_1(p) \dot{\gamma}_1(0) + f_2(p) \dot{\gamma}_2(0) = f_1(p) Y_1(p) + f_2(p) Y_2(p).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{f_1(p)Y_1(p)+f_2(p)Y_2(p)} X(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\gamma(t)) = DX|_p \dot{\gamma}(0) \\ &= f_1(p) DX|_p \dot{\gamma}_1(0) + f_2(p) DX|_p \dot{\gamma}_2(0) \\ &= f_1(p) D_{Y_1(p)} X(p) + f_2(p) D_{Y_2(p)} X(p), \end{aligned}$$

aufgrund der Linearität von $DX|_p$.

Behauptung 3. Mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = Y(p)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} D_{Y(p)}(f(p)X(p)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(\gamma(t))X(\gamma(t))) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \right) X(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\gamma(t)) \right) \\ &= \left(D_{Y(p)} f(p) \right) X(p) + f(p) \left(D_{Y(p)} X(p) \right). \end{aligned}$$

Die anderen Aussagen können analog bewiesen werden. □

Definition 79 (Lie-Klammer³³). Für zwei tangentielle Vektorfelder wird

$$[X, Y](p) := \nabla_X Y(p) - \nabla_Y X(p) = D_X Y(p) - D_Y X(p)$$

als die Lie-Klammer von X und Y bezeichnet, wobei das zweite Gleichheitszeichen wegen (2.32) und der Symmetrie des Weingartenoperators (Lemma 54) gilt.

³³Marius Sophus Lie (1842-1899), norwegischer Mathematiker.

Ist eine lokale und (injektive) Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M$ von M gegeben, so existieren lokal um jeden Punkt $p = \alpha(u)$ die lokalen Vektorfelder

$$A_i(p) = \partial_{u_i} \alpha(\alpha^{-1}(p)), \quad (2.33)$$

die zumindest auf der Teilfläche $\alpha(U) \subset M$ wohldefiniert und nach Generalannahme in diesem Abschnitt mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Insbesondere gilt mit (2.32) die Formel

$$D_{A_{j_1}} A_{j_2}(p) = \nabla_{A_{j_1}} A_{j_2}(p) + II_p(A_{j_1}(p), A_{j_2}(p)) \nu(p). \quad (2.34)$$

und aus Definition 76 ergibt sich

$$D_{A_{j_1}} A_{j_2}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \partial_{u_{j_2}} \alpha(u + te_{j_1}) = \partial_{u_{j_1}} \partial_{u_{j_2}} \alpha(u), \quad (2.35)$$

wobei e_1 und e_2 die kartesischen Einheitsvektoren im \mathbb{R}^2 bezeichnen, und der Satz von Schwarz liefert

$$[A_{j_1}, A_{j_2}] = 0. \quad (2.36)$$

Analog berechnen wir

$$D_{A_{j_1}} D_{A_{j_2}} A_k(p) = \partial_{u_{j_1}} \partial_{u_{j_2}} \partial_{u_k} \alpha(u) = D_{A_{j_2}} D_{A_{j_1}} A_k(p) \quad (2.37)$$

sowie

$$D_{A_{j_1}} D_{A_{j_2}} f(p) = \partial_{u_{j_1}} \partial_{u_{j_2}} (f \circ \alpha)(u) = D_{A_{j_2}} D_{A_{j_1}} f(p) \quad (2.38)$$

für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 80 (Hilfsresultat über Richtungsableitungen). *Es gilt*

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z = 0$$

für beliebige tangentielle Vektorfelder X, Y, Z .

Beweis. Nach Wahl einer Parametrisierung gelten lokal die Formeln

$$X(p) = \sum_{i=1}^2 \xi_i(p) A_i(p), \quad Y(p) = \sum_{j=1}^2 \eta_j(p) A_j(p), \quad Z(p) = \sum_{k=1}^2 \zeta_k(p) A_k(p)$$

für geeignete Koeffizienten-Funktionen $\xi_j, \eta_i : \alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}$ und mit Lemma 78 berechnen wir

$$\begin{aligned} T_{ij} &:= D_{A_i} D_{A_j} Z - D_{A_j} D_{A_i} Z \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(D_{A_i} D_{A_j} (\zeta_k A_k) - D_{A_j} D_{A_i} (\zeta_k A_k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^2 D_{A_i} \left((D_{A_j} \zeta_k) A_k + \zeta_k D_{A_j} A_k \right) - \sum_{k=1}^2 D_{A_j} \left((D_{A_i} \zeta_k) A_k + \zeta_k D_{A_i} A_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^2 (D_{A_i} D_{A_j} \zeta_k - D_{A_j} D_{A_i} \zeta_k) A_k + \sum_{k=1}^2 \zeta_k (D_{A_i} D_{A_j} A_k - D_{A_j} D_{A_i} A_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei alle Terme mit Produkten erster Ableitungen sich gegenseitig aufgehoben haben und die Terme mit zweiten Ableitungen wegen (2.37) und (2.38) verschwinden. Insbesondere gilt die Behauptung für alle Z im Spezialfall $X = A_i$ und $Y = A_j$ wegen (2.36). Im allgemeinen Fall berechnen wir

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i=1}^2 \xi_i D_{A_i} \left(\sum_{j=1}^2 \eta_j A_j \right) - \sum_{j=1}^2 \eta_j D_{A_j} \left(\sum_{i=1}^2 \xi_i A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\xi_i (D_{A_i} \eta_j) A_j - \eta_j (D_{A_j} \xi_i) A_i \right) \end{aligned}$$

wobei wir Lemma 78 und Formel (2.36) benutzt haben. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} D_X D_Y Z - D_Y D_X Z &= \sum_{i=1}^2 \xi_i D_{A_i} \left(\sum_{j=1}^2 \eta_j D_{A_j} Z \right) - \sum_{j=1}^2 \eta_j D_{A_j} \left(\sum_{i=1}^2 \xi_i D_{A_i} Z \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\xi_i (D_{A_i} \eta_j) D_{A_j} Z - \eta_j (D_{A_j} \xi_i) D_{A_i} Z \right) \\ &= D_{[X, Y]} Z, \end{aligned}$$

wobei wir wieder (2.37) und Lemma 78 verwendet haben. \square

2.3.2 Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi

Satz 81 (Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi³⁴). *Für beliebige tangentielle (und stetig differenzierbare) Vektorfelder X , Y , und Z gilt*

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = II(Y, Z) LX - II(X, Z) LY \quad (2.39)$$

sowie

$$\nabla_X (LY) - \nabla_Y (LX) - L[X, Y] = 0, \quad (2.40)$$

wobei L und II den Weingarten-Operator und die zweite Fundamentalform der orientierten Fläche M bezeichnen.

Beweis. Mit Lemma 78 und unter Verwendung der Formel (2.32) berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (D_Y Z - \langle LY, Z \rangle \nu) \\ &= D_X (D_Y Z - \langle LY, Z \rangle \nu) - \langle LX, D_Y Z - \langle LY, Z \rangle \nu \rangle \nu \\ &= D_X D_Y Z - \langle D_X (LY), Z \rangle \nu - \langle LY, D_X Z \rangle \nu - \langle LY, Z \rangle D_X \nu - \langle LX, D_Y Z \rangle \nu \\ &= D_X D_Y Z + \langle LY, Z \rangle LX - (\langle D_X (LY), Z \rangle + \langle LY, D_X Z \rangle + \langle LX, D_Y Z \rangle) \nu, \end{aligned}$$

wobei wir auch (2.31) sowie $\langle LX, \nu \rangle = 0$ benutzt haben, und Lemma 80 liefert

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= D_{[X, Y]} Z + \langle LY, Z \rangle LX - \langle LX, Z \rangle LY \\ &\quad - (\langle D_X (LY), Z \rangle + \langle D_Y (LX), Z \rangle) \nu. \end{aligned}$$

³⁴Delfino Codazzi (1824-1873) und Gaspare Mainardi (1800-1879), italienische Mathematiker.

Außerdem impliziert (2.32) die Formel

$$D_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \langle L[X, Y], Z \rangle \nu$$

und Einsetzen in die rechte Seite der vorangegangenen Gleichung liefert beide Behauptungen als Gleichheit der tangentialen bzw. normalen Anteile, wobei wir außerdem die Definition von II verwendet haben. \square

Die rechte Seite in der Gauß-Gleichung (2.39) wird auch als $R(X, Y)Z$ geschrieben und als Riemannscher Krümmungstensor bezeichnet. Er ist eindeutig durch kovariante Ableitungen bestimmt und gehört daher, wie wir unten sehen werden, zur inneren Geometrie einer Fläche.

Folgerung 82 (*Theorema Egregium*³⁵, Variante 1). *Seien X_1, X_2 zwei tangentielle Vektorfelder auf M , die via*

$$I(X_1, X_1) = I(X_2, X_2) = 1, \quad I(X_1, X_2) = 0$$

orthonormal bzgl. der ersten Fundamentalform sind. Dann gilt

$$\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle = \langle LX_1, X_1 \rangle \langle LX_2, X_2 \rangle - \langle LX_1, X_2 \rangle \langle LX_2, X_1 \rangle = K,$$

d.h. die Gauß-Krümmung K kann mittels kovarianter Ableitungen von tangentialen Vektorfeldern berechnet werden.

Beweis. Jedes tangentielle Vektorfeld Y kann als

$$Y = \langle Y, X_1 \rangle X_1 + \langle Y, X_2 \rangle X_2$$

geschrieben werden, und mit

$$\begin{pmatrix} \langle LY, X_1 \rangle \\ \langle LY, X_2 \rangle \end{pmatrix} = L_{X_1, X_2} \cdot \begin{pmatrix} \langle Y, X_1 \rangle \\ \langle Y, X_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad L_{X_1, X_2} := \begin{pmatrix} \langle LX_1, X_1 \rangle & \langle LX_2, X_1 \rangle \\ \langle LX_1, X_2 \rangle & \langle LX_2, X_2 \rangle \end{pmatrix},$$

schließen wir, dass L_{X_1, X_2} gerade die Matrixdarstellung des Weingartenoperators ist, d.h. es gilt $K = \det L_{X_1, X_2}$. Andererseits liefert die Gauß-Gleichung (2.39) (mit $X = X_1$ und $Y = Z = X_2$) die Formel

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2)X_2 &= II(X_2, X_2)LX_1 - II(X_1, X_2)LX_2 \\ &= \langle LX_2, X_2 \rangle LX_1 - \langle LX_1, X_2 \rangle LX_2, \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt nach skalarer Multiplikation mit X_1 . \square

Als Vorbereitung auf die nachfolgenden Betrachtungen führen wir noch ein sehr wichtiges Konzept ein.

Definition 83 (Isometrie). *Seien M und \tilde{M} zwei reguläre Flächen.*

1. *Eine stetig differenzierbare und bijektive Abbildung $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ heißt Isometrie zwischen M und \tilde{M} , sofern*

$$\langle D\phi|_p v_1, D\phi|_p v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

für jedes $p \in M$ und alle $v_1, v_2 \in T_p M$ gilt. Existiert eine solche Abbildung, so werden M und \tilde{M} auch (global) isometrisch genannt.

³⁵Meint in etwa *Bemerkenswerter Lehrsatz* und wurde von seinem Entdecker Gauß selbst so genannt. Er impliziert, dass die Gauß-Krümmung (im Gegensatz zur mittleren Krümmung) zur inneren Geometrie der Fläche gehört.

2. Existiert für jedes $p \in M$ ein $\tilde{p} \in \tilde{M}$ sowie eine Isometrie $\phi : N \rightarrow \tilde{N}$ für zwei reguläre Teilflächen $p \in N \subset M$ und $\tilde{p} \in \tilde{N} \subset \tilde{M}$, so sagt man, M ist lokal isometrisch zu \tilde{M} . Gilt darüber hinaus auch die analoge Aussage für jedes $\tilde{p} \in \tilde{M}$, so werden M und \tilde{M} lokal isometrisch genannt.

Bemerkung.

1. Sowohl die lokale als auch die globale Isometrie definieren eine Äquivalenzrelation zwischen Flächen.
2. Seien $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\alpha} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei injektive Parametrisierungen der Flächenstücke $M = \alpha(U)$ und $\tilde{M} = \tilde{\alpha}(U)$. Dann ist $\phi := \tilde{\alpha} \circ \alpha$ genau dann eine Isometrie, wenn

$$I_{u,\alpha} = I_{u,\tilde{\alpha}} \quad (2.41)$$

für alle $u \in U$ gilt (siehe Übungsaufgabe).

3. Die Abbildung $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ ist genau dann isometrisch im Sinne von Definition 83, wenn sie längenerhaltend in folgenden Sinne ist (siehe Übungsaufgabe): Es gilt

$$\text{len}(\beta) = \text{len}(\tilde{\beta})$$

für jede Kurve $\beta : I \rightarrow M$ und die entsprechende Kurve $\tilde{\beta} := \phi \circ \beta : I \rightarrow \tilde{M}$. Dies erklärt die Benennung Isometrie.

4. Jede Isometrie ist per Definition auch winkeltreu (da $I_{u,\alpha}$ ein Vielfaches von $I_{u,\tilde{\alpha}}$ ist) und flächenerhaltend (weil $\det I_{u,\alpha} = \det I_{u,\tilde{\alpha}}$).
5. Der Kreiskegel und die Ebene sind lokal isometrisch (siehe Übungsaufgabe), d.h. sie besitzen dieselbe innere Geometrie. Analoges gilt für den Katenoiden und den Helikoiden, siehe Übungsaufgabe sowie (2.24) und (2.25).

2.3.3 Christoffel-Symbole

Wir wollen nun eine andere, etwas konkretere Sicht auf den Satz von Gauß besprechen. Dazu bemerken wir, dass das tangentialen Vektorfeld $\nabla_{A_{j_1}} A_{j_2}(p)$ auf einem parametrisierten Flächenstück als Linearkombination der $A_i(p)$ dargestellt werden kann. Deshalb existieren Funktionen $\Gamma_{j_1 j_2}^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ – die sogenannten Christoffel-Symbole³⁶ – so dass

$$\nabla_{A_{j_1}} A_{j_2}(\alpha(u)) = \sum_{i=1}^2 \Gamma_{j_1 j_2}^i(u) A_i(\alpha(u)) \quad (2.42)$$

für alle $u \in U$ gilt.

Lemma 84 (Berechnung und Symmetrie der Christoffel-Symbole). *Es gilt*

$$\Gamma_{j_1 j_2}^i(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{ik}(u) (\partial_{u_{j_1}} g_{j_2 k}(u) + \partial_{u_{j_2}} g_{j_1 k}(u) - \partial_{u_k} g_{j_1 j_2}(u)), \quad (2.43)$$

wobei $g_{j_1 j_2}(u)$ bzw. $g^{j_1 j_2}(u)$ die Komponenten der Matrix $I_{u,\alpha}$ bzw. $I_{u,\alpha}^{-1}$ bezeichnet. Insbesondere gilt stets $\Gamma_{j_1 j_2}^i = \Gamma_{j_2 j_1}^i$.

³⁶Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), deutscher Mathematiker.

Beweis. Wir multiplizieren (2.42) skalar mit $A_k(p)$ und erhalten

$$\sum_{i=1}^2 \Gamma_{j_1 j_2}^i(u) g_{ik}(u) = \langle \nabla_{A_{j_1}} A_{j_2}(p), A_k(p) \rangle = \langle D_{A_{j_1}} A_{j_2}(p), A_k(p) \rangle,$$

wobei wir benutzt haben, dass die Definition der ersten Fundamentalform die Identität $g_{ik}(u) = \langle A_i(p), A_k(p) \rangle$ impliziert und dass sich $D_{A_{j_1}} A_{j_2}(p)$ und $\nabla_{A_{j_1}} A_{j_2}(p)$ nur um ein Vielfaches von $\nu(p)$ unterscheiden. Weiterhin gilt wegen (2.37) und der Produktregel auch

$$\begin{aligned} 2\langle D_{A_{j_1}} A_{j_2}(p), A_k(p) \rangle &= 2\langle \partial_{u_{j_1}} \partial_{u_{j_2}} \alpha(u), \partial_{u_k} \alpha(u) \rangle \\ &= \partial_{u_{j_1}} \langle \partial_{u_{j_2}} \alpha(u), \partial_{u_k} \alpha(u) \rangle + \partial_{u_{j_2}} \langle \partial_{u_{j_1}} \alpha(u), \partial_{u_k} \alpha(u) \rangle \\ &\quad - \partial_{u_k} \langle \partial_{u_{j_1}} \alpha(u), \partial_{u_{j_2}} \alpha(u) \rangle \\ &= \partial_{u_{j_1}} g_{j_2 k}(u) + \partial_{u_{j_2}} g_{j_1 k}(u) - \partial_{u_k} g_{j_1 j_2}(u), \end{aligned}$$

und wir erhalten nach Multiplikation mit $g^{lk}(u)$ und Summation über k die Formel

$$2 \sum_{i=1}^2 \Gamma_{j_1 j_2}^i(u) \sum_{k=1}^2 g^{lk}(u) g_{ik}(u) = \sum_{k=1}^2 g^{lk}(u) \left(\partial_{u_{j_1}} g_{j_2 k}(u) + \partial_{u_{j_2}} g_{j_1 k}(u) - \partial_{u_k} g_{j_1 j_2}(u) \right).$$

Andererseits gilt³⁷

$$\sum_{k=1}^2 g^{lk}(u) g_{ik}(u) = \delta_i^l := \begin{cases} 1 & \text{für } i = l \\ 0 & \text{für } i \neq l \end{cases} \quad (2.44)$$

und die Behauptung folgt mit l statt i . \square

Insbesondere sind kovariante Ableitungen – und alle sich hieraus ergebenden Größen – bereits eindeutig durch die erste Fundamentalform bzw. durch ihre punktweisen Koeffizienten und deren Ableitungen bestimmt. Man sagt daher auch, dass kovariante Ableitungen zur *inneren Geometrie*³⁸ der Fläche gehören, da die erste Fundamentalform im Prinzip aus *lokalen Messungen* von Längen und Winkel innerhalb der Fläche bestimmt werden kann.

Lemma 85 (Formeln von Gauß und Codazzi-Mainardi in Koordinaten). *Die Gleichungen aus Satz 81 können lokal als*

$$\partial_{u_i} \Gamma_{kj}^n - \partial_{u_j} \Gamma_{ki}^n + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^n - \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^n = \sum_{m=1}^2 (h_{kj} h_{im} - h_{ki} h_{jm}) g^{mn} \quad (2.45)$$

und

$$\partial_{u_i} h_{kj} - \partial_{u_j} h_{ki} + \sum_{m=1}^2 \left(h_{mi} \Gamma_{kj}^m - h_{mj} \Gamma_{ki}^m \right) = 0 \quad (2.46)$$

geschrieben werden, wobei die Funktionen $h_{i_1 i_2} : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponenten der Matrix $II_{u, \alpha}$ bezeichnen.

³⁷ δ_i^k ist das sogenannte Kronecker-Delta

³⁸ *Geometrie* heißt ja wörtlich *Erdvermessung*.

Beweis. Hilfsresultat: Wir zeigen zunächst, dass

$$X(p) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \langle X(p), A_m(p) \rangle g^{mn}(u) A_n(p). \quad (2.47)$$

mit $p = \alpha(u)$ für jedes tangentielle Vektorfeld gilt. Dazu betrachten wir das Skalarprodukt der rechten Seite mit $A_k(p)$ und rechnen

$$\begin{aligned} \langle \text{rechte Seite}, A_k(p) \rangle &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \langle X(p), A_m(p) \rangle g^{mn}(u) \langle A_n(p), A_k(p) \rangle \\ &= \sum_{m=1}^2 \langle X(p), A_m(p) \rangle \sum_{n=1}^2 g^{mn}(u) g_{nk}(u) \\ &= \sum_{m=1}^2 \langle X(p), A_m(p) \rangle \delta_m^k \\ &= \langle X(p), A_k(p) \rangle = \langle \text{linke Seite}, A_k(p) \rangle, \end{aligned}$$

wobei $k \in \{1, 2\}$ beliebig gewählt werden kann. Da $A_1(p)$ und $A_2(p)$ eine Basis in $T_p M$ bilden, folgt die Behauptung.

Gauß-Formel: Um die Gauß-Gleichung (2.39) mit $X = A_i$ und $Y = A_j$ und $Z = A_k$ im Punkt $p = \alpha(u)$ auszuwerten, berechnen wir

$$\begin{aligned} \nabla_{A_i} \nabla_{A_j} A_k(p) &= \nabla_{A_i(\alpha(u))} \left(\sum_{m=1}^2 \Gamma_{jk}^m(u) A_m(\alpha(u)) \right) \\ &= \sum_{m=1}^2 (\nabla_{A_i(\alpha(u))} \Gamma_{jk}^m(u)) A_m(\alpha(u)) + \Gamma_{jk}^m(u) \nabla_{A_i(\alpha(u))} A_m(\alpha(u)) \\ &= \sum_{m=1}^2 (\partial_{u_i} \Gamma_{jk}^m(u)) A_m(\alpha(u)) + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{jk}^m(u) \sum_{n=1}^2 \Gamma_{im}^n(u) A_n(\alpha(u)) \\ &= \sum_{n=1}^2 (\partial_{u_i} \Gamma_{jk}^n(u) + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{jk}^m(u) \Gamma_{im}^n(u)) A_n(\alpha(u)), \end{aligned}$$

wobei wir die Rechenregeln aus Lemma 78 sowie (2.42) benutzt haben. Analoge Formeln mit vertauschten Indizes gelten für $\nabla_{A_j} \nabla_{A_i} A_k(p)$ und (2.36) garantiert $\nabla_{[A_i, A_j]} A_k(p) = 0$. Außerdem gilt

$$II_p(A_j(p), A_k(p)) = h_{jk}(u) \quad (2.48)$$

und das Hilfsresultat Formel (2.47) impliziert

$$\begin{aligned} L_p A_i(p) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \langle L_p A_i(p), A_m(p) \rangle g^{mn}(u) A_n(p) \\ &= \sum_{n=1}^2 \left(\sum_{m=1}^2 h_{im}(u) g^{mn}(u) \right) A_n(p). \end{aligned}$$

Die lokale Gauß-Formel (2.45) folgt nun unmittelbar aus der globalen Variante (2.39) durch Einsetzen der bisher abgeleiteten Teilformeln nach Koeffizientenvergleich bzgl.

der A_n und unter Berücksichtigung von (2.36) sowie Symmetrieeigenschaften von Γ und II (d.h. von $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ und $h_{ij} = h_{ji}$).

Codazzi-Formel:: Mit Lemma 78 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{A_j} L_p A_i(p), A_k(p) \rangle &= \nabla_{A_j} \langle L_p A_i(p), A_n \rangle - \langle L_p A_i(p), \nabla_{A_j} A_k \rangle \\
&= \partial_{u_j} h_{ik}(u) - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 \langle h_{im}(u) g^{mn}(u) A_n, \Gamma_{jk}^l A_l \rangle \\
&= \partial_{u_j} h_{ik}(u) - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_{im}(u) g^{mn}(u) \Gamma_{jk}^l(u) g_{nl}(u) \\
&= \partial_{u_j} h_{ik}(u) - \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_{im}(u) \Gamma_{jk}^l(u) \delta_m^l \\
&= \partial_{u_j} h_{ik}(u) - \sum_{m=1}^2 h_{im}(u) \Gamma_{jk}^m(u)
\end{aligned}$$

und (2.46) folgt wieder aus dem globalen Analogon (2.40) durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. \square

Lemma 86 (Lokale Ableitungsgleichungen). *Mit den obigen Notationen gilt*

$$\partial_{u_{j_1}} \partial_{u_{j_2}} \alpha(u) = h_{j_1 j_2}(u) \nu_\alpha(u) + \sum_{i=1}^2 \Gamma_{j_1 j_2}^i(u) \partial_{u_i} \alpha(u) \quad (2.49)$$

sowie

$$\partial_{u_i} \nu_\alpha(u) = - \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 h_{i j_1}(u) g^{j_1 j_2}(u) \partial_{u_{j_2}} \alpha(u), \quad (2.50)$$

wobei $\nu_\alpha = \nu \circ \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Flächennormale beschreibt.

Beweis. Die erste Gleichung ist nur eine Umformulierung von (2.34), die durch Einsetzen von (2.33), (2.35), (2.42) sowie unter Ausnutzung von

$$\nu(p) = \nu_\alpha(u), \quad II_p(A_{j_1}(p), A_{j_1}(p)) = \langle L_p A_{j_1}(p), A_{ij_2}(p) \rangle = h_{j_1 j_2}(u)$$

folgt. Für die Herleitung der zweite Gleichung bemerken wir, dass

$$\partial_{u_i} \nu_\alpha(u) = D_{A_i} \nu(p) = \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \langle D_{A_i} \nu(p), A_{j_1}(p) \rangle g^{j_1 j_2}(u) A_{j_2}(p). \quad (2.51)$$

eine Konsequenz des Hilfsresultats (2.47) ist, und dass

$$\langle D_{A_i} \nu(p), A_{j_1}(p) \rangle = - \langle L_p A_i(p), A_{j_1}(p) \rangle = -II_p(A_i(p), A_{j_1}(p)) = h_{ij_1}(u)$$

wegen (2.31) und (2.33) gilt. \square

Wir wollen erwähnen, dass die Formeln aus Lemma 85 direkt aus Lemma 86 via

$$\partial_{u_i} \partial_{u_j} \partial_{u_k} \alpha(u) = \partial_{u_j} \partial_{u_i} \partial_{u_k} \alpha(u)$$

und einfachen Rechnungen abgeleitet werden können, wobei (2.45) bzw. (2.46) gerade die Gleichheit der tangentialen bzw. normalen Anteile beschreiben. Insbesondere können die Gauß-Gleichung und die Codazzi-Mainardi-Gleichung als lokale *Integrabilitätsbedingungen* interpretiert werden, die sich aus der Darstellung (2.49) ergeben. Wir werden unten beim Satz von Bonnet auf diesen Aspekt zurückkommen. Die Integrabilitätsbedingung zu (2.50), also

$$\partial_{u_i} \partial_{u_j} \nu_\alpha(u) = \partial_{u_j} \partial_{u_i} \nu_\alpha(u)$$

liefert keine neuen Bedingungen, sondern führt wieder auf (2.46).

2.3.4 Die Sätze von Gauß und Bonnet

Die zweite Fundamentalform ist zunächst keine Größe der inneren Geometrie, da sie beschreibt, wie die Fläche sich im umgebenden Raum krümmt, d.h. wie sich der Normalenvektor entlang der Fläche ändert. Die bemerkenswerte Erkenntnis von Gauß war nun, dass man die Gaußkrümmung – also das Produkt der Hauptkrümmungen – schon aus lokalen Messungen innerhalb der Fläche und ohne Bezugnahme auf den Normalenvektor bestimmen kann. Die mittlere Krümmung ist jedoch nicht Teil der inneren Geometrie. Insbesondere kann ein gedachtes Lebewesen auf einem Kreiszyylinder durch lokale Messungen niemals den Zylinderradius bestimmen, sondern alle lokalen Messungen werden auf einen flachen Raum hindeuten.³⁹

Theorem 87 (Theorem von Gauß bzw. *Theorema Egregium*, Variante 2). *Ist $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ eine Isometrie, so gilt $K(p) = \tilde{K}(\tilde{p})$ mit $\tilde{p} = \phi(p)$, wobei K und \tilde{K} die Gauß-Krümmungen von M und \tilde{M} sind.*

Beweis. Wir rechnen mit lokalen und injektiven Parametrisierungen $\alpha : U \rightarrow M$ bzw. $\tilde{\alpha} = \phi \circ \alpha : U \rightarrow \tilde{M}$ und bezeichnen die lokalen Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalformen mit g_{ij} und h_{ij} bzw. \tilde{g}_{ij} und \tilde{h}_{ij} . Nach Voraussetzung und wegen des lokalen Isometriekriteriums (2.41) gilt dann

$$g_{ij}(u) = \tilde{g}_{ij}(u), \quad g^{ij}(u) = \tilde{g}^{ij}(u), \quad \partial_{u_k} g_{ij}(u) = \partial_{u_k} \tilde{g}_{ij}(u)$$

für alle $i, j, k \in \{1, 2\}$ und alle $u \in U$, aber im Allgemeinen müssen wir mit $h_{ij}(u) \neq \tilde{h}_{ij}(u)$ rechnen. Aus Lemma 84 folgt

$$\Gamma_{ij}^k(u) = \tilde{\Gamma}_{ij}^k(u)$$

für die Christoffelsymbole und Lemma 85 garantiert

$$\sum_{m=1}^2 (h_{kj} h_{im} - h_{ki} h_{jm}) g^{mn} = \sum_{m=1}^2 (\tilde{h}_{kj} \tilde{h}_{im} - \tilde{h}_{ki} \tilde{h}_{jm}) \tilde{g}^{mn}$$

für alle Indizes $i, j, k, n \in \{1, 2\}$ und insbesondere

$$\sum_{m=1}^2 (h_{11} h_{2m} - h_{12} h_{1m}) g^{mn} = \sum_{m=1}^2 (\tilde{h}_{11} \tilde{h}_{2m} - \tilde{h}_{12} \tilde{h}_{1m}) \tilde{g}^{mn}.$$

³⁹Durch *globale Argumente* kann eine Flächenwesen mehr Informationen bekommen. Zum Beispiel kann es auf dem Zylinder passieren, dass man immer ‘geradeaus geht’ (d.h. entlang einer Geodäte wandert, siehe unten) und am Ende letztlich wieder am Startpunkt ankommt. Aus dieser Beobachtung kann das Lebewesen nun schließen, dass es nicht im flachen Raum lebt.

Multiplikation mit $g_{2n} = \tilde{g}_{2n}$ und anschließende Summation über n liefert schließlich

$$\det II_{u,\alpha} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \tilde{h}_{11}\tilde{h}_{22} - \tilde{h}_{12}\tilde{h}_{21} = \det II_{u,\tilde{\alpha}}$$

wegen (2.44) und die Behauptung folgt via $\det I_{u,\alpha} = \det I_{u,\tilde{\alpha}}$. \square

Lemma 88 (Eindeutigkeit der Fundamentalformen von Flächenstücken). *Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend und sind $\alpha : U \subset \mathbb{R}^3$ sowie $\tilde{\alpha} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei gleich orientierte Flächenstücke⁴⁰ mit*

$$g_{ij}(u) = \tilde{g}_{ij}(u), \quad h_{ij}(u) = \tilde{h}_{ij}(u)$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$ und alle $u \in U$, so existiert eine orientierungserhaltende und orthonormale Transformation $\mathcal{R} \in \text{SO}(3)$ sowie eine Verschiebung $\mathcal{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $\tilde{\alpha} = \mathcal{V} \circ \mathcal{R} \circ \alpha$.

Beweis. Wir wollen die Behauptung mit $\mathcal{V} = \text{id}$ im Spezialfall $\alpha(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$ beweisen; der allgemeine Fall kann dann durch Einführung einer Verschiebung \mathcal{V} behandelt werden. Für jedes $u \in U$ existiert ein $\mathcal{R}(u) \in \text{SO}(3)$ mit

$$\mathcal{R}(u)\partial_{u_1}\alpha(u) = \partial_{u_1}\tilde{\alpha}(u), \quad \mathcal{R}(u)\partial_{u_2}\alpha(u) = \partial_{u_2}\tilde{\alpha}(u), \quad \mathcal{R}(u)\nu(u) = \mathcal{R}(u)\tilde{\nu}(u), \quad (2.52)$$

wobei wir hier ν statt ν_α bzw. $\tilde{\nu}$ statt $\nu_{\tilde{\alpha}}$ schreiben, um die Normalenvektoren zu bezeichnen. Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung $\mathcal{R} : U \rightarrow \text{SO}(3)$ konstant ist und bemerken zunächst, dass \mathcal{R} zweimal stetig differenzierbar ist (weil α und $\tilde{\alpha}$ nach Generalannahme in diesem Abschnitt dreimal stetig differenzierbar sind).

Nach Voraussetzung und Konstruktion sowie der Formeln aus Lemma 86 gilt zum einen

$$\partial_{u_i}\partial_{u_j}\tilde{\alpha}(u) = \mathcal{R}(u)\partial_{u_i}\partial_{u_j}\alpha(u), \quad \partial_{u_i}\tilde{\nu}(u) = \mathcal{R}(u)\partial_{u_i}\nu(u).$$

Andererseits liefert die komponentenweise Anwendung der Produktregel auf die Terme in (2.52)

$$\partial_{u_i}\partial_{u_j}\tilde{\alpha}(u) = \partial_{u_i}\left(\mathcal{R}(u)\partial_{u_j}\alpha(u)\right) = \mathcal{R}(u)\partial_{u_i}\partial_{u_j}\alpha(u) + (\partial_{u_i}\mathcal{R}(u))\partial_{u_j}\alpha(u)$$

sowie

$$\partial_{u_i}\tilde{\nu}(u) = \mathcal{R}(u)\partial_{u_i}\nu(u) + (\partial_{u_i}\mathcal{R}(u))\nu(u)$$

und wir schließen, dass

$$(\partial_{u_i}\mathcal{R}(u))\partial_{u_1}\alpha(u) = 0, \quad (\partial_{u_i}\mathcal{R}(u))\partial_{u_2}\alpha(u) = 0, \quad (\partial_{u_i}\mathcal{R}(u))\nu(u) = 0.$$

für alle $i \in \{1, 2\}$ und alle $u \in U$. Da aber $\partial_{u_1}\alpha(u)$, $\partial_{u_2}\alpha(u)$ und $\nu(u)$ für jedes u eine Basis des \mathbb{R}^3 darstellt, folgt

$$\partial_{u_i}\mathcal{R}(u) = 0.$$

Insbesondere verschwinden alle partiellen Ableitungen von $\mathcal{R} : U \rightarrow \text{Mat}(3 \times 3)$, so dass \mathcal{R} nach einem bekannten Resultat aus *Analysis I+II* in der Tat konstant ist (Wäre U

⁴⁰Gleiche Orientierung meint, dass ν bzw. $\tilde{\nu}$ mit der gleichen Vorzeichenwahl in (2.10) von $\partial_{u_i}\tau$ bzw. $\partial_{u_i}\tilde{\tau}$ abhängen.

nicht zusammenhängend, so wäre \mathcal{R} nur auf jeder Zusammenhangskomponente von U konstant.)

Schließlich folgt aus

$$\partial_{u_i}(\tilde{\alpha} - \mathcal{R} \cdot \alpha)(u) = 0,$$

dass $\tilde{\alpha} - \mathcal{R} \cdot \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ konstant ist, und unsere Normierung impliziert, dass dieser konstante Vektor sogar verschwindet. \square

Theorem 89 (Theorem von Bonnet). *Sei U offen und zusammenhängend und seien $g_{ij}, h_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ gegebene Funktionen mit $g_{12} = g_{21}$ und $h_{12} = h_{21}$, so dass die Gleichungen aus Lemma 85 erfüllt sind, wobei die Funktionen $g^{mn}, \Gamma_{mn}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $m, n, k \in \{1, 2\}$ wie in Lemma 84 mit Hilfe der g_{ij} berechnet seien. Dann existiert für jede Wahl von $u_* \in U$ und $p_* \in \mathbb{R}^3$ und jede Wahl von $\tau_{*,1}, \tau_{*,2}, \nu_*$ in \mathbb{R}^3 mit*

$$\langle \tau_{*,i}, \tau_{*,j} \rangle = g_{ij}(u_*), \quad \langle \tau_{*,i}, \nu_* \rangle = 0, \quad \langle \nu_*, \nu_* \rangle = 1$$

ein parametrisiertes Flächenstück $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha(u_*) = p_*, \quad \partial_{u_1}\alpha(u_*) = \tau_{*,1}, \quad \partial_{u_2}\alpha(u_*) = \tau_{*,2}, \quad \nu_\alpha(u_*) = \nu_*,$$

so dass die g_{ij} und h_{ij} gerade die Komponenten der ersten und zweiten Fundamentalform sind.

Beweis. O.B.d.A. gelte $u_* = 0$, $p_* = 0$, $e_{*,i} = e_i$, denn der allgemeine Fall kann dann durch Superposition mit euklidischen Bewegungen auf diesen zurückgeführt werden. Wir wollen außerdem annehmen, dass U ein Rechteck der Bauart

$$U = (-\lambda_1, +\lambda_1) \times (-\lambda_2, \lambda_2)$$

ist, da dies einige Argumente vereinfachen wird. Der allgemeine Fall kann aber mit etwas mehr Aufwand analog geführt werden. Desweiteren schreiben wir τ_1 bzw. τ_2 statt $\partial_{u_1}\alpha(u)$ bzw. $\partial_{u_2}\alpha(u)$ und ν statt ν_α .

Konstruktion der Vektorfelder τ_j und ν : Der halbe Gleichungssatz aus Lemma 86 kann als

$$\partial_{u_1}\tau_j(u_1, u_2) - h_{1j}(u_1, u_2)\nu(u_1, u_2) - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{1j}^k(u_1, u_2)\tau_k(u_1, u_2) = 0 \quad (2.53)$$

und

$$\partial_{u_1}\nu(u_1, u_2) + \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{1k}(u_1, u_2)g^{km}(u_1, u_2)\tau_k(u_1, u_2) = 0 \quad (2.54)$$

geschrieben werden und für jedes feste $u_2 \in (-\lambda_2, \lambda_2)$ als gewöhnliche Differentialgleichung für die unbekanntenen Funktionen

$$\tau_1(\cdot, u_2), \tau_2(\cdot, u_2), \nu(\cdot, u_2) : (-\lambda_1, +\lambda_1) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

angesehen werden. Dabei sind diese Differentialgleichungen linear in den gesuchten Funktionen, aber besitzen nicht-konstante Koeffizienten, die gerade durch die

$g_{1j}, h_{1j}, \Gamma_{1j}^k, g^{jk}$ gegeben sind. Analog liefert der andere halbe Gleichungssatz aus Lemma 86 mit

$$\partial_{u_2} \tau_j(u_1, u_2) - h_{2j}(u_1, u_2) \nu(u_1, u_2) - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{2j}^k(u_1, u_2) \tau_k(u_1, u_2) = 0 \quad (2.55)$$

und

$$\partial_{u_2} \nu(u_1, u_2) + \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{2k}(u_1, u_2) g^{km}(u_1, u_2) \tau_k(u_1, u_2) = 0 \quad (2.56)$$

für jedes feste $u_1 \in (-\lambda_1, +\lambda_1)$ ein System linearer Differentialgleichungen für die Funktionen

$$\tau_1(u_1, \cdot), \tau_2(u_1, \cdot), \nu(u_1, \cdot) : (-\lambda_1, +\lambda_1) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Wir benutzen die Anfangsbedingung

$$\tau_1(0, 0) = \tau_{*,1}, \quad \tau_2(0, 0) = \tau_{*,1}, \quad \nu(0, 0) = \nu_*$$

sowie das erste System von Differentialgleichungen (2.53)+(2.54) mit $u_2 = 0$ um τ_1, τ_2 und ν auf der Strecke

$$(-\lambda_1, +\lambda_1) \times \{0\} \quad (2.57)$$

zu bestimmen, wobei wir benutzen, dass die Lösung zum Anfangswertproblem einer linearer Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten eindeutig ist und immer global, d.h. hier auf dem Intervall $(-\lambda_1, +\lambda_1)$, existiert. Anschließend lösen wir das zweite System von Differentialgleichungen (2.55)+(2.56) für jedes feste $u_1 \in (-\lambda_1, +\lambda_1)$ auf dem Intervall $(-\lambda_2, +\lambda_2)$, wobei wir die Anfangsdaten für $u_2 = 0$ ja bereits berechnet haben.

Eigenschaften der Vektorfelder τ_j und ν : Wir haben nun τ_1, τ_2 und ν auf ganz U mit Werten in \mathbb{R}^3 konstruiert, wobei das zweite System von Differentialgleichungen (2.55)+(2.56) in jedem Punkt $u \in U$ erfüllt ist, aber das erste zunächst nur auf der Strecke (2.57) gilt. Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass die Gauß-Gleichung und die Codazzi-Gleichung aus Lemma 85 die Gültigkeit

$$\partial_{u_2}(\text{linke Seite in (2.53)}) = 0, \quad \partial_{u_2}(\text{linke Seite in (2.54)}) = 0$$

garantieren (siehe dazu auch die Bemerkung nach Lemma 86). Diese Integrabilitätsbedingung impliziert nun, dass (2.53) und (2.54) wirklich auf ganz U erfüllt sind.

Als nächstes wollen wir überprüfen, ob die von uns konstruierten Vektorfelder $\tau_1, \tau_2, \nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ wirklich die Gleichungen

$$\langle \tau_i(u), \tau_j(u) \rangle = g_{ij}(u), \quad \langle \tau_i(u), \nu(u) \rangle = 0, \quad \langle \nu(u), \nu(u) \rangle = 1 \quad (2.58)$$

für alle Indizes $i, j \in \{1, 2\}$ und alle $u \in U$ erfüllen, und bemerken zunächst, dass diese aufgrund der Anfangsbedingung für $u_1 = u_2 = 0$ gelten. Desweiteren garantieren die

Differentialgleichungen (2.53)–(2.56) die Gültigkeit von

$$\partial_{u_k} \langle \nu(u), \nu(u) \rangle = -2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 h_{km}(u) g^{mn}(u) \langle \tau_n(u), \nu(u) \rangle \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \partial_{u_k} \langle \tau_i(u), \nu(u) \rangle &= h_{ki}(u) \langle \nu(u), \nu(u) \rangle + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ki}^m(u) \langle \tau_m(u), \nu(u) \rangle \\ &\quad - \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 h_{km}(u) g^{mn}(u) \langle \tau_i(u), \tau_n(u) \rangle \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \partial_{u_k} \langle \tau_i(u), \tau_j(u) \rangle &= h_{ik}(u) \langle \tau_j(u), \nu(u) \rangle + h_{jk}(u) \langle \tau_i(u), \nu(u) \rangle \\ &\quad + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ik}^m(u) \langle \tau_j(u), \tau_m(u) \rangle + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{jk}^m(u) \langle \tau_i(u), \tau_m(u) \rangle, \end{aligned} \quad (2.61)$$

das heißt die 6 nun bereits bekannten Funktionen

$$\langle \tau_1, \tau_1 \rangle, \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \langle \tau_2, \tau_2 \rangle, \langle \tau_1, \nu \rangle, \langle \tau_2, \nu \rangle, \langle \nu, \nu \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}$$

erfüllen neben speziellen Anfangsbedingungen im Ursprung auch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen in u_1 - und in u_2 -Richtung. Wir wollen nun zeigen, dass diese Differentialgleichungen sowie die Anfangsbedingungen auch durch die Funktionen

$$g_{11}, g_{12}, g_{22}, 0, 0, 1$$

erfüllt werden, denn dann folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen zu Anfangswertproblemen die Gültigkeit von (2.58) für alle $u \in U$. Die Gültigkeit der entsprechenden Anfangsbedingung folgt unmittelbar und ersetzen wir in (2.59) die Ausdrücke

$$\langle \tau_i(u), \tau_j(u) \rangle \rightsquigarrow g_{ij}(u), \quad \langle \tau_i(u), \nu(u) \rangle \rightsquigarrow 0, \quad \langle \nu(u), \nu(u) \rangle \rightsquigarrow 1,$$

so erhalten wir mit $\partial_{u_k} 1 = 0$ in der Tat eine wahre Aussage. Dieselbe Ersetzung in (2.60) erzeugt $\partial_{u_k} 0 = 0$, sofern wir (2.44) berücksichtigen. Die Ersetzung in (2.61) liefert hingegen zunächst

$$\partial_{u_k} g_{ij}(u) = \sum_{m=1}^2 \left(\Gamma_{ki}^m(u) g_{mj}(u) + \Gamma_{kj}^m(u) g_{mi}(u) \right), \quad (2.62)$$

aber diese Formel folgt direkt aus der Definition der Christoffel-Symbole. In der Tat, (2.43) impliziert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ki}^m(u) g_{mj}(u) &= \sum_{m=1}^2 g_{mj}(u) \sum_{n=1}^2 g^{mn}(u) (\partial_{u_k} g_{in}(u) + \partial_{u_i} g_{kn}(u) - \partial_{u_n} g_{ki}(u)) \\ &= \partial_{u_k} g_{ij}(u) + \partial_{u_i} g_{kj}(u) - \partial_{u_j} g_{ki}(u) \end{aligned}$$

und mit direkten Rechnungen erhalten wir (2.62). Insgesamt haben wir damit (2.58) für jedes $u \in U$ gezeigt.

Konstruktion von α : Um α aus den nun bekannten Vektorfeldern τ_1 und τ_2 zu berechnen, betrachten wir

$$\partial_{u_1} \alpha(u_1, u_2) = \tau_1(u_1, u_2), \quad \partial_{u_2} \alpha(u_1, u_2) = \tau_2(u_1, u_2) \quad (2.63)$$

als degenerierte Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung $\alpha(0) = 0$. Wir lösen nun wieder die erste Differentialgleichung $(2.63)_1$ mit $u_2 = 0$ auf dem Intervall $(-\lambda_1, +\lambda_1)$ um α auf der Menge (2.57) zu berechnen und lösen anschließend die zweite Differentialgleichung $(2.63)_2$ für jedes feste $u_1 \in (-\lambda_1, +\lambda_1)$ auf dem Intervall $(-\lambda_2, +\lambda_2)$ um α auf ganz U zu berechnen, wobei die Lösung der entarteten Differentialgleichungen einfach Integration bzgl. u_1 bzw. u_2 meint. Dann gilt – analog zu oben – $(2.63)_2$ wieder auf ganz U , aber $(2.63)_1$ zunächst nur auf der Strecke (2.57). Die obige Konstruktion – siehe (2.53) und (2.55) – kombiniert mit den Symmetriebedingungen $h_{ij}(u) = h_{ji}(u)$ und $\Gamma_{ij}^k(u) = \Gamma_{ji}^k(u)$ garantiert aber

$$\partial_{u_1}\tau_2(u_1, u_2) = \partial_{u_2}\tau_1(u_1, u_2),$$

und dies liefert – wieder analog zu oben – die Gleichung $(2.63)_1$ für jedes $u \in U$.

Finale Argumente: Die Gleichungen in (2.58) implizieren, dass die g_{ij} in der Tat die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der soeben konstruierten parametrisierten Fläche $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind und dass ν wirklich ein entsprechendes Normalenvektorfeld beschreibt. Außerdem gilt wegen (2.53) und (2.55)

$$\langle \partial_{u_i}\partial_{u_j}\alpha(u), \nu(u) \rangle = \langle \partial_{u_i}\tau_j(u), \nu(u) \rangle = h_{ij}(t),$$

und wir schließen, dass die h_{ij} wirklich die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind. \square

Als eine Anwendung von Theorem 87 wollen wir untersuchen, ob es ein Flächenstück $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass

$$I_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{12}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II_{u,\alpha} = \begin{pmatrix} h_{11}(u) & h_{12}(u) \\ h_{12}(u) & h_{22}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen dazu die Gauß- und die Codazzi-Gleichung auswerten und berechnen zunächst

$$g^{11}(u) = g^{22}(u) = 1, \quad g^{12}(u) = 0$$

sowie alle 8 Christoffelsymbole via

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(u) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 g^{kn}(u) \left(\partial_{u_i}g_{jn}\alpha(u) + \partial_{u_j}g_{in}\alpha(u) - \partial_{u_n}g_{ij}\alpha(u) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_{u_i}g_{jk}\alpha(u) + \partial_{u_j}g_{ik}\alpha(u) - \partial_{u_k}g_{ij}\alpha(u) \right) = 0. \end{aligned}$$

Nun müssen wir für jede Wahl von i, j, k, n die insgesamt 16 Gauß-Gleichungen aus (2.45) überprüfen. Die linke Seite verschwindet immer und auch die rechte Seite liefert

$$\sum_{m=1}^2 (h_{kj}(u)h_{im}(u) - h_{ki}(u)h_{jm}(u))g^{mn}(u) = h_{kj}(u)h_{in}(u) - h_{ki}(u)h_{jn}(u) = 0$$

immer 0 (sowohl der erste als auch der zweite Term auf der rechten Seite sind nur für $i = j = k = n = 2$ von Null verschieden). Die 8 Codazzi-Gleichungen sind auch immer erfüllt und wir können schließen, dass es ein entsprechendes Flächenstück gibt. Wir könnten dieses Flächenstück sogar mit Hilfe der Differentialgleichungen (2.53)+(2.54)+(2.55)+(2.56)+(2.63) schrittweise berechnen.

2.3.5 Paralleltransport und Geodäten

Definition 90 (Parallelität von Vektorfeldern). *Seien M eine orientierbare Fläche und $\beta : I \rightarrow M$ eine reguläre Kurve in M . Ein stetig differenzierbares Vektorfeld X heißt parallel entlang der Kurve β , falls*

$$\nabla_{\dot{\beta}(t)} X(\beta(t)) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt. Ist X parallel entlang jeder Kurve β in M , so wird X auch parallel auf M genannt.

Bemerkung.

1. Für die Parallelität bzgl. β muss X nur auf der Spur von β gegeben sein.
2. X muss hier nicht unbedingt tangential sein, obwohl viele Autoren dies fordern.
3. Jedes konstante Vektorfeld ist parallel.

Definition 91 (Geodäten). *Eine reguläre Kurve $\beta : I \rightarrow M$ in einer orientierbaren Fläche mit*

$$\nabla_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) = 0$$

für alle $t \in I$ heißt Geodäte (oder manchmal auch Geodätische).

Ob eine gegebene Kurve geodätisch ist, hängt letztlich nur von der ersten Fundamentalform ab und ist daher eine Eigenschaft der inneren Geometrie. Ist zum Beispiel $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ eine Isometrie, so ist β genau dann Geodäte in M , wenn $\tilde{\beta} = \phi \circ \beta$ Geodäte in \tilde{M} ist.

Bemerkung.

1. Beachte, dass $\dot{\beta}$ kein Vektorfeld auf ganz M , sondern nur auf $\text{sp } \beta$ ist. Die Richtungsableitung

$$D_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) = \ddot{\beta}(t)$$

ist aber immer wohldefiniert und durch Projektion auf den Normal- und den Tangentialraum via

$$D_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) = \langle \ddot{\beta}(t), \nu(\beta(t)) \rangle \nu(\beta(t)) + \nabla_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) \quad (2.64)$$

erhalten wir die entsprechende kovariante Ableitung.

2. Für jede Kurve β in M gilt

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle = \langle \nabla_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle \quad (2.65)$$

und wir schließen, dass $|\dot{\beta}(t)|$ für jede Geodäte konstant entlang der Kurve ist.

3. Ist $M = \mathbb{R}^2$, so gilt $\nabla_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) = \ddot{\beta}(t)$ und β ist genau dann eine Geodäte, wenn β affin ist.

4. Ist β eine Frenet-Kurve (und damit insbesondere nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\beta''(s) = \kappa_\nu(\beta(s), \beta'(s)) \nu(\beta(s)) + \nabla_{\beta'(s)} \beta'(s),$$

wobei

$$\kappa_\nu(\beta(s), \beta'(s)) = \langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle = \langle \beta'(s), L_{\beta(s)} \beta'(s) \rangle = \frac{II_{\beta(s)}(\beta'(s), \beta'(s))}{I_{\beta(s)}(\beta'(s), \beta'(s))}$$

gerade die Normalenkrümmung der Kurve β ist (vgl. (2.16)) und den Teil der Kurvenkrümmung beschreibt, der von der Krümmung der Fläche herrührt. Man schreibt auch oft

$$\kappa_{norm}(s) = \langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \rangle$$

statt $\kappa_\nu(\beta(s), \beta'(s))$. Der tangential Anteil von $\beta''(s)$ – also $\nabla_{\beta'(s)} \beta'(s)$ – beschreibt hingegen, wie sich die Kurve innerhalb der Fläche krümmt und steht wegen $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ bzw. $\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle = 0$ senkrecht auf $\nu(\beta(s))$ und $\beta'(s)$. Man nennt

$$\kappa_{geod}(s) := \langle \nabla_{\beta'(s)} \beta'(s), \nu(\beta(s)) \times \beta'(s) \rangle = \langle \beta''(s), \nu(\beta(s)) \times \beta'(s) \rangle$$

die geodätische Krümmung von β . Insbesondere gilt

$$\beta''(s) = \kappa_{norm}(s) \nu(\beta(s)) + \kappa_{geod}(s) \nu(\beta(s)) \times \beta'(s) \quad (2.66)$$

sowie

$$|\beta''(s)|^2 = \kappa_{norm}^2(s) + \kappa_{geod}^2(s), \quad (2.67)$$

wobei die linke Seite gerade $\kappa_1^2(s)$, also das Quadrat der Kurvenkrümmung in der Frenet-Theorie ist. Vergleiche auch die Übungsaufgabe 6.5 zum Darbouschen Dreibein.

Newtons Gesetz für ein Teilchen mit Masse m , dass sich auf einer Fläche m unter dem Einfluss eines tangentialen Kraftfeldes F bewegt, kann als

$$m \nabla_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) = F(\beta(t))$$

geschrieben werden. Geodäten entsprechen also gerade den Bahnen derjenigen Teilchen, die sich auf der Fläche bewegen, ohne von tangentialen Kräften beeinflusst zu werden. Für solche Teilchen gilt außerdem (wir nehmen o.B.d.A $m = 1$ an)

$$\ddot{\beta}(t) = \zeta(t) \nu(\beta(t)), \quad (2.68)$$

wobei

$$\zeta(t) = \langle \ddot{\beta}(t), \nu(\beta(t)) \rangle$$

die sogenannten *Zwangskräfte* beschreibt, die normal zur Fläche wirken und das Teilchen auf der Fläche halten. Beachte, dass wegen

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\beta}(t), \nu(\beta(t)) \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \dot{\beta}(t), \nu(\beta(t)) \rangle - \langle \dot{\beta}(t), \frac{d}{dt} \nu(\beta(t)) \rangle \\ &= 0 + \langle \dot{\beta}(t), L_{\beta(t)} \dot{\beta}(t) \rangle \\ &= II_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t)) \end{aligned}$$

auch

$$\zeta(t) = II_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t)) \quad (2.69)$$

gilt, d.h. der Betrag $\zeta(t)$ der Zwangskraft kann aus der zweiten Fundamentalform berechnet werden kann, obwohl Geodäten letztlich – und wie wir in Lemma 92 genauer sehen werden – nur von der ersten Fundamentalform abhängen. Ganz allgemein gilt: jede Geodäte genügt der vektorwertigen und autonomen Differentialgleichung, die man durch Einsetzen von (2.69) in (2.68) erhält. Wie können außerdem leicht nachrechnen, dass auch die Umkehrung gilt.

Wir wollen nun exemplarisch zeigen, dass man Geodäten im Prinzip ohne Benutzung von Koordinaten berechnen kann.

Beispiel (Geodäten auf der Sphäre). *Geodäten auf $M = S^2$ erfüllen*

$$\ddot{\beta}(t) = \zeta(t)\beta(t),$$

wobei

$$\zeta(t) = \langle \ddot{\beta}(t), \beta(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \dot{\beta}(t), \beta(t) \rangle - \langle \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle = 0 - \sigma^2,$$

für eine Konstante σ . Wählen wir als Anfangsbedingung

$$\beta(0) = (1, 0, 0), \quad \dot{\beta}(0) = (0, 1, 0)$$

so erhalten wir

$$\beta(t) = (\cos(\sigma t), \sin(\sigma t), 0),$$

und mit analogen Rechnungen zeigt man leicht, dass jede Geodäte Teil eines Großkreises ist, wobei der Großkreis gerade der Schnittkreis von M mit der durch $\beta(0)$ und $\dot{\beta}(0)$ aufgespannten Ebene ist.

Beispiel (Geodäten auf dem Kreiszyylinder). Für $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ lautet die Geodätengleichung

$$\ddot{\beta}_1(t) = \zeta(t)\beta_1(t), \quad \ddot{\beta}_2(t) = \zeta(t)\beta_2(t), \quad \ddot{\beta}_3(t) = 0,$$

und analog zu den Rechnungen für die Sphäre zeigen wir, dass $\beta_1(t)^2 + \beta_2(t)^2 = 1$ schon $\zeta(t) = \sigma^2$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ impliziert. Wir erhalten damit

$$\beta(t) = (\cos(\sigma t + \theta), \sin(\sigma t + \theta), \beta_3(0) + \dot{\beta}_3(0)t)$$

wobei σ und θ via

$$\beta(0) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \beta_3(0)), \quad \dot{\beta}(0) = (-\sigma \sin(\theta), \sigma \cos(\theta), \dot{\beta}_3(0))$$

aus den Anfangsdaten bestimmt werden können.

Wir wollen schließlich die Differentialgleichungen (2.68)+(2.69) in lokalen Koordinaten formulieren. Dies ist nicht nur für praktische Zwecke sinnvoll, sondern zeigt auch, dass Geodäten zur inneren Geometrie gehören und also auch ohne Bezugnahme auf die zweite Fundamentalform charakterisiert werden können.

Lemma 92 (Geodäten in lokalen Koordinaten). *Sei $\alpha : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung von M und $\gamma : I \rightarrow U$ eine reguläre Kurve. Dann gilt*

$$\ddot{\gamma}_k(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) = 0 \quad (2.70)$$

für $k \in \{1, 2\}$ und alle $t \in I$ genau dann, wenn $\beta = \alpha \circ \gamma$ eine Geodäte in M ist.

Beweis. Mit

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_i(t) \partial_{u_i} \alpha(\gamma(t))$$

gilt

$$\ddot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^2 \ddot{\gamma}_i(t) \partial_{u_i} \alpha(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \partial_{u_i} \partial_{u_j} \alpha(\gamma(t)),$$

und in Kombination mit (2.64), (2.65) sowie (2.50) erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\beta}(t)} \dot{\beta}(t) &= \sum_{k=1}^2 \ddot{\gamma}_k(t) \partial_{u_k} \alpha(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \partial_{u_k} \alpha(\gamma(t)) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left(\ddot{\gamma}_k(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right) \partial_{u_k} \alpha(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Koeffizientenvergleich bzgl. der tangentialen Basisvektoren $\partial_{u_k} \alpha(\gamma(t))$. \square

Folgerung 93 (Existenz von Geodäten). *Für jedes $p \in M$ und jedes $v \in T_p M$ existiert eine Geodäte $\beta : I \rightarrow M$ mit $\beta(0) = p$ und $\dot{\beta}(0) = v$. Diese ist auch eindeutig in dem folgenden Sinne: Ist $\tilde{\beta} : \tilde{I} \rightarrow M$ eine weitere Kurve mit den gewünschten Eigenschaften, so gilt $\tilde{\beta}(t) = \beta(t)$ für alle $t \in I \cap \tilde{I}$.*

Beweis. Wir wählen zunächst lokale Koordinaten $\alpha : U \rightarrow M$ um p und ergänzen das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.70) um die Anfangsbedingungen

$$\gamma(0) = \alpha^{-1}(p), \quad \dot{\gamma}(0) = D\alpha^{-1}|_p v = (D\alpha|_u)^{-1} v$$

und die lokale Existenz und Fast-Eindeutigkeit einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ folgt nach dem Satz von Picard-Lindelöf (beachte, dass die rechte Seite in (2.70) stetig differenzierbar und damit auch lokal Lipschitz-stetig bzgl. $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ ist). \square

Bemerkung.

1. Analog zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man für jedes $p \in M$ und jedes $v \in T_p M$ die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Geodäte zeigen.
2. Ist β eine Geodäte, so ist auch $\tilde{\beta}(t) = \beta(ct)$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Geodäte.

3. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt: Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine offene Menge $B \in T_p M$ sowie eine offene Menge $V \in \mathbb{R}^3$, so dass die Abbildung

$$v \in B \mapsto \beta_{p,v}(1) \in V \cap M$$

ein Diffeomorphismus ist, wobei $\beta_{p,v}$ die Geodäte mit $\beta_{p,v}(0) = p$ und $\dot{\beta}_{p,v}(0) = v$ bezeichnet. Die so konstruierte Abbildung wird auch die Exponentialabbildung oder geodätischer Fluss genannt und man schreibt $\exp_p(v) = \beta_{p,v}(1)$

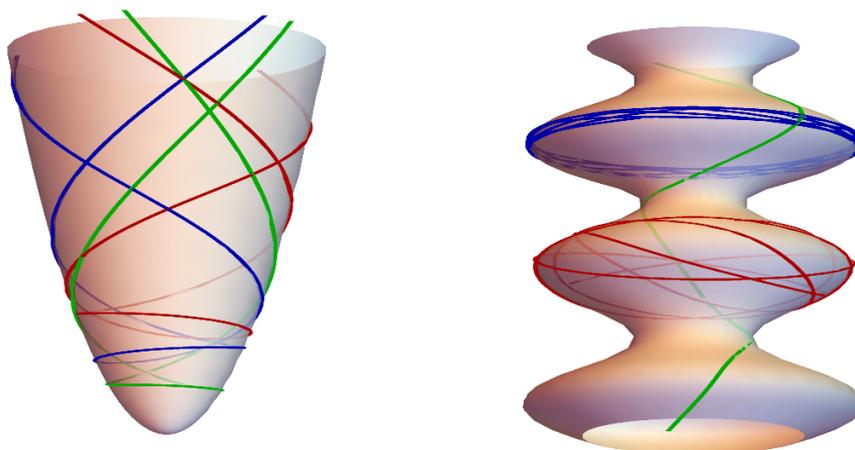


Abbildung 2.13: Zwei Rotationsflächen mit je drei verschiedenfarbigen Geodäten, die als numerischer Lösungen von (2.71)+ (2.72) berechnet wurden.

Wir wollen als Beispiel die Geodäten der Rotationsfläche

$$\alpha(u_1, u_2) = (\xi(u_1), r(u_1) \cos(u_2), r(u_1) \sin(u_2)), \quad (u_1, u_2) \in J \times \mathbb{R}$$

mit Meridiankurve $J \ni u_1 \mapsto (\xi(u_1), r(u_1)) \in \mathbb{R}^2$ charakterisieren und berechnen zunächst (siehe Übungsaufgabe)

$$\Gamma_{11}^1(u) = \frac{\xi'(u_1)\xi''(u_1) + r'(u_1)r''(u_1)}{(\xi'(u_1))^2 + (r'(u_1))^2}, \quad \Gamma_{11}^2(u) = 0$$

sowie

$$\Gamma_{12}^1(u) = \Gamma_{21}^1(u) = 0, \quad \Gamma_{12}^2(u) = \Gamma_{21}^2(u) = \frac{r(u_1)r'(u_1)}{r^2(u_1)}$$

und

$$\Gamma_{22}^1(u) = -\frac{r(u_1)r'(u_1)}{(\xi'(u_1))^2 + (r'(u_1))^2}, \quad \Gamma_{22}^2(u) = 0.$$

Die Geodätengleichung für $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus Lemma 92 kann nun als

$$\ddot{\gamma}_1(t) + \Gamma_{11}^1(\gamma(t))\dot{\gamma}_1^2(t) + \Gamma_{22}^1(\gamma(t))\dot{\gamma}_2^2(t) = 0 \quad (2.71)$$

und

$$\ddot{\gamma}_2(t) + 2\Gamma_{12}^2(\gamma(t))\dot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) = 0 \quad (2.72)$$

geschrieben werden. Dies ist ein nichtlineares Differentialgleichungssystem und die Lösungen mit vorgegebenen Anfangsdaten können im Allgemeinen nicht explizit, sondern nur numerisch berechnet werden (siehe auch Abbildung 2.13).

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass die Meridiankurve nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h.

$$(\xi'(u_1))^2 + (r'(u_1))^2 = 1 \quad \text{für alle } u_1 \in J,$$

so gilt

$$\Gamma_{11}^1(u_1) = \frac{1}{2} \frac{d}{du_1} ((\xi'(u_1))^2 + (r'(u_1))^2) = 0.$$

Insbesondere ist dann für jedes feste (u_1, u_2) die Kurve

$$\gamma(t) = (u_1 + t, u_2)$$

eine Lösung von (2.71) + (2.72), die der gedrehten Meridiankurve

$$\beta(t) = \alpha(\gamma(t)) = (\xi(u_1 + t), r(u_1 + t) \cos(u_2), r(u_1 + t) \sin(u_2))$$

entspricht, wobei $\beta(0) = (u_1, u_2)$. Die Kurve

$$\gamma(t) = (u_1, u_2 + t)$$

ist genau dann ein Lösung der Geodätengleichung (Nachrechnen), wenn $\dot{r}(u_1) = 0$. Insgesamt schließen wir mit Folgerung 93, dass es im Allgemeinen noch weitere Geodäten gibt, für die aber weder $\gamma_1(t) = \text{const}$ noch $\gamma_2(t) = \text{const}$ gilt.

Um die allgemeine Form einer Geodäten auf Rotationsflächen mit nach Bogenlänge parametrisierter Meridiankurve zu bestimmen bemerken wir, dass (2.71) die sogenannte Clairaut-Relation⁴¹

$$r^2(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_2(t) = \text{const} = c,$$

impliziert. Kombinieren wir dies mit

$$1 = \langle \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle = \left((\xi'(\gamma_1(t)))^2 + (r'(\gamma_1(t)))^2 \right) \dot{\gamma}_1^2(t) + (r(\gamma_1(t)))^2 \dot{\gamma}_2^2(t)$$

erhalten wir

$$\left(\frac{\dot{\gamma}_1(t)}{\dot{\gamma}_2(t)} \right)^2 \left((\xi'(\gamma_1(t)))^2 + (r'(\gamma_1(t)))^2 \right) = \frac{r^2(\gamma_1(t))}{c^2} (r^2(\gamma_1(t)) - c^2).$$

Insbesondere gilt

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{r(u_1)}{c} \sqrt{\frac{r^2(u_1) - c^2}{(\xi'(u_1))^2 + (r'(u_1))^2}}$$

entlang einer jeden Geodäten für eine gewisse Konstante c , und dies kann auch als

$$u_2 = c \int \frac{1}{r(u_1)} \sqrt{\frac{(\xi'(u_1))^2 + (r'(u_1))^2}{r^2(u_1) - c^2}} du_1 + \text{const}$$

formuliert werden. Allerdings kann dieses Integral in den meisten Fällen nicht explizit berechnet werden.

⁴¹Alexis-Claude Clairaut (1713–1765), französischer Mathematiker.

Satz 94 (Geodäten und Minimierer der Länge). *Seien p und q zwei verschiedene Punkte in M und sei β_* eine kürzeste Verbindung von p und q in M , d.h. eine Kurve aus der Menge*

$$\mathcal{C}_{p,q} := \left\{ \text{reguläre Kurve } \beta : [a, b] \rightarrow M \text{ mit } \beta(a) = p \text{ und } \beta(b) = q \right\}$$

mit $\text{len}(\beta_*) \leq \text{len}(\beta)$ für alle $\beta \in \mathcal{C}_{p,q}$. Dann ist β eine Geodäte.

Beweis. O.b.D.A können wir annehmen, dass β_* nach Bogenlänge und auf dem Intervall $[0, L]$ parametrisiert ist.

Herleitung der Optimalitätsbedingung: Wir betrachten nun zunächst eine stetig differenzierbare Familie von Kurven aus \mathcal{C} , das heißt eine Abbildung $\beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, L] \rightarrow M$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. die Ableitungen

$$\partial_\tau \beta, \quad \partial_t \beta, \quad \partial_\tau \partial_t \beta = \partial_t \partial_\tau \beta$$

existieren als stetige Funktionen auf $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, L]$,

2. für jedes feste $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gehört die Kurve β_τ mit $\beta_\tau(t) = \beta(\tau, t)$ zu $\mathcal{C}_{p,q}$,
3. es gilt $\beta(0, t) = \beta_*(t)$ für alle $t \in [0, L]$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \text{len}(\beta_\tau) &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \int_0^L \sqrt{\langle \partial_t \beta(\tau, t), \partial_t \beta(\tau, t) \rangle} dt \\ &= \int_0^L \frac{\langle \partial_\tau \partial_t \beta(0, t), \partial_t \beta(0, t) \rangle}{\sqrt{\langle \partial_t \beta(0, t), \partial_t \beta(0, t) \rangle}} dt \\ &= \int_0^L \langle \partial_t \partial_\tau \beta(0, t), \partial_t \beta(0, t) \rangle dt, \end{aligned}$$

wobei wir $|\partial_t \beta(0, t)| = 1$ benutzt haben. Nach partieller Integration bzgl. t und weil

$$\partial_\tau \beta(\tau, 0) = 0 = \partial_\tau \beta(\tau, L)$$

wegen $\beta_\tau \in \mathcal{C}_{p,q}$ gilt, erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \text{len}(\beta_\tau) = - \int_0^L \langle \partial_\tau \beta(0, t), \partial_t^2 \beta(0, t) \rangle dt = - \int_0^L \langle \partial_\tau \beta(0, t), \nabla_{\dot{\beta}_*(t)} \dot{\beta}_*(t) \rangle dt$$

wobei wir außerdem $\partial_\tau \beta(0, t) \in T_p M$ benutzt haben. Andererseits gilt

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \text{len}(\beta_\tau) = 0$$

nach Voraussetzung an β_* . Wir wollen nun mit Hilfe dieser Darstellung zeigen, dass $\nabla_{\dot{\beta}_*(t)} \dot{\beta}_*(t) = 0$ für alle $t \in [0, L]$ gilt.

Auswertung der Optimalitätsbedingung: ... □

Wir bemerken, dass die Umkehrung von Satz 94 im Allgemeinen falsch ist. Das Standardgegenbeispiel sind zwei nicht-antipodale Punkte p und q auf einer Sphäre, für die es immer einen eindeutigen Großkreis gibt, der durch beide Punkte verläuft und durch die Punkte in zwei Segmente wie im Satz 94 zerteilt wird. Jedes dieser Großkreissegmente ist eine Geodäte, aber nur ein Segment ist der Minimierer der Länge im Sinne von Satz 94.

Wir bemerken außerdem, dass ein Minimierer β_* nicht immer existieren muss.

Lemma 95 (Paralleltransport entlang von Kurven). *Seien $\beta : I \rightarrow M$ eine reguläre Kurve und $t_* \in I$ sowie $v_* \in T_{\beta(t_*)}M$ gegeben. Dann existiert ein eindeutiges tangentes Vektorfeld V entlang von β , so dass*

$$\nabla_{\dot{\beta}(t)} V(\beta(t)) = 0$$

für alle $t \in I$ sowie $V(\beta(t_*)) = v_*$.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass β nach Bogenlänge parametrisiert ist, und konstruieren das Vektorfeld entlang der Kurve durch den Darboux-Ansatz

$$V(\beta(s)) = f(s)\beta'(s) + g(s)\nu(\beta(s)) \times \beta'(s),$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten-Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Die Kettenregel impliziert

$$\begin{aligned} D_{\beta'(s)} V(\beta(s)) &= \frac{d}{ds} V(\beta(s)) \\ &= f'(s)\beta'(s) + g'(s)\nu(\beta(s)) \times \beta'(s) + f(s)\sigma(s) + g(s)\rho(s), \end{aligned} \quad (2.73)$$

wobei

$$\sigma(s) := \beta''(s), \quad \rho(s) := -(L_{\beta(s)}\beta'(s)) \times \beta'(s) + \nu(\beta(s)) \times \beta''(s)$$

bekannte Vektorfelder entlang der Kurve β sind. Insbesondere verschwindet der tangente Anteil von $D_{\beta'(s)} V(\beta(s))$ genau dann, wenn sowohl

$$f'(s) + f(s)\langle \sigma(s), \beta'(s) \rangle + g(s)\langle \rho(s), \beta'(s) \rangle = 0$$

als auch

$$g'(s) + f(s)\langle \sigma(s), \nu(\beta(s)) \times \beta'(s) \rangle + g(s)\langle \rho(s), \nu(\beta(s)) \times \beta'(s) \rangle = 0$$

gilt, wobei wir bei der Herleitung dieser Gleichungen das Skalarprodukt der rechten Seite in (2.73) mit $\beta'(s)$ bzw. mit $\nu(\beta(s)) \times \beta'(s)$ ausgewertet haben. Dies sind zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen für f und g , wobei die Anfangsdaten $f(t_*)$ und $g(t_*)$ eindeutig aus v_* berechnet werden können. Insbesondere existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems. Weil außerdem die Gleichungen linear in f und g sind, existiert die maximale Lösung auch auf ganz I . \square

Lemma 96. *Seien V und W zwei tangente Vektorfelder, die parallel entlang einer Kurve $\beta : I \rightarrow M$ sind. Dann gilt*

$$\langle V(\beta(t)), W(\beta(t)) \rangle = \langle V(\beta(t_*)), W(\beta(t_*)) \rangle$$

für alle $t, t_* \in I$.

Beweis. Wir berechnen

$$\frac{d}{dt} \langle V(\beta(t)), W(\beta(t)) \rangle = \langle D_{\dot{\beta}(t)} V(\beta(t)), W(\beta(t)) \rangle + \langle V(\beta(t)), D_{\dot{\beta}(t)} W(\beta(t)) \rangle$$

und die Tangentialität von V und W impliziert

$$\frac{d}{dt} \langle V(\beta(t)), W(\beta(t)) \rangle = \langle \nabla_{\dot{\beta}(t)} V(\beta(t)), W(\beta(t)) \rangle + \langle V(\beta(t)), \nabla_{\dot{\beta}(t)} W(\beta(t)) \rangle.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar. \square

Bemerkung.

1. Entlang einer Geodäte ist das Darboux'sche tangentielle Zweibein

$$\dot{\beta}(t), \quad \nu(\beta(t)) \times \dot{\beta}(t)$$

immer parallel und der Paralleltransport ist simpel: Ist V irgendein paralleles und tangentiales Vektorfeld entlang der gegebenen Geodäte, so sind die Koeffizienten der Basis-Entwicklung bzgl. des Darboux-Beines konstant und umgekehrt.

2. Ist M eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , so gilt $V(\beta(t)) = v_*$.
3. Analog zum Beweis von Lemma 92 und Lemma 95 kann man zeigen, dass Paralleltransport ein Konzept der inneren Geometrie ist. Insbesondere kann man mittels des Ansatzes

$$\beta = \alpha \circ \gamma \quad V(\beta(t)) = v_1(t) \partial_{u_1} \alpha(\gamma(t)) + v_2(t) \partial_{u_2} \alpha(\gamma(t))$$

Differentialgleichungen für v_1 und v_2 herleiten, in denen die Ableitungen von γ sowie die Christoffel-Symbole längs von γ auftauchen (Übungsaufgabe).

4. Ist $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ eine Isometrie, so ist V genau dann parallel zu β , wenn $\tilde{V} = D\phi \circ V$ parallel zu $\tilde{\beta} = \phi \circ \beta$ ist.
5. Sind die Flächen M und \tilde{M} tangential an die Kurve β , d.h. gilt $T_{\beta(t)} M = T_{\beta(t)} \tilde{M}$ für alle $t \in I$, so ist der Paralleltransport entlang von β bzgl. M der Paralleltransport entlang von β bzgl. \tilde{M} . Anwendung: Kegel und Sphäre

2.3.6 Satz von Gauß-Bonnet

Theorem 97 (Satz von Gauß-Bonnet, lokale Variante). Sei $\alpha : U \rightarrow M$ ein injektives parametrisiertes Flächenstück und $\Omega \subset U$ eine offene Menge sowie $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve mit den folgenden Eigenschaften:

1. γ ist stetig und einfach geschlossen.
2. es gilt $\bar{\Omega} \subset U$ und $\text{sp } \gamma = \partial\Omega$, wobei Ω auf der linken Seite von $\text{sp } \gamma$ liegt,
3. es gibt eine Zerlegung

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_M = b,$$

so dass $\gamma|_{[t_{m-1}, t_m]}$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve in U ist,

4. an jeder Stelle t_m existieren die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte von $\dot{\gamma}(t_m)$.

Dann gilt

$$\int_{\alpha(\Omega)} K \, dA + \int_{\beta} \kappa_{\text{geod}} \, ds + \sum_{m=1}^M \alpha_m = 2\pi$$

für $\beta = \alpha \circ \gamma$, wobei

$$\alpha_m = \sphericalangle(\dot{\beta}(t_m + 0), \dot{\beta}(t_m - 0)) \in (-\pi, +\pi)$$

der signierte Außenwinkel an der Knickstelle t_m ist und $\dot{\beta}(t_M + 0) = \dot{\beta}(t_0 + 0)$ vereinbart sei.

Bemerkung. Die globale Variante impliziert für eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, dass

$$\int_M K \, dA = 2\pi\chi(M),$$

wobei χ die Euler-Charakteristik ist.