



Prof. Dr. Michael Herrmann  
Technische Universität Braunschweig  
Mathematik – Institut iPDE  
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

*Skript der Vorlesung*  
***Funktionentheorie***  
*im Sommersemester 2023*

Version vom 3. Juli 2023

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



## Griechisches Alphabet

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
$\alpha$	$A$	alpha	a
$\beta$	$B$	beta	b
$\gamma$	$\Gamma$	gamma	g
$\delta$	$\Delta$	delta	d
$\varepsilon, \epsilon$	$E$	epsilon	ě
$\zeta$	$Z$	zeta	z
$\eta$	$H$	eta	ē
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	theta	th
$\iota$	$I$	iota	i
$\kappa$	$K$	kappa	k
$\lambda$	$\Lambda$	lambda	l
$\mu$	$M$	my	m

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
$\nu$	$N$	ny	n
$\xi$	$\Xi$	xi	x
$o$	$O$	omikron	ö
$\pi$	$\Pi$	pi	p
$\varrho, \rho$	$P$	rho	r
$\sigma$	$\Sigma$	sigma	s
$\tau$	$T$	tau	t
$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon	y
$\varphi, \phi$	$\Phi$	phi	ph, f
$\chi$	$X$	chi	ch
$\psi$	$\Psi$	psi	ps
$\omega$	$\Omega$	omega	ō

## Literatur

Es gibt viele sehr gute Lehrbücher zur Funktionentheorie, zum Beispiel:

- [FL] W. FISCHER, I. LIEB: *Funktionentheorie*, Vieweg 2005
- [FB] E. FREITAG, R. BUSAM: *Complex Analysis*, Springer 2005
- [F] KL. FRITSCHKE: *Grundkurs Funktionentheorie*, Springer 2019
- [J] K. JÄNICH: *Funktionentheorie*, Springer 2004
- [P] H.A. PRIESTLEY: *Introduction to Complex Analysis*, Oxford UP 2003
- [RS] R. REMMERT, G. SCHUMACHER: *Funktionentheorie 1*, Springer 2002

Die wesentlichen Definitionen, Theoreme und Beispiele können auch in enzyklopädischen Werken gefunden werden:

- [ABHKLS] T. ARENS, R. BUSAM, FR. HETTLICH, CH. KARPFINGER, KL. LICHTENEGGER, H. STACHEL: *Mathematik*. Springer Spektrum 2015

## Anmerkungen

Bei der Ausarbeitung dieses Skriptes hat der Autor die gelisteten Werke regelmäßig konsultiert und dabei viele Beweisstrategien, Präsentationsideen und Beispiele übernommen. Er hat außerdem viele eigene Ausarbeitungen zu früheren Vorlesungen verwendet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1	Wiederholung zu komplexen Zahlen . . . . .	5
1.2	Komplexe Funktionen . . . . .	10
1.3	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	17
1.4	Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann . . . . .	22
1.5	Potenzreihen . . . . .	29
1.6	Laurent-Reihen . . . . .	35
1.7	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	39
1.8	Windungszahlen . . . . .	48
1.9	Erweiterte Zahlenebene und Kreisgeraden . . . . .	55
1.10	Möbius-Transformationen . . . . .	61
1.11	Konforme und biholomorphe Funktionen . . . . .	71
1.12	Zwei Anwendungen . . . . .	76
1.13	Komplexe Logarithmen und Potenzen . . . . .	85
<b>2</b>	<b>Integralsatz von Cauchy und Folgerungen</b>	<b>99</b>
2.1	Integralsatz und Integralformel von Cauchy . . . . .	99
2.2	Folgerungen aus Satz und Formel von Cauchy . . . . .	111
2.3	Weitere Folgerungen . . . . .	116
2.4	Nullstellen holomorpher Funktionen . . . . .	127
2.5	Isolierte Singularitäten und Polstellen . . . . .	132
2.6	Residuensatz . . . . .	141
2.7	Integralberechnung mit Residuen . . . . .	149
2.8	Argumentprinzip . . . . .	161





# Kapitel 1

## Grundlagen

*Vorbemerkung* In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit Funktionen in einer komplexen Variablen sowie mit ihren geometrischen und analytischen Eigenschaften. Im Deutschen wird dieses Teilgebiet der Mathematik aus historischen Gründen als *Funktionentheorie* bezeichnet, obwohl *Komplexe Analysis* viel treffender ist und auch in der angelsächsischen Welt verwendet wird.

### 1.1 Wiederholung zu komplexen Zahlen

Selbststudium

---

**vorausgesetztes Basiswissen** In den nächsten Kapiteln werden wir die folgenden Konzepte und Resultate aus *Analysis 1* benutzen:

1. Die Komplexen Zahlen mit den vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sowie den elementaren Operationen (Betrag, konjugiert komplexe Zahl usw.)
2. Darstellung komplexer Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  durch kartesische Koordinaten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  via<sup>1</sup>

$$z = x + i y \quad \text{mit} \quad x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

bzw. durch Polarkoordinaten mit Radius  $r > 0$  und Winkel (oder Argument)  $\varphi \in \mathbb{R}$  via

$$z = r \exp(i \varphi) = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad \text{mit} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg(z).$$

Beachte, dass der Winkel  $\varphi$  nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  festgelegt ist und nach Fallunterscheidung mithilfe von inversen trigonometrischen Funktionen berechnet wird (siehe unten).

3. Konvergenz von komplexen Zahlenfolgen und der entsprechenden Reihen.
4. Fundamentalsatz der Algebra über die Nullstellen komplexer Polynome sowie das Verfahren der Polynomdivision.
5. Komplexe Potenzreihen und Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius.

---

<sup>1</sup>Wir schreiben manchmal auch  $\zeta = \xi + i v$  für komplexe Zahlen, wobei die drei hier auftretenden griechischen Buchstaben *Zeta*, *Xi* und *Upsilon* heißen und den lateinischen Buchstaben  $z$ ,  $x$  und  $y$  entsprechen.

**Topologie der komplexen Ebene**  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  sind mit den jeweiligen Abstands- bzw. Betragsdefinitionen offensichtlich äquivalent und wir können daher über *offene*, *abgeschlossene*, *kompakte* und *zusammenhängende* Teilmengen von  $\mathbb{C}$  reden. Wir schreiben

$$B_\varrho(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < \varrho\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{B}_\varrho(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| \leq \varrho\}$$

für die offene bzw. die abgeschlossene Kreisscheibe von Radius  $\varrho$  um den Mittelpunkt  $\zeta \in \mathbb{C}$  und bezeichnen die entsprechende Kreislinie mit

$$S_\varrho(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| = \varrho\}.$$

Eine wichtige Rolle wird auch die punktierte offene Kreisscheibe

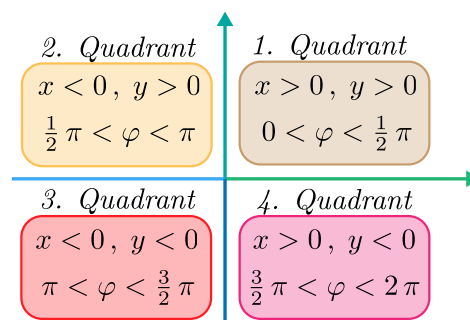
$$\dot{B}_\varrho(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \zeta| < \varrho\}$$

spielen.

**Formelsatz für den Polarwinkel** Für jede komplexe Zahl kann der entsprechende Winkel mithilfe des Arkustangens via

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 0, y = 0 \\ \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0, y > 0 & (1. \text{ Quadrant}) \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x < 0, y > 0 & (2. \text{ Quadrant}) \\ \pi & \text{falls } x < 0, y = 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x < 0, y < 0 & (3. \text{ Quadrant}) \\ 3\pi/2 & \text{falls } x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0, y < 0 & (4. \text{ Quadrant}) \end{cases}$$

berechnet werden, wobei diese Formeln immer einen Winkel  $0 \leq \varphi < 2\pi$  liefern. Es gibt aber auch andere Formelsätze.



**Abbildung** Die vier Quadranten in der komplexen Zahlenebene, wobei sich die Winkelbereiche auf Werte zwischen 0 und  $2\pi$  beziehen.

**Euler-Formel und trigonometrische Funktionen** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

gemäß der Definitionen von  $\exp$ ,  $\cos$ , und  $\sin$ . Diese sind durch die folgenden Reihen gegeben

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7 + \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \dots$$

die in jedem  $z \in \mathbb{R}$  absolut konvergieren.

**über komplexe Wurzeln** Die Gleichung

$$z^n = \zeta$$

besitzt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und gegebenes  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  genau  $n$  verschiedene komplexe Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  und wir hatten in *Analysis 1* schon gesehen, dass man diese mit Hilfe der Polardarstellung

$$\zeta = |\zeta| \exp(i \arg(\zeta))$$

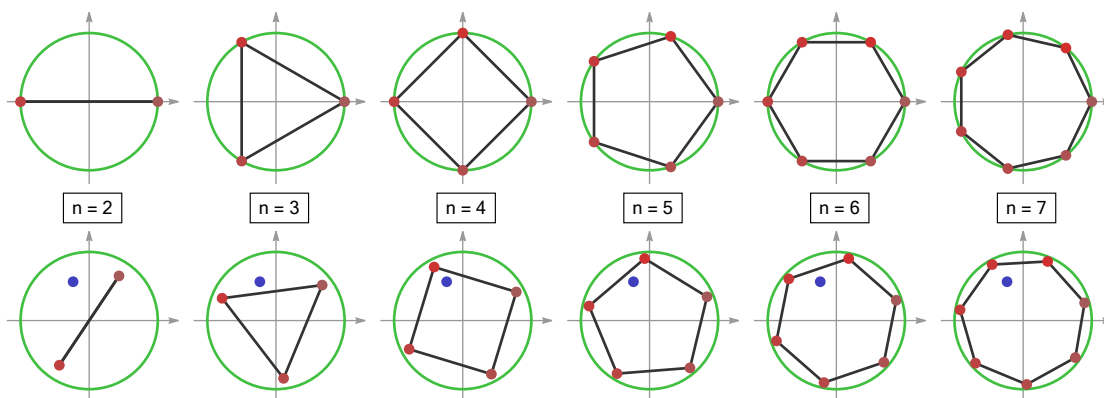
als

$$z_k = |\zeta|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta) + 2\pi k}{n}\right), \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

schreiben kann (alternativ kann man auch leicht nachrechnen, dass  $z_k^n = \zeta$  gilt). Jedes  $z_k$  wird (eine)  $n$ -te komplexe Wurzel von  $\zeta$  genannt und der Fundamentalsatz der Algebra (die wir weiter unten beweisen werden) garantiert die multiplikative Zerlegung

$$z^n - \zeta = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Im Spezialfall  $\zeta = 1$  mit  $\arg(\zeta) = 0$  erhalten wir die Einheitswurzeln, wobei dann  $z_n = 1$  gilt.



**Abbildung** Oben: Die  $n$ -ten komplexen Einheitswurzeln (rot) liegen auf der Einheitskreislinie (grün) und bilden die Ecken eines regulären  $n$ -Ecks (schwarz). Unten: Die  $n$ -ten Wurzeln eines Punktes  $\zeta \neq 1$  (blau) bilden ein gedrehtes und gestauchtes, aber immer noch reguläres  $n$ -Eck.

**Achtung** Sofern  $\zeta$  nicht gerade eine positive reelle Zahl ist, schreiben wir in dieser Vorlesung **niemals**

$$\sqrt[n]{\zeta} \quad \text{oder} \quad \zeta^{1/n},$$

obwohl andere Autoren dies durchaus tun. Der Grund ist, dass es nicht nur eine, sondern mehrere  $n$ -te Wurzeln von  $\zeta$  gibt, und dass es auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine sinnvolle Möglichkeit gibt, eine erste, letzte oder sonstwie ausgezeichnete Wurzel anzugeben (wir werden dies später noch genauer verstehen).

Die Ausnahme von der Regel ist der Fall  $\zeta \in \mathbb{R}$  mit  $\zeta > 0$ . In diesem Fall gibt es zwar auch  $n$  verschiedene komplexe Wurzeln, aber nur eine davon ist wieder eine positive reelle Zahl (nämlich  $z_n$  in der obigen Formel) und diese wird dann mit  $\sqrt[n]{\zeta}$  oder  $\zeta^{1/n}$  bezeichnet.

### Bemerkungen

1. Eine Sonderrolle spielt  $\zeta = 0$ , da dort wegen  $z_1 = \dots = z_n = 0$  alle  $n$ -ten Wurzeln zusammenfallen.
2. Die imaginäre Einheit  $i$  ist wegen  $i \cdot i = -1$  eine Quadratwurzel von  $-1$ , die andere ist  $-i$ . Wir schreiben in dieser Vorlesung **niemals**  $\sqrt{-1}$ , da damit ja  $i$  oder  $-i$  gemeint sein könnte.
3. Ein ähnliches Problem mit der Mehrdeutigkeit tritt beim komplexen Logarithmus auf, d.h. bei den komplexen Lösungen der Gleichung

$$\exp(z) = \zeta,$$

siehe die \*-Hausaufgabe bzw. die Diskussion weiter unten. Insbesondere werden wir im Fortgang dieser Vorlesung sehen, dass die Mehrdeutigkeit des Logarithmus, die Mehrdeutigkeit der  $n$ -ten Wurzeln und die Mehrdeutigkeit des komplexen Arguments (also des Polarwinkels) sehr viel miteinander zu tun haben.

4. Aus analogen Gründen benutzen wir in dieser Vorlesung keine nicht-ganzzahligen Potenzen von nicht-positiv-reellen Zahlen, d.h. wie schreiben **niemals**  $\zeta^{3/2}$ ,  $\zeta^\pi$  oder gar  $\zeta^i$ , wobei wir weiter unten die damit verbundenen Mehrdeutigkeiten noch genauer studieren werden. Beachte aber, dass für jede komplexe Zahl  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ihre *ganzzahligen Potenzen* via

$$\dots, \quad \zeta^{-2} = \frac{1}{\zeta \cdot \zeta}, \quad \zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta^0 = 1, \quad \zeta^1 = \zeta, \quad \zeta^2 = \zeta \cdot \zeta, \quad \dots$$

immer in eindeutiger Weise definiert sind.

**über komplexe Quadratwurzeln** Für jede Zahl  $\zeta = \xi + i v \neq 0$  können ihre zwei komplexen Quadratwurzeln, d.h. die Lösungen  $z = x + i y$  der Gleichung

$$z^2 = \zeta,$$

analog zu oben als

$$z_1 = \sqrt{|\zeta|} \exp\left(\frac{1}{2} i \arg(\zeta) + i \pi\right), \quad z_2 = \sqrt{|\zeta|} \exp\left(\frac{1}{2} i \arg(\zeta)\right)$$

oder alternativ als

$$z_{\pm} = \pm \left( \sqrt{+\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + v^2}} + i \operatorname{sgn}(v) \sqrt{-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + v^2}} \right)$$

geschrieben werden, wobei in beiden Formeln alle Terme unter den Wurzelsymbolen nichtnegative reelle Zahlen sind und  $\operatorname{sgn}(v) \in \{-1, 0, +1\}$  das Vorzeichen der reellen Zahl  $v$  bezeichnet. Die zweite Wurzelformel kann leicht durch eine Probe verifiziert werden oder alternativ aus

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy = \xi + iv$$

durch Koeffizientenvergleich und einfache Rechnungen im Reellen abgeleitet werden. Im Fall von  $v = 0$  und  $\xi > 0$  erhalten wir wegen  $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = \xi$  die bekannte Formel

$$z_{\pm} = \pm \left( \sqrt{\xi} + i0 \right),$$

wohingegen sich

$$z_{\pm} = \pm \left( 0 + i\sqrt{-\xi} \right)$$

für  $v = 0$  und  $\xi < 0$  ergibt, weil dann ja  $\sqrt{\xi^2} = |\xi| = -\xi$  gilt.

**über die komplexe  $p$ - $q$ -Formel** Wir können mit einer Variante der angegebenen Wurzelformeln die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{C}$  bestimmen, denn die quadratische Ergänzung

$$\left(z + \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q =: \zeta$$

zeigt, dass wir von jeder der oben angegebenen Wurzeln von  $\zeta$  jeweils noch  $\frac{1}{2}p$  abziehen müssen. Nichts anderes besagt die  $p$ - $q$ -Formel. Diese liefert aber keine (zumindest keine explizite) Vorschrift, wie die beiden Wurzeln der komplexen Zahl  $\zeta$  berechnet werden können, so dass die Wurzelformeln von oben ins Spiel kommen.

## 1.2 Komplexe Funktionen

**Setting** Wir betrachten Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf einer Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$  definiert sind, die Definitionsbereich oder Urbildbereich von  $f$  genannt wird. Für jede Teilmenge  $C \subseteq D$  ist

$$\tilde{C} := f(C) = \{f(z) : z \in C\}$$

das Bild von  $C$  unter  $f$  und

$$\tilde{D} := f(D) = \{f(z) : z \in D\}$$

wird Wertebereich oder Bildbereich von  $f$  genannt. Punkte im Bildbereich bezeichnen wir mit  $\tilde{z}$ , d.h. wir schreiben  $\tilde{z} = f(z)$ .

### Bemerkungen

1. Im Prinzip kann jede Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$  als Definitionsbereich zugelassen werden, aber wir werden oftmals annehmen, dass  $D$  offen und zusammenhängend ist. Dabei heißt  $D$  offen, wenn jeder Punkt  $z \in D$  ein innerer Punkt von  $D$ , d.h. wenn es zu jedem  $z \in D$  einen (kleinen) Radius  $\varepsilon > 0$  gibt, sodass die Kreisscheibe  $B_\varepsilon(z)$  ganz in  $D$  liegt. Darüber hinaus wird  $D$  zusammenhängend genannt, wenn je zwei Punkte in  $D$  durch einen stetigen Weg verbunden werden können, der ganz in  $D$  verläuft. Diese Begriffsbildungen hatten wir schon in *Analysis 2* mit  $\mathbb{R}^2$  anstelle von  $\mathbb{C}$  eingeführt.
2. Wir werden später diskutieren, ob und wie Funktionen auf dem *unendlich fernen Punkt* definiert werden können.

### Beispiele

1. Polynome

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

mit gegebenen Koeffizienten  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$  sind komplexe Funktionen mit Definitionsbereich  $D = \mathbb{C}$ , wobei wir üblicherweise  $a_n \neq 0$  fordern (wobei  $n \in \mathbb{N}$  dann der Grad des Polynoms ist). Ein Spezialfall sind affine Funktionen

$$f(z) = a_1 z + a_0,$$

die den Grad 1 (für  $a_1 \neq 0$ ) oder den Grad 0 besitzen ( $a_1 = 0$ ). die entsprechende affine Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben.

2. Ein gebrochen-rationale Funktion der Bauart

$$f(z) = \frac{a z + b}{c z + d}$$

wird Möbius-Transformation genannt und wir werden solche Funktionen weiter unten genauer studieren, da sie sehr bemerkenswerte Eigenschaften aufweisen.

Üblicherweise fordern wir, dass die komplexen Parameter  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  der Bedingung  $ad - bc \neq 0$  genügen und der Definitionsbereich von  $f$  ist durch

$$D = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad \text{für } c \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad D = \mathbb{C} \quad \text{für } c = 0$$

gegeben. Der Spezialfall

$$f(z) = \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}$$

mit  $D = \mathbb{C} \setminus \{-\mathbf{i}\}$  wird Caley-Transformation genannt (siehe das Bild).

**reelle Entsprechung als Transformation der Ebene** Zu jeder komplexen Funktion  $f$  in der Variablen  $z$  gibt es zwei reelle Funktionen  $u$  und  $v$  in den Variablen  $x$  und  $y$ , sodass

$$f(z) = u(x, y) + \mathbf{i} v(x, y)$$

für alle  $z = x + \mathbf{i} y \in D$  gilt. Beachte, dass die Funktionen  $u$  und  $v$  Werte in  $\mathbb{R}$  annehmen und auch auf  $D$  definiert sind, sofern diese als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  (und nicht als Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ) betrachtet wird. Man kann  $u$  bzw.  $v$  als den Real- bzw. Imaginärteil von  $f$  interpretieren und schreibt oftmals auch

$$u = \operatorname{Re}(f), \quad v = \operatorname{Im}(f).$$

Mit Hilfe der Notationen

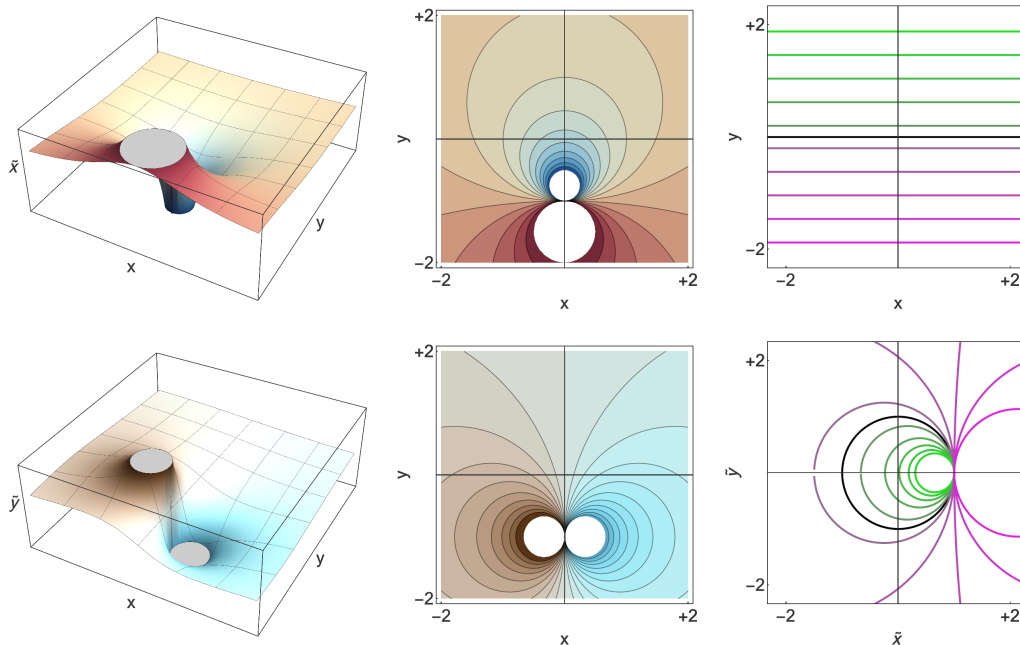
$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{z} = \tilde{x} + \mathbf{i} \tilde{y}, \quad z = x + \mathbf{i} y$$

wird außerdem klar, dass jede komplexe Funktion  $f$  auch als Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

betrachtet werden kann, wobei die Funktionen  $u$  und  $v$  angeben, wie die kartesischen Koordinaten im Bildbereich (also  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ ) aus den kartesischen Koordinaten im Urbildbereich (das sind  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) berechnet werden können. Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir diese Abbildung die reelle Entsprechung von  $f$  nennen. Sie beschreibt eine Transformation der Ebene und stellt den Schlüssel zum geometrischen Verständnis sehr vieler Resultate über komplexe Funktionen dar.

**Visualisierung komplexer Funktionen** Wir können eine komplexe Funktion  $f$  zum Beispiel dadurch graphisch darstellen, dass wir die Funktionen  $u$  und  $v$  in einem Flächen- oder Konturplot zeichnen bzw. vom Computer ausgeben lassen. Alternativ können wir auch für ausgewählte Mengen  $C \subseteq D$  (zum Beispiel Kreisgeraden oder andere Kurven) die entsprechende Bildmenge  $\tilde{C} = f(C)$  darstellen, wobei das Bild einer Kurve meist wieder eine Kurve ist (jedenfalls dann, wenn  $f$  differenzierbar ist).



**Abbildung** Drei graphische Darstellungen der Cayley-Transformation mit Polstelle  $z = -i$ . *Links:* Die Graphen von  $u = \operatorname{Re}(f)$  (oben) und  $v = \operatorname{Im}(f)$  (unten) als Flächen. *Mitte:* Die entsprechenden Konturplots mit grauen Konturlinien. *Rechts:* Oben sind verschiedene Geraden im Urbildbereich und unten die entsprechenden Kurven im Bildbereich gezeichnet. Beachte, dass links und in der Mitte Werte in der Nähe der Polstelle mit einem zu großen Absolutbetrag nicht dargestellt wurden.

**lineare Funktionen** Wir betrachten die Multiplikation mit  $\gamma = \alpha + i\beta$  bzw. die entsprechende lineare Abbildung  $f(z) = \gamma z$ , die  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  abbildet. Mit der obigen Notation können wir die entsprechende Transformation als

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_\gamma := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ +\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

schreiben, d.h. die komplexe Multiplikation mit  $\gamma \in \mathbb{C}$  entspricht im Reellen der Multiplikation mit der  $(2, 2)$ -Matrix  $\mathbf{R}_\gamma$ , wobei letzteres als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  betrachtet werden kann (die den Punkt  $(x, y)$  auf  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  abbildet). Gilt darüber hinaus die Polardarstellung  $\gamma = \varrho \exp(i\theta)$ , so erhalten wir

$$\mathbf{R}_\gamma := \varrho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ +\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

d.h.  $\mathbf{R}_\gamma$  ist für  $\gamma \neq 0$  eine Drehstreckung und vereint die Drehung um den Winkel  $\theta = \arg(\gamma)$  mit einer Streckung um den Faktor  $\varrho = |\gamma|$ . Im Entartungsfall  $\gamma = 0$  ist  $\mathbf{R}_\gamma$  jedoch die Nullmatrix.

**Beobachtung** Ganz allgemein können wir sagen: Die Multiplikation mit einer reellen  $(2, 2)$ -Matrix  $\mathbf{M}$  entspricht genau dann der Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn die Diagonaleinträge von  $\mathbf{M}$  identisch sind und die Nebendiagonaleinträge sich im Vorzeichen unterscheiden, wobei dann der Real- und Imaginärteil des komplexen Faktors einfach in der ersten Spalte abgelesen werden können.

Bemerkung: Es ist sehr wichtig, dass Sie diese fundamentale Aussage verstehen und reproduzieren können.



**quadratische Funktionen** Die durch

$$f(z) = a z^2 + b z + c$$

definierte Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  wird quadratisch genannt, wobei  $a, b, c \in \mathbb{C}$  gegebene Parameter sind und üblicherweise  $a \neq 0$  gefordert wird, da es sich sonst um eine affine Funktion handelt. Um die Geometrie dieser Abbildung zu verstehen, wollen wir nun den Standardfall, nämlich  $a = 1, b = c = 0$  betrachten, wobei der allgemeine Fall durch analoge Rechnungen studiert werden kann. Alternativ kann man auch Kompositionsargumente benutzen, denn jede quadratische Funktion kann via

$$f(z) = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right)$$

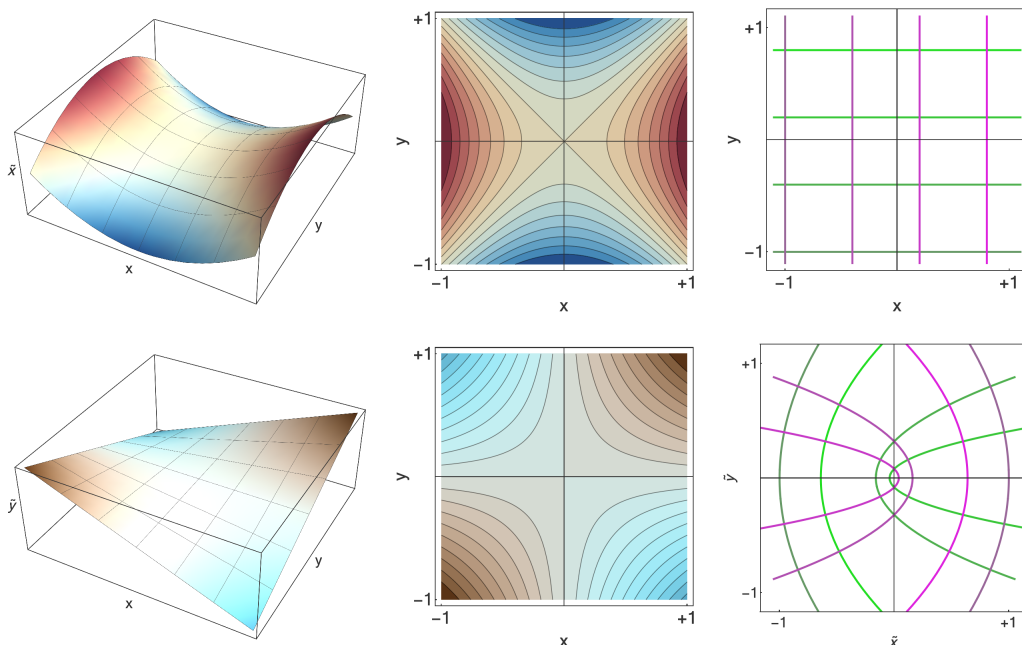
als Hintereinanderausführung einer Verschiebung, der quadratischen Standardfunktion sowie einer Drehstreckung und einer weiteren Verschiebung betrachtet werden. Die reelle Entsprechung der quadratischen Standardfunktion ist

$$\tilde{x} = u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \tilde{y} = v(x, y) = 2xy$$

und wir schließen mit einfachen Umformungen, dass die Funktion  $f$  (bzw. ihr reelles Gegenstück)

1. die horizontale Achse  $y = 0$  auf die horizontale Halbachse  $\tilde{y} = 0$  mit  $\tilde{x} \geq 0$
2. die vertikale Achse  $x = 0$  auf die horizontale Halbachse  $\tilde{y} = 0$  mit  $\tilde{x} \leq 0$
3. für jedes feste  $y_* \neq 0$  die horizontale Gerade  $y = y_*$  auf die sich nach rechts öffnende Parabel  $\tilde{y}^2 = 4y_*^2 \tilde{x} + 4y_*^4$
4. für jedes feste  $x_* \neq 0$  die vertikale Gerade  $x = x_*$  auf die sich nach links öffnende Parabel  $\tilde{y}^2 = 4x_*^4 - 4x_*^2 \tilde{x}$

abbildet (siehe das Bild), wobei immer entweder  $x$  oder  $y$  als freie Variable (bzw. als Kurvenparameter) betrachtet wurde. Ganz allgemein gilt: Eine quadratische Funktion bildet Geraden auf Parabeln oder Halbgeraden ab, wobei eine Halbgerade auch als entartete Parabel mit unendlich großer Krümmung angesehen werden kann.



**Abbildung** Die quadratische Standardfunktion  $f(z) = z^2$ .

## Exponentialfunktion

Mittels der Euler-Formel sowie des Ansatzes

$$\tilde{x} + i \tilde{y} = \exp(x + i y)$$

erhalten wir

$$\tilde{x} = u(x, y) = \exp(x) \cos(y), \quad \tilde{y} = v(x, y) = \exp(x) \sin(y)$$

für die reelle Entsprechung von  $f(z) = \exp(z)$ , wobei  $(x, y)$  bzw.  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  wieder die kartesischen Koordinaten im Urbild- bzw. im Bildbereich bezeichnen. Mit einfachen Umformungen können wir für jedes festgehaltene  $x_*$  bzw.  $y_*$  zeigen,

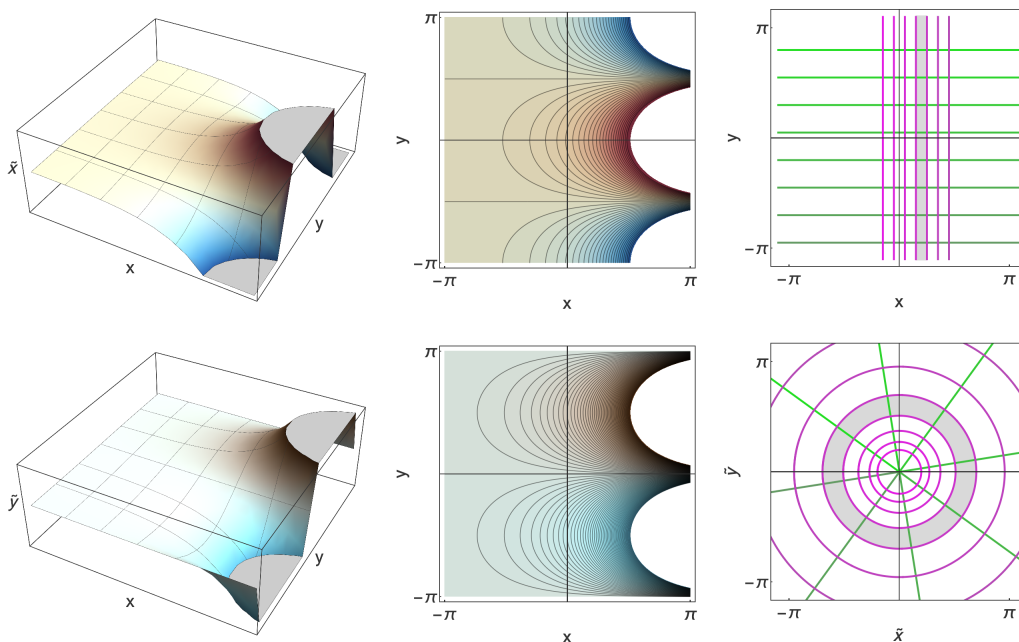
1. dass die vertikale Gerade  $x = x_*$  auf den Kreis mit Radius  $\exp(x_*)$  um den Ursprung abgebildet wird, d.h. dass  $\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} = \exp(x_*)$  gilt, und
2. dass die horizontale Gerade  $y = y_*$  auf die Halbgerade

$$\tilde{x} = r \cos(y_*), \quad \tilde{y} = r \sin(y_*)$$

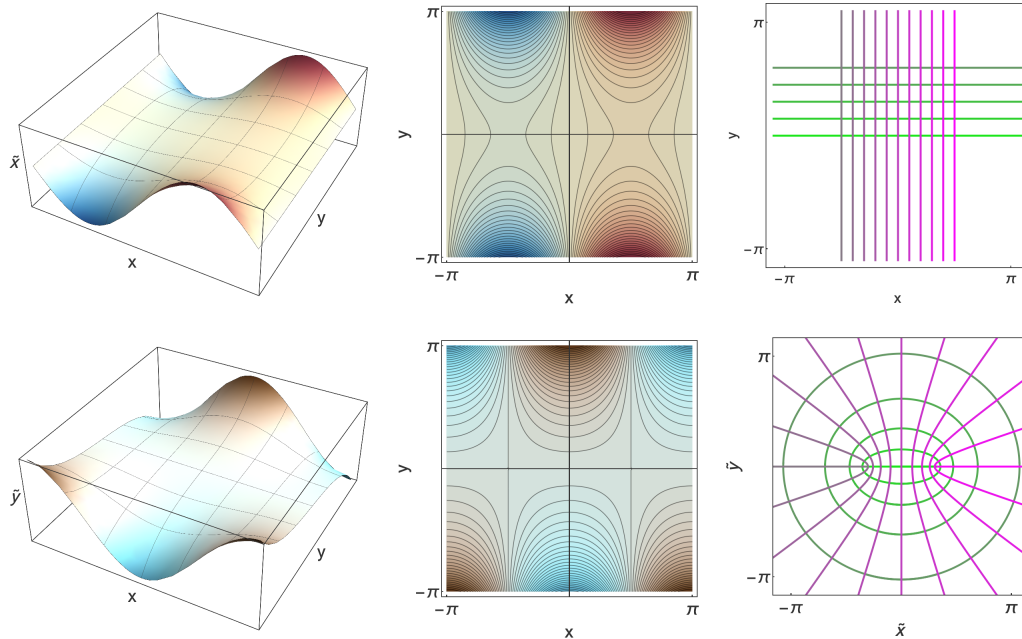
abgebildet wird, wobei  $r = \exp(x)$  der freie Parameter ist. Analog können wir

$$\ln(\varrho_1) < \operatorname{Re}(z) < \ln(\varrho_2) \quad \Leftrightarrow \quad \varrho_1 < |\tilde{z}| < \varrho_2$$

für alle  $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \infty$  zeigen, d.h. das Urbild eines Kreisringes um den Ursprung ist ein vertikaler Streifen.



**Abbildung** Die Bilder der komplexen Exponentialfunktion. Hier gibt es keine Singularität, aber es wurden zur besseren Darstellung trotzdem Werte mit sehr großem Absolutbetrag abgeschnitten.



**Abbildung** Graphische Darstellung der komplexen Sinusfunktion. Beachte, dass diese zwar noch  $2\pi$ -periodisch (bzgl.  $x = \operatorname{Re}(z)$ ), aber im Gegensatz zur reellen Sinusfunktion nicht mehr beschränkt ist.

**Joukowski-Transformation** Die durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

definierte Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  spielt in der Strömungsmechanik eine wichtige Rolle (siehe das Bild und die Anwendung weiter unten). Um erste geometrische Eigenschaften zu beschreiben, benutzen wir Polarkoordinaten im Urbildbereich, aber kartesische Koordinaten im Bildbereich. Wir setzen also  $z = r \exp(i\varphi)$  sowie  $\tilde{z} = f(z) = \tilde{x} + i\tilde{y}$  und verifizieren durch einfache Rechnungen die Formeln

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi), \quad \tilde{y} = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi),$$

mit denen wir die folgenden Aussagen ableiten können:

1. Für jeden festen Polarradius  $r_* > 0$  erhalten wir eine Parametrisierung (mit freiem Parameter  $\varphi$ ) der Ellipse

$$\frac{r_*^2 + 1}{r_*} \tilde{x}^2 + \frac{r_*^2 - 1}{r_*} \tilde{y}^2 = 4,$$

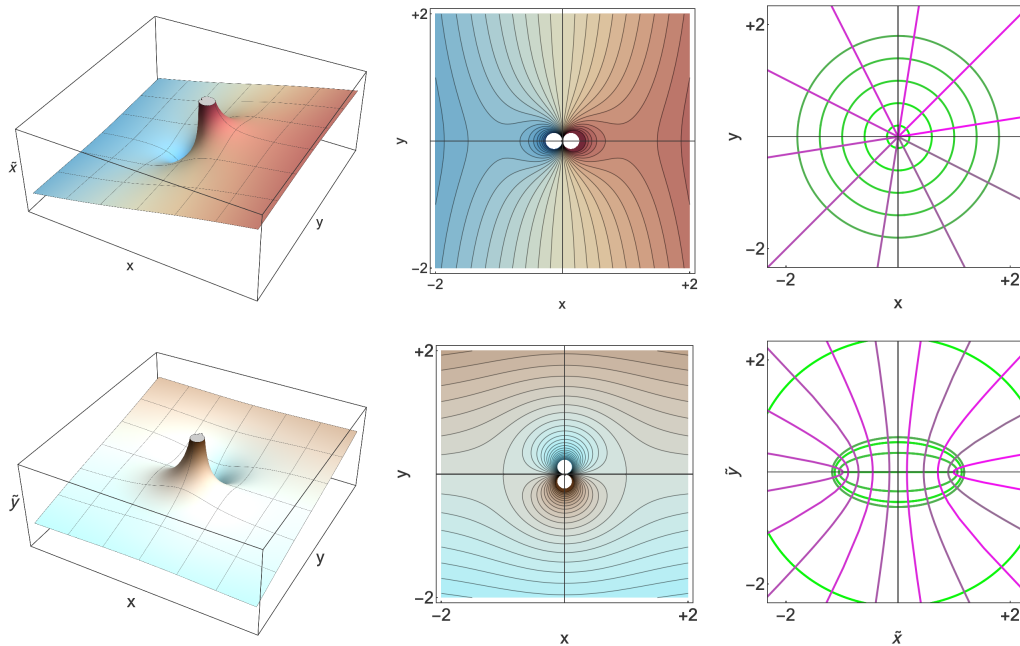
wobei diese für  $r_* = 1$  entartet und mit dem (doppelt durchlaufenen) Intervall  $[-1, +1]$  zusammenfällt.

2. Für jedes fixierte  $\varphi_*$  mit  $\varphi_* \notin \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$  können wir den freien Parameter  $r > 0$  eliminieren und erhalten

$$\frac{\tilde{x}^2}{\cos^2(\varphi_*)} - \frac{\tilde{y}^2}{\sin^2(\varphi_*)} = 1,$$

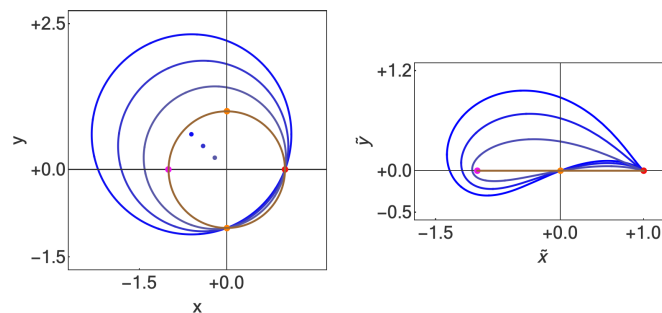
d.h. die Halbgerade  $\varphi = \varphi_*$  wird auf eine Hyperbel abgebildet. In den insgesamt vier Entartungsfällen ergeben sich jedoch die folgenden Bildmengen:

- (a) die doppelt durchlaufene horizontale Halbachse  $\tilde{y} = 0$  mit  $\tilde{x} \geq +1$  bzw.  $\tilde{x} \leq -1$  für  $\varphi_* = 0$  bzw. für  $\varphi_* = \pi$
- (b) die einfach durchlaufene vertikale Achse  $\tilde{x} = 0$  für  $\varphi_* = \frac{1}{2}\pi$  und für  $\varphi_* = \frac{3}{2}\pi$ .



**Abbildung** Darstellung der Joukowski-Funktion, die in der Literatur auch als Kutta-Schukowski-Funktion bezeichnet wird. Siehe auch das nächste Bild.

Es ist allerdings ohne Computer nicht ganz so einfach zu sehen, was das Bild eines nicht im Ursprung konzentrierten Kreises ist. Die Joukowski-Transformation hat aber unter anderem die schöne Eigenschaft, dass jeder Kreis mit Radius  $\varrho_1 > 1$ , der die beiden Punkte  $1$  und  $-i$  enthält, auf eine Tragflächenkontur abgebildet wird.



**Abbildung** Die Bilder gewisser Kreise unter der Joukowski-Transformation liefern sehr einfache Modelle für Tragflächen und können benutzt werden, um Luftströmungen bei Flugzeugen beispielhaft auszurechnen. Eine andere Anwendung diskutieren wir später.

**Stetigkeit komplexer Funktionen** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig im Punkt  $z_* \in D$ , falls eine der beiden folgenden, zueinander äquivalenten, Bedingungen erfüllt ist:

1. Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodass die Implikation

$$|z - z_*| < \delta \quad \implies \quad |f(z) - f(z_*)| < \varepsilon$$

für alle  $z \in D$  erfüllt ist.

## 2. Die Implikation

$$z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \implies f(z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

gilt für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ .

**Bemerkungen**

1. Die Aussagen ergeben sich unmittelbar aus den Vorlesungen *Analysis 1+2*.
2. Mit einfachen Argumenten können wir auch zeigen (Übungsaufgabe), dass eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann stetig im Punkt  $z_* = x_* + i y_* \in \mathbb{C}$  ist, wenn ihre reelle Entsprechung stetig in  $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$  ist. Die analoge Aussage mit Differenzierbarkeit statt Stetigkeit gilt aber **nicht**.
3. Wir nennen  $f$  stetig bzw. stetig auf  $C \subseteq D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $z_* \in D$  bzw. in jedem Punkt  $z_* \in C$  stetig ist. Insbesondere gelten viele Regeln für stetige Funktionen aus Analysis 1 auch im Komplexen. So sind zum Beispiel die Summe, das Produkt und die Komposition stetiger Funktionen wieder stetig.

## 1.3 Komplexe Differenzierbarkeit

**Setting** Wir betrachten eine komplexe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{C}$  sowohl *offen* als auch *zusammenhängend* ist (siehe dazu weiter oben).

**Definition** Wir sagen,  $f$  ist im Punkt  $z_* \in D$  (komplex) differenzierbar, falls

$$f'(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}$$

wohldefiniert ist, d.h. wenn der Grenzwert auf der rechten Seite in  $\mathbb{C}$  existiert. Ist diese Eigenschaft für jeden Punkt  $z_* \in E$  einer offenen Teilmenge  $E \subset D$  erfüllt, so nennen wir  $f$  (komplex) differenzierbar auf der Menge  $E$ .

**Bemerkungen**

1. Die komplexe Zahl  $f'(z_*)$  wird die (komplexe) Ableitung von  $f$  im Punkt  $z_*$  genannt und oftmals schreibt man auch

$$\frac{df}{dz}(z_*) \quad \text{statt} \quad f'(z_*).$$

2. Im Fall von  $E = D$  nennen wir  $f$  (komplex) differenzierbar bzw. holomorph (und meinen immer auf ihrem Definitionsbereich). In diesem Fall existiert die Ableitung als komplexe Funktion  $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Ist diese sogar stetig, wird  $f$  stetig (komplex) differenzierbar genannt.
3. Beim Grenzwert der Differenzenquotienten wird immer stillschweigend  $z \neq z_*$  vorausgesetzt (damit wir nicht durch 0 teilen). Der Grenzwert muss außerdem im eigentlichen Sinne existieren, d.h. der Fall  $f'(z_*) = \infty$  ist nicht zugelassen.

4. Wir können die Definition der Ableitung auch als

$$f'(z_*) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{f(z_* + \gamma) - f(z_*)}{\gamma}$$

schreiben, wobei die Substitution  $\gamma = z - z_*$  bzw.  $z = z_* + \gamma$  zu Grunde liegt (und immer stillschweigend  $\gamma \neq 0$  vorausgesetzt wird).

5. Höhere Ableitungen können analog eingeführt werden. Zum Beispiel existiert die zweite Ableitung von  $f$  in  $z_*$  genau dann, wenn

$$f''(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f'(z) - f'(z_*)}{z - z_*}$$

wohldefiniert ist.

*Ausblick:* Wir werden unten die folgende Aussage ableiten: Ist  $f$  einmal komplex differenzierbar auf  $D$ , so besitzt  $f$  schon unendlich viele komplexe Ableitungen. Dieses fundamentale (und auf den ersten Blick sehr verblüffende) Resultat besitzt kein Gegenstück im Reellen.

**generelle Bemerkung** Die Grenzwertformeln in der reellen und der komplexen Definition von Differenzierbarkeit sehen im Prinzip gleich aus und deshalb wird es für viele Theoreme aus der reellen Analysis eine direkte Entsprechung im Komplexen geben (ein Beispiel ist die Kettenregel).

Die Tatsache, dass wir nun im Komplexen rechnen, wird aber — wie wir in dieser Vorlesung sehen werden — sehr weitreichende Konsequenzen haben und die Theorien der differenzierbaren Funktionen in einer reellen bzw. einer komplexen Variable unterscheiden sich ganz erheblich. Man kann analog zu *Analysis 2* auch partielle Ableitungen für Funktionen in mehreren komplexen Variablen einführen, aber dieses Konzept wird hier keine Rolle spielen: Alle unsere Betrachtungen bleiben *komplex eindimensional* bzw. *reell zweidimensional*.

## Beispiele

1. Jedes komplexe Polynom  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

und gegebenen Koeffizienten  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  ist holomorph, wobei die Ableitung durch

$$p'(z) = n \alpha_n z^{n-1} + (n-1) \alpha_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 \alpha_2 z + \alpha_1$$

gegeben ist. Diese Aussage kann analog zum Reellen direkt nachgerechnet werden. Im einfachsten Fall gilt zum Beispiel

$$p(z) = z^n$$

und für  $n \neq 0$  erhalten wir nach Ausmultiplizieren und Umstellen den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{(z_* + \gamma)^n - z_*^n}{\gamma} &= \frac{1}{\gamma} \left( -z_*^n + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_*^{n-k} \gamma^k \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( -z_*^n + \binom{n}{0} z_*^n + \binom{n}{1} z_*^{n-1} \gamma + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z_*^{n-k} \gamma^k \right) \\ &= n z_*^{n-1} + \gamma \left( \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z_*^{n-k} \gamma^{k-2} \right). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  liefert schließlich die Formel  $p'(z_*) = n z_*^{n-1}$  für alle  $z_*$ , in der wir anschließend  $z_*$  durch  $z$  ersetzen können.

2. Mit analogen Argumenten zeigt man

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z^n} = -n \frac{1}{z^{n+1}}$$

für jede natürliche Zahl  $n \neq 0$ , wobei dann natürlich  $z \neq 0$  zu fordern ist.

3. Wir werden unten sehen, dass jede komplexe Potenzreihe holomorph auf ihrem Konvergenzkreis ist. Insbesondere können die bekannten Formeln

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = +\cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z)$$

auch im Komplexen verwendet werden.

**Gegenbeispiel** Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$  ist in keinem Punkt komplex differenzierbar, wobei dies zum Beispiel wie folgt begründet werden kann: Mit  $z_* = x_* + i y_*$  und  $\gamma = \alpha + i \beta$  ergibt sich

$$\frac{\operatorname{Re}(z_* + \gamma) - \operatorname{Re}(z_*)}{\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha + i \beta}$$

wobei die rechte Seite für  $\beta = 0$  und  $\alpha \rightarrow 0$  gegen 1, für  $\alpha = 0$  und  $\beta \rightarrow 0$  aber gegen 0 konvergiert. Dies impliziert die Behauptung, denn andernfalls würde sowohl  $f'(z_*) = 1$  als auch  $f'(z_*) = 0$  gelten. Analog kann man zeigen, dass auch die Funktion  $f$  mit  $f(z) = \operatorname{Im}(z)$  in keinem Punkt differenzierbar ist.

**Bemerkung** Etwas allgemeiner gilt:

1. Komplexe Funktionen, die nur reelle Werte annehmen, sind nur dann holomorph, wenn sie auch konstant sind (im Sinne von  $f(z) = c$  für ein  $c$  und alle  $z$ ).
2. Ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so ist  $f^\# : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f^\#(z) = f(\bar{z})$  im Allgemeinen nicht holomorph (es sei denn,  $f$  ist konstant).

Beide Aussagen können aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen abgeleitet werden (siehe unten).



**Einfache Rechenregeln** Sind die Funktionen  $f, g$  beide differenzierbar im Punkt  $z \in D$ , so gilt

1. (Summenregel)  $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
2. (Produktregel)  $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
3. (Quotientenregel)  $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - f(z)g'(z))/g^2(z)$

wobei in der letzten Formel  $g(z) \neq 0$  zu fordern ist und  $g^2(z) = g(z)g(z)$  gilt. Diese Formeln können analog zu den entsprechenden Resultaten im Reellen (siehe *Analysis 1*) bewiesen werden.

Vorlesung 01-2 : 14. April

### Beispiele

1. Es gilt

$$\frac{d}{dz}(\exp(z) + z \sin(z)) = \exp(z) + \sin(z) + z \cos(z)$$

sowie

$$\tan'(z) = \frac{d}{dz} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{\sin'(z) \cos(z) - \sin(z) \cos'(z)}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)},$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$  auch im Komplexen gilt, und stillschweigend  $\cos(z) \neq 0$  vorausgesetzt haben.

2. Ein Spezialfall der Produktregel ist

$$(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$$

für jede feste Zahl  $\alpha \in \mathbb{C}$ , wobei wir hier benutzen haben, dass die Ableitung der konstanten Funktion  $g(z) = \alpha$  wegen

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{g(z + \gamma) - g(z)}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\alpha - \alpha}{\gamma} = 0$$

in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  verschwindet.

3. Aus den Rechenregeln folgt auch

$$(\alpha f + \beta g)'(z) = (\alpha f' + \beta g')(z)$$

für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  und damit die Linearität der komplexen Differentiation.

4. Jede Möbius-Transformation ist außerhalb ihrer Polstelle differenzierbar. Es gilt

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad \text{für} \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

und  $z \neq -c/d$ . Die Ableitung  $f'$  ist aber *keine* Möbius-Transformation.



**Kettenregel** Analog zu *Analysis 1* können wir

$$(g \circ f)'(z) = \frac{d}{dz}g(f(z)) = g'(f(z)) f'(z)$$

zeigen, sofern die rechte Seite Sinn hat, d.h. sofern die Funktionen  $f$  bzw.  $g$  in  $z$  bzw.  $f(z)$  definiert und differenzierbar sind.

**Beispiele** Es gilt

$$\frac{d}{dz}(z^2 + z + 1)^2 = \left(2(z^2 + z + 1)\right) (2z + 1) = 4z^3 + 6z^2 + 6z + 4$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin^3(1 + \cos(3z^2 + 1)) &= \left(3 \sin^2(1 + \cos(3z^2 + 1))\right) \left(-\sin(3z^2 + 1)\right) (6z) \\ &= -18z \sin(3z^2 + 1) \sin^2(1 + \cos(3z^2 + 1)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Beispiel die Kettenregel zweimal angewendet haben.

**Alternative Notation** In den angewandten Wissenschaften wird die Kettenregel oftmals in einer anderen Form angegeben: Mit den Notationen  $\tilde{z} = f(z)$  sowie  $\check{z} = g(\tilde{z})$  gilt symbolisch

$$\frac{d\check{z}}{dz} = \frac{d\check{z}}{d\tilde{z}} \frac{d\tilde{z}}{dz},$$

wobei wir das reelle Analogon dieser Schreibweise schon in *Analysis 1* kennen gelernt hatten.

**Ableitung der Umkehrabbildung** Ist  $f$  eine differenzierbare und invertierbare komplexe Funktion, so folgt aus  $f^{-1}(f(z)) = z$  durch Differentiation beider Seiten und Anwendung der Kettenregel die Formel

$$(f^{-1})'(f(z)) f'(z) = 1$$

und damit

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(\tilde{z}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\tilde{z}))},$$

wobei wir  $\tilde{z} = f(z)$  bzw.  $z = f^{-1}(\tilde{z})$  verwendet haben und immer  $f'(z) \neq 0$  gelten muss.

**Bemerkung** Merken Sie sich die Herleitung, nicht die Formel! Wir sehen hier auch schon ein Resultat, das wir später besser verstehen werden: Besitzt  $f'$  eine Nullstelle, so kann  $f$  nicht invertierbar sein.

**Beispiel** Durch direktes Nachrechnen (siehe auch den Invertierungssatz für Möbius-Transformationen weiter unten) zeigen wir, dass die Formeln

$$\tilde{z} = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{und} \quad z = -\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a}$$

zueinander inverse Abbildungen beschreiben. Durch Differentiation der ersten bzw. zweiten Gleichung nach  $z$  bzw.  $\tilde{z}$  erhalten wir

$$\frac{d\tilde{z}}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dz}{d\tilde{z}} = \frac{ad - bc}{(c\tilde{z} - a)^2}.$$

Unter Verwendung von

$$(cz + d)(c\tilde{z} - a) = -ad + bc$$

können wir durch Einsetzen die Formeln

$$\frac{1}{\frac{d\tilde{z}}{dz}} = \frac{dz}{d\tilde{z}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\frac{dz}{d\tilde{z}}} = \frac{d\tilde{z}}{dz}$$

verifizieren und damit direkt zeigen, dass die Kettenregel für Möbius-Transformationen gilt. Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion wird in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften meist in dieser Form angegeben.

## 1.4 Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann

**Lemma (äquivalentes Kriterium für Differenzierbarkeit)**  $f$  ist genau dann in  $z_* \in D$  differenzierbar, wenn die Approximationsformel

$$f(z) = f(z_*) + \zeta_*(z - z_*) + r(z, z_*),$$

mit  $\zeta_* = f'(z_*)$  und einem Fehlerterm  $r(z, z_*) \in \mathbb{C}$  gilt, der via

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \frac{|r(z, z_*)|}{|z - z_*|} = 0$$

für  $z \approx z_*$  vernachlässigt werden kann.

**Beweis** Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus unseren Definitionen. In der Tat, wenn die Approximationsformel für ein  $\zeta_* \in \mathbb{C}$  richtig ist, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} = \zeta_* + \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{r(z, z_*)}{z - z_*} = \zeta_*,$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\left| \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{r(z, z_*)}{z - z_*} \right| = \lim_{z \rightarrow z_*} \left| \frac{r(z, z_*)}{z - z_*} \right| = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{|r(z, z_*)|}{|z - z_*|} = 0$$

nach Voraussetzung und wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion gilt. Insbesondere ist dann  $f$  in  $z_*$  differenzierbar und besitzt die Ableitung  $f'(z_*) = \zeta_*$ . Ist nun umgekehrt  $f$  differenzierbar in  $z_*$ , so setzen wir

$$\zeta_* := f'(z_*), \quad r(z, z_*) := f(z) - f(z_*) - \zeta_*(z - z_*)$$

und schließen analog zu oben, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_*} \frac{|r(z, z_*)|}{|z - z_*|} = \left| \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} - f'(z_*) \right| = 0$$

gilt, d.h. dass  $r(z, z_*)$  wirklich die geforderte Eigenschaft besitzt.  $\square$

**Bemerkung** Man schreibt oftmals auch

$$r(z, z_*) = o(|z - z_*|),$$

wobei das Landau-Symbol  $o(|z - z_*|^k)$  ganz allgemein — und analog zu *Analysis 1+2* — einen komplexwertigen Ausdruck bezeichnet, dessen Betrag für  $z \rightarrow z_*$  schneller gegen 0 geht als  $|z - z_*|^k$ .

**Folgerung (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)** Ist  $f$  differenzierbar in  $z_*$ , so ist  $f$  auch stetig in  $z_*$ .

**Beweis** Ist  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  eine Folge mit  $z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , so gilt

$$|f(z_n) - f(z_*)| = |z_n - z_*| \left( \zeta_* + \frac{|r(z_n, z_*)|}{|z_n - z_*|} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0(\zeta_* + 0) = 0$$

und damit auch  $f(z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ . □

**Bemerkung** Wie im Reellen ist die Umkehrung falsch, d.h. Stetigkeit in  $z_*$  liefert nicht die Differenzierbarkeit in  $z_*$ .

**Theorem (reelle Entsprechung der komplexen Differenzierbarkeit)** Mit den oben eingeführten Notationen sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist im Punkt  $z_*$  komplex differenzierbar.
2. Die reelle Entsprechung von  $f$  ist im Punkt  $(x_*, y_*)$  total differenzierbar und die  $(2, 2)$ -Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_f(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_*, y_*) & \partial_y u(x_*, y_*) \\ \partial_x v(x_*, y_*) & \partial_y v(x_*, y_*) \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehstreckung.

Jede dieser Bedingungen impliziert, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\partial_x u(x_*, y_*) = +\partial_y v(x_*, y_*), \quad \partial_y u(x_*, y_*) = -\partial_x v(x_*, y_*).$$

erfüllt sind und dass die Drehstreckung via

$$\mathbf{J}_f(x_*, y_*) = \mathbf{R}_{f'(z_*)}$$

bzw.

$$f'(z_*) = \partial_x u(x_*, y_*) + \mathbf{i} \partial_x v(x_*, y_*) = \partial_y v(x_*, y_*) - \mathbf{i} \partial_y u(x_*, y_*)$$

gerade der komplexen Multiplikation mit  $f'(z_*)$  entspricht.

**Beweis** Unsere Definitionen und die Identifikationen

$$z = x + \mathbf{i} y, \quad f(z) = u(x, y) + \mathbf{i} v(x, y), \quad z_* = x_* + \mathbf{i} y_*, \quad \zeta_* = \xi_* + \mathbf{i} v_*$$

implizieren, dass die Approximationsformel

$$\begin{pmatrix} u(x_*, y_*) \\ v(x_*, y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\zeta_*} \cdot \begin{pmatrix} x - x_* \\ y - y_* \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2}\right)$$

mit reeller  $(2, 2)$ -Matrix

$$\mathbf{R}_{\zeta_*} = \begin{pmatrix} \xi_* & -v_* \\ +v_* & \xi_* \end{pmatrix}$$

äquivalent zu

$$f(z) = f(z_*) + \zeta_* (z - z_*) + o(|z - z_*|)$$

ist, wobei die reellen bzw. komplexen Fehlerterme dieselbe Größenordnung widerspiegeln. Die reelle Approximationsformel meint, dass die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

in  $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$  total differenzierbar ist (siehe *Analysis 2*), wobei die entsprechende Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_f(x_*, y_*)$  gerade durch  $\mathbf{R}_{\zeta_*}$  gegeben ist. Die komplexe Approximationsformel kodiert hingegen  $f'(z_*) = \zeta_*$  und die behauptete Äquivalenz sowie die Gültigkeit der angegebenen Differentialgleichungen folgen unmittelbar.  $\square$

### Beispiele

1. Für  $f(z) = z^2$  gilt

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy, \quad \mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} +2x & -2y \\ +2y & +2x \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und  $f$  ist in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, wobei aus  $\mathbf{J}(x, y) = \mathbf{R}_{2x+2\mathbf{i}y}$  die Formel  $f'(z) = 2x + 2\mathbf{i}y = 2z$  abgelesen werden kann.

Bemerkung: Wir hatten dieses Ergebnis schon oben direkt aus der Definition von Differenzierbarkeit hergeleitet.

2. Mit  $f(z) = \bar{z}$  erhalten wir

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y, \quad \mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind via

$$\partial_x u(x, y) = +1 \neq -1 = \partial_y v(x, y)$$

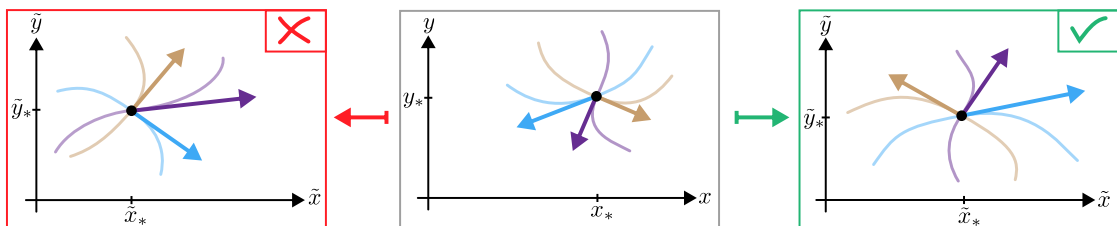
verletzt. Also ist  $f$  in keinem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

Bemerkung: Die reelle Entsprechung von  $f$  ist hier differenzierbar, aber die Jacobi-Matrix beschreibt eben keine Drehstreckung.

**Bemerkung** Das Theorem zeigt, dass nur gewisse Transformationen der Ebene einer holomorphen Funktion entsprechen, nämlich nur solche, deren Jacobi-Matrix in jedem Punkt  $(x, y)$  einer Drehstreckung entspricht und als

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \xi & -v \\ +v & \xi \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\xi+iv},$$

geschrieben werden kann (wobei  $\xi, v$  von  $x, y$  abhängen dürfen und  $f'(z) = \xi + iv$  gilt). Wir werden weiter unten sehen, dass das (bis auf Entartungsfälle) gerade die *winkeltreuen* und *orientierungserhaltenden* Transformationen sind. Alle anderen Transformationen der Ebene können zwar auch als reelle Entsprechung einer komplexen Funktion betrachtet werden, aber diese wird dann nicht bzw. nicht überall differenzierbar sein.



**Abbildung** Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_f(x_*, y_*)$  beschreibt ganz allgemein die lineare Transformation des  $\mathbb{R}^2$ , die Tangentialvektoren an Kurven durch den Punkt  $(x_*, y_*)$  (Urbildbereich) auf Tangentialvektoren im Punkt  $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_*)$  (Bildbereich) abbildet. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zeigen, dass  $f$  genau dann in  $z_*$  komplex differenzierbar ist, wenn alle Tangentialvektoren um denselben Winkel gedreht und um denselben Faktor gestreckt werden (grün). Drehscherungen (rot) oder Spiegelungen sind hingegen nicht kompatibel mit komplexer Differenzierbarkeit.

**Ausblick\*** Eine komplexe Funktion  $f$  wird antiholomorph genannt, wenn  $f^\#$  mit  $f^\#(z) = f(\bar{z})$  holomorph ist. In diesem Fall gilt

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} +\xi & v \\ v & -\xi \end{pmatrix},$$

und die entsprechende Transformation der Ebene ist daher zwar noch winkelerhaltend, ändert aber die Orientierung.

**Folgerung (Charakterisierung konstanter Funktionen)** Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

1. Es gilt  $f(z) = f(0)$  für alle  $z \in D$ .
2. Es gilt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in D$ .

**Beweis** Die Aussage (1.)  $\Rightarrow$  (2.) hatten wir schon oben abgeleitet. Unter der Annahme, dass (2.) gilt, berechnen wir

$$\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und schließen mit unserem *Analysis 1+2*-Wissen, dass die reelle Entsprechung von  $f$  konstant sein muss, d.h. dass  $u(x, y) = u(0, 0)$  und  $v(x, y) = v(0, 0)$  für alle  $(x, y)$  gilt. Dies liefert dann die Gültigkeit von (1.).  $\square$

**Folgerung (nützliche Beobachtung)** Jede holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt, ist notwendigerweise konstant.

**Beweis** Nach Voraussetzung können wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mit der trivialen Funktion  $v \equiv 0$  auswerten und erhalten

$$\partial_x u(x, y) = +\partial_y v(x, y) = 0, \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) = 0$$

und damit auch  $f'(z) = 0$  für alle  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Die vorherige Folgerung liefert daher die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung**

1. Wir hatten in *Analysis 2* die folgende Terminologie eingeführt: Eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  wird einfach zusammenhängend genannt, sofern sie keine „Löcher“ enthält (wobei insbesondere auch Ein-Punkt-Löcher verboten sind).
2. Eine skalare Funktion  $u$  in den reellen Variablen  $x, y$  heißt harmonisch, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und  $\Delta u(x, y) = 0$  für alle  $(x, y)$  aus dem Definitionsbereich von  $u$  gilt, wobei  $\Delta$  mit

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y)$$

der (zweidimensionale) Laplace-Operator ist.

**Theorem (harmonische Funktionen, Teil 1)** Ist  $f$  zweimal stetig komplex differenzierbar, so sind  $u = \operatorname{Re}(f)$  und  $v = \operatorname{Im}(f)$  harmonische Funktionen.

**Beweisskizze** In einem ersten Schritt müssen wir sicherstellen, dass  $u$  und  $v$  zweimal stetig differenzierbar im Sinne von *Analysis 2* sind, aber wir wollen diesen technischen Schritt nicht im Detail erklären. Wichtig ist das folgende Argument: Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt

$$\partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \partial_x \partial_y v(x, y) - \partial_y \partial_x v(x, y) = 0$$

sowie

$$\partial_x^2 v(x, y) + \partial_y^2 v(x, y) = -\partial_x \partial_y u(x, y) + \partial_y \partial_x u(x, y) = 0$$

wobei wir den Satz von Schwartz sowohl für  $u$  als auch für  $v$  verwendet haben.  $\square$

**Theorem (harmonische Funktionen, Teil 2)** Sei  $D$  einfach zusammenhängend und  $u$  harmonisch. Dann gibt es eine andere harmonische Funktion  $v$ , sodass  $f = u + iv$  zweimal stetig komplex differenzierbar ist.

**Beweisskizze** Die Harmonizität von  $u$  impliziert die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ +\partial_x u(x, y) \end{pmatrix} = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \Delta u(x, y) = 0$$

und wir hatten in *Analysis 3* gesehen, dass es daher ein Potential  $v$  geben muss, sodass

$$\begin{pmatrix} -\partial_y u(x, y) \\ +\partial_x u(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\partial_x v(x, y) \\ +\partial_y v(x, y) \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt  $(x, y)$  erfüllt ist. Insbesondere gelten damit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und  $f$  ist komplex differenzierbar. In einem zweiten, technischen Schritt muss man dann zeigen, dass  $f$  sogar zweimal stetig differenzierbar ist.  $\square$

**Bemerkung**

1. Wir werden unten sehen, dass die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  schon die Existenz und Stetigkeit aller höheren Ableitungen impliziert. Mit diesem Wissen kann man die Voraussetzungen in den letzten beiden Theoremen abschwächen.
2. Die Funktion  $v$  ist nicht eindeutig und in der Praxis kann man noch sogenannte *Randbedingungen* an  $v$  stellen, die das Verhalten von  $v$  auf  $\partial D$  festlegen.
3. Im letzten Theorem ist es sehr wichtig, dass  $D$  einfach zusammenhängend ist. Wir werden unten noch einmal auf diesen Aspekt zurückkommen.
4. Mit analogen Argumenten können wir auch die folgende Aussage ableiten, wobei  $D$  wieder einfach zusammenhängend sein muss: Ist  $v$  eine harmonische Funktion, so existiert eine andere harmonische Funktion  $u$ , sodass  $f = u + i v$  zweimal stetig komplex differenzierbar ist.
5. Der Beweis zeigt, dass die Gradienten der harmonischen Funktionen  $u$  und  $v$  in jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Genauer gesagt, der Vektor  $\mathbf{grad} v(x, y)$  entsteht immer aus  $\mathbf{grad} u(x, y)$  durch Drehung um  $90^\circ$ , was einer komplexen Multiplikation mit  $i$  entspricht.
6. Die beiden letzten Theoreme spielen in den Anwendungswissenschaften eine herausragende Rolle. Siehe dazu auch weiter unten.
7. Man kann auch harmonische Funktionen mit mehr als zwei reellen Variablen studieren, aber diese können aus Dimensionsgründen nicht mehr als Real- oder Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion betrachtet werden.

**Beispiele**

1. Da die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar ist, liefern die Formeln

$$u(x, y) = \exp(x) \cos(y), \quad v(x, y) = \exp(x) \sin(y)$$

zwei harmonische Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$  (was wir natürlich alternativ auch mit direkten Rechnungen begründen können).

2. Wir betrachten die durch

$$u(x, y) = x^3 - 3x y^2$$

definierte harmonische Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  und wollen eine komplex differenzierbare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  konstruieren, sodass  $u = \operatorname{Re}(f)$  gilt. Für den entsprechenden Imaginärteil  $v = \operatorname{Im}(f)$  muss dann

$$\partial_x v(x, y) = 6x y, \quad \partial_y v(x, y) = 3x^2 - 3y^2$$

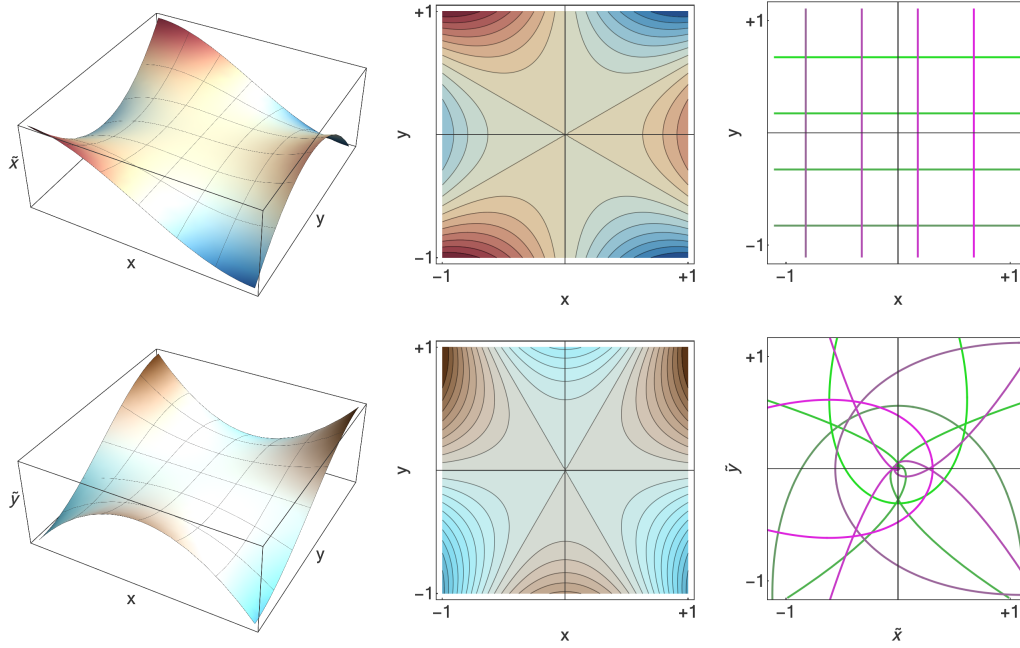
wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten und durch Scharfes Hinsehen (oder mit Hilfe der Rechenverfahren aus *Analysis 3*) können wir

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3$$

als mögliche Wahl für  $v$  identifizieren, wobei  $v$  auch harmonisch ist. Die entsprechende komplexe Funktion ist dann durch

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = x^3 + 3i x^2 y - 3x y^2 - i y^3 = (x + i y)^3 = z^3$$

gegeben.



**Abbildung** Die kubische Standardfunktion  $f(z) = z^3$  aus dem letzten Beispiel.



## 1.5 Potenzreihen

**Vorbemerkung** Ein wesentlicher Bestandteil der Theorie und Praxis holomorpher Funktionen sind Potenzreihen der Bauart

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_*) + \alpha_2 (z - z_*)^2 + \alpha_3 (z - z_*)^3 + \dots,$$

wobei  $z_* \in \mathbb{C}$  als Entwicklungspunkt bezeichnet wird und  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  die Koeffizientenfolge ist. Die Konvergenz von Potenzreihen wurde schon in *Analysis 1* studiert und hier wollen wir nun die komplexe Differenzierbarkeit zeigen.

**Theorem (Hauptsatz über Potenzreihen)** Der Konvergenzradius ist durch die Cauchy-Hadamard-Formel

$$R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}} \in [0, \infty]$$

gegeben. Insbesondere konvergiert  $f(z)$  für  $|z - z_*| < R$  absolut, aber divergiert für  $|z - z_*| > R$ .

**Beweis** Wir diskutieren nur den Fall  $0 < R < \infty$ . Für  $R = 0$  und  $R = \infty$  können die Behauptungen mit leicht modifizierten Argumenten hergeleitet werden.<sup>2</sup>

Teil 1: Wir zeigen, dass  $f(z)$  für jedes feste  $z \in B_R(z_*)$  im Sinne einer absolut konvergenten Reihe (siehe *Analysis 1*) wohldefiniert ist. Das wesentliche Argument in diesem Zusammenhang wird *Lemma von Abel* genannt und kann wie folgt formuliert werden: Ist  $r > 0$  ein beliebiger Radius und  $\zeta \in \partial B_r(z_*)$  ein Punkt, sodass

$$|\alpha_k (\zeta - z_*)|^k = |\alpha_k| r^k \leq C$$

für eine geeignete Konstante  $C$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, so folgt via

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| |z - z_*|^k &= \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| r^k \frac{|z - z_*|^k}{r^k} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|z - z_*|}{r} \right)^k = \frac{C}{1 - \frac{|z - z_*|}{r}} < \infty \end{aligned}$$

die absolute Konvergenz von  $f(z)$  für jedes  $z$  mit  $|z - z_*| < r = |\zeta - z_*|$ . Oder anders gesagt: Wenn die Reihenglieder auch nur für *einen Punkt* aus der Kreislinie vom Radius  $r$  um  $z_*$  beschränkt sind, so folgt automatisch die absolute Konvergenz der Reihe in der *ganzen offenen Kreisscheibe*  $B_r(z_*)$ . Mit diesem Hebel können wir leicht die Wohldefiniertheit von  $f$  auf  $B_R(z_*)$  zeigen, wobei  $R$  gerade die größtmögliche Wahl von  $r$  im Lemma von Abel ist.

<sup>2</sup>Der Hauptsatz wurde schon in *Analysis 1* bewiesen.

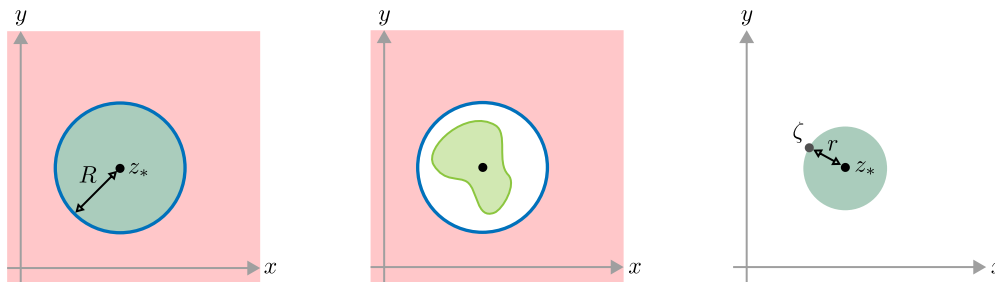
Teil 2: Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $r := |z - z_*| > R$  fixiert. Die Eigenschaften des Limes Superior garantieren die Existenz einer strikt monoton wachsende Indexfolge  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit

$$|\alpha_{k_j}|^{1/k_j} \geq \frac{1}{2} (r^{-1} + R^{-1})$$

und wegen  $r > R$  erhalten wir

$$\left| \alpha_{k_j} (z - z_*)^{k_j} \right| \geq \left( \frac{r(r^{-1} + R^{-1})}{2} \right)^{k_j} = \left( \frac{r + R}{2R} \right)^{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty.$$

Insbesondere kann die Reihe  $f(z)$  nicht konvergieren, da ihre Glieder keine Nullfolge bilden.  $\square$



**Abbildung** Links: Im Inneren des Konvergenzkreises (grün) konvergiert die Potenzreihe absolut, aber im Außengebiet (rot) konvergiert sie nicht. Auf dem Rand (blau) ist keine allgemeine Aussage möglich und das Konvergenzverhalten kann in jedem Punkt anders sein. Mitte: Auf jeder Teilmenge des Konvergenzkreises, die einen echt positiven Abstand zum Rand besitzt, gilt sogar gleichmäßige Konvergenz der Reihe (hellgrün). Rechts: Illustration des Lemmas von Abel, mit dem die Existenz des Konvergenzkreises bewiesen wird.

### Bemerkungen

1. Der Hauptsatz besagt, dass die Potenzreihe  $f$  wohldefiniert auf  $B_R(z_*)$  ist, wobei für  $R = \infty = 1/0$  natürlich  $B_R(z_*) = \mathbb{C}$  gilt. Im Entartungsfall  $R = 0 = 1/\infty$  gilt jedoch  $B_0(z_*) = \emptyset$  und  $f(z)$  divergiert für jedes  $z \neq z_*$ .
2. Der Konvergenzradius kann oftmals durch

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|\alpha_k|}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} \quad (\text{Wurzelformel})$$

oder alternativ durch

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} \quad (\text{Quotientenformel})$$

berechnet werden (siehe *Analysis 1*). Wenn aber die entsprechenden Grenzwerte nicht existieren, so muss (und kann) die Formel mit dem größten Häufungswert ( $\limsup$ ) verwendet werden.

3. Da im Inneren der Konvergenzkreisscheibe  $B_R(z_*)$  absolute Konvergenz vorliegt, kann die Potenzreihe beliebig umsortiert werden. Außerdem können wir das Produkt zweier Potenzreihen immer mithilfe der Cauchyschen Produktformel berechnen. Siehe dazu *Analysis 1*.

4. In einem Randpunkt des Konvergenzkreises — d.h. für  $|z - z_*| = R$  — kann im Prinzip alles passieren (Konvergenz, absolute Konvergenz oder Divergenz) und man muss in jedem Fall sehr viel genauer hinschauen.

*Merkregel:* Auf dem Rand  $\partial B_R(z_*)$  ist alles kompliziert, da dieser die Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz darstellt.

5. Ist  $D_* \subset B_R(z_*)$  eine kompakte Menge (also beschränkt und abgeschlossen), so gilt

$$0 \leq \sup_{z \in D_*} \left| f(z) - \sum_{k=0}^K \alpha_k (z - z_*)^k \right| \leq \sup_{z \in D_*} \sum_{k=K+1}^{\infty} |\alpha_k| |z - z_*|^k \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

für den  $K$ -ten Reihenrest, d.h. die Potenzreihe  $f(z)$  konvergiert nicht nur in jedem Punkt  $z \in D_*$  absolut, sondern sogar *gleichmäßig* auf  $D_*$ . Diese verfeinerte Aussage ergibt sich aus dem ersten Beweisteil des Hauptsatzes und ist sowohl für theoretische Betrachtungen als auch für numerische Approximationsverfahren ausgesprochen nützlich.

**Theorem (Potenzreihe als holomorphe Funktion)** Jede komplexe Potenzreihe ist holomorph auf ihrer (offenen) Konvergenzkreisscheibe. Dabei kann die Ableitung *gliedweise* mittels der Formel

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k (z - z_*)^{k-1} = \alpha_1 + 2 \alpha_2 (z - z_*) + 3 \alpha_3 (z - z_*)^2 + 4 \alpha_4 (z - z_*)^3 + \dots$$

berechnet werden kann. Insbesondere besitzen  $f$  und  $f'$  denselben Konvergenzradius.

**Beweis** Wir nehmen wieder  $0 < R < \infty$  an und wollen für die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k (z - z_*)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \alpha_{k+1} (z - z_*)^k$$

zeigen, dass sie die Ableitung von  $f$  liefert.<sup>3</sup> Mit

$$\sqrt[k]{(k+1) |\alpha_{k+1}|} = \left( (k+1)^{1/k+1} \cdot \sqrt[k+1]{|\alpha_{k+1}|} \right)^{1+1/k}$$

sowie elementaren Argumenten zeigen wir zunächst

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k+1) |\alpha_{k+1}|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}$$

und schließen, dass neben  $f$  auch die Potenzreihe  $g$  den Konvergenzradius  $R$  besitzt.<sup>4</sup> Wir fixieren nun  $z \in B_R(z_*)$ , setzen

$$\eta := \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{|z - z_*|}{R} \right) \in \left( 0, \frac{1}{3} \right), \quad r(z, h) := f(z+h) - f(z) - h g(z)$$

<sup>3</sup>Die beiden angegebenen Formeln für  $g$  unterscheiden sich nur um eine Indexverschiebung.

<sup>4</sup>Wenn der Konvergenzradius  $R$  durch die Quotientenformel berechnet werden kann, so können wir auch mit der Nebenrechnung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) |\alpha_{k+1}|}{(k+2) |\alpha_{k+2}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_{k+2}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} = R$$

begründen, dass  $f$  und  $g$  denselben Definitionsbereich besitzen.

und betrachten im Folgenden komplexe Zahlen  $h$  mit  $0 < |h| < \eta R$ . Mithilfe der Reihendarstellungen, des binomischen Lehrsatzes sowie geeigneter Indexverschiebungen erhalten wir die Restgliedformel

$$\begin{aligned} r(z, h) &= \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k (z + h - z_*)^k - \alpha_k (z - z_*)^k - h k \alpha_k (z - z_*)^{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \left( -(z - z_*)^k - k h (z - z_*)^{k-1} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} h^j (z - z_*)^{k-j} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} h^j (z - z_*)^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+2} \sum_{j=0}^k \binom{k+2}{j+2} h^{2+j} (z - z_*)^{k-j} \\ &= h^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+2} \sum_{j=0}^k \frac{(k+2)(k+1)}{(j+2)(j+1)} \binom{k}{j} h^j (z - z_*)^{k-j} \end{aligned}$$

und insgesamt die Abschätzung

$$\frac{|r(z, h)|}{|h|^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+2}| (k+2)^2 \left( |z - z_*| + |h| \right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+2}| (k+2)^2 R^k (1 - 2\eta)^k,$$

wobei wir  $|z - z_*| \leq R - 3\eta R$  benutzt haben. Nach der Cauchy-Hadamard-Formel gilt aber auch

$$|\alpha_{k+2}| \leq \frac{C_1}{(R(1 - \eta))^{k+2}}$$

mit  $C_1 = 1$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  und durch Vergrößerung von  $C_1$  können wir sicherstellen, dass diese Abschätzung sogar für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Insbesondere gilt

$$\frac{|r(z, h)|}{|h|^2} \leq \frac{C_1}{R^2(1 - \eta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^2 \left( \frac{1 - 2\eta}{1 - \eta} \right)^k =: C_2 < \infty.$$

für alle zugelassenen  $h$ . Insgesamt haben wir

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq \frac{|r(z, h)|}{|h|} \leq C_2 |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

gezeigt, d.h.  $f$  ist im Punkt  $z$  differenzierbar mit Ableitung  $g(z)$ .  $\square$

### Beispiele

1. Wir hatten in *Analysis 1* gezeigt, dass die trigonometrischen Funktionen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

jeweils den Konvergenzradius  $R = \infty$  besitzen, wobei die bekannten Ableitungsformeln sich auch durch gliedweise Differentiation ergeben. Wir hatten außerdem gesehen, dass die Euler-Formel

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

mit dem Umordnungssatz und die Produktformeln

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

aus dem Cauchy-Produkt abgeleitet werden können. Beachte auch, dass diese Formeln für alle komplexen (und nicht etwa nur für reelle) Argumente gelten.

2. Jedes Polynom ist auch Potenzreihe, wobei fast alle Koeffizienten verschwinden. Insbesondere gilt dann immer  $R = \infty$ .
3. Durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{3^k}$$

wird nach dem Theorem eine holomorphe Funktion auf  $B_3(1)$  definiert, wobei es sich für jedes  $z$  um eine geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$  mit Parameter  $q = (1-z)/3$  handelt und wir wegen  $|q| < 1$  auch

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{1-z}{3}} = \frac{3}{2+z} =: f_{\text{ext}}(z)$$

schreiben können. Dabei gilt:

- (a)  $f_{\text{ext}}$  besitzt die Polstelle  $z = -2$  und ist dort weder definiert noch komplex differenzierbar.
- (b)  $f_{\text{ext}}$  ist auf der punktierten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$  wohldefiniert und holomorph.
- (c) Die Polstelle von  $f_{\text{ext}}$  liegt auf  $\partial B_3(0)$ , d.h. auf dem Rand des Konvergenzkreises von  $f$ .
- (d) Die Reihe zu  $f$  kann in allen Punkten  $z$  mit  $|z-1| > 3$  nicht konvergieren, da die entsprechenden Reihenglieder keine Nullfolge mehr bilden (siehe wieder *Analysis 1*).

Die Funktion  $f_{\text{ext}}$  ist eine holomorphe Fortsetzung (*'extension'*) von  $f$  und wir werden später verstehen, dass die vier Beobachtungen allgemeine Prinzipien widerspiegeln.

**Folgerung (Potenzreihen besitzen viele Ableitungen)** Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises *unendlich oft* komplex differenzierbar, wobei die  $n$ -te Ableitung durch

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \alpha_k (z - z_*)^{k-n}$$

gegeben ist. Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(z_*) = n! \alpha_n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  im Mittelpunkt des Konvergenzkreises.

**Beweis** Das vorangegangene Theorem kann auch auf die Potenzreihe  $f'$  (deren  $k$ -ter Koeffizient gerade  $(k+1)\alpha_{k+1}$  ist) angewendet werden und liefert die Existenz von  $f''$  auf  $B_R(z_*)$  sowie die entsprechende Formel für die Ableitung. Danach können wir das Theorem auch noch auf die Potenzreihe für  $f''$  (mit Koeffizienten  $(k+2)(k+1)\alpha_{k+2}$ ) anwenden und erhalten die Existenz sowie die Formel für  $f'''$  auf  $B_r(z_*)$ . Weil diese rekursive Argumentationskette beliebig oft wiederholt werden kann, ergibt sich die Behauptung.  $\square$

### Bemerkungen

1. Es gilt wieder  $0! = 1 = 1!$  sowie

$$f^{(0)}(z) = f(z), \quad f^{(1)}(z) = f'(z), \quad f^{(2)}(z) = f''(z).$$

Beachte auch, dass  $k!/(k-n)! = k(k-1)\dots(k-n+1)$  gerade das Produkt aus  $n$  aufeinanderfolgenden Zahlen ist.

2. Aufgrund der ersten Formel gilt

$$f^{(2)}(z) = f''(z) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(z-z_*) + 12\alpha_4(z-z_*)^2 + \dots$$

sowie

$$f^{(3)}(z) = f'''(z) = 6\alpha_3 + 24\alpha_4(z-z_*) + 60\alpha_5(z-z_*)^2 + \dots,$$

d.h. auch jede  $n$ -te Ableitung einer Potenzreihe kann *gliedweise* berechnet werden.

3. Die zweite Formel impliziert

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z-z_*)^k,$$

d.h. jede komplexe Potenzreihe ist auch eine Taylor-Reihe.

**Beispiel** Jedes Polynom

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_K z^K$$

ist trivialerweise seine eigene Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt  $z_* = 0$ . Es gilt aber auch

$$f(z) = \sum_{k=0}^K \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z-z_*)^k$$

für jede andere Wahl von  $z_*$ , wobei die entsprechenden Koeffizienten erst berechnet werden müssen. Ein ganz einfaches Beispiel ist

$$z^2 + 1 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 2 = (z-2i)^2 + 4i(z-2i) - 3,$$

wobei in der Mitte bzw. rechts  $z_* = 1$  bzw.  $z_* = 2i$  der Entwicklungspunkt ist.

**Ausblick** Wir werden unten sehen, dass sich jede holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in der Nähe eines *jeden* Punktes  $z_* \in D$  *lokal* als Potenzreihe schreiben lässt, wobei diese Potenzreihe dann die Taylor-Reihe von  $f$  im Entwicklungspunkt  $z_*$  ist. Eine spezielle Folgerung wird sein, dass *jede* holomorphe, d.h. jede einmal komplex differenzierbare Funktion automatisch schon unendlich viele komplexe Ableitungen besitzt. Die analoge Aussage mit reellen Ableitungen ist übrigens falsch.

Vorlesung 02-2 : 21. April

## 1.6 Laurent-Reihen

**Vorbemerkung** In einer Potenzreihe addieren wir alle nicht-negativen Potenzen von  $(z - z_*)$  (gewichtet mit den komplexen Koeffizienten  $\alpha_k$ ) und betrachten die unendliche Summe als eine Funktion in der Variablen  $z$ . Eine wichtige Erkenntnis ist nun, dass wir auch (endlich oder gar unendlich viele) negative Exponenten in den Summanden zulassen können, wobei dann die sogenannten *Laurent-Reihen* entstehen. Diese spielen eine große Rolle bei Rechnungen in den Anwendungswissenschaften. Dabei ist der Koeffizient vor  $(z - z_*)^{-1}$  — also die Zahl  $\alpha_{-1}$  — besonders interessant und wird *Residuum* genannt.

**absolute Konvergenz bei Doppelreihen** Die komplexe Doppelreihe  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k$  mit Gliedern  $\beta_k \in \mathbb{C}$  konvergiert genau dann absolut, wenn

$$\sup_{K \in \mathbb{N}} \sum_{k=-K}^K |\beta_k| < \infty$$

gilt, wobei dann der Wert der Reihe zum Beispiel via

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=-K}^K \beta_k$$

oder durch analoge Formeln mit umsortierten Gliedern bestimmt werden kann. Dieses Konzept verallgemeinert die absolute Konvergenz einfacher Reihen in sehr natürlicher Weise. Die nicht-absolute Konvergenz von Doppelreihen ist jedoch deutlich subtiler und wird bei uns keine Rolle spielen.

**Bemerkung** Ganz allgemein kann man auch bei einfachen Reihen sagen: Die Frage, ob eine Reihe konvergiert oder nicht, ist aus Sicht der modernen Mathematik eigentlich falsch gestellt. Entscheidend ist vielmehr, ob eine Reihe absolut konvergiert oder nicht.

**Theorem (Laurent-Reihen als holomorphe Funktionen)** Seien  $z_* \in \mathbb{C}$  ein Entwicklungspunkt und  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$  eine Doppelfolge komplexer Koeffizienten. Dann wird durch

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \dots + \alpha_{-1} (z - z_*)^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_*) + \dots$$

eine holomorphe Funktion auf dem offenen Kreisring ('*annulus*')

$$A_{R_-, R_+}(z_*) := \{z \in \mathbb{C} : R_- < |z - z_*| < R_+\}$$

definiert. Hierbei ist die Ableitung durch

$$f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \alpha_k (z - z_*)^{k-1}$$

gegeben und die (nichtnegativen) Radien

$$R_- := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{-n}|} \quad \text{bzw.} \quad R_+ := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{+n}|}}$$

hängen in leicht unterschiedlicher Weise nur von den Koeffizienten mit negativem bzw. positivem Index ab.

**Beweis** Die wesentliche Idee ist es, die Doppelreihe mittels

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z - z_*}\right) + h(z - z_*)$$

aufzuspalten, wobei

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \zeta^n = \alpha_{-1} \zeta + \alpha_{-2} \zeta^2 + \alpha_{-3} \zeta^3 + \dots$$

und

$$h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{+n} \zeta^n = \alpha_0 + \alpha_{+1} \zeta + \alpha_{+2} \zeta^2 + \alpha_{+3} \zeta^3 + \dots$$

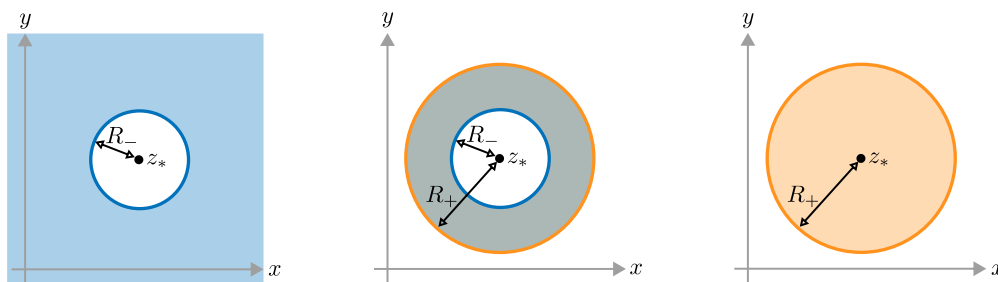
zwei Potenzreihen in der Variablen  $\zeta$  und mit dem Entwicklungspunkt  $\zeta_* = 0$  sind. Nach dem Theorem über die Holomorphie von Potenzreihen sind der Konvergenzradius  $S$  von  $g$  bzw.  $T$  von  $h$  durch

$$S = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{-n}|}} = 1/R_-, \quad T = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_{+n}|}} = R_+,$$

gegeben, und wir schließen, dass der Term  $g(1/(z - z_*))$  für  $1/(z - z_*) < 1/R_-$  absolut konvergiert, wohingegen  $h(z - z_*)$  für  $|z - z_*| < R_+$  absolut konvergiert. Zusammen ergibt sich die absolute Konvergenz von  $f(z)$  für alle  $z \in A_{R_-, R_+}(z_*)$ . Die Holomorphie von  $f$  mit

$$f'(z) = -\frac{1}{(z - z_*)^2} g'\left(\frac{1}{z - z_*}\right) + h'(z - z_*)$$

folgt aus der Kettenregel, wobei dann schließlich die Reihendarstellungen von  $g'$  und  $h'$  eingesetzt werden können.  $\square$



**Abbildung** Der offene Konvergenzring einer Laurent-Reihe (Mitte) wird durch die Konvergenzgebiete ihres Haupt- (links) bzw. Nebenteiles (rechts) bestimmt, wobei diese durch alle Summanden mit negativen bzw. positiven Indizes gegeben sind. Beachte, dass das Außengebiet (weiß) sowie der Rand des Konvergenzringes aus je zwei Teilen bestehen.



**Bemerkungen**

1. Es gilt

$$f(z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_*)^{-n} \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{+n} (z - z_*)^{+n} \right),$$

wobei der erste bzw. zweite Summand auf der rechten Seite als Hauptteil bzw. Nebenteil von  $f$  bezeichnet werden (und gerade den Termen  $g(1/(z - z_*))$  bzw.  $h(z - z_*)$  im Beweis entsprechen).

2. Wir setzen bei einer Laurent-Reihe immer stillschweigend voraus, dass mindestens einer der Koeffizienten  $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots$  nicht verschwindet, da es sich andernfalls ja um eine Potenzreihe handelt. Die Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha_{+1}, \alpha_{+2}, \dots$  dürfen aber durchaus alle verschwinden.
3. Auch eine Laurent-Reihe kann also gliedweise differenziert werden. Die Ableitung

$$f'(z) = \dots - 2\alpha_{-2} (z - z_*)^{-3} - \alpha_{-1} (z - z_*)^{-2} + \alpha_1 + 2\alpha_2 (z - z_*) + \dots$$

ist wieder eine Laurent-Reihe und besitzt denselben Konvergenzring wie  $f$ . Beachte aber, dass in dieser Reihe der Koeffizient vor  $(z - z_*)^{-1}$  verschwindet, sodass der entsprechende Summand nicht auftaucht. Auch diese Beobachtung wird nützlich werden.

4. Im Fall von  $R_- = 0$  und  $0 < R_+ < \infty$  gilt  $A_{0,R_+}(z_*) = B_{R_+} \setminus \{z_*\}$ , d.h. der Konvergenzring ist eigentlich eine punktierte Kreisscheibe und  $f$  besitzt eine isolierte Singularität in  $z_*$ . Beachte aber, dass *Einpunktlöcher* immer noch Löcher sind. Analoge Aussagen kann man für  $R_+ = \infty$  treffen, wobei der Konvergenzring dann eine unbeschränkte Menge ist. Im Entartungsfall  $R_+ \leq R_-$  gilt  $A_{R_-,R_+}(z_*) = \emptyset$  und es gibt überhaupt keine holomorphe Funktion  $f$ . Die Aussage des Theorems ist dann zwar immer noch richtig, aber natürlich absolut nutzlos.
5. Ein besonders wichtiger Spezialfall sind Laurent-Reihen, die nur endlich viele Summanden — bzw. nur endlich viele nicht verschwindende Koeffizienten — zu negativen Exponenten enthalten. Für diese gilt  $R_- = 0$  und der Hauptteil ist ein Polynom in  $1/(z - z_*)$ .
6. Analog zu Potenzreihen gilt: Im Außengebiet des Konvergenzringes konvergiert die Laurent-Reihe in keinem Punkt, aber auf den Rändern des Konvergenzringes kann keine allgemeine Aussage getroffen werden. Auf jeder kompakten Teilmenge  $D_* \subset A_{R_-,R_+}(z_*)$  gilt darüber hinaus

$$\sup_{z \in D_*} \left| f(z) - \sum_{k=-K}^{+K} \alpha_k (z - z_*)^k \right| \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

sowie

$$\sup_{z \in D_*} \left( \sum_{k=-\infty}^{-K-1} |\alpha_k| |z - z_*|^k + \sum_{k=K+1}^{+\infty} |\alpha_k| |z - z_*|^k \right) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

und damit sogar *gleichmäßige* Konvergenz.

7. Oftmals können die Radien durch

$$R_- = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{-n-1}|}{|\alpha_{-n}|}, \quad R_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{+n}|}{|\alpha_{+n+1}|} \quad (\text{Quotientenformel})$$

oder die entsprechende Wurzelformel (Grenzwert statt größter Häufungswert im Theorem) berechnet werden. Es gibt aber Beispiele, in denen diese Grenzwerte nicht existieren und dann müssen wir mit den größten Häufungswerten arbeiten.

8. Der Beweis des Theorems macht klar, dass auch jede durch eine Laurent-Reihe definierte Funktion unendlich oft differenzierbar ist, wobei mit jedem Ableiten ein weiterer Koeffizient notwendigerweise verschwindet:

$k$	...	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	...
$f(z)$	...	$\alpha_{-4}$	$\alpha_{-3}$	$\alpha_{-2}$	$\alpha_{-1}$	$\alpha_0$	$\alpha_{+1}$	$\alpha_{+2}$	...
$f'(z)$	...	$-3\alpha_{-3}$	$-2\alpha_{-2}$	$-\alpha_{-1}$	$\boxed{0}$	$\alpha_{+1}$	$+2\alpha_{+2}$	$+3\alpha_{+3}$	...
$f''(z)$	...	$+6\alpha_{-2}$	$+2\alpha_{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$2\alpha_{+2}$	$+6\alpha_{+3}$	$+12\alpha_{+4}$	...
$f'''(z)$	...	$-6\alpha_{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$+6\alpha_{+3}$	$+24\alpha_{+4}$	$+120\alpha_{+5}$	...

### Beispiele

1. Durch

$$f(z) = \frac{2 - z^2}{(z + i)^3} = \frac{-(z + i)^2 + 2i(z + i) + 3}{(z + i)^3}$$

wird eine Laurent-Reihe im Entwicklungspunkt  $z_* = -i$  definiert, wobei nur die Koeffizienten  $\alpha_{-3} = +3$ ,  $\alpha_{-2} = 2i$  und  $\alpha_{-1} = -1$  nicht verschwinden.

Bemerkung: In diesem Beispiel gilt

$$R_- = \limsup_{n \geq 4, n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad R_+ = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} 0 = 1/0 = \infty,$$

wobei wir dieses Ergebnis alternativ auch aus der Tatsache ableiten können, dass  $f$  offensichtlich in jedem Punkt  $z \neq z_*$  wohldefiniert und komplex differenzierbar ist. Beachte außerdem, dass die Quotientenformeln hier die Terme  $0/0$  enthalten und daher nicht verwendet werden können.

2. Die Laurent-Reihe

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{24}z^{-4} + \frac{1}{120}z^{-5} + \dots$$

konvergiert absolut in jedem Punkt  $z \in A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und besitzt die Ableitung

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = 0 - z^{-2} - z^{-3} - \frac{1}{2}z^{-4} - \frac{1}{6}z^{-5} - \frac{1}{24}z^{-6} - \dots,$$

wobei diese Formel sowohl gliedweise als auch mithilfe der Kettenregel begründet werden kann.

3. Jede Möbius-Transformation ist wegen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{az_* + b}{c} \frac{1}{z - z_*}$$

eine Laurent-Reihe mit  $R_- = 0$  und  $R_+ = \infty$ , wobei der Entwicklungspunkt  $z_* = -d/c$  gerade die Polstelle von  $f$  ist und nur die Koeffizienten für  $k = -1$  und  $k = 0$  von Null verschieden sind. Umgekehrt ist jede solche Laurent-Reihe selbst Möbius-Transformation.

4. Die Joukowski-Transformation  $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$  ist eine Laurent-Reihe mit nur zwei Summanden ( $\alpha_{-1} = \alpha_{+1} = \frac{1}{2}$ ).

**Laurent-Reihen als Potenzreihen\*** Wir hatten schon vorweg genommen, dass eine holomorphe Funktion lokal als Taylor-Reihe geschrieben werden kann. Dies gilt natürlich auch für jede Laurent-Reihe, sofern der Taylorsche Entwicklungspunkt  $\zeta_*$  im Konvergenzring gewählt wird. Der Konvergenzring der resultierenden Potenzreihe ist dabei gerade die größte offene Kreisscheibe um  $\zeta_*$ , die noch ganz in  $A_{R_-, R_+}(z_*)$  enthalten ist.

Das Standardbeispiel ist hier die Laurent-Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z_* - z} \quad \text{mit} \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(z_* - z)^{n+1}},$$

die nur aus einem einzelnen Summanden (mit Koeffizient  $\alpha_{-1} = -1$ ) besteht und den Konvergenzring  $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$  besitzt. Für jedes beliebig fixierte  $\zeta_* \neq z_*$  ergibt sich nun

$$\frac{1}{z_* - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \zeta_*)^n}{(z_* - \zeta_*)^{n+1}} \quad \text{für alle } z \in B_{|z_* - \zeta_*|}(\zeta_*),$$

wobei links eine Laurent-Reihe und rechts eine Potenzreihe steht. Beide sind Funktionen in der Variablen  $z$ , aber die Entwicklungspunkte  $\zeta_*$  und  $z_*$  sind verschieden. Die Formel, die wirklich nur auf der Kreisscheibe mit Radius  $|z_* - \zeta_*|$  um  $\zeta_*$  gilt, kann entweder abstrakt als lokale Taylor-Reihe von  $f$  oder konkret durch direkte Rechnungen mit geometrischen Reihen verifiziert werden.

## 1.7 Komplexe Kurvenintegrale

**Kurven im Komplexen** Eine Abbildung  $c : I \rightarrow D$  auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  wird auch im Komplexen parametrisierte Kurve in  $D$  genannt, wobei wir die Elemente von  $I$  meist mit  $t$  bezeichnen. Existiert für festes  $t_* \in I$  der Grenzwert

$$\dot{c}(t_*) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{c(t) - c(t_*)}{t - t_*} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t_* + h) - c(t_*)}{h}$$

als Element in  $\mathbb{C}$ , so nennen wir ihn den Tangentialvektor an  $c$  in  $z_* = c(t_*)$ .

### Bemerkungen

1. Die obigen Definitionen entsprechen den analogen Konzepten im Reellen (siehe *Analysis 1-3*). Insbesondere beschreibt die Bildmenge

$$C = \{c(t) : t \in I\} = \text{spur}(c)$$

wieder das eindimensionale geometrische Objekt und wird Spur von  $c$  bzw. unparametrisierte Kurve genannt. Wir sagen auch wieder,  $c$  parametrisiert  $C$ .

2. Beachte, dass bei den Differenzenquotienten in der Grenzwertformel für  $\dot{c}(t)$  im Nenner immer eine reelle Zahl steht. Es handelt sich also eigentlich nicht um eine Ableitung im Sinne der komplexen Analysis, sondern um die reell-eindimensionale Ableitung einer vektorwertigen Funktion auf einem Intervall. In der Praxis spielt diese feinsinnige Unterscheidung aber keine große Rolle.
3. Analog zum Reellen können auch die Begriffe stetig differenzierbare Kurve und stückweise stetig differenzierbare Kurve eingeführt werden. Bei letzterer kann es endlich viele Zeiten  $t_* \in I$  geben, in denen  $\dot{c}(t)$  im obigen Sinne nicht wohldefiniert ist, da die *einseitigen* Grenzwerte

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{c(t_* + h) - c(t_*)}{h}, \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{c(t_* + h) - c(t_*)}{h}$$

zwar existieren, aber verschieden sind. Geometrisch handelt es sich dann bei  $c(t_*)$  um einen Knickpunkt.

**Alternative Notation** Physiker und Ingenieure benutzen oftmals keine explizite Parametrisierungsabbildung  $c$ , sondern schreiben einfach

$$z(t) \text{ statt } c(t) \quad \text{sowie} \quad \dot{z}(t) \text{ statt } \dot{c}(t),$$

wobei wir uns dann vorstellen, dass der Punkt  $z \in D$  sich mit der „Zeit“  $t$  ändert. Im Reellen entspricht dies den konsistenten Formeln

$$x(t) = \operatorname{Re}(z(t)), \quad y(t) = \operatorname{Im}(z(t)), \quad \dot{x}(t) = \operatorname{Re}(\dot{z}(t)), \quad \dot{y}(t) = \operatorname{Im}(\dot{z}(t)).$$

Auch wir werden manchmal diese sehr intuitive Schreibweise verwenden, wollen aber nicht vergessen, dass im Hintergrund immer eine Abbildung  $c$  steht. Wenn wir mit zwei oder mehreren Kurven arbeiten, werden wir aber meist die mathematische Notation benutzen, da man dort besser Indizes einführen kann.

**Setting** Wir betrachten im Folgenden eine komplexe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  sowie eine parametrisierte Kurve  $c : [t_a, t_e] \rightarrow D$  im Definitionsbereich  $D$  von  $f$ , die wenigstens stückweise stetig differenzierbar ist.

### Bemerkungen

1. Analog zu *Analysis 1-3* kann man auch im Komplexen von geschlossenen Wegen und von Doppelpunkten reden. Im ersten Fall gilt  $c(t_a) = c(t_e)$  und im zweiten Fall gibt es zwei Zeiten  $t_a \leq t_1 < t_2 < t_e$  mit  $c(t_1) = c(t_2)$ .
2. Da  $D$  offen ist, besitzt die Spur der Kurve, das ist die Menge

$$C = \operatorname{spur}(c) = \{c(t) : t_a \leq t \leq t_e\} \subset D,$$

immer einen *positiven* Abstand vom Rand  $\partial D$ . Diese einleuchtende Beobachtung wird für alle nachfolgenden Betrachtungen sehr wichtig sein, obwohl wir meist nicht mehr explizit darauf hinweisen werden.

## 3. Die Abbildung

$$c(t) = z_* + \varrho \exp(i t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

nennen wir die Standardparametrisierung der Kreislinie  $\partial B_\varrho(z_*)$ . Sie beschreibt, dass die Kreislinie genau einmal entgegen dem Uhrzeigersinn (und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) durchlaufen wird.



**Abbildung** Vier Integrationswege in einem Gebiet mit Loch, wobei die jeweilige Durchlaufrichtung durch die Pfeile angedeutet wird. Beachte, dass eine Kurve in Knickpunkten nicht differenzierbar ist.

**Definition** Die komplexe Zahl

$$\int_c f(z) dz = \int_{t_a}^{t_e} f(c(t)) \dot{c}(t) dt$$

wird als das komplexe Kurvenintegral von  $f$  entlang von  $c$  bezeichnet.

**Bemerkungen**

1. Die geometrische und physikalische Bedeutung des komplexen Kurvenintegrals sowie seine Beziehung zu den reellen Kurvenintegralen aus *Analysis 1-3* werden wir später genauer studieren.
2. Statt *Kurvenintegral* kann man auch *Wegintegral* sagen, wobei dann  $c$  der *Weg* bzw. der *Integrationsweg* genannt wird.
3. Der Integrand auf der rechten Seite ist als Produkt komplexer Zahlen wieder eine komplexe Zahl. Das Integral bzgl.  $t$  ist daher das reell-eindimensionale Integral einer komplexwertigen Funktion auf dem Intervall  $[t_a, t_e]$  und kann zum Beispiel mit Hilfe von Riemann-Summen approximiert werden.
4. zur alternativen Notation: Schreiben wir entlang des Integrationsweges  $z(t)$  statt  $c(t)$ , so kann die Definition des komplexen Kurvenintegrals als

$$\int_c f(z) dz = \int_{t_a}^{t_e} f(z(t)) \dot{z}(t) dt,$$

geschrieben werden, wobei diese Formel aufgrund der formalen Substitutionsregel

$$dz = \dot{z} dt$$

als Variante des Transformationsatzes für Integrale verstanden werden kann. Betrachten wir allerdings mehr als einen Integrationsweg (was wir häufig tun werden), so ist die mathematische Notation vorzuziehen.

5. In der Literatur gibt es verschiedene Notationen für Wege und Integrale, die aber natürlich alle äquivalent sind. Manche Autoren benutzen zum Beispiel die Sondernotation  $\oint_c f(z) dz$ , um Kurvenintegrale über einen *geschlossenen* Weg  $c$  auszuzeichnen. Wir werden dies aber in dieser Vorlesung nicht tun.
6. Die Bildung des Kurvenintegrals ist eine lineare Operation bzgl.  $f$ , d.h. es gilt

$$\int_c (\mu_1 f_1(z) + \mu_2 f_2(z)) dz = \mu_1 \int_c f_1(x) dz + \mu_2 \int_c f_2(x) dz$$

für je zwei Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  auf  $D$  und alle Faktoren  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ .

### Beispiele

1. Für  $f(z) = z^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und die Standardparametrisierung der Kreislinie  $\partial B_\rho(0)$ , d.h.  $c(t) = \rho \exp(i t)$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \left( \rho^n \exp(i n t) \right) \left( \rho i \exp(i t) \right) dt \\ &= i \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} \exp(i(n+1)t) dt = i \rho^{n+1} \left[ \frac{\exp(i(n+1)t)}{i(n+1)} \right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n+1} \left( \exp(i 2\pi(n+1)) - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, warum wir das auch ohne explizite Rechnungen hätten wissen können.

2. Wir betrachten nun  $f(z) = \bar{z}^n$ , wieder mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $c$  wie oben. Im Fall von  $n = 1$  ergibt sich

$$\int_c f(z) dz = \int_0^{2\pi} \left( \rho \exp(-i t) \right) \left( \rho i \exp(i t) \right) dt = i \rho^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \rho^2 i,$$

wohingegen  $n > 1$  analog zu oben

$$\int_c f(z) dz = i \rho^{n+1} \left[ \frac{\exp(i(1-n)t)}{i(1-n)} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

impliziert. Beachte, dass diesmal die Funktion  $f$  nicht holomorph ist.

3. Die Spur des parametrisierten Weges

$$c(t) = \exp((1+i)t), \quad t \in [0, T]$$

ist das Segment einer Kreisspirale und direkte Rechnungen zeigen

$$\begin{aligned} \int_c z dz &= \int_0^T \left( e^{(1+i)t} \right) \left( (1+i) e^{(1+i)t} \right) dt \\ &= (1+i) \int_0^T e^{(2+2i)t} dt = \frac{1}{2} \left[ e^{(2+2i)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{2} (e^{4\pi} - 1). \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, wie man auch dieses Ergebnis anders, d.h. ohne direkte Berechnung der Integrale, herleiten kann.

4. Wir integrieren  $f(z) = |z|^2$  über die zwei Wege

$$c_1(t) = \exp(i t) \quad \text{mit } t \in [0, \pi], \quad c_2(t) = -t \quad \text{mit } t \in [-1, +1],$$

die beide den Punkt  $-1$  mit dem Punkt  $+1$  auf unterschiedliche Art (Halbkreis bzw. Strecke) verbinden. Direkte Rechnungen liefern mit

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_0^\pi i \exp(i t) dt = - \int_0^\pi \sin(t) dt + i \int_0^\pi \cos(t) dt = -2$$

und

$$\int_{c_2} f(z) dz = \int_{-1}^1 -t^2 dt = - \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_{t=-1}^{t=+1} = -\frac{2}{3}$$

unterschiedliche Ergebnisse, d.h. das Kurvenintegral einer gegebenen Funktion  $f$  hängt im Allgemeinen nicht nur von Anfangs- und Endpunkt, sondern vom gesamten Integrationsweg ab.

## Elementare Eigenschaften von Kurvenintegralen

**Verhalten unter Reparametrisierungen** Eine Kurve  $\check{c} : [\check{t}_a, \check{t}_e] \rightarrow D$  wird orientierungserhaltende Reparametrisierung von  $c : [t_a, t_e] \rightarrow D$  genannt, wenn es zwei streng monoton wachsende und zueinander inverse Funktionen

$$h : [\check{t}_a, \check{t}_e] \rightarrow [t_a, t_e], \quad \check{h} = h^{-1} : [t_a, t_e] \rightarrow [\check{t}_a, \check{t}_e]$$

gibt, sodass

$$\check{c}(\check{t}) = c(h(\check{t})) \quad \text{und} \quad c(t) = \check{c}(\check{h}(t))$$

für alle  $t \in [t_a, t_e]$  und alle  $\check{t} \in [\check{t}_a, \check{t}_e]$  gilt, wobei dies insbesondere via

$$c(t_a) = \check{c}(\check{t}_a), \quad c(t_e) = \check{c}(\check{t}_e)$$

die Gleichheit der Anfangs und der Endpunkt impliziert. Dasselbe Konzept hatten wir schon in *Analysis 3* verwendet und auch diesmal können wir mit der Kettenregel sowie der Transformationsformel für eindimensionale Integrale die Gleichheit

$$\int_c f(z) dz = \int_{\check{c}} f(z) dz$$

nachrechnen.

Bei einer orientierungswechselnden Reparametrisierung sind die Funktionen  $h$  und  $\check{h}$  immer noch invers zueinander, aber jeweils streng monoton fallend. In diesem Fall werden Anfangs- und Endpunkt via

$$c(t_a) = \check{c}(\check{t}_e), \quad c(t_e) = \check{c}(\check{t}_a)$$

vertauscht und beide Kurvenintegrale unterscheiden sich im Vorzeichen.

**Beispiele**

1. Neben der Standardparametrisierung  $c$  können wir auch

$$\check{c}(\check{t}) = \varrho \exp \left( i \left( \check{t} + \frac{1}{2} \sin(\check{t}) \right) \right), \quad \check{t} \in [0, 2\pi]$$

als Parametrisierung der Kreislinie  $\partial B_\varrho(0)$  verwenden, wobei die Orientierung bzw. der Durchlaufsinne erhalten bleibt. Bzgl. der neuen Zeit  $\check{t}$  wird aber die Kreislinie nicht mehr mit uniformer, sondern nun mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit durchlaufen. In diesem Beispiel können wir keine explizite Formel für die Umkehrung des Parameterwechsel

$$t = h(\check{t}) = \check{t} + \frac{1}{2} \sin(\check{t})$$

angeben, aber es ist klar, dass  $\check{h}$  wegen der Monotonie von  $h$  existiert (beachte, dass  $\frac{1}{2} \leq \frac{d}{d\check{t}}h(\check{t}) \leq \frac{3}{2}$  für alle  $\check{t} \in [0, 2\pi]$  gilt).

2. Wird die orientierungswechselnde Reparametrisierung

$$t = h(\check{t}) = 2\pi - 2\check{t}, \quad \check{t} = h(t) = \pi + \frac{1}{2}t$$

auf die Standardparametrisierung  $c$  von  $\partial B_\varrho(0)$  angewendet, so erhalten wir

$$\check{c}(t) = \varrho \exp(-i 2\check{t}), \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei diese Formel beschreibt, dass die Kreislinie diesmal im Uhrzeigersinn und zusätzlich mit verdoppelter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird. Durch direkte Rechnungen erhalten wir

$$\int_{\check{c}} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{-i 2 \exp(-i 2\check{t})}{\exp(-i 2\check{t})} d\check{t} = -2i \int_0^\pi d\check{t} = -2\pi i = - \int_c \frac{dz}{z}$$

und haben damit für dieses einfache Beispiel nachgerechnet, dass sich unter der Reparametrisierung nur das Vorzeichen des Kurvenintegrals geändert hat.<sup>5</sup>

**Notation** Wegen der Invarianz unter Reparametrisierung ist auch das komplexe Kurvenintegral eine geometrische Größe, die nur von  $f$ , der unparametrisierten Kurve  $C = \text{spur}(c)$  und der gewählten Orientierung, aber nicht von den Details der Parametrisierungsabbildung  $c$  abhängt. Bei einfachen geschlossenen Integrationswegen (Kreise, Ellipsen, Polygone usw.) schreiben wir daher oftmals

$$\int_C f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_c f(z) dz,$$

wobei wir dann immer stillschweigend voraussetzen, dass  $C$  genau einmal mit *positiver Orientierung* (also entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Beachte aber, dass wir immer dann eine entsprechende Abbildung  $c$  brauchen, wenn wir den Wert des Kurvenintegrals berechnen wollen.

<sup>5</sup>Wir haben hier die abkürzende Schreibweise

$$\int_c \frac{dz}{z} = \int_c \frac{1}{z} dz$$

verwendet.



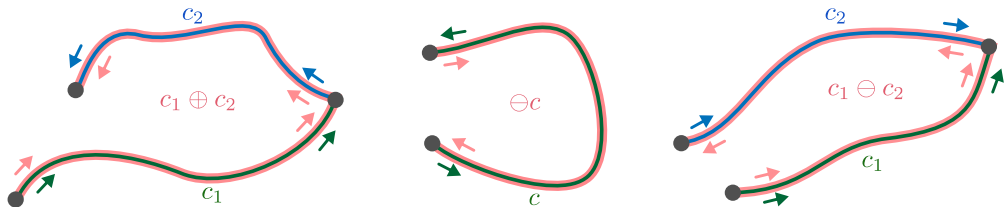
**Verhalten bei Kurvenoperationen** Analog zu *Analysis 3* können wir die Formeln

$$\int_{c_1 \oplus c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz, \quad \int_{c_1 \ominus c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz - \int_{c_2} f(z) dz$$

ableiten, wobei die Operationen  $\oplus$  und  $\ominus$  im Bild illustriert sind. Den Spezialfall

$$\int_{\ominus c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$$

hatten wir schon bei der Reparametrisierung diskutiert.



**Abbildung** Die Addition und Subtraktion von Kurven kann analog zu den reellen Konzepten aus *Analysis 3* auch für Integrationswege im Komplexen verwendet werden.

**Standardabschätzung** Die Theorie der Integrale in einer reellen Variablen (siehe *Analysis 1*) impliziert

$$\left| \int_{t_a}^{t_e} f(c(t)) \dot{c}(t) dt \right| \leq \int_{t_a}^{t_e} |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt \leq \left( \sup_{t \in [t_a, t_e]} |f(c(t))| \right) \left( \int_{t_a}^{t_e} |\dot{c}(t)| dt \right)$$

und weil das Integral auf der rechten Seite gerade die Länge  $L(c)$  von  $c$  ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \left( \sup_{z \in C} |f(z)| \right) \text{len}(c),$$

die sich oftmals als nützlich erweisen wird.

**Achtung** Im Allgemeinen gilt

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \not\leq \int_c |f(z)| dz,$$

d.h. die *Dreiecksungleichung für Integrale* darf im Komplexen **nicht** verwendet werden. Das Standardbeispiel in diesem Zusammenhang ist

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \text{mit} \quad \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{|z|} = 0,$$

wobei wir die erste Formel gleich berechnen werden und die zweite sich wegen  $|z| = 1$  für  $z \in \partial B_1(0)$  aus der Nebenrechnung

$$\int_{\partial B_1(0)} 1 dz = \int_0^{2\pi} i \exp(it) dt = - \int_0^{2\pi} \sin(t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = 0 + 0i$$

ergibt.

## Fundamentale Beobachtungen für komplexe Kurvenintegrale

**Kurvenintegrale und Ableitungen** Besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = F'(z) \quad \text{für alle } z \in D,$$

so gilt

$$\int_c f(z) dz = F(c(t_e)) - F(c(t_a)),$$

d.h. das Kurvenintegral hängt nur vom Anfangspunkt  $c(t_a)$  und vom Endpunkt  $c(t_e)$ . Diese Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt via

$$f(c(t)) \dot{c}(t) = F'(c(t)) \dot{c}(t) = \frac{d}{dt} F(c(t))$$

mithilfe der Kettenregel sowie der Integrationsgesetze aus *Analysis 1*. Allerdings besitzt — wie wir noch verstehen werden — nicht jede komplexe Funktion eine Stammfunktion.

**Achtung** Wir benutzen im Komplexen **nicht** die Notation  $F(z) = \int f(z) dz$  (unbestimmtes Integral) für eine Stammfunktion. Oder anders gesagt: Im Komplexen integrieren wir Funktionen immer über Kurven bzw. Integrationswege.

**Sprechweise** Wir nennen den Term  $(z - z_*)^k$  mit ganzzahligem Exponenten  $k \in \mathbb{Z}$  das  $k$ -te (verallgemeinerte) Monom im Entwicklungspunkt  $z_*$ .

**Monome mit Exponent  $k \neq -1$**  Ein Standardbeispiel für die Berechnung komplexer Kurvenintegraler mittels Stammfunktionen ist

$$f(z) = (z - z_*)^k = F'(z) \quad \text{mit} \quad F(z) = \frac{(z - z_*)^{k+1}}{k+1},$$

wobei  $z_* \in \mathbb{C}$  ein beliebiger Punkt und  $k \in \mathbb{Z}$  ein ganzzahliger Exponent mit  $k \neq -1$  sind. In diesem Fall erhalten wir

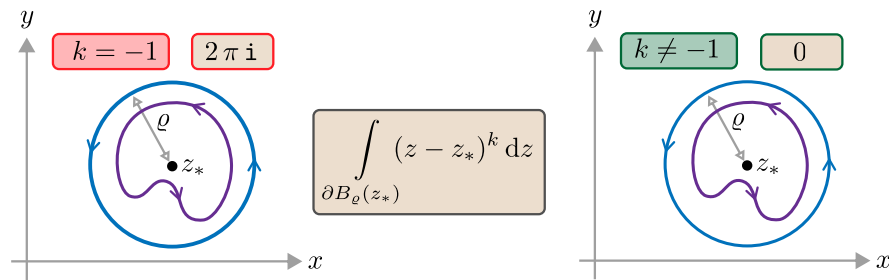
$$\int_c (z - z_*)^k dz = 0$$

für *jeden geschlossenen* Integrationsweg in der punktierten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{z_*\}$ .

**Sonderrolle des Monoms mit Exponent  $k = -1$**  Die Überlegungen von oben gelten *nicht* für  $k = -1$ , wobei wir das im Moment noch nicht für eine beliebige Kurve, sondern nur für die Kreiswege genauer untersuchen wollen, die die Polstelle  $z_*$  genau einmal in mathematisch positiver Orientierung umlaufen. Mit der Standardparametrisierung von  $\partial B_\varrho(z_*)$  berechnen wir

$$\int_{\partial B_\varrho(z_*)} \frac{dz}{z - z_*} = \int_0^{2\pi} \exp(-it) i \exp(+it) dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i,$$

d.h. das Kurvenintegral verschwindet nicht mehr, sondern nimmt den Wert  $2\pi i$  an (und zwar für alle Radien  $\varrho > 0$ ). Diese Formel ist ausgesprochen wichtig und wird weitreichende Konsequenzen haben.



**Abbildung** Das Fundamentalintegral (braune Box). Wird ein Monom über einen geschlossenen Kreisweg (blau) um den Entwicklungspunkt  $z_*$  integriert, so hängt das Ergebnis nicht vom Radius  $\rho$ , aber ganz entscheidend vom Exponenten  $k$  ab. Die gleichen Ergebnisse gelten auch für kompliziertere Wege (lila), sofern diese  $z_*$  genau einmal und entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen. Der Beweis der verallgemeinerten Aussage ist aber für  $k = -1$  mangels einer Stammfunktion deutlich schwieriger als im Fall von  $k \neq -1$ .

**Konsequenz für Laurent-Reihen und Potenzreihen** Ist  $f$  eine Laurent-Reihe und  $\rho$  ein beliebiger Radius mit  $R_- < r < R_+$ , so erhalten wir

$$\int_{\partial B_\rho(z_*)} f(z) dz = \int_{\partial B_\rho(z_*)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - z_*)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \int_{\partial B_\rho(z_*)} (z - z_*)^k dz = 2\pi \alpha_{-1} i,$$

wobei wir benutzt haben, dass in der letzten Reihe nur der Term für  $k = -1$  einen von Null verschiedenen Betrag liefert und wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz einer Laurent-Reihe auf jeder kompakten Teilmenge ihres Konvergenzringes die Summation und die Integration vertauschen dürfen. Analog können wir für eine Potenzreihe zeigen, dass das entsprechende Kurvenintegral verschwindet (da dann  $\alpha_{-1} = 0$  gilt).

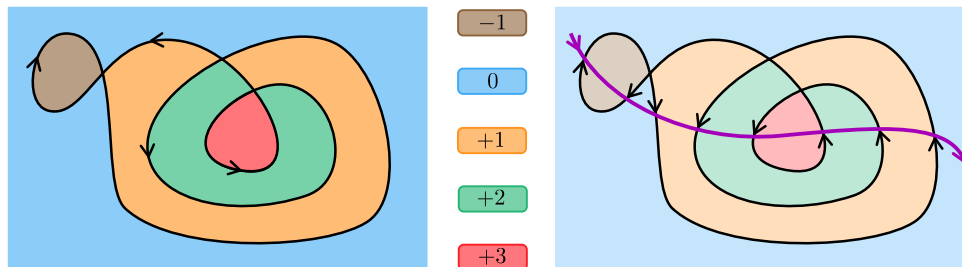
Ausblick: Wir werden später sehen, dass eine analoge Formel in einem allgemeineren Zusammenhang gilt und eine effektive Berechnung komplizierter Kurvenintegrale erlaubt.

## 1.8 Windungszahlen

**Theorem (spezielles Kurvenintegral)** Sei  $c : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{C}$  eine geschlossene und stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur  $C = \text{spur}(c)$ . Dann wird durch

$$\text{wnd}_c(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - \zeta}$$

eine Funktion  $\text{wnd} : \mathbb{C} \setminus C \rightarrow \mathbb{Z}$  definiert, die nur ganzzahlige Werte annimmt und auf jeder Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereiches konstant ist. Außerdem gilt  $\text{wnd}_c(\zeta) = 0$  für alle  $\zeta \in \mathbb{C}$ , deren Betrag hinreichend groß ist.



**Abbildung** Links: Illustration der Windungszahl für eine gegebene Kurve  $c$  mit Spur  $C$  (schwarz). Die Werte von  $\text{wnd}_c$  sind immer ganzzahlig und konstant auf jeder Komponente der Komplementärmenge von  $C$ . So gilt zum Beispiel  $\text{wnd}_c(\zeta) = +3$  für jedes  $\zeta$  aus der roten Menge. Rechts: Bewegen wir  $\zeta$  entlang einer gedachten Kurve  $\gamma$  (lila), so erhöht bzw. verringert sich die Windungszahl immer dann, wenn die Kurve  $c$  die Kurve  $\gamma$  von links bzw. von rechts trifft, wobei die Änderung gerade  $+1$  bzw.  $-1$  ist. Dabei darf die lila Kurve durch keine Doppel- oder andere Mehrfachpunkte der schwarzen Kurve laufen, da sonst entsprechende Sonderregeln formuliert werden müssten. Außerdem sollten sich die schwarze und die lila Kurve immer in einem nicht-entarteten Winkel schneiden.

**Beweis** Wir nehmen an, dass  $c$  sogar stetig differenzierbar ist; der allgemeine Beweis kann mit leichten Modifikationen analog geführt werden.

**Wertebereich:** Wir fixieren  $\zeta \notin C$ , definieren die Funktion  $g : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{C}$  durch das (reelle, aber komplexwertige) Integral

$$g(t) := \exp \left( \int_{t_a}^t \frac{\dot{c}(s)}{c(s) - \zeta} ds \right)$$

und berechnen

$$\dot{g}(t) = g(t) \frac{\dot{c}(t)}{c(t) - \zeta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{g(t)}{c(t) - \zeta} = \frac{\dot{g}(t)(c(t) - \zeta) - g(t)\dot{c}(t)}{(c(t) - \zeta)^2} = 0$$

unter Verwendung der Rechenregeln der reellen Differentiation. Mit  $g(t_a) = 1$  und  $c(t_e) = c(t_a)$  ergibt sich

$$g(t_e) = \frac{c(t_e) - \zeta}{c(t_a) - \zeta} g(t_a) = 1$$

und wegen

$$\exp(2\pi i \operatorname{wnd}_c(\zeta)) = g(t_e) = 1,$$

schließen wir (siehe auch die \*-Hausaufgabe der nullten Serie), dass die komplexe Zahl  $\operatorname{wnd}_c(\zeta)$  wirklich in  $\mathbb{Z}$  liegt.

*Stetigkeit und Abklingen:* Sei  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus C$  eine gegebene Folge, die für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\zeta_\infty \in \mathbb{C} \setminus C$  konvergiert. Die Rechenregeln sowie die Standardabschätzung für Kurvenintegrale garantieren

$$\begin{aligned} 2\pi |\operatorname{wnd}_c(\zeta_n) - \operatorname{wnd}_c(\zeta_\infty)| &= \left| \int_c \frac{\zeta_n - \zeta_\infty}{(z - \zeta_n)(z - \zeta_\infty)} dz \right| \\ &\leq \operatorname{len}(c) |\zeta_n - \zeta_\infty| \sup_{z \in C} \frac{1}{|z - \zeta_n| |z - \zeta_\infty|} \\ &\leq \frac{|\zeta_n - \zeta_\infty|}{\operatorname{dist}(\zeta_n, C) \operatorname{dist}(\zeta_\infty, C)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\operatorname{dist}(\zeta, C) := \inf \{ |\zeta - z| : z \in C \}$$

den Abstand des Punktes  $\zeta$  von der Menge  $C$  bezeichnet und

$$\operatorname{dist}(\zeta_n, C) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{dist}(\zeta_\infty, C) > 0$$

gilt (siehe *Analysis 2*). Insgesamt haben wir gezeigt, dass die Funktion  $\operatorname{wnd}_c$  stetig auf ihrem Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus C$  ist und dabei nur ganzzahlige Werte annimmt. Standardargumente für stetige Funktionen implizieren nun die erste Behauptung und die zweite ergibt sich via

$$|\operatorname{wnd}_c(\zeta)| \leq \frac{\operatorname{len}(c)}{\operatorname{dist}(\zeta, C)} \xrightarrow{|\zeta| \rightarrow \infty} 0$$

wiederum aus der Standardabschätzung und dem diskreten Wertebereich.  $\square$

### Bemerkungen

1. Die ganze Zahl  $\operatorname{wnd}_c(\zeta)$  nennen wir die Windungszahl von  $c$  bzgl.  $\zeta$ , wobei wir diese Namensgebung gleich genauer erklären werden. Sie wird oftmals auch Umlaufzahl genannt, aber in jedem Fall beschreibt sie eine Relation zwischen einer Kurve *und* einem Punkt.

*Bemerkung\*:* In der planaren Geometrie gibt es ein ähnliches Konzept, das aber nur eine (reguläre und zweimal stetig differenzierbare) Kurve, aber keinen Punkt braucht. Die entsprechende ganze Zahl ist gerade

$$\operatorname{wnd}_{\dot{c}}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{c}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_a}^{t_e} \frac{\ddot{c}(t)}{\dot{c}(t)} dt$$

und quantifiziert die Anzahl der Drehungen, die der Tangentialvektor bei einem Kurvendurchlauf vollführt (daher  $\dot{c}$  statt  $c$ ).

2. Der Term  $\text{wnd}_c(\zeta)$  ist für  $\zeta \in C$  nicht definiert. Dies ist sehr einleuchtend, da so ein Punkt ja gerade auf der Grenze zwischen zwei Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{C} \setminus C$  liegt. Etwas formaler sieht man das auch daran, dass in diesem Fall die Polstelle des Integranden gerade auf dem Integrationsweg  $C$  liegt und das entsprechende reelle Integral daher nicht wohldefiniert ist.
3. Man kann die Integralformel der Windungszahl auf mehrere Weisen schreiben, zum Beispiel auch als

$$\text{wnd}_c(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - z_*} \quad \text{oder} \quad \text{wnd}_c(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Wichtig ist nur, dass im Integral die Integrationsvariable anders als der Parameter bezeichnet wird, wobei letzterer gerade die Variable von  $\text{wnd}_c$  ist.

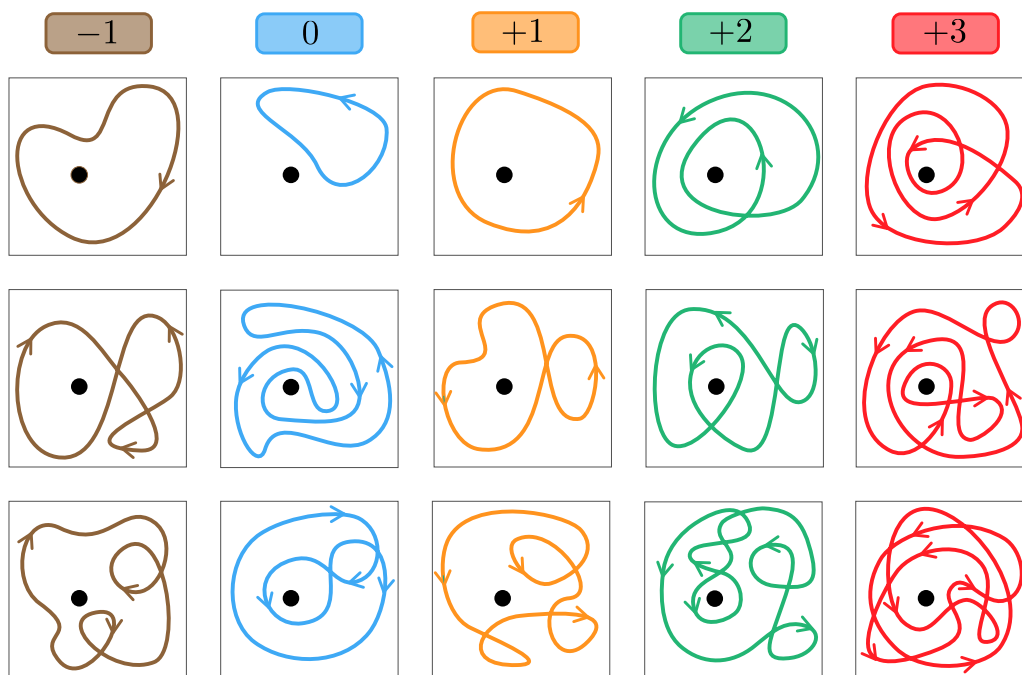
4. In der Praxis werden wir Windungszahlen in aller Regel mit anderen Methoden bestimmen (siehe weiter unten), aber im Hintergrund stehen immer komplexe Integrale. Insbesondere ergeben sich die Formeln

$$\text{wnd}_{c_1 \oplus c_2}(\zeta) = \text{wnd}_{c_1}(\zeta) + \text{wnd}_{c_2}(\zeta)$$

und

$$\text{wnd}_{\ominus c}(\zeta) = -\text{wnd}_c(\zeta), \quad \text{wnd}_{c_1 \ominus c_2}(\zeta) = \text{wnd}_{c_1}(\zeta) - \text{wnd}_{c_2}(\zeta)$$

aus den Rechenregeln für komplexe Kurvenintegrale.



**Abbildung** Eine andere Sicht auf die Windungszahl: Diesmal halten wir den Punkt  $\zeta$  fest (schwarz) und zeichnen für jede Windungszahl jeweils drei typische Kurven  $c$ , sodass  $\text{wnd}_c(\zeta)$  den vorgegebenen Wert besitzt. Wir können für jede Kurve die entsprechende Windungszahl von  $\zeta$  dadurch bestimmen, dass wir im Geiste die Kurve  $c$  durchlaufen und die Anzahl der echten Umrundungen mit  $(-1)$  bzw. gegen  $(+1)$  den Uhrzeigersinn mitzählen und aufaddieren, wobei wir am besten in einem Doppelpunkt anfangen (sofern vorhanden). Siehe dazu auch die relativen Polarkoordinaten. Alternativ können wir auch einen beliebigen lila Weg betrachten, der ganz weit draußen (wo die Windungszahl den Wert 0 annimmt) beginnt, in  $\zeta$  endet und unterwegs keine Doppelpunkte trifft. Entlang dieses gedachten Weges können wir die Änderung der Windungszahl wie im ersten Bild beschrieben durch sukzessives Inkrementieren bzw. Dekrementieren ermitteln.

**Windungszahl und relative Polarkoordinaten** Wir können leicht einsehen, dass das Kurvenintegral im Theorem wirklich die Interpretation einer Windungszahl besitzt, sofern wir

$$c(t) = \zeta + r(t) \exp(i \varphi(t))$$

schreiben. Dabei sind  $r > 0$  und  $\varphi$  die zeitabhängigen Polarkoordinaten von  $z - \zeta$  und die Schließungsbedingung  $c(t_e) = c(t_a)$  ist äquivalent zu

$$r(t_e) = r(t_a), \quad \varphi(t_e) = \varphi(t_a) \pmod{2\pi},$$

wobei letzteres

$$\varphi(t_e) = \varphi(t_a) + 2\pi m$$

für eine ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  meint. Damit ergibt sich

$$\dot{c}(t) = \dot{r}(t) \exp(i \varphi(t)) + i r(t) \dot{\varphi}(t) \exp(i \varphi(t))$$

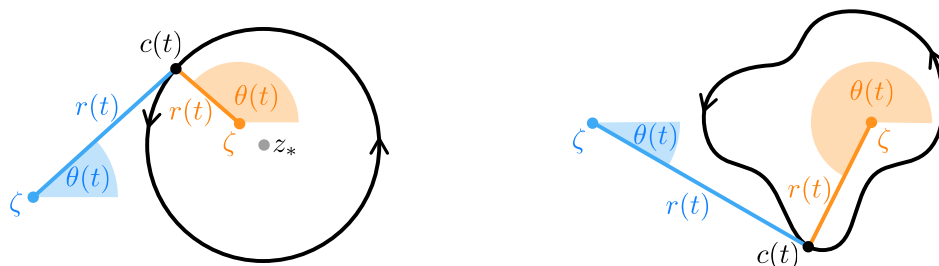
und wir erhalten

$$\begin{aligned} i 2\pi \operatorname{wnd}_c(\zeta) &= \int_{t_a}^{t_e} \frac{\dot{r}(t) + i r(t) \dot{\varphi}(t)}{r(t)} dt = \left( \int_{t_a}^{t_e} \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} dt \right) + i \left( \int_{t_a}^{t_e} \dot{\varphi}(t) dt \right) \\ &= \left( \ln(r(t_e)) - \ln(r(t_a)) \right) + i \left( \varphi(t_e) - \varphi(t_a) \right) \\ &= 0 + i 2\pi m \end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{wnd}_c(\zeta) = m = \frac{\theta(t_e) - \theta(t_a)}{2\pi}.$$

Mit etwas Übung kann man bei einer gegebenen Kurve den Wert von  $m$  bzw. die Winkeldifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve direkt aus graphischen Darstellungen ablesen (siehe die Bilder und die Animation).



**Abbildung** Die Windungszahl  $\operatorname{wnd}_c(\zeta)$  beschreibt, wie oft die Kurve  $c$  sich um den Punkt  $\zeta$  windet. Sie kann mithilfe der relativen Polarkoordinaten von Kurvenpunkten berechnet werden und entspricht — bis auf den Faktor  $2\pi$  — der Winkeldifferenz, die sich bei einem Durchlauf der Kurve ergibt. Dargestellt sind zwei verschiedene, aber sehr einfache Kurven (links und rechts) sowie jeweils zwei Wahlen für  $\zeta$  (blau bzw. orange), für die sich die Windungszahlen 0 bzw. +1 ergeben.

**Standardbeispiel** Ein wichtiger, wenngleich auch entarteter, Fall sind die Wege

$$c_{\pm n}(t) = z_* + \varrho \exp(\pm i n t),$$

mit Parameter  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $c_{-n}$  bzw.  $c_{+n}$  die Kreislinie  $S_\varrho(z_*)$  genau  $n$  mal mit negativer bzw. positiver Orientierung durchläuft. Im Punkt  $\zeta = z_*$  entspricht dies den relativen Polarfunktionen

$$r_{\pm n}(t) = \varrho, \quad \varphi_{\pm n}(t) = \pm n t$$

und mit den eben abgeleiteten Formeln (oder alternativ durch direkte Berechnung des entsprechenden Kurvenintegrals) erhalten wir das nicht überraschende Ergebnis

$$\text{wnd}_{c_{\pm n}}(z_*) = \pm n.$$

Ganz allgemein gilt

$$\text{wnd}_{c_{\pm n}}(\zeta) = \begin{cases} \pm n & \text{falls } |\zeta - z_*| < \varrho, \\ 0 & \text{falls } |\zeta - z_*| > \varrho, \end{cases}$$

aber die formalen Rechnungen sind für  $\zeta \neq z_*$  alles andere als einfach, da man erst via

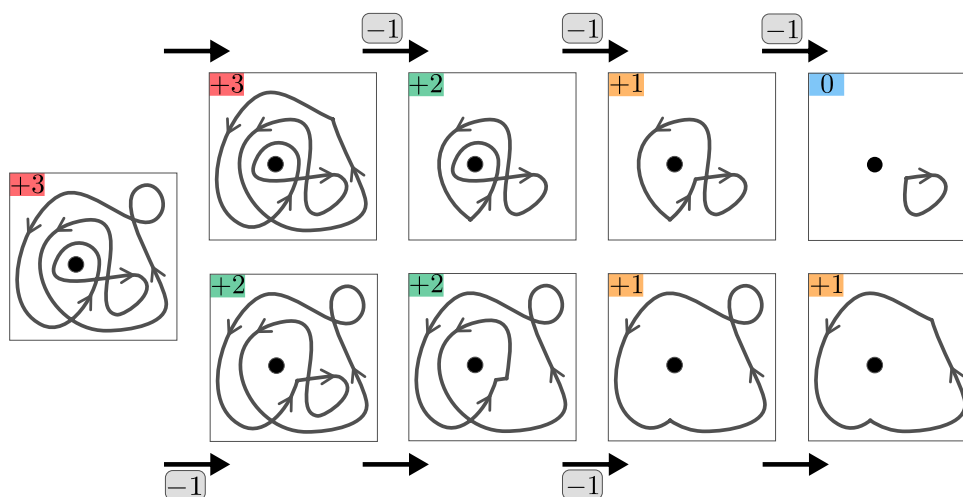
$$z_* + \varrho \exp(\pm i n t) = \zeta + r_{\pm n}(t) \exp(i \varphi_{\pm n}(t))$$

die entsprechenden Polarfunktionen (die ja nun relativ zu  $\zeta$  und nicht mehr relativ zu  $z_*$  zu wählen sind) bestimmen muss. Wir können uns aber im Bild durch Scharfes Hinsehen klar machen, dass für jedes  $\zeta$  innerhalb der Kugel  $B_\varrho(z_*)$  die Winkeldifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt weiterhin  $\pm 2\pi n$  sein muss, wohingegen für jeden äußeren Punkt  $\zeta$  von  $B_\varrho(z_*)$  wirklich  $\varphi(t_e) = \varphi(t_a)$  gilt. Außerdem werden wir später sehen, wie die obige Formel für  $\zeta \neq z_*$  sehr elegant aus dem Residuensatz abgeleitet werden kann.

**alternative Bestimmung von Windungszahlen** Es gibt vier verschiedene, aber jeweils äquivalente Möglichkeiten, die Windungszahl für eine gegebene geschlossene Kurve  $c$  und einen festgehaltenen Punkt  $\zeta$  zu ermitteln, wobei drei davon ohne größere Rechnungen auskommen:

1. Berechnung des entsprechenden Kurvenintegrals, aber diese Methode ist in der Regel nicht wirklich praktikabel.
2. Bestimmung mit Hilfe relativer Polarkoordinaten, wobei dies oftmals mit Hilfe der geometrischen Anschauung gelingt (siehe das zweite und das dritte Bild in diesem Abschnitt sowie die Animation).
3. Verschieben von  $\zeta$  entlang einer gedachten Kurve, wobei die sukzessive Änderung der Windungszahl in Kollisionen protokolliert wird (erstes Bild rechts).
4. Schrittweise Eliminierung von Doppelpunkten und anschließende Rekonstruktion der Windungszahl (viertes Bild).



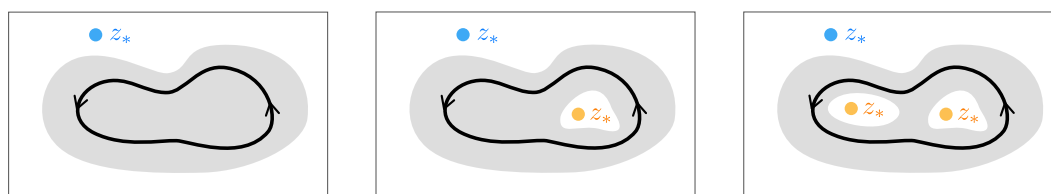


**Abbildung** Wir können Windungszahlen sehr verknäulter Kurven auch wie folgt ermitteln: Wir vereinfachen die Kurve schrittweise, indem wir in einem Doppelpunkt eine geschlossene Teilkurve herauschneiden und die Windungszahl ggf. erniedrigen (um die Windungszahl des entfernten Teils). Nach endlich vielen Schritten sind alle Doppelpunkte eliminiert und wir können die Windungszahl der vereinfachten Endkurve ablesen, aus der wir dann die der Ursprungskurve rückwärts rekonstruieren können (farbige Zahlen). Es gibt natürlich viele Möglichkeiten, die Teilstücke nacheinander zu wählen, aber jede Variante wird am Ende dasselbe Ergebnis liefern. Im Bild gilt zum Beispiel  $\text{wnd}_c(z_*) - 3 = 0$  oben bzw.  $\text{wnd}_c(z_*) - 2 = 1$  unten und damit immer  $\text{wnd}_c(z_*) = 3$ .

**Windungszahl und einfacher Zusammenhang** Man kann mit Windungszahlen auch den einfachen Zusammenhang von Mengen  $G \subset \mathbb{C}$  charakterisieren, denn die folgenden vier Aussagen sind paarweise äquivalent:

1.  $G$  ist einfach zusammenhängend, d.h. es gibt keine Löcher in  $G$ .<sup>6</sup>
2. Die Komplementärmenge  $\mathbb{C} \setminus G$  ist zusammenhängend, d.h. sie besteht nur aus einem, aber nicht aus zwei oder mehreren separierten Teilen.
3. Der Rand  $\partial G$  von  $G$  (d.h. die Menge der Randpunkte) besteht auch nur aus einem zusammenhängenden Teil.
4. Es gilt  $\text{wnd}_c(z_*) = 0$  für jede geschlossene Kurve in  $G$  und jeden Punkt  $z_* \notin G$  (Nullhomologie).

**Achtung:** Das Konzept des einfachen Zusammenhangs ist im  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq 3$  deutlich subtiler (siehe dazu *Analysis 3*).



**Abbildung** Besitzt die Menge  $G$  (grau) ein oder mehrere Löcher, so gibt es geschlossene Kurven  $c$  in  $G$  (schwarz) sowie Punkte  $z_*$  außerhalb von  $G$  (orange), so dass  $\text{wnd}_c(z_*) \neq 0$  gilt. Beachte auch, dass der Rand  $\partial G$  in den drei Beispielen durch eine, zwei bzw. drei Kurven beschrieben werden kann.

<sup>6</sup>Siehe *Analysis 3* für eine präzise Definition.

**Beobachtung und Definition** Der Rand einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge  $G \subset \mathbb{C}$  kann oftmals durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve  $c$  parametrisiert werden, die  $\partial G$  genau einmal in mathematisch positiver Orientierung umrundet (wobei dann  $\partial G = C = \text{spur}(c)$  gilt und keine Doppelpunkte auftreten). In diesem Fall sprechen wir von einem regulären Rand und schreiben dann auch

$$\text{wnd}_{\partial G}(z_*) \quad \text{statt} \quad \text{wnd}_c(z_*),$$

da ja aufgrund der Invarianz von Kurvenintegralen unter Reparametrisierungen das Ergebnis nicht von den Details der Abbildung  $c$  abhängt. Insbesondere gilt dann

$$\text{wnd}_{\partial G}(z_*) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_* \in G, \\ 0 & \text{für } z_* \notin G \cup \partial G, \end{cases}$$

wobei der Fall  $z_* \in \partial G$  explizit nicht zugelassen ist. Beispiele für Mengen mit regulärem Rand sind (Segmente von) Kreisscheiben, Ellipsen und Polygone bzw. Mengen, die aus solchen in einfacher Weise zusammengesetzt sind. Ein wichtiges Gegenbeispiel ist die *Kochsche Schneeflocke*, die einen fraktalen Rand besitzt. Bei einer zweifach zusammenhängenden Menge mit regulärem Rand handelt es sich um eine Menge, die genau ein Loch besitzt und deren Rand durch zwei geschlossene und jeweils stückweise stetig differenzierbare Kurven parametrisiert werden kann, wobei wir diesen Fall weiter unten noch genauer studieren werden.

### Anzahl der Nullstellen eines komplexen Polynoms

Jedes Polynom

$$f(z) = \alpha_K z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0, \quad \alpha_K \neq 0$$

vom Grad  $K$  kann nach dem Hauptsatz der Algebra auch als endliches Produkt

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_L)^{n_L}$$

geschrieben werden, wobei  $z_1, \dots, z_L$  die paarweise verschiedenen Nullstellen und  $n_1, \dots, n_L$  die entsprechenden Vielfachheiten sind (insbesondere gilt  $1 \leq L \leq K$  und  $n_1 + \dots + n_L = K$ ). Einfache Rechnungen zeigen nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \dots + \frac{n_L}{z - z_L}$$

und für jede einfach zusammenhängende Menge  $G$  mit regulärem Rand erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^L \int_{\partial G} \frac{n_l}{z - z_l} dz = \sum_{l=1}^L n_l \text{wnd}_{\partial G}(z_l),$$

wobei in der Summe auf der rechten Seite nur die Nullstellen innerhalb von  $G$  einen Beitrag liefern, da die Windungszahl der anderen Nullstellen verschwindet. Oder anders gesagt: Das Kurvenintegral auf der linken Seite zählt — bis auf den Faktor  $2\pi i$  — gerade die Nullstellen innerhalb von  $G$  unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit. Auch dieses nützliche Resultat werden wir unten in einem viel allgemeineren Zusammenhang noch einmal ableiten.

**Beispiel** Es gilt

$$\int_{S_\varrho(0)} \frac{3z^2 - (2 + 8i)z - (4 - 4i)}{z^3 - (1 + 4i)z^2 - (4 - 4i)z + 4} = 2\pi i \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \varrho < 1, \\ 1 & \text{für } 1 < \varrho < 2, \\ 3 & \text{für } 2 < \varrho < \infty, \end{cases}$$

da das Nennerpolynom

$$f(z) = z^3 - (1 + 4i)z^2 - (4 - 4i)z + 4 = (z - 1)(z - 2i)^2$$

die Einfachnullstelle  $z_1 = 1$  sowie die Doppelnulstelle  $z_2 = 2i$  besitzt. Beachte, dass für  $\varrho = 1$  oder  $\varrho = 2$  das Integral nicht existiert, da der Integrand dann eine Singularität entlang des Integrationsweges besitzt.

Vorlesung 03-2 : 28. April

## 1.9 Erweiterte Zahlenebene und Kreisgeraden

**Erweiterung der Zahlenebene** Oftmals ist es sinnvoll, die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  um einen unendlich fernen Punkt zu erweitern. Man setzt daher

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und vereinbart die folgenden *formalen Rechenregeln*

$$z \pm \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0$$

für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$  sowie  $0 \pm \infty = \infty$  und  $0/\infty = 0$ .

### Bemerkungen

1. Achtung: Die Ausdrücke

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty},$$

können nicht in sinnvoller Weise definiert werden.

2. Wir nennen  $\mathbb{C}^*$  die erweiterte komplexe Zahlenebene. Sie kann mittels der inversen *stereographischen Projektion* (siehe unten) *bijektiv* auf die Einheitskugel abgebildet werden und wird daher in der Mathematik manchmal auch die Riemannsche Sphäre genannt.
3. Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  konvergiert genau dann gegen  $\infty$  (in einem uneigentlichen Sinn), wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/z_n = 0$  gilt. Alternativ kann man  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$  im Sinne der uneigentlichen Konvergenz aus *Analysis 1* fordern.
4. Es gibt im Komplexen nur einen unendlich fernen Punkt. Das ist im Reellen anders, da man dort sehr wohl und in natürlicher Weise zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  unterscheiden kann.
5. Hinweis: Das Konzept des unendlich fernen Punktes ist viel einfacher, als es zunächst scheint und mit ein bisschen Erfahrung ergeben sich (fast) alle Formeln mit  $\infty$  auf sehr intuitive Weise.

**Definition** Eine Kreisgerade in  $\mathbb{C}^*$  ist entweder eine Kreislinie oder eine (affine) Gerade, wobei letztere als Kreis interpretiert werden kann, der durch den unendlich fernen Punkt  $\infty$  läuft und einen unendlich großen Radius besitzt.

**Bemerkung** Es gibt verschiedene Arten, Kreisgeraden zu beschreiben. Kreislinien werden oftmals als

$$C = S_\varrho(z_*) = \partial B_\varrho(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| = \varrho\}$$

angegeben, d.h. als Rand der offenen Kreisscheibe

$$B_\varrho(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| < \varrho\}$$

mit Mittelpunkt  $z_* \in \mathbb{C}$  und Radius  $0 < \varrho < \infty$ . Eine Gerade  $C$  wird hingegen eindeutig durch die Angabe zweier Punkte  $z_1, z_2 \in C$  mit  $z_j = x_j + i y_j$  festgelegt, wobei wir dann zum Beispiel

$$\begin{aligned} C &= \{x + i y \in \mathbb{C} : -(x - x_1)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}((z - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)) = 0\} \end{aligned}$$

oder

$$C = \{s z_1 + (1 - s) z_2 : s \in \mathbb{R}\}$$

schreiben können. Es gibt aber auch andere Möglichkeiten kennenlernen, Kreisgeraden durch Formeln zu beschreiben.

**Lemma (erste allgemeine Darstellungsformel für Kreisgeraden)** Für jede Kreisgerade  $C$  existieren Parameter

$$\mu \in \mathbb{R}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \mu \nu < |\zeta|^2,$$

sodass

$$C = \{z \in \mathbb{C} : \mu z \bar{z} - \bar{\zeta} z - \zeta \bar{z} + \nu = 0\}$$

gilt. Umgekehrt ist jede so definierte Teilmenge aus  $\mathbb{C}$  eine Kreisgerade, wobei es sich für  $\mu = 0$  um eine Gerade und andernfalls um eine Kreislinie handelt.

### **Beweis und Formelsätze**

1. Für die Kreislinie  $C = S_\varrho(z_*)$  gilt

$$\varrho^2 = |z - z_*|^2 = (z - z_*)(\bar{z} - \bar{z}_*) = z\bar{z} - z\bar{z}_* - \bar{z}z_* + z_*\bar{z}_*$$

für alle  $z \in C$ , d.h. wir können

$$\mu := 1, \quad \nu := z_*\bar{z}_* - \varrho^2, \quad \zeta := z_*$$

wählen, um  $C$  in der gewünschten Form zu schreiben.

2. Sind umgekehrt die Parameter  $\mu, \nu, \zeta$  mit  $\mu \neq 0$  gegeben, so ist  $C$  eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Radius durch

$$z_* := \frac{\zeta}{\mu}, \quad \varrho := \sqrt{\frac{\zeta \bar{\zeta} - \mu \nu}{\mu^2}}$$

berechnet werden können.

3. Eine Gerade  $C$  in  $\mathbb{C}$  kann via

$$C = \{x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

durch eine affine Gleichung mit den reellen Parametern  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  beschrieben werden. Durch direkte Rechnungen und unter Verwendung von

$$z = x + \mathbf{i}y \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{1}{2}\mathbf{i}(z - \bar{z})$$

können wir zeigen, dass diese Geradengleichung mittels

$$\mu := 0, \quad \zeta := -\frac{1}{2}(\alpha + \mathbf{i}\beta), \quad \nu := \gamma$$

in die gewünschte Form transformiert werden kann.

4. Alternativ können wir eine Gerade  $C$  dadurch festlegen, dass wir zwei Punkte  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  auf ihr angeben. In diesem Fall können wir

$$\mu := 0, \quad \zeta := \frac{1}{2}\mathbf{i}(z_2 - z_1), \quad \nu := \operatorname{Im}(z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1))$$

wählen, wobei wir dies entweder direkt via  $z_j = x_j + \mathbf{i}y_j$  oder mittels

$$\alpha := y_2 - y_1, \quad \beta := x_1 - x_2, \quad \gamma := \nu := y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)$$

aus den vorherigen Formeln ableiten können.

5. Sind umgekehrt die Parameter  $\mu = 0, \nu \in \mathbb{R}$  und  $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$  gegeben, so liefert die Darstellungsformel im Lemma immer eine Gerade  $C$ , wobei diese zum Beispiel die beiden Punkte

$$z_1 = \frac{\nu}{2|\zeta|^2} \zeta + \mathbf{i}\zeta, \quad z_2 = \frac{\nu}{2|\zeta|^2} \zeta - \mathbf{i}\zeta$$

enthält. Insbesondere werden die tangentielle bzw. die normale Richtung von  $C$  durch die komplexen Zahlen  $\mathbf{i}\zeta$  bzw.  $\zeta$  beschrieben.

**Spiegelung an Kreisgeraden** Ist  $C = S_\varrho(z_*)$  eine Kreislinie, so nennen wir zwei Punkte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  in  $\mathbb{C}^*$  genau dann symmetrisch bzgl.  $C$ , wenn

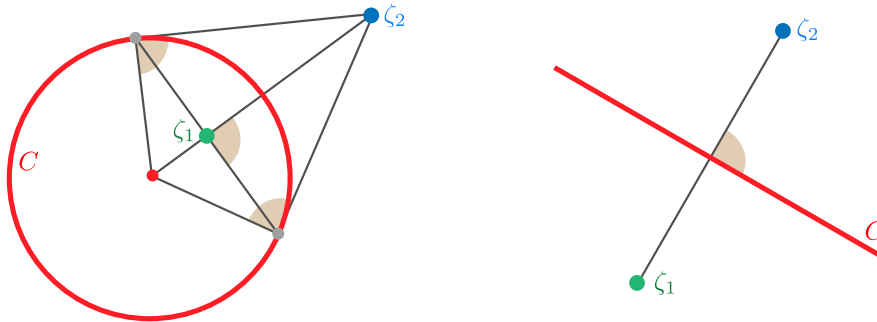
$$(\zeta_1 - z_*)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_*) = \varrho^2$$

gilt. In diesem Fall (siehe das Bild) sagt man auch,  $\zeta_1$  ist die Spiegelung von  $\zeta_2$  an  $C$  und umgekehrt. Ist  $C$  jedoch eine Gerade, so sind  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  genau dann symmetrisch bzgl.  $C$ , wenn beide Punkte spiegelsymmetrisch bzgl.  $C$  liegen.

**Geometrische Bedeutung** Die Symmetrie bzgl. der Kreislinie meint, dass die drei Punkte  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  und  $z_*$  auf einer Geraden liegen und dass

$$|\zeta_1 - z_*| |\zeta_2 - z_*| = \varrho^2$$

gilt (Übungsaufgabe). Insbesondere ist jeder Punkt  $\zeta \in C$  symmetrisch zu sich selbst und der Kreismittelpunkt  $z_*$  ist symmetrisch zum unendlich fernen Punkt  $\infty$ .



**Abbildung** Zur Symmetrie bzgl. eines Kreises (links) und bzgl. einer Geraden (rechts), wobei rechte Winkel durch braune Viertelkreise markiert sind und der rote Punkt den Kreismittelpunkt  $z_*$  darstellt.

**Lemma (zweite allgemeine Darstellungsformel für Kreisgeraden)** Sind  $\eta > 0$  ein reeller Parameter und  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$  zwei verschiedene Punkte, so ist die Menge

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2|\}$$

eine Kreisgerade, wobei es sich für  $\eta = 1$  bzw.  $\eta \neq 1$  um eine Gerade bzw. eine Kreislinie handelt und  $\zeta_1, \zeta_2$  symmetrisch bzgl.  $C$  sind. Umgekehrt kann jede Kreisgerade  $C$  auf diese Weise dargestellt werden.

### Beweis und Formelsätze

1. Im Fall von  $C = S_\varrho(z_*)$  wählen wir  $\theta \in \mathbb{R}$  sowie  $\eta > 0$  mit  $\eta \neq 1$  jeweils beliebig und setzen

$$\zeta_1 := z_* + \varrho \eta^{+1} e^{i\theta}, \quad \zeta_2 := z_* + \varrho \eta^{-1} e^{i\theta}.$$

Durch einfache Rechnungen verifizieren wir

$$\begin{aligned} |z - \zeta_1|^2 &= |(z - z_*) - \varrho \eta^{+1} e^{i\theta}|^2 \\ &= ((z - z_*) - \varrho \eta^{+1} e^{i\theta}) ((\bar{z} - \bar{z}_*) - \varrho \eta^{+1} e^{-i\theta}) \\ &= (z - z_*) (\bar{z} - \bar{z}_*) - \varrho \eta^{+1} e^{-i\theta} (z - z_*) - \varrho \eta^{+1} e^{+i\theta} (\bar{z} - \bar{z}_*) + \varrho^2 \eta^{+2} \end{aligned}$$

sowie analog

$$|z - \zeta_2|^2 = (z - z_*) (\bar{z} - \bar{z}_*) - \varrho \eta^{-1} e^{-i\theta} (z - z_*) - \varrho \eta^{-1} e^{+i\theta} (\bar{z} - \bar{z}_*) + \varrho^2 \eta^{-2}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |z - \zeta_1|^2 - \eta^2 |z - \zeta_2|^2 &= (1 - \eta^2) (z - z_*) (\bar{z} - \bar{z}_*) + \varrho^2 (\eta^{+2} - 1) \\ &= (1 - \eta^2) (|z - z_*|^2 - \varrho^2) \end{aligned}$$

und wir schließen, dass  $|z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2|$  genau dann gilt, wenn  $|z - z_*| = \varrho$  erfüllt ist. Weil außerdem  $z_*$ ,  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  nach Konstruktion auf einer affinen Geraden liegen und unsere Definitionen

$$|\zeta_1 - z_*| |\zeta_2 - z_*| = \varrho^2$$

garantieren, sind  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  wirklich symmetrisch bzgl. der Kreislinie  $C$ .

2. Sind nun umgekehrt  $\zeta_1 \neq \zeta_2$  sowie  $\eta > 0$  mit  $\eta \neq 1$  gegeben, so setzen wir

$$z_* := \frac{\eta^{+1} \zeta_2 - \eta^{-1} \zeta_1}{\eta^{+1} - \eta^{-1}}, \quad \varrho := \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{\eta^{+1} - \eta^{-1}}, \quad \theta := \arg(\zeta_1 - \zeta_2)$$

und rechnen nach, dass  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  mithilfe der im letzten Formelsatz angegebenen Gleichungen durch  $z_*$ ,  $\eta$ ,  $\varrho$  und  $\theta$  ausgedrückt werden können. Insbesondere gelten alle sich hieraus ergebenden Formeln und Argumente analog zu oben.

3. Für je zwei Punkte  $\zeta_1 \neq \zeta_2$  beschreibt die Gleichung  $|z - \zeta_1| = |z - \zeta_2|$  gerade die Mittelsenkrechte zur Verbindungsstrecke. Umgekehrt kann jede affine Gerade  $C$  als Mittelsenkrechte zweier Punkte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  dargestellt werden, sofern diese symmetrisch bzgl.  $C$  liegen.

### Bemerkungen

1. Die Wahl der Parameter ist nicht eindeutig. Der Beweis zeigt vielmehr, dass wir für jede gegebene Kreislinie  $C = S_\varrho(z_*)$  den Punkt  $\zeta_1$  mit  $\zeta_1 \neq z_*$  und  $\zeta_1 \notin C$  beliebig wählen und danach  $\zeta_2$  durch Spiegelung von  $\zeta_1$  an  $C$  bestimmen können. Der Wert des Parameters  $\eta$  ist dann eindeutig festgelegt, da ja

$$\frac{|z - \zeta_1|}{|z - \zeta_2|} = \eta$$

für alle  $z \in C$  gilt (um  $\eta$  zu berechnen, setzen wir ein beliebiges  $z \in C$  in diese Formel ein). Analog können wir für jede Gerade  $C$  und jedes  $\zeta_1 \notin C$  den Punkt  $\zeta_2$  durch Spiegelung berechnen.

2. Man kann zeigen (siehe die Hausaufgaben), dass es für je zwei disjunkte Kreisgeraden genau zwei Punkte  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}^*$  gibt, die symmetrisch bzgl. beider Kreisgeraden sind. Beachte, dass zwei parallele Geraden sich im unendlich fernen Punkt  $\infty$  schneiden und hier daher nicht als disjunkt gelten.

### Beispiele

1. Das Lemma impliziert

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha - \beta \mathbf{i}| = |z - \alpha + \beta \mathbf{i}|\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

für alle reellen Parameter  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Die Kreisgerade  $C$  ist hier also die reelle Achse, wobei dies die einzige Gerade ist, bezüglich der die Punkte  $\zeta_1 = \alpha + \beta \mathbf{i}$  und  $\zeta_2 = \alpha - \beta \mathbf{i}$  symmetrisch liegen.

2. Analog ergibt sich

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \mathbf{i}| = |z - 1|\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$$

für die Diagonale in der komplexen Zahlenebene.

3. Die Formelsätze liefert

$$S_1(0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2 \left| z - \frac{1}{2}i \right| \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 3 \left| z - \frac{1}{3} \right| \right\}$$

als alternative Darstellungen der Einheitskreislinie.

$\mathbb{C}^*$  als Modell der Sphäre Durch die Formel

$$z = P(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\xi_1 + i \xi_2}{1 - \xi_3}$$

wird eine Abbildung  $P : S^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  definiert, die jeden Punkt  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  der zweidimensionalen Einheitssphäre

$$S^2 := \{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \}$$

auf relativ einfache und naheliegende Weise auf einen Punkt  $z$  in  $\mathbb{C}^*$  abbildet (siehe das Bild) und stereographische Projektion genannt wird. Dabei gilt

$$P(0, 0, -1) = 0, \quad P(0, 0, +1) = \infty, \quad P(\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

d.h. der Süd- bzw. der Nordpol wird auf den Ursprung bzw. den unendlich fernen Punkt abgebildet und das Bild des Äquatorialkreises ist gerade die Einheitskreislinie. Die stereographische Projektion hat drei wesentliche Eigenschaften:

1.  $P$  ist bijektiv, d.h. es existiert die Umkehrabbildung  $P^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow S^2$ , wobei wir die Formel

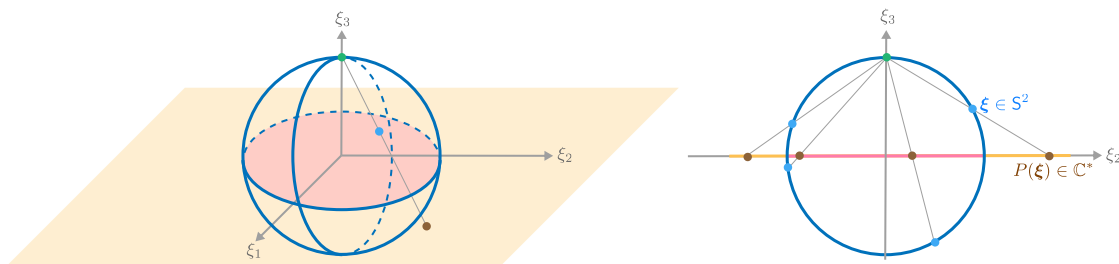
$$\boldsymbol{\xi} = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{-iz + i\bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right)$$

direkt nachrechnen können.

2.  $P$  ist winkeltreu und kann zum Beispiel benutzt werden, um winkeltreue Weltkarten zu erstellen (die aber unendlich groß sind). Siehe dazu WIKIPEDIA.

3.  $P$  bildet sphärische Kreise auf Kreisgeraden ab.

Die erste Eigenschaft besagt, dass man jeden Punkt in der erweiterten Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$  mit genau einem Punkt in der Sphäre  $S^2$  identifizieren kann und dass zu jeder Abbildung  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  durch  $U := P^{-1} \circ T \circ P$  eine entsprechende Abbildung  $U : S^2 \rightarrow S^2$  definiert werden kann. Die zweite und dritte Eigenschaft von  $P$  garantieren, dass  $U$  schöne Eigenschaften besitzt, sofern  $T$  schöne Eigenschaften aufweist. Besonders wichtig ist dabei der Fall, dass  $T$  eine Möbius-Transformation ist (siehe unten): Dann ist auch  $U$  winkeltreu sowie bijektiv und überführt sphärische Kreise in sphärische Kreise.



**Abbildung** Links: Die stereographische Projektion der Sphäre  $S^2$  (blau), wobei der Nordpol grün dargestellt ist. Beachte, dass die südliche bzw. die nördliche Hemisphäre in das Innen- bzw. das Aussengebiet der Einheitskreislinie abgebildet wird (rosa bzw. orange). Rechts: Das entsprechende zweidimensionale Bild. *Achtung:* In der Literatur werden manchmal leicht andere Definitionen der stereographischen Projektion verwendet, die aber analoge Eigenschaften aufweisen.



## 1.10 Möbius-Transformationen

**Vorbemerkung** Möbius-Transformationen sind zum einen relativ einfache komplexe Funktionen und wir werden sie immer wieder benutzen, um abstrakte Resultate mit Beispielen zu illustrieren. Darüber hinaus besitzen sie bemerkenswerte geometrische Eigenschaften und tauchen in vielen Bereichen der Mathematik und der Anwendungswissenschaften auf. In diesem Abschnitt arbeiten wir mit der erweiterten Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$ , d.h. wir ergänzen  $\mathbb{C}$  um den unendlich fernen Punkt  $\infty$ .

### Grundlegende Eigenschaften

**Definition** Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  gegebene komplexe Zahlen mit

$$ad - bc \neq 0$$

Dann wird die durch

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

definierte Abbildung  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  die Möbius-Transformation mit den Parametern  $a, b, c, d$  genannt.

#### Bemerkung

1. Statt *Transformation* können wir auch *Abbildung* oder *Funktion* sagen.
2. Wir schreiben oftmals auch  $T_{a,b,c,d}$  statt  $T$ .
3. Für jede Möbius-Transformation ist via

$$T_{a,b,c,d}(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

ihr Wert im unendlich fernen Punkt gegeben, wobei  $T_{a,b,c,d}(\infty) = \infty$  im Fall  $c = 0$  gilt.<sup>7</sup>

4.  $T_{a,b,c,d}$  besitzt genau eine Nullstelle und genau eine Polstelle in  $\mathbb{C}^*$ , denn es gilt

$$T_{a,b,c,d}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{b}{a}, \quad T_{a,b,c,d}(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{d}{c},$$

wobei ggf. die obigen Rechenregeln in  $\mathbb{C}^*$  verwendet werden müssen.

<sup>7</sup>Die Bedingung  $ad - bc \neq 0$  stellt sicher, dass  $a$  und  $c$  (bzw.  $b$  und  $d$ ) nicht gleichzeitig den Wert 0 annehmen können.

5. Zwei Parametersätze definieren genau dann via

$$T_{a,b,c,d}(z) = T_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^*$$

dieselbe Möbius-Transformation, sofern

$$\tilde{a} = \lambda a, \quad \tilde{b} = \lambda b, \quad \tilde{c} = \lambda c, \quad \tilde{d} = \lambda d,$$

für einen komplexwertigen Faktor  $\lambda \neq 0$  gilt. Um diese Mehrdeutigkeit in den Parametersätzen zu eliminieren, fordern einige Autoren  $ad - bc = 1$  anstelle von  $ad - bc \neq 0$ , aber dies verkompliziert einige Formeln.

### Beispiele

1. Für  $b = 0, c = 0, d = 1$  beschreibt

$$T_{a,0,0,1}(z) = az$$

gerade die Multiplikation mit  $a \in \mathbb{C}$  und damit aus geometrischer Sicht eine Drehstreckung.

2. Für  $a = 0, c = 0, d = 1$  ist

$$T_{0,b,0,1}(z) = z + b$$

gerade die Addition von  $b$  bzw. die Verschiebung um  $b$ .

3. Für  $c = 0$  und  $d = 1$  ergibt sich die affine Transformation

$$T_{a,b,0,1}(z) = az + b,$$

die Drehstreckung und Verschiebung kombiniert.

4. Für jedes  $\lambda \neq 0$  ist

$$T_{\lambda,0,0,\lambda}(z) = \frac{\lambda z + 0}{0z + \lambda} = z$$

die Identitätsabbildung.

5. Die Abbildung

$$T_{0,1,1,0}(z) = \frac{1}{z}$$

wird komplexe Inversion genannt.<sup>8</sup>

**Lemma (Kompositionssatz)** Die Hintereinanderausführung (oder Komposition) zweier Möbius-Transformationen ist selbst eine Möbius-Transformation. Genauer gesagt, es gilt

$$T_{a_3,b_3,c_3,d_3} = T_{a_2,b_2,c_2,d_2} \circ T_{a_1,b_1,c_1,d_1},$$

sofern

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

im Sinne der Multiplikation von  $(2,2)$ -Matrizen erfüllt ist.

<sup>8</sup>Die Inversion kann via  $1/z = \overline{1/\bar{z}}$  als Komposition der Spiegelung an der Einheitskreislinie  $S_1(0)$  ( $z \mapsto 1/\bar{z}$ ) und der Spiegelung an der  $x$ -Achse ( $z \mapsto \bar{z}$ ) interpretiert werden. Jede dieser Spiegelungen ist aber für sich betrachtet keine Möbius-Transformation.

**Beweis** Nach Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (T_{a_2, b_2, c_2, d_2} \circ T_{a_1, b_1, c_1, d_1})(z) &= T_{a_2, b_2, c_2, d_2}(T_{a_1, b_1, c_1, d_1}(z)) \\
 &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\
 &= \frac{a_2 (a_1 z + b_1) + b_2 (c_1 z + d_1)}{c_2 (a_1 z + b_1) + d_2 (c_1 z + d_1)} \\
 &= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1) z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)} \\
 &= T_{a_3, b_3, c_3, d_3}(z)
 \end{aligned}$$

und die behauptete Formel folgt, da  $z \in \mathbb{C}$  beliebig ist.  $\square$

**Folgerung (Invertierbarkeitssatz)** Es gilt

$$T_{d, -b, -c, a} = T_{a, b, c, d}^{-1} \quad T_{a, b, c, d} = T_{d, -b, -c, a}^{-1}$$

im Sinne von Umkehrabbildungen. Insbesondere ist jede Möbius-Transformation auf  $\mathbb{C}^*$  invertierbar, wobei die Umkehrabbildung wieder eine Möbius-Transformation ist.

**Beweis** Mit

$$a_2 = d, \quad b_2 = -b, \quad c_2 = -c, \quad d_2 = a, \quad a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = d$$

und direkten Rechnungen erhalten wir

$$(T_{d, -b, -c, a} \circ T_{a, b, c, d})(z) = \frac{(da - bc)z + (db - bd)}{(-ca + ac)z + (-cb + ad)} = \frac{(ad - bc)z + 0}{0z + (ad - bc)} = z.$$

Es folgt

$$T_{d, -b, -c, a} \circ T_{a, b, c, d} = \text{id},$$

wobei  $\text{id} = T_{1, 0, 0, 1}$  die Identitätsabbildung ist, und analog zeigen wir

$$T_{a, b, c, d} \circ T_{d, -b, -c, a} = \text{id}.$$

Die letzten beiden Formeln liefern zusammen die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung**

1. Die Formeln der Umkehrabbildungen ergeben sich auch aus

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und der Tatsache, dass  $T_{ad-bc, 0, 0, ad-bc} = T_{1, 0, 0, 1}$  gilt.

2. Eine andere, aber äquivalente Formulierung des Invertierbarkeitssatzes ist die folgende Implikation über das Lösen von Gleichungen:

$$\text{Es gilt } \frac{az + b}{cz + d} = \tilde{z} \text{ genau dann, wenn } z = -\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a} \text{ gilt.}$$

3. *Ausblick*: Die Menge aller Möbius-Transformationen ist eine Gruppe im Sinne der mathematischen Algebra, wobei die Komposition die Multiplikation ist und  $T_{1, 0, 0, 1}$  das neutrale Element darstellt.

**Folgerung (Zerlegungssatz)** Die affinen Transformationen und die Inversion sind die Elementarbausteine, aus denen jede andere Möbius-Transformation mittels Komposition zusammengesetzt werden kann.

**Beweis** Für  $c = 0$  ist  $T_{a,b,0,d}$  selbst eine affine Transformation und damit schon Baustein. Für  $c \neq 0$  ergibt sich aus

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}$$

die Darstellung

$$T_{a,b,c,d} = T_{\frac{bc-ad}{c}, \frac{a}{c}, 0, 1} \circ T_{0,1,1,0} \circ T_{c,d,0,1},$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung die Inversion  $T_{0,1,1,0}$  mit zwei affinen Transformationen komponiert wird.  $\square$

## Geometrische Eigenschaften

**Theorem (Invarianz von Kreisgeraden)** Jede Möbius-Transformation bildet Kreisgeraden auf Kreisgeraden ab.

**Beweis** Aufgrund des Zerlegungssatzes reicht es, wenn wir die Behauptung für jede affine Transformation sowie für die Inversion separat nachzuprüfen. Dazu betrachten wir eine beliebige Kreisgerade  $C$  und wählen Parametern  $\eta > 0$  und  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$  wir in der zweiten allgemeinen Darstellungsformel.

Affine Transformationen: Wir schreiben

$$\tilde{z} = T_{a,b,0,1}(z) = az + b \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{\tilde{z} - b}{a}$$

verifizieren durch direkte Rechnungen die logische Äquivalenz

$$\begin{aligned} |z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2| &\Leftrightarrow \left| \frac{\tilde{z} - b}{a} - \zeta_1 \right| = \eta \left| \frac{\tilde{z} - b}{a} - \zeta_2 \right| \\ &\Leftrightarrow |\tilde{z} - b - a\zeta_1| = \eta |\tilde{z} - b - a\zeta_2| \Leftrightarrow |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1| = \tilde{\eta} |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2| \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\eta} = \eta, \quad \tilde{\zeta}_1 = a\zeta_1 + b, \quad \tilde{\zeta}_2 = a\zeta_2 + b,$$

wobei  $a \neq 0$  und  $a \neq \infty$  eingeflossen ist. Insbesondere ist das Bild von  $C$  unter  $T_{a,b,0,1}$  gerade die Kreisgerade  $\tilde{C}$ , die im Bildraum durch die Parameter  $\tilde{\eta}$  und  $\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2$  beschrieben wird.

Inversion: Mit

$$\tilde{z} = T_{0,1,1,0}(z) = \frac{1}{z} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{1}{\tilde{z}}.$$

ergibt sich die Äquivalenz

$$\begin{aligned} |z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2| &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{\tilde{z}} - \zeta_1 \right| = \eta \left| \frac{1}{\tilde{z}} - \zeta_2 \right| \Leftrightarrow |1 - \zeta_1 \tilde{z}| = \eta |1 - \zeta_2 \tilde{z}| \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{\zeta_1} - \tilde{z} \right| |\zeta_1| = \eta \left| \frac{1}{\zeta_2} - \tilde{z} \right| |\zeta_2| \Leftrightarrow |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1| = \tilde{\eta} |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2| \end{aligned}$$

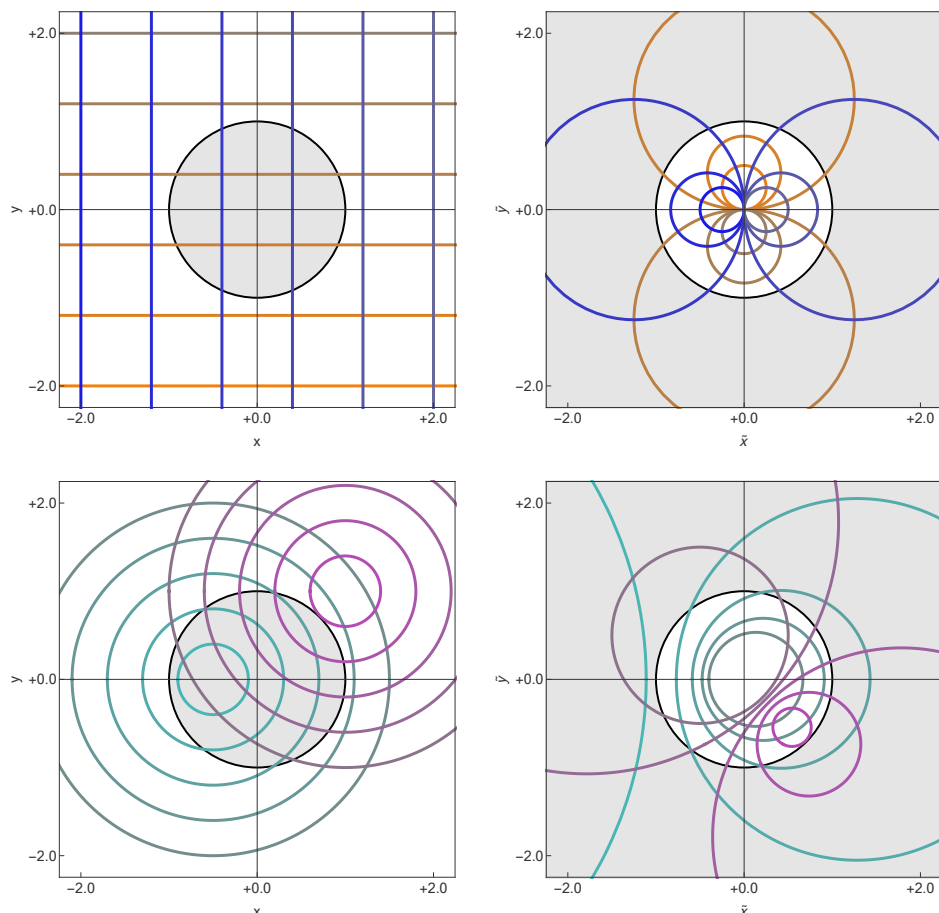
im Standardfall  $z, \zeta_1, \zeta_2 \notin \{0, \infty\}$ , sofern wir

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta |\zeta_2|}{|\zeta_1|}, \quad \tilde{\zeta}_1 = \frac{1}{\zeta_1}, \quad \tilde{\zeta}_2 = \frac{1}{\zeta_2}$$

setzen. Mit ähnlichen Argumenten behandeln wir die Entartungsfälle und schließen, dass die  $T_{0,1,1,0}$  die Kreisgerade  $C$  bijektiv auf die Kreisgerade  $\tilde{C}$  abbildet.  $\square$

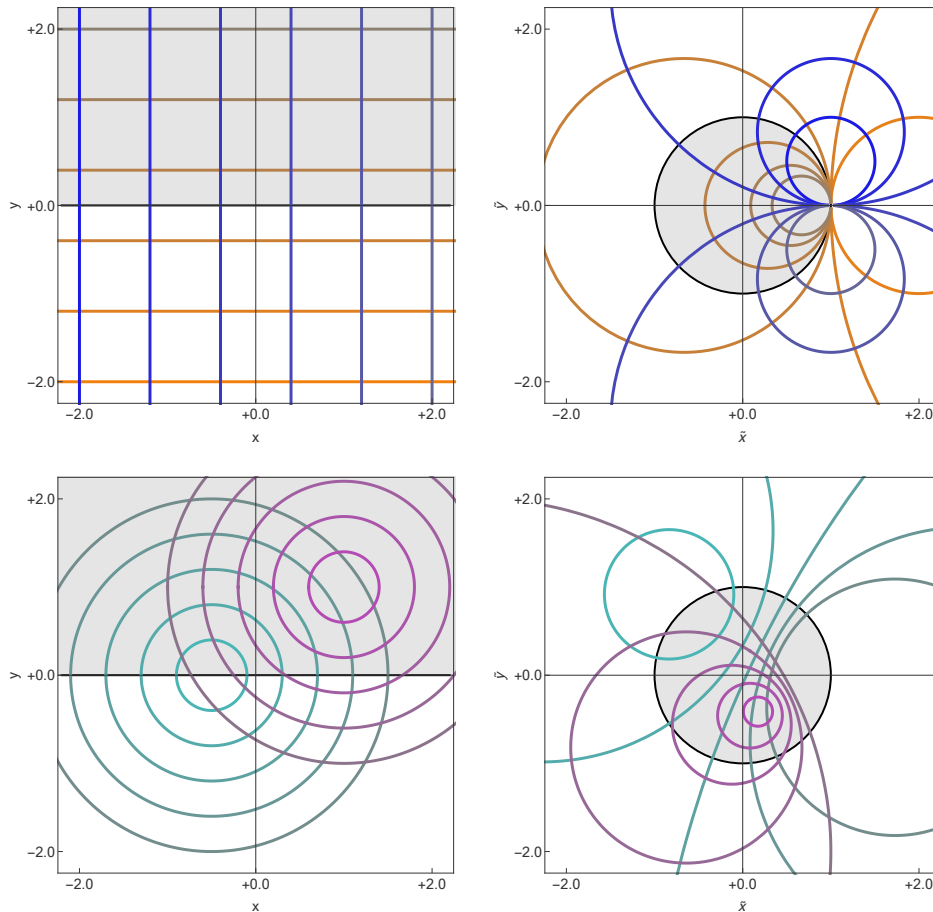
### Bemerkung

1. Das Theorem besagt *nicht*, dass Kreislinien auf Kreislinien und Geraden auf Geraden abgebildet werden, sondern dass jede Kreislinie sowie jede Gerade entweder auf eine Kreislinie oder eine Gerade abgebildet wird.
2. Wegen des Invertierungssatzes gilt für jede Möbius-Transformation auch die folgende Aussage: Das Urbild einer Kreisgeraden ist eine Kreisgerade.
3. Die Invarianz von Kreisgeraden gilt nur für Möbius-Transformationen, d.h. jede andere holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  wird dieses Gesetz verletzen.<sup>9</sup>
4. Wir werden später sehen, dass jede Möbius-Transformation auch konform (d.h. winkeltreu) ist. Diese Eigenschaft besitzen aber auch viele andere Abbildungen.



**Abbildung** Zur Invarianz von Kreisgeraden bei der Inversion  $\tilde{z} = T_{0,1,1,0}(z) = 1/z$ , wobei links verschiedene Kreisgeraden im Urbild und rechts die entsprechenden Bilder mit derselben Farbe dargestellt sind. Die Einheitskreislinie ist invariant (d.h.  $|\tilde{z}| = 1$  für  $|z| = 1$ ) und schwarz gezeichnet. Beachte auch, dass das Außen- bzw. Innengebiet der Einheitskreislinie auf das Innen- bzw. Außengebiet abgebildet wird (graue und weiße Mengen).

<sup>9</sup>Kreisgeraden sind zwar auch invariant unter Spiegelungen an Geraden (z.Bsp.  $f(z) = \bar{z}$ ) oder Kreisen (z.Bsp.  $f(z) = 1/\bar{z}$ ), aber diese Abbildungen sind nicht komplex differenzierbar.



**Abbildung** Zur Invarianz von Kreisgeraden bei der Cayley-Transformation

$$\tilde{z} = T_{1, -i, 1, +i}(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Insbesondere wird die obere Halbebene in die Einheitskreisscheibe abgebildet (jeweils grau). Beachte, dass es links Kreise gibt, die rechts Geraden entsprechen, aber diese sind nicht eingezeichnet.

**Lemma (Invarianz der Kreissymmetrie)** Für jede Möbius-Transformation  $T$  und jede Kreisgerade  $C$  gilt:  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  sind genau dann symmetrisch bzgl.  $C$ , wenn  $\tilde{\zeta} = T(\zeta_1)$  und  $\tilde{\zeta}_2 = T(\zeta_2)$  symmetrisch zu  $\tilde{C} = T(C)$  liegen.

**Beweis** Seien  $T, C$  fixiert und seien  $\zeta_1, \zeta_2$  zwei beliebige Punkte, die symmetrisch zu  $C$  liegen. Wir wählen  $\eta > 0$  wie in der zweiten allgemeinen Darstellungsformel (siehe auch die Bemerkungen zum entsprechenden Lemma), schreiben

$$\tilde{z} = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z = T^{-1}(\tilde{z}) = -\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a}, \quad \tilde{\zeta}_j = T(\zeta_j) = \frac{b + a\zeta_j}{d + c\zeta_j}$$

und berechnen

$$\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} = \frac{\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a} + \zeta_1}{\frac{d\tilde{z} - b}{c\tilde{z} - a} + \zeta_2} = \frac{(d + c\zeta_1)\tilde{z} - (b + a\zeta_1)}{(d + c\zeta_2)\tilde{z} - (b + a\zeta_2)} = \frac{d + c\zeta_1}{d + c\zeta_2} \frac{\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1}{\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2},$$

wobei  $z$  hier eine beliebige komplexe Zahl bezeichnet. Mit

$$\tilde{\eta} = \eta \left| \frac{d + c\zeta_2}{d + c\zeta_1} \right|$$

schließen wir

$$|z - \zeta_1| = \eta |z - \zeta_2| \quad \Leftrightarrow \quad |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1| = \tilde{\eta} |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2|$$

und erhalten

$$\tilde{C} = T(C) = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_1| = \tilde{\eta} |\tilde{z} - \tilde{\zeta}_2|\}.$$

Insbesondere sind die Punkte  $\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2$  symmetrisch bzgl.  $\tilde{C}$  und wir haben damit die Hinrichtung der Behauptung gezeigt. Die Rückrichtung ergibt sich, wenn wir analoge Argumente auf  $T^{-1}$  anwenden.  $\square$

**Theorem (Satz über das Doppelverhältnis)** Seien  $z_1, z_2, z_3$  sowie  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$  jeweils drei paarweise verschiedene Punkte in  $\mathbb{C}^*$ . Dann existiert genau eine Möbius-Transformation  $T$ , sodass die Interpolationseigenschaft

$$\tilde{z}_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt ist. Für diese Transformation  $T$  gilt außerdem die Dreipunkt-Formel

$$\frac{\frac{\tilde{z} - \tilde{z}_1}{\tilde{z} - \tilde{z}_2}}{\frac{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1}{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2}} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

für alle  $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}^*$  mit  $\tilde{z} = T(z)$ .

**Beweis** Wir nehmen an, dass keiner der sechs Punkte  $z_i$  und  $\tilde{z}_i$  der unendlich ferne Punkt  $\infty$  ist und verweisen auf die nachfolgenden Bemerkungen für die verbleibenden Fälle. Im ersten Schritt überlegen wir uns mit elementaren Argumenten, dass  $S$  bzw.  $\tilde{S}$  mit

$$S(z) := \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{S}(\tilde{z}) := \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_1}{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1} \frac{\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2}{\tilde{z} - \tilde{z}_2}$$

die einzige Möbius-Transformation ist, für die

$$S(z_1) = 0, \quad S(z_2) = \infty, \quad S(z_3) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{S}(\tilde{z}_1) = 0, \quad \tilde{S}(\tilde{z}_2) = \infty, \quad \tilde{S}(\tilde{z}_3) = 1$$

gilt. Die Transformation  $T = \tilde{S}^{-1} \circ S$  besitzt nach Konstruktion alle gewünschten Eigenschaften und wir haben damit den Existenzteil bewiesen. Sei nun umgekehrt  $T$  eine beliebige Möbius-Transformation, die der Interpolationseigenschaft genügt. Dann gilt

$$(\tilde{S} \circ T)(z_j) = S(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

und die Eindeutigkeit von  $S$  impliziert  $\tilde{S} \circ T = S$  bzw.  $T = \tilde{S}^{-1} \circ S$ . Es folgt

$$\tilde{S}(T(z)) = S(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^*$$

und damit die Dreipunkt-Formel mit  $\tilde{z} = T(z)$ .  $\square$

**Bemerkungen**

1. Das Theorem besagt, dass man eine Möbius-Transformation eindeutig durch die Angabe von drei Urbildpunkten (die  $z_j$ ) sowie der entsprechenden Bildpunkte (die  $\tilde{z}_j$ ) beschreiben bzw. festlegen kann.
2. In der Literatur wird oftmals

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad \text{statt} \quad \frac{\frac{z - z_1}{z - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}$$

für das Doppelverhältnis geschrieben.

3. Wenn einer der drei Urbildpunkte  $z_j$  und/oder einer der drei Bildpunkte  $\tilde{z}_j$  den Wert  $\infty$  annimmt, so muss die Dreipunkt-Formel wegen des nicht definierten Terms  $\infty/\infty$  angepasst werden. Die notwendigen Modifikationen können aber leicht mit Stetigkeitsargumenten identifiziert werden. Die Nebenrechnung

$$\frac{\frac{z - z_1}{z - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} \frac{\frac{z}{z_1} - 1}{\frac{z_3}{z_1} - 1} \xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$$

zeigt zum Beispiel für  $z_1 = \infty$ , durch welches Verhältnis das Doppelverhältnis im Urbildraum ersetzt werden muss. Die anderen Fälle können analog behandelt werden.

**Beispiel** Wir betrachten den Fall

$$z_1 := 0, \quad z_2 := 1, \quad z_3 := i \quad \text{sowie} \quad \tilde{z}_1 := 0, \quad \tilde{z}_2 := i, \quad \tilde{z}_3 := -i$$

und bestimmen die entsprechende Möbius-Transformation  $T$  indem wir das Doppelverhältnis in der Dreipunkt-Formel

$$\frac{\frac{\tilde{z} - 0}{\tilde{z} - i}}{\frac{-i - 0}{-i - i}} = \frac{\frac{z - 0}{z - 1}}{\frac{i - 0}{i - 1}}$$

schrittweise nach  $\tilde{z}$  auflösen. Durch Rechnungen erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - i} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{i}{i - 1}} \frac{z}{z - 1} = \frac{1 + i}{2} \frac{z}{z - 1}$$

und anschließend<sup>10</sup>

$$\tilde{z} = \frac{z}{z - 1 - i},$$

<sup>10</sup>Diese Formel kann durch direkte Termumformungen oder alternativ mit folgendem Argument hergeleitet werden: Der Invertierungssatz garantiert die logische Äquivalenz

$$\frac{a\tilde{z} + b}{c\tilde{z} + d} = \zeta \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{z} = -\frac{d\zeta - b}{c\zeta - a},$$



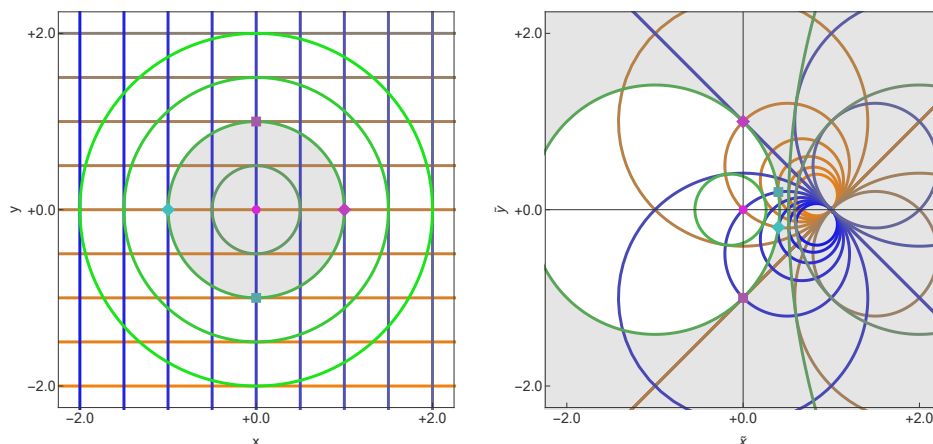
d.h.  $T = T_{1,0,1,-1-i}$  ist die gesuchte Möbius-Transformation.

*Probe:* Mit direkten Rechnungen verifizieren wir

$$T(z_1) = \frac{0}{0-1-i} = 0 = \tilde{z}_1, \quad T(z_2) = \frac{1}{1-1-i} = i = \tilde{z}_2, \quad T(z_3) = \frac{i}{i-1-i} = -i = \tilde{z}_3$$

und damit die Interpolationseigenschaft.

*Achtung:* Bei Doppelverhältnissen kann man sich sehr leicht verrechnen. Machen Sie daher *immer* die Probe, d.h. prüfen Sie am Ende, ob die Interpolationseigenschaft wirklich erfüllt ist.



**Abbildung** Die Möbius-Transformation aus dem Beispiel, wobei die vorgegebenen Bild- und Urbildpunkte lila gezeichnet sind. Wo kann man in diesem Bild die Invarianz der Kreissymmetrie erkennen?

**Beispiel\*** Wir suchen eine Möbius-Transformation  $T$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Kreislinie  $C = \partial B_2(0)$  wird von  $T$  in die Kreislinie  $\tilde{C} = \partial B_1(-1)$  abgebildet.
2. Der Punkt  $0$  wird von  $T$  auf den Punkt  $i$  abgebildet.
3. Der Punkt  $-2$  wird von  $T$  auf den Punkt  $0$  abgebildet.

Wir wollen diese Aufgabe mittels Doppelverhältnissen lösen und setzen daher

$$z_1 := 0, \quad \tilde{z}_1 := i, \quad z_2 := -2, \quad \tilde{z}_2 := 0.$$

Wir müssen aber noch geeignete Werte für  $z_3$  und  $\tilde{z}_3$  identifizieren. Dazu bemerken wir, dass  $z_1$  und

$$z_3 := \infty$$

wobei die Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  hier nicht die Parameter der gesuchten Möbius-Transformation  $T$ , sondern nur Platzhalter in unserer Nebenrechnung sind. Die spezielle Wahl

$$\zeta = \frac{1+i}{2} \frac{z}{z-1}, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -i$$

impliziert

$$\tilde{z} = \frac{i\zeta}{\zeta - 1} = \frac{\frac{-1+i}{2} \frac{z}{z-1}}{\frac{1+i}{2} \frac{z}{z-1} - 1} = \frac{(-1+i)z}{(1+i)z - 2(z-1)} = \frac{(1-i)z}{(1-i)z - 2} = \frac{z}{z - \frac{2}{1-i}}$$

und damit das gewünschte Endergebnis wegen  $2/(1-i) = 1+i$ .

symmetrisch bzgl.  $C$  sind. Wegen der Invarianz der Kreissymmetrie müssen wir nun  $\tilde{z}_3$  so wählen, dass  $\tilde{z}_1$  und  $\tilde{z}_3$  symmetrisch bzgl.  $\tilde{C}$  sind. Dies liefert die Bedingung

$$(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_*) (\overline{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_*}) = \tilde{\varrho}^2,$$

wobei  $\tilde{z}_* = -1$  und  $\tilde{\varrho} = 1$  den Mittelpunkt sowie den Radius von  $\tilde{C}$  bezeichnen. Kleinere Rechnungen zeigen

$$\tilde{z}_3 := \tilde{z}_* + \frac{\tilde{\varrho}^2}{\overline{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_*}} = -1 + \frac{1}{-i + 1} = \frac{1}{2}(-1 + i),$$

und die gesuchte Möbius-Transformation  $T$  kann mittels  $\tilde{z} = T(z)$  aus der Dreipunkt-Formel

$$\frac{\frac{\tilde{z} - i}{\tilde{z} - 0}}{\frac{\frac{1}{2}(-1 + i) - i}{\frac{1}{2}(-1 + i) - 0}} = \frac{\frac{z - 0}{z + 2}}{\lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{z_3 - 0}{z_3 + 2}}$$

durch Auflösung nach  $\tilde{z}$  bestimmt werden. Wegen

$$\frac{\frac{1}{2}(-1 + i) - i}{\frac{1}{2}(-1 + i) - 0} = i$$

und

$$\lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{z_3}{z_3 + 2} = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{z_3}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

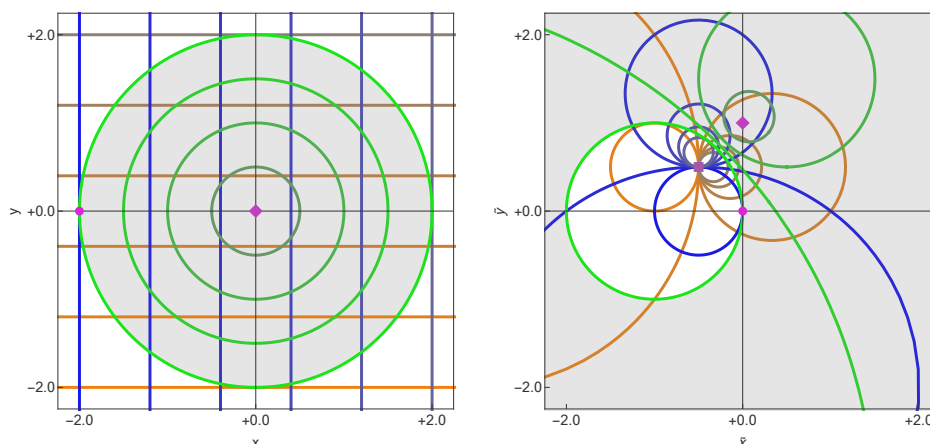
erhalten wir die zunächst vereinfachte Gleichung

$$\frac{\tilde{z} - i}{\tilde{z}} = \frac{i z}{z + 2}.$$

Mit Hilfe des Invertierungssatzes ergibt sich anschließend

$$\tilde{z} = \frac{-z - 2}{(1 + i)z + 2i},$$

d.h.  $T = T_{-1, -2, 1+i, 2i}$  ist die gesuchte Möbius-Transformation.



**Abbildung** Die Möbius-Transformation aus dem soeben gerechneten Beispiel, wobei  $C$  bzw.  $\tilde{C}$  der Rand der grauen Menge links bzw. rechts ist.

## 1.11 Konforme und biholomorphe Funktionen

**Vorbemerkung** Wir hatten schon gesehen, dass man eine komplexe Funktion  $f$  auch als Gebietstransformation betrachten kann, die jeden Punkt aus  $D$  auf einen Punkt in  $\tilde{D} = f(D)$  abbildet. Wir werden nun diese geometrische Sicht weiter vertiefen und damit die Grundlagen für viele Anwendungen legen, in denen eine gegebene Menge  $D$  zunächst auf eine einfachere Menge transformiert werden muss.

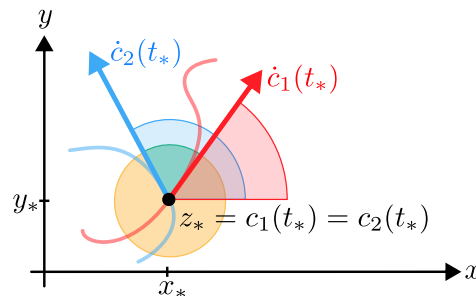
**Winkel zwischen Tangentialvektoren** Sind  $\dot{c}_1(t_*) \neq 0$  und  $\dot{c}_2(t_*) \neq 0$  zwei Tangentialvektoren im Punkt  $z_* = c_1(t_*) = c_2(t_*)$ , so kann der Winkel zwischen diesen via

$$\sphericalangle(\dot{c}_2(t_*), \dot{c}_1(t_*)) = \arg(\dot{c}_2(t_*)) - \arg(\dot{c}_1(t_*)) \pmod{2\pi}$$

aus den komplexen Argumenten berechnet werden. Beachte, dass wir hier immer *orientierte Winkel* mit

$$\sphericalangle(\dot{c}_2(t_*), \dot{c}_1(t_*)) = -\sphericalangle(\dot{c}_1(t_*), \dot{c}_2(t_*)) \pmod{2\pi}$$

verwenden, wobei diese im Bogenmaß nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  bestimmt sind. Diese Mehrdeutigkeit wird gerade durch die Schreibweise  $\pmod{2\pi}$  (sprich „modulo  $2\pi$ “) ausgedrückt.



**Abbildung** Die Winkel (gelb bzw. grün) zwischen zwei nicht-verschwindenden Tangentialvektoren ergeben sich aus der Differenz der entsprechenden Argumente (rot bzw. blau), wobei gegebenenfalls  $2\pi$  addiert oder subtrahiert werden muss.

**Lemma (Winkel- und Orientierungstreue)** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_* \in D$  beliebig mit  $f'(z_*) \neq 0$ . Sind  $c_j : I_j \rightarrow D$  mit  $j = 1, 2$  zwei differenzierbare Kurven im Urbildbereich, die via  $z_* = c_j(t_*)$  zur Zeit  $t_*$  durch den Punkt  $z_*$  laufen und nicht verschwindende Tangentialvektoren  $\dot{c}_j(t) \neq 0$  besitzen, so gilt

$$\sphericalangle(\dot{c}_2(t_*), \dot{c}_1(t_*)) = \sphericalangle(\check{\dot{c}}_2(t_*), \check{\dot{c}}_1(t_*)) \pmod{2\pi},$$

wobei die  $\check{c}_j = f \circ c_j$  die entsprechenden Kurven im Bildbereich sind.

**Beweis** Mit den obigen Notationen impliziert die Kettenregel die Formel

$$\check{\dot{c}}_j(t_*) = f'(z_*) \dot{c}_j(t_*)$$

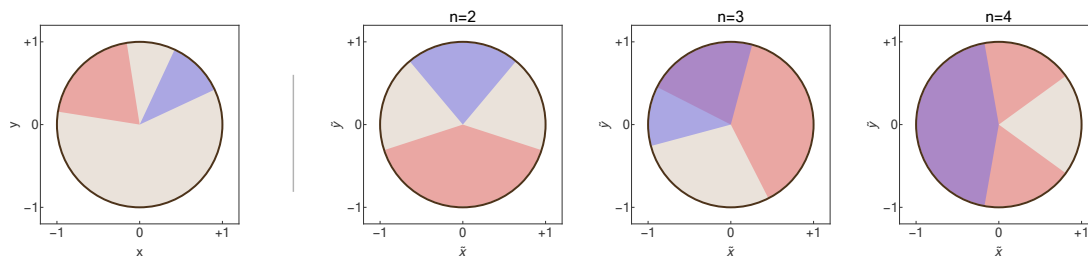
für  $j = 1$  und  $j = 2$ , wobei sowohl  $f'(z_*)$  als auch  $\dot{c}_j(t_*)$  und  $\check{\dot{c}}_j(t_*)$  jeweils nicht verschwinden und daher einen wohldefinierten Polarwinkel besitzen. Insbesondere gilt

$$\arg(\check{\dot{c}}_j(t_*)) = \arg(f'(z_*)) + \arg(\dot{c}_j(t_*)) \pmod{2\pi}$$

und die Behauptung folgt nach Einsetzen in die Definition des Winkels.  $\square$

### Bemerkungen

- Wir nennen eine Funktion, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs im obigen Sinne winkel- und orientierungstreu ist, auch konform, wobei ein analoges Konzept auch in höheren Raumdimensionen und auf gekrümmten Flächen verwendet wird.
- Das Lemma besagt, dass jede holomorphe Funktion  $f$  konform ist, sofern ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet. Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass jede konforme Abbildung auf  $D$  schon holomorph sein muss, wobei wir das wesentliche Argument schon beim Studium der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen kennen gelernt hatten: Eine im Reellen differenzierbare Abbildung  $D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist genau dann winkel- und orientierungstreu, wenn ihre Jacobi-Matrix in jedem Punkt eine Drehstreckung beschreibt.
- Gilt  $f'(z_*) = 0$  auch nur in einem Punkt  $z_* \in D$ , so wird  $f$  nicht mehr konform sein. Wir können dies beispielhaft an dem Monom  $f(z) = z^n$  mit  $n > 1$  verstehen (siehe Bild). Da es außerdem für jedes  $\tilde{z} \in B_1(0)$  mit  $\tilde{z} \neq 0$  genau  $n$  Punkte  $z \in B_1(0)$  mit  $z^n = \tilde{z}$  gibt (nämlich die  $n$ -ten komplexen Wurzeln von  $\tilde{z}$ ), schließen wir insgesamt, dass jedes Monom vom Grad größer 1 die Einheitskreisscheibe zwar holomorph und surjektiv, aber weder injektiv noch konform auf sich abbildet. Wir werden später besser verstehen, dass dies eine wichtige Beobachtung ist.



**Abbildung** Das  $n$ -te Monom ist für  $n > 1$  nicht konform im Koordinatenursprung, da jedes Tortenstück im Urbildbereich (ganz links) auf ein Tortenstück mit *größerem* Öffnungswinkel (und gedrehter Mittellinie) abgebildet wird.

**Definition** Eine holomorphe Funktion  $f$  mit Urbildbereich  $D$  und Bildbereich  $\tilde{D} = f(D)$  wird biholomorph genannt, wenn die folgenden beiden Aussagen erfüllt sind

- $f$  bildet  $D$  bijektiv auf  $\tilde{D}$  ab.
- Es gilt  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in D$ .

Insbesondere existiert dann die Umkehrfunktion  $\tilde{f} = f^{-1}$  und ist wegen der Kettenregel ebenfalls holomorph. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

- $\tilde{f}$  bildet  $\tilde{D}$  bijektiv auf  $D$  ab.
- Es gilt  $\tilde{f}'(\tilde{z}) \neq 0$  für alle  $\tilde{z} \in \tilde{D}$ .

Bei biholomorphen Funktionen schreiben wir gerne  $f : D \rightarrow \tilde{D}$ , d.h. wir geben nicht nur den Urbildbereich, sondern auch den Bildbereich explizit an.

**Interpretation** Die biholomorphen Funktionen auf der Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  entsprechen gerade dem invertierbaren Transformationen von  $D$ , unter denen orientierte Winkel erhalten bleiben. Insbesondere ist die Rücktransformation immer wohldefiniert und besitzt analoge geometrische Eigenschaften.

**Bemerkung** Eine biholomorphe Funktion muss in Randpunkten nicht unbedingt definiert oder differenzierbar sein. In vielen Fällen wird zwar  $\partial D$  auf  $\partial \tilde{D}$  abgebildet, aber diese entsprechende Randabbildung muss dann nicht unbedingt bijektiv sein.

Merkregel: Am Rand von  $D$  bzw.  $\tilde{D}$  können verschiedene Entartungen auftreten.

### Beispiele

#### 1. Die Cayley-Transformation

$$f(z) = \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}$$

bildet die obere Halbebene biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe ab und besitzt die Inverse

$$f^{-1}(z) = \mathbf{i} \frac{1 + z}{1 - z}.$$

#### 2. Die Exponentialabbildung bildet das Rechteck

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \eta_1 < \operatorname{Re}(z) < \eta_2 \text{ und } -\pi < \operatorname{Im}(z) < +\pi\}$$

mit reellen Parametern  $\eta_1 < \eta_2$  biholomorph auf den *geschlitzten Kreisring*

$$\tilde{D} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \varrho_1 < |\tilde{z}| < \varrho_2 \text{ mit } \operatorname{Im}(\tilde{z}) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(\tilde{z}) > 0\}$$

ab, sofern  $\varrho_j = \exp(\eta_j)$  bzw.  $\eta_j = \ln(\varrho_j)$  gilt (Übungsaufgabe). Im Grenzfall  $\varrho_1 = 0$  und  $\varrho_2 = \infty$  wird der *horizontale Streifen*

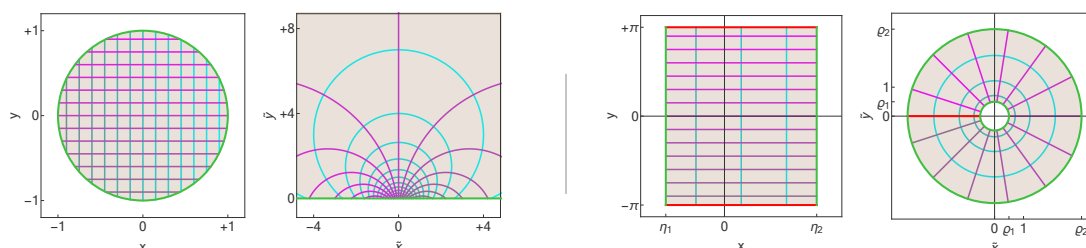
$$D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) < +\pi\}$$

biholomorph auf die *geschlitzte Ebene*

$$\tilde{D} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\tilde{z}) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(\tilde{z}) > 0\}$$

abgebildet, wobei letztere entsteht, wenn die negative reelle Halbachse aus der komplexen Zahlenebene entfernt wird.

Merkregel: Im Komplexen ist die Exponentialfunktion nicht global invertierbar, aber es gibt lokale Umkehrfunktionen, die auf gewissen Teilmengen der komplexen Ebene wohldefiniert sind.<sup>11</sup>



**Abbildung** Bilder für die inverse Cayley-Transformation (links) sowie die Exponentialabbildung (rechts, mit  $\eta_1 < 0 < \eta_2$  und rotem Schlitz). Beachte die Winkelerhaltung.

<sup>11</sup>Siehe auch die detaillierte Diskussion zum komplexen Logarithmus weiter unten.

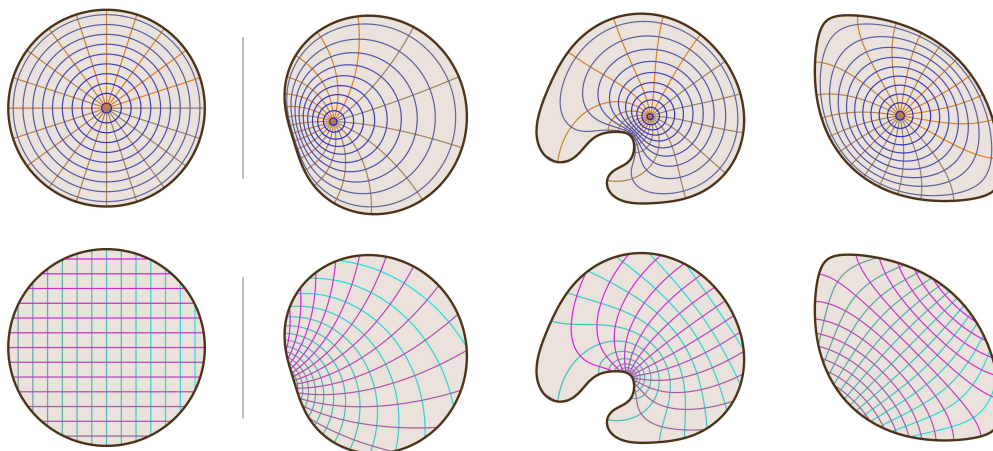
## mehr über Gebietstransformationen

**Vorbemerkung** In diesem Abschnitt formulieren wir einige wichtige Resultate, die wir allerdings erst am Ende dieser Vorlesung rigoros beweisen können.

**Theorem (Satz von Riemann)** Jede offene und einfach zusammenhängende Menge  $D \subsetneq \mathbb{C}$  kann biholomorph auf die Einheitskreisscheibe  $B_1(0)$  abgebildet werden.

### Bemerkungen

1. Dieses wirklich fundamentale Resultat ist einer der Meilensteine der Mathematik und wird auch Riemannscher Abbildungssatz genannt. Es gilt sogar dann, wenn der Rand von  $D$  fraktal ist, also zum Beispiel für die *Kochsche Schneeflocke*. Einen Beweis dieses Satzes können wir aber mit unserem Wissensstand nicht geben.
2. Es ist wichtig, dass  $D$  eine echte und einfach zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist. Die Ebene  $\mathbb{C}$  kann nämlich *nicht* biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden. Das ist eine weitere nicht-triviale Erkenntnis. Genauso wenig können Gebiete mit Löchern biholomorph auf  $B_1(0)$  abgebildet werden.
3. Die Abbildung aus dem Satz von Riemann ist nicht eindeutig, d.h. für jedes  $D$  gibt es viele biholomorphe Funktionen  $f : D \rightarrow B_1(0)$  (siehe das Bild zu den Automorphismen der Kreisscheibe). Die Mehrdeutigkeit kann aber dadurch eliminiert werden, dass man  $f(z_*) = 0$  und  $f'(z_*) \in \mathbb{R}$  für einen beliebig fixierten Punkt  $z_*$  in  $D$  fordert.
4. Bei einigen Mengen  $D$  gibt es explizite Formeln für eine biholomorphe Abbildung  $f : D \rightarrow B_1(0)$  und/oder die Umkehrabbildung  $f^{-1} : B_1(0) \rightarrow D$ . Bei den meisten Mengen muss man aber geeignete numerische Approximationsverfahren verwenden, die allerdings nicht einfach sind.
5. Sind  $D, E \subsetneq \mathbb{C}$  zwei offene und einfach zusammenhängende Mengen, so kann  $D$  biholomorph auf  $E$  abgebildet werden und umgekehrt. Diese Verallgemeinerung des Satzes von Riemann ergibt sich unmittelbar aus einfachen Kompositionsargumenten, denn wenn  $f : D \rightarrow B_1(0)$  und  $g : E \rightarrow B_1(0)$  biholomorph sind, dann sind auch  $g^{-1} \circ f : D \rightarrow E$  und  $f^{-1} \circ g : E \rightarrow D$  biholomorph.



**Abbildung** Illustration des Satzes von Riemann für drei einfach zusammenhängende Mengen  $D$ . Oben bzw. unten ist dargestellt, wie das polare bzw. kartesische Koordinatennetz in der Einheitskreisscheibe (ganz links) durch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B_1(0) \rightarrow D$  von  $f : D \rightarrow B_1(0)$  deformiert wird. Beachte die Winkelerhaltung.

**Konforme Selbstabbildungen** Jede biholomorphe Funktion  $f : D \rightarrow D$  wird Automorphismus von  $D$  genannt. Mit einem Automorphismus können also die Punkte innerhalb von  $D$  so gegeneinander verschoben werden, dass alle orientierten Winkel erhalten bleiben.

Für einige Mengen  $D$  kann man alle Automorphismen in geschlossener Form angeben, wobei wir uns vor allem für die folgenden vier Fälle interessieren, in denen nur Möbius-Transformationen relevant sind. Bei anderen Mengen sind die Automorphismen jedoch in aller Regel durch kompliziertere Funktionen gegeben.

**Theorem (Automorphismen spezieller Mengen)**

1. (Ebene) Die Automorphismen von  $\mathbb{C}$  sind gerade die affinen Funktionen, d.h. die Möbius-Transformationen der Form

$$f(z) = az + b,$$

wobei  $a \neq 0$  und  $b$  komplexe Parameter sind.

2. (Kreisscheibe) Die Automorphismen von  $B_1(0)$  sind gerade die Möbius-Transformationen der Bauart

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z},$$

wobei  $\theta$  ein reeller und  $\zeta$  ein komplexer Parameter mit  $|\zeta| < 1$  ist.

3. (Halbebene) Die Automorphismen der Menge

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

sind gerade die Möbius-Transformationen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

mit *reellen* Parametern  $a, b, c, d$  (wobei natürlich wieder  $ad \neq bc$  gelten muss).

4. (Riemannsche Sphäre) Die Automorphismen der erweiterten Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$  sind die Möbius-Transformationen mit beliebigen komplexen Parametern.

**Bemerkungen**

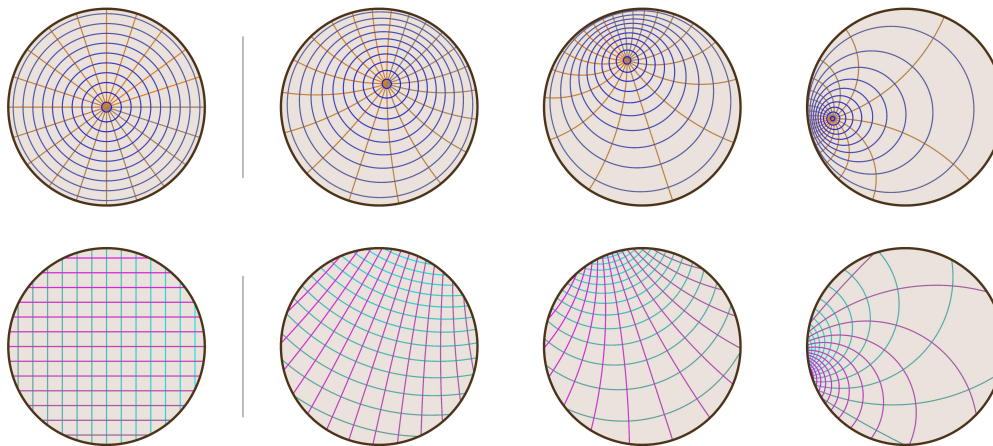
1. Automorphismen auf  $\mathbb{C}^*$  sind leicht anders definiert, da man zunächst einen geeigneten Ableitungsbegriff im unendlich fernen Punkt einführen muss. Salopp gesprochen gilt: Die Funktion  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist genau dann in  $\infty$  differenzierbar, wenn die Funktion  $z \mapsto f(1/z)$  gute Eigenschaften im Ursprung besitzt.
2. *zum Beweis*: Für jeden der vier Teile des Theorems können wir durch direkte Rechnungen zeigen, dass die angegebenen Möbius-Transformationen wirklich die jeweilige Menge bijektiv auf sich selbst abbilden, wobei sich die Biholomorphie dann unmittelbar aus der Differenzierbarkeit von Möbius-Transformationen ergibt. Der Nachweis, dass jeder Automorphismus schon Möbius-Transformation sein muss, ist deutlich subtiler und benötigt Resultate die, wir erst im Verlauf der Vorlesung kennen lernen werden.



3. Auf der Einheitskreisscheibe gilt insbesondere die Invertierungsformel

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = f^{-1}(z) = -\frac{\tilde{z} + e^{i\theta} \zeta}{-\bar{\zeta} \tilde{z} - e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \frac{\tilde{z} + e^{i\theta} \zeta}{1 + e^{-i\theta} \bar{\zeta} \tilde{z}} = e^{i\tilde{\theta}} \frac{\tilde{z} - \tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta} \tilde{z}}$$

mit  $\tilde{\theta} = -\theta$  und  $\tilde{\zeta} := -e^{-i\theta} \zeta$ .



**Abbildung** Deformation der polaren und der kartesischen Koordinatennetze bei drei verschiedenen Automorphismen der Einheitskreisscheibe, die jeder durch eine Möbius-Transformation spezieller Bauart gegeben sind.

## 1.12 Zwei Anwendungen

**Vorbemerkung** In den Natur- und Ingenieurwissenschaften müssen wir oftmals eine harmonische Funktion  $U$  oder sogar eine holomorphe Funktion  $F$  auf einer gegebenen zweidimensionalen Menge  $D$  finden oder konstruieren, wobei ggf. noch geeignete *Randbedingungen* zu berücksichtigen sind, die das Verhalten der Funktion auf  $\partial D$  festlegen. Die Menge  $D$  kann dabei sowohl als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  als auch als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  betrachtet werden (so wie wir das bisher auch schon gemacht haben).

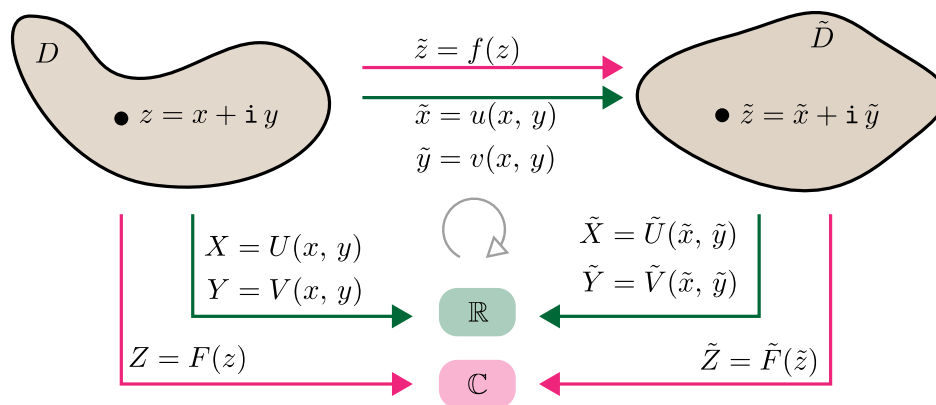
Eine sehr erfolgreiche Strategie besteht darin,  $D$  mittels einer holomorphen (oder gar biholomorphen) Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf die Menge  $\tilde{D} = f(D)$  zu transformieren und dort eine harmonische Funktion  $\tilde{U}$  bzw. eine holomorphe Funktion  $\tilde{F}$  zu finden, mit der dann  $U$  bzw.  $F$  durch Rücktransformation gewonnen werden kann. Der Vorteil dieser Methode liegt auf der Hand, wenn  $D$  eine komplizierte Geometrie, die Menge  $\tilde{D}$  aber eine besonders einfache Gestalt (Kreisscheibe, Halbebene usw.) besitzt.

**Setting** Die im Folgenden verwendeten Bezeichnungen sind im Bild dargestellt. Mit Rücktransformation meinen wir

$$F(z) = \tilde{F}(f(z)) \quad \text{bzw.} \quad U(x, y) = \tilde{U}(u(x, y), v(x, y)),$$

wobei sich diese Formeln in natürlicher Weise aus den Pfeilen und Bezeichnungen im Diagramm ergeben.





**Abbildung** Die Bezeichnungen aller Mengen, Funktionen und Variablen in diesem Abschnitt.

**Bemerkung**

1. Die Funktion  $f$  wird im Folgenden immer holomorph sein, so dass  $u$  und  $v$  immer harmonisch sind. Die Kettenregel zeigt darüber hinaus, dass die Holomorphie von  $\tilde{F}$  auch die Holomorphie von  $F = \tilde{F} \circ f$  impliziert. Eine analoge Aussage für  $\tilde{U}$  und  $U$  leiten wir gleich her.
2. Wir haben zunächst nicht vorausgesetzt, dass  $f$  invertierbar ist, aber in vielen Beispielen ist  $f$  sogar biholomorph. In diesem Fall gilt  $f(\partial D) = \partial \tilde{D}$ , d.h. der Rand von  $D$  wird auf den Rand von  $\tilde{D}$  abgebildet. Insbesondere können also Randbedingungen an  $U$  in Randbedingungen an  $\tilde{U}$  übersetzt werden.
3. Die Resultate der komplexen Analysis können auf die Gebietstransformation  $f$ , aber sinngemäß auch auf  $F$  und  $\tilde{F}$  angewendet werden (sofern diese holomorph sind).
4. Die in diesem Abschnitt betrachteten zweidimensionalen Probleme in der reellen  $xy$ -Ebene kommen in der Regel von dreidimensionalen Problemen, bei denen die dritte Dimension durch Symmetriebetrachtungen oder Reduktionsargumente eliminiert wurde. Die Variable  $z$  benutzen wir wieder via  $z = x + iy$  als komplexe Variable in der Ebene (und nicht etwa für die dritte Raumdimension).

**Lemma** (eine Transformationsformel) Mit den obigen Notationen gilt

$$\Delta U(x, y) = \Delta \tilde{U}(u(x, y), v(x, y)) |f'(x + iy)|^2.$$

Insbesondere ist  $U$  harmonisch (auf  $D$ ), sofern  $\tilde{U}$  harmonisch (auf  $\tilde{D}$ ) ist.

**Beweis** Wenn wir in der oben angegebenen Formel für die Rücktransformation beide Seiten insgesamt zweimal nach  $x$  differenzieren, so ergibt sich mit der Kettenregel zunächst

$$\partial_x U = \partial_{\tilde{x}} \tilde{U} \partial_x u + \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \partial_x v,$$

und anschließend

$$\partial_x^2 U = \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{U} (\partial_x u)^2 + 2 \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} (\partial_x u \partial_x v) + \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{U} (\partial_x v)^2 + \partial_{\tilde{x}} \tilde{U} \partial_x^2 u + \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \partial_x^2 v,$$

wobei wir die Argumente der verschiedenen Funktionen nicht geschrieben haben, um die Notation kompakt zu halten. Eine analoge Formel erhalten wir durch zweimaliges Differenzieren nach  $y$  und durch Addition ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\Delta U &= \partial_{\tilde{x}}^2 \tilde{U} \left( (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \right) + \partial_{\tilde{y}}^2 \tilde{U} \left( (\partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2 \right) \\ &\quad + 2 \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \left( (\partial_x u \partial_x v) + (\partial_y u \partial_y v) \right) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{U} \left( \partial_x^2 u + \partial_y^2 u \right) + \partial_{\tilde{y}} \tilde{U} \left( \partial_x^2 v + \partial_y^2 v \right).\end{aligned}$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (wir benutzen hier, dass  $f$  holomorph ist) gilt außerdem

$$\partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v = 0, \quad (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2 = |f'(x + iy)|^2$$

sowie  $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \Delta u = 0$  und  $\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = \Delta v = 0$ . Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen.  $\square$

Vorlesung 05-2 : 12. Mai

## Elektrisches Feld zwischen geladenen Leitern

**Elektrostatistisches Grundproblem in 2D** Ein wichtiges Teilproblem in der Theorie elektromagnetischer Phänomene kann wie folgt formuliert werden: Finde eine Funktion  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta U(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in D$$

und außerdem die *Dirichlet-Randbedingung*

$$U(x, y) = g(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \partial D$$

mit gegebener Funktion  $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt sind. Die Funktion  $U$  ist dabei das gesuchte *elektrische Potential*, dessen negativer Gradient das *elektrische Feld*  $\mathbf{E}$  liefert, wobei das Minuszeichen der physikalischen Potentialdefinition entspricht.

Wir wollen nun beispielhaft  $U$  und damit auch  $\mathbf{E}$  im Außengebiet zweier sehr langer Leiter berechnen, die senkrecht zur  $xy$ -Ebene verlaufen. Im einfachsten Fall können die Querschnitte beider Leiter durch zwei Kreisscheiben vom Radius  $\varrho > 0$  beschrieben werden, wobei die entsprechenden Kreismittelpunkte durch  $-d$  und  $+d$  mit  $d > \varrho$  gegeben sind und daher auf der  $x$ -Achse sowie symmetrisch zur  $y$ -Achse liegen. Wir suchen also eine harmonische Funktion  $U$  auf der offenen Menge

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z - d| > \varrho, |z + d| > \varrho\},$$

wobei wir zusätzlich die Randbedingungen

$$U(x, y) = \pm\mu \quad \text{für } z = x + iy = \partial B_\varrho(\mp d)$$

mit gegebener Konstante  $\mu \in \mathbb{R}$  erfüllen wollen. Diese kodieren, dass beide Leiter gleich große, aber ungleichnamige Ladungen tragen.

**biholomorphe Gebietstransformation** Die wichtige geometrische Beobachtung ist, dass die Möbius-Transformation<sup>12</sup>

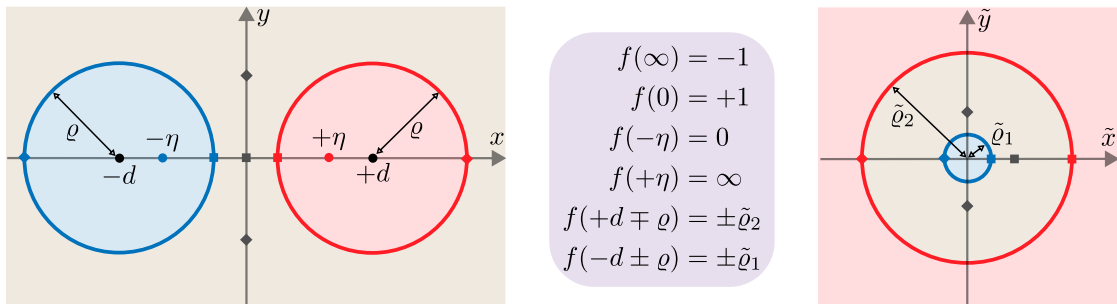
$$\tilde{z} = f(z) := \frac{\eta + z}{\eta - z}, \quad \eta := \sqrt{d^2 - \varrho^2}$$

das Gebiet  $D$  auf den Kreisring

$$\tilde{D} := \{ \tilde{z} \in \mathbb{C} : \tilde{\varrho}_1 < |\tilde{z}| < \tilde{\varrho}_2 \}, \quad \tilde{\varrho}_1 := 1/\tilde{\varrho}_2, \quad \tilde{\varrho}_2 := \frac{d + \sqrt{d^2 - \varrho^2}}{\varrho}$$

abbildet, wobei die Randkreislinien  $|z + d| = \varrho$  bzw.  $|z - d| = \varrho$  (Rand des linken bzw. rechten Leiters) auf  $|\tilde{z}| = \tilde{\varrho}_1$  (Innenkreis) bzw.  $|\tilde{z}| = \tilde{\varrho}_2$  (Außenkreis) abgebildet wird.

Damit haben wir das Ursprungsproblem transformiert und müssen nun eine harmonische Funktion  $\tilde{U}$  auf dem Kreisring  $\tilde{D}$  finden, die auf der Innen- bzw. der Außenkreislinie den Wert  $-\mu$  bzw.  $+\mu$  annimmt. Dieses Ersatzproblem ist deutlich einfacher als das Ursprungsproblem, eben weil die Geometrie von  $\tilde{D}$  viel übersichtlicher als die von  $D$  ist.



**Abbildung** Links: Die Querschnitte der beiden Leiter als Kreisscheiben in der Ebene sowie die beiden Punkte  $-\eta$  und  $+\eta$ , die symmetrisch bzgl. beider Randkreislinien liegen. Rechts: Das Außengebiet der beiden Kreisscheiben wird durch die angegebene Möbius-Transformation  $f$  auf einen Kreisring im Bildbereich abgebildet (jeweils hellbraun), wobei  $0 < \tilde{\varrho}_1 < 1 < \tilde{\varrho}_2 < \infty$  für die Radien gilt. Siehe auch die linke Spalte im nächsten Bild. Mitte: Die Bilder ausgewählter Punkte unter  $f$ .

**Konstruktion des elektrischen Potentials** Auf der Menge  $\tilde{D}$  können wir den Laplace-Operator bzgl. der kartesischen Koordinaten  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  in den entsprechenden Polarkoordinaten schreiben, wobei wir schon in *Analysis 2+3* gesehen hatten, dass dies via  $\tilde{z} = \tilde{r} \exp(i \tilde{\varphi})$  und mit der symbolischen Transformationsformel

$$\partial_{\tilde{x}}^2 + \partial_{\tilde{y}}^2 = \partial_{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^{-1} \partial_{\tilde{r}} + \tilde{r}^{-2} \partial_{\tilde{\varphi}}^2$$

gelingt. Anschließend können wir eine radialsymmetrische Funktion  $\tilde{U}$  durch das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung bzgl. des Polarradius  $\tilde{r}$  gewinnen. Nach einigen Rechenschritten erhalten wir

$$\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\mu}{\ln(\tilde{\varrho}_2)} \ln \left( \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right),$$

wobei wir anschließend durch eine Probe leicht verifizieren können, dass die so definierte Funktion  $\tilde{U}$  in der Tat alle gewünschten Eigenschaften besitzt, also harmonisch auf

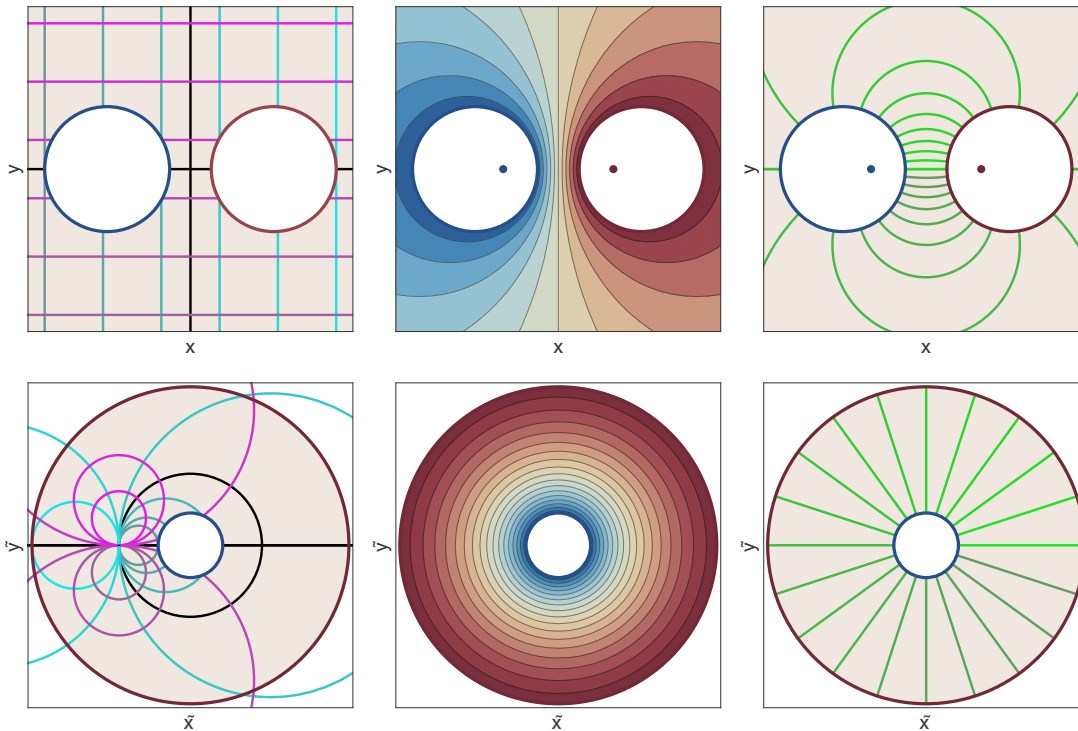
<sup>12</sup>Die reelle Entsprechung von  $f$  berechnet sich zu

$$\tilde{x} = u(x, y) = \frac{\eta^2 - x^2 - y^2}{(\eta - x)^2 + y^2}, \quad \tilde{y} = v(x, y) = \frac{\eta y}{(\eta - x)^2 + y^2}.$$

$\tilde{D}$  ist und die gegebenen Dirichlet-Randbedingungen erfüllt.<sup>13</sup> Durch Einsetzen der Gebietstransformation erhalten wir schließlich

$$U(x, y) = \frac{\mu}{\ln(\tilde{\rho}_2)} \ln(|f(x + iy)|) = \frac{\mu}{\ln(\tilde{\rho}_2)} \ln\left(\sqrt{\frac{(\eta + x)^2 + y^2}{(\eta - x)^2 + y^2}}\right)$$

für das elektrische Potential zwischen den beiden stromdurchflossenen Leitern.<sup>14</sup>



**Abbildung** Links: Darstellung der Möbius-Transformation  $f$ , wobei die horizontale bzw. vertikale Achse im Urbildbereich auf die horizontale Achse bzw. die Einheitskreislinie im Bildbereich abgebildet wird (jeweils schwarz) und das Außengebiet der Leiter wieder hellbraun gezeichnet wurde. Mitte: Konturplot des elektrischen Potentials  $U$  (oben) bzw.  $\tilde{U}$  (unten) als harmonische Funktion auf  $D$  bzw.  $\tilde{D}$  mit vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen, wobei alle Niveaulinien (auch Potentiallinien genannt) sowohl in  $D$  als auch in  $\tilde{D}$  Kreislinien sind. Rechts: Die elektrischen Feldlinien sind Integralkurven an das elektrische Feld und stehen immer senkrecht auf den Potentiallinien, wobei jede Feld- bzw. Potentiallinie oben durch die Transformation  $f$  auf eine Feld- bzw. Potentiallinie unten abgebildet wird und umgekehrt. Beachte, dass  $f$  und  $\tilde{f} = f^{-1}$  hier Möbius-Transformationen sind und dass jede Feldlinie unten Segment (grün) einer Geraden in  $\tilde{D}$  ist, die durch die Punkte 0 und  $\infty$  läuft. Aus den Invarianz-Eigenschaften ergibt sich damit die folgende *Schlussfolgerung*: Jede Feldlinie oben ist Segment (wieder grün) einer Kreisgeraden in  $D$ , die  $-\eta = \tilde{f}(0)$  und  $+\eta = \tilde{f}(\infty)$  enthält (blauer und roter Punkt).

**Konstruktion der elektrischen Feldlinien** Die elektrischen Feldlinien sind die Integralkurven an das Vektorfeld

$$\mathbf{E}(x, y) = -\mathbf{grad} U(x, y),$$

wobei  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$  automatisch und  $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$  wegen  $\Delta U = 0$  gilt, d.h. das elektrische Feld ist sowohl quellen- als auch wirbelfrei in der Menge  $D$ . Die Feldlinien stehen dabei

<sup>13</sup>Die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen garantiert, dass es keine weiteren (zum Beispiel nicht radialsymmetrische) Lösungen des Problems in  $\tilde{D}$  gibt.

<sup>14</sup>Nach Konstruktion erfüllt  $U$  die Laplace-Gleichung in  $D$  sowie die Randbedingungen auf  $\partial D$ . Wir können dies in einer Probe auch direkt nachrechnen.

immer senkrecht auf den *Potentiallinien*, also den Niveaulinien von  $U$ , und können (zumindest im Prinzip) als Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x U(x(t), y(t)) \\ -\partial_y U(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

bestimmt werden. Es ist jedoch einfacher, zunächst die Feldlinien im Ersatzproblem auf  $\tilde{D}$  zu identifizieren und anschließend die inverse Möbius-Transformation  $f^{-1}$  anzuwenden. Da  $\tilde{U}$  radialsymmetrisch ist, ist jede Feldlinie in  $\tilde{D}$  nämlich das Segment einer Geraden durch die Punkte 0 und  $\infty$ . Jede dieser Geraden wird von  $f^{-1}$  auf eine Kreisgerade abgebildet, die die Punkte  $f^{-1}(0) = -\eta$  und  $f^{-1}(\infty) = +\eta$  enthält, und wir schließen, dass die Feldlinien in  $D$  Segmente solcher Kreisgeraden sind. Mit analogen Argumenten zeigen wir, dass jede Potentiallinie in  $D$  eine Kreislinie ist, bzgl. derer  $\eta$  und  $+\eta$  symmetrisch sind.

Wir können natürlich auch direkte Formeln für die Feldlinien angeben, aber die Details sind recht kompliziert. Mit

$$z = f^{-1}(\tilde{z}) = \eta \frac{\tilde{z} - 1}{\tilde{z} + 1}$$

ergibt sich nämlich (Nachrechnen)

$$x = \eta \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1}{(\tilde{x} + 1)^2 + \tilde{y}^2}, \quad y = \eta \frac{2\tilde{y}}{(\tilde{x} + 1)^2 + \tilde{y}^2}$$

und wenn wir auf der rechten Seite

$$\tilde{x} = \tilde{r} \cos(\tilde{\varphi}_*), \quad \tilde{y} = \tilde{r} \sin(\tilde{\varphi}_*)$$

mit festem Winkel  $\tilde{\varphi}_*$  und freiem Radius  $\tilde{r} \in (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$  einsetzen, so erhalten wir eine explizite Parametrisierung einer Feldlinie in  $D$ . Es bedarf jedoch einiger Erfahrung, um die bereits abgeleitete Kreisgeradenstruktur der Feldlinien auch in diesen Formeln zu erkennen.

### **Bemerkungen**

1. Die Funktion  $\tilde{U}$  beschreibt das elektrische Potential in einem *Zylinderkondensator* und das entsprechende elektrische Feld  $\tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad} \tilde{U}$  ist bis auf das Vorzeichen gerade das elementare Quellenfeld aus *Analysis 3*.
2. Das elementare Wirbelfeld verläuft in  $\tilde{D}$  immer tangential zu den Potentiallinien von  $\tilde{U}$ , wobei letztere durch konzentrische Kreise gegeben sind. Eine analoge Aussage gilt auch für das Vektorfeld mit den Komponenten  $-\partial_y U(x, y)$  und  $+\partial_x U(x, y)$ , da dieses gerade als winkeltreue Transformation des elementaren Wirbelfelds betrachtet werden kann.

**zum komplexen Potential** Es gibt keine holomorphe Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\tilde{F} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U = \operatorname{Re}(F)$  bzw.  $\tilde{U} = \operatorname{Re}(\tilde{F})$ . Im Ersatzproblem kann diese Aussage durch folgendes indirekte Argument begründet werden: Wenn die Behauptung falsch wäre, so würde eine harmonische Funktion  $\tilde{V} = \operatorname{Im}(\tilde{F})$  auf  $\tilde{D}$  existieren und nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen müsste

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\partial_{\tilde{y}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{c \tilde{y}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \quad \partial_{\tilde{y}} \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) = +\partial_{\tilde{x}} \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = +\frac{c \tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$$

mit  $c = \mu / \ln(\tilde{\varrho}_2)$  gelten, wobei die zwei Terme auf den rechten Seiten die Komponenten des elementaren Wirbelfelds sind. Wir hatten aber schon in *Analysis 3* gesehen, dass dieses Wirbelfeld kein Potential besitzt, obwohl es in jedem Punkt aus  $\tilde{D}$  rotationsfrei ist und damit die lokalen Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Der Grund ist, dass die Menge  $\tilde{D}$  ein Loch besitzt und damit nicht einfach zusammenhängend ist.

Es gibt aber auf jeder einfach zusammenhängenden Teilmenge von  $D$  bzw.  $\tilde{D}$  ein *lokales komplexes Potential*. Ein Beispiel im transformierten Gebiet ist die Funktion

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = c \operatorname{Ln}_0(\tilde{z}) = c \ln(|\tilde{z}|) + c i \operatorname{Arg}_0(\tilde{z}),$$

die aber nicht auf dem gesamten Kreisring  $\tilde{D}$ , sondern nur außerhalb des Schlitzes  $\tilde{S} = \{\tilde{z} : -\tilde{\varrho}_1 < \tilde{x} < -\tilde{\varrho}_2, \tilde{y} = 0\}$  definiert ist.<sup>15</sup> Der geschlitzte Kreisring  $\tilde{D} \setminus \tilde{S}$  ist einfach zusammenhängend (da wir *in dieser Menge* nicht um das Loch von  $\tilde{D}$  herumlaufen können) und dort gilt

$$\tilde{F}'(\tilde{z}) = \frac{c}{\tilde{z}}, \quad \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \operatorname{Re}(\tilde{F}(\tilde{z})), \quad \tilde{F}'(\tilde{z}) = \partial_{\tilde{x}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) - i \partial_{\tilde{y}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

d.h. der Vektor **grad**  $\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y})$  entspricht der konjugiert komplexen Zahl zu  $\tilde{F}'(\tilde{z})$ . Ganz analoge Aussagen ergeben sich mit

$$F(z) = \tilde{F}(f(z)) = c \operatorname{Ln}_0\left(\frac{\eta + z}{\eta - z}\right)$$

auf der Menge  $D \setminus S$ , wobei  $S = \{z : -d + \varrho < x < d - \varrho, y = 0\}$  das Urbild von  $\tilde{S}$  bzgl.  $f$  ist und gerade die horizontale Steckle zwischen den Leitern beschreibt.

## Umströmung eines Kreiszyinders

**reelles und komplexes Strömungspotential in 2D** Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{W} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  einer idealen (und damit inkompressiblen) Flüssigkeit muss quellenfrei sein. In vielen Fällen kann außerdem das Auftreten von *Turbulenz* vernachlässigt werden, so dass das Vektorfeld dann auch *wirbelfrei* ist und insgesamt

$$\operatorname{div} \mathbf{W}(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{W}(x, y) = 0$$

in allen Punkten  $(x, y) \in D$  gilt. Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichungen ist die Existenz einer harmonischen Funktion  $U$ , so dass

$$\mathbf{W}(x, y) = -\mathbf{grad} U(x, y)$$

auf  $D$  gilt, wobei  $U$  als *Geschwindigkeitspotential* bezeichnet wird. Oftmals existiert sogar eine holomorphe Funktion  $F$ , so dass die obige Gleichung für den Realteil von  $F = U + iV$  gilt. In diesem Fall nennt man  $F$  das *komplexe Strömungspotential* und den Imaginärteil  $V$  die *Stromfunktion*, wobei die Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann dann in jedem Punkt implizieren, dass **grad**  $V(x, y)$  aus **grad**  $U(x, y)$  durch Drehung um  $90^\circ$  hervorgeht.

**Bemerkung** Die drei verschiedenen Formulierungen des Problems sind nur auf einfach zusammenhängenden Gebieten paarweise äquivalent. Auf Gebieten mit Löchern kann es sein, dass zu einem quellen- und wirbelfreien Vektorfeld kein reelles oder gar komplexes Potential existiert. Das Standardbeispiel ist hier wieder das elementare Wirbelfeld auf der punktierten komplexen Ebene  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

<sup>15</sup>Wir werden die Funktionen  $\operatorname{Ln}_0$  und  $\operatorname{Arg}_0$  weiter unten genauer studieren. Insbesondere nimmt die Argumentfunktion  $\operatorname{Arg}_0$  immer Werte in  $(-\pi, +\pi)$  an.

**biholomorphe Gebietstransformation** Wir wollen nun mittels eines komplexen Strömungspotentials  $F$  die Umströmung eines kreisförmigen Zylinders beschreiben, der senkrecht zur  $xy$ -Ebene liegt und dessen Querschnitt der Einheitskreisscheibe entspricht. Insbesondere setzen wir

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

und konstruieren eine geeignete holomorphe Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Im ersten Schritt bemerken wir, dass wir  $D$  mithilfe der Joukowski-Transformation

$$\tilde{z} = f(z) = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

biholomorph auf die offene Menge

$$\tilde{D} = \{\tilde{x} + i\tilde{y} \in \mathbb{C} : \tilde{y} \neq 0 \text{ oder } |\tilde{x}| > 1\}$$

abbilden können (siehe dazu das Bild). Durch die Berechnung des Real- sowie des Imaginärteils von  $f(x + iy)$  erhalten wir die Darstellungsformeln

$$\tilde{x} = u(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{2(x^2 + y^2)}, \quad \tilde{y} = v(x, y) = \frac{y^3 + x^2y - y}{2(x^2 + y^2)}$$

für die reelle Entsprechung von  $f$ . Die expliziten Formeln für die Umkehrabbildung sind sowohl im Komplexen als auch im Reellen komplizierter, spielen aber im Folgenden keine Rolle.

**Bemerkung\*** Mit folgenden Argumenten können wir zeigen, dass die Joukowski-Transformation  $f$  die Menge  $D$  wirklich biholomorph auf  $\tilde{D}$  abbildet:

1. Durch direkte Rechnungen beweisen wir, dass  $f(z_1) = f(z_2)$  für zwei beliebige, aber verschiedene komplexe Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  genau dann erfüllt ist, wenn  $z_1 = 1/z_2$  gilt. Dies liefert die Injektivität von  $f$  auf  $D$ .
2. Durch das Lösen quadratischer Gleichungen zeigen wir die Surjektivität, d.h. dass  $f$  die Menge  $D$  wirklich auf  $\tilde{D}$  abbildet.
3. Die Differenzierbarkeit von  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  ergibt sich aus den oben genannten Rechenregeln, wobei  $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - 1/z^2)$  gilt.
4. Die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung folgt aus der Kettenregel, weil  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in D$  gilt.

**Konstruktion des Strömungspotentials** Im transformierten Gebiet  $\tilde{D}$  können wir das Problem mit physikalischer Intuition lösen: Das einfachste Geschwindigkeitsfeld einer den Schlitz umströmenden Flüssigkeit ist konstant und zeigt immer in horizontale Richtung (*laminare Strömung*, keine *Turbulenz*). Diese spezielle Lösung wird durch die Wahl

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = -\mu \tilde{z}, \quad \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\mu \tilde{x}, \quad \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\mu \tilde{y}$$

beschrieben, denn mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergeben sich die Formeln

$$\tilde{\mathbf{W}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{x}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ -\partial_{\tilde{y}}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{y}}\tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ +\partial_{\tilde{x}}\tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix},$$



wobei der Parameter  $\mu \in \mathbb{R}$  der horizontalen Strömungsgeschwindigkeit entspricht und als trivialer Faktor in allen Formeln auftaucht.

Das entsprechende komplexe Potential auf  $D$  ergibt sich zu

$$F(z) = \tilde{F}(f(z)) = -\mu f(z) = -\mu \frac{z^2 + 1}{2z},$$

d.h. in diesem Beispiel gilt

$$U(x, y) = -\mu u(x, y), \quad V(x, y) = -\mu v(x, y).$$

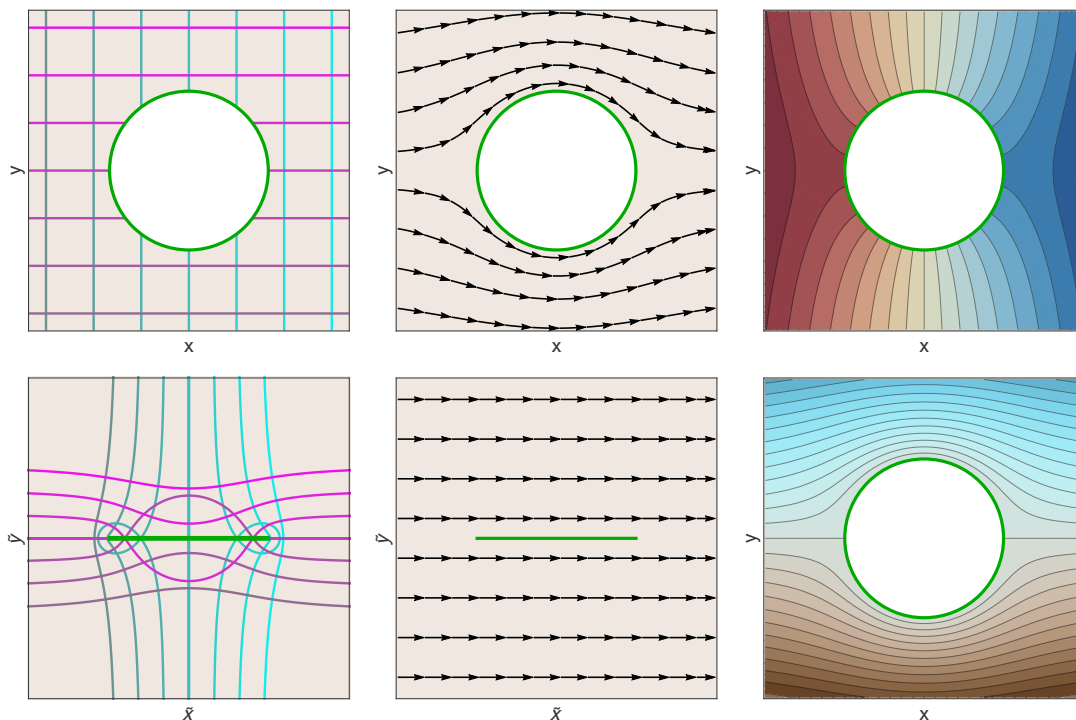
Die obigen Formeln für die reelle Entsprechung von  $f$  liefern explizite Ausdrücke für das Geschwindigkeitspotential  $U$  sowie die Stromfunktion  $V$  und durch direkte Rechnungen erhalten wir via

$$\mathbf{W}(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_x U(x, y) \\ -\partial_y U(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\mu}{2(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$$

das gesuchte nichttriviale Geschwindigkeitsfeld auf  $D$ . Beachte, dass

$$F'(z) = \mu \frac{1 - z^2}{2z^2} = \partial_x U(x, y) - i \partial_y U(x, y) = \partial_y V(x, y) + i \partial_x V(x, y)$$

wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt, d.h. die Komponenten von  $\mathbf{grad} U(x, y)$  und  $\mathbf{grad} V(x, y)$  können alternativ auch direkt aus dem Real- und dem Imaginärteil der komplexen Ableitung  $F'(z) = -\mu f'(z)$  abgelesen werden.



**Abbildung** *Links:* Das offene Außengebiet der Einheitskreisscheibe (oben) wird durch die Joukowski-Transformation biholomorph auf die im reellen Intervall  $[-1, +1]$  geschlitzte Ebene (unten) abgebildet. Der abgeschlossene Schlitz ist dabei gerade das Bild der Einheitskreislinie (jeweils grün), d.h. der Rand von  $D$  wird auf den Rand von  $\tilde{D}$  abgebildet, wobei allerdings die Injektivität verloren geht. *Mitte:* Das Strömungsfeld in  $D$  (oben) und  $\tilde{D}$  (unten). *Rechts:* Konturplots des Geschwindigkeitspotentials  $U$  (oben) sowie der Stromfunktion  $V$  (unten) für die Strömung in  $D$ . Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit verläuft oben bzw. unten normal bzw. tangential zu den jeweiligen Niveaulinien.



## 1.13 Komplexe Logarithmen und Potenzen

**Vorbemerkung** In diesem Abschnitt diskutieren wir Logarithmen und allgemeine Potenzen im Komplexen, wobei wir zunächst die zugrunde liegenden Mehrdeutigkeiten genauer untersuchen. Anschließend werden wir die sogenannten Hauptwerte sowie weitere Nebenwerte einführen, die jeweils auf einer anderen geschlitzten Ebene einen der vielen Werte auswählen und damit Potenz- und Logarithmusfunktionen liefern, die eindeutig definiert und außerdem holomorph sind.

**Logarithmus als mengenwertige Abbildung** Das prinzipielle Problem besteht im Komplexen darin, dass es für jede Zahl  $z \neq 0$  viele komplexe Zahlen gibt, die man den Logarithmus von  $z$  nennen kann. Genauer gesagt, wir definieren

$$\mathbf{Ln}(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \exp(\zeta) = z\}$$

und wollen zunächst verstehen, welche Elemente diese Menge besitzt bzw. welche Kandidaten es für den Logarithmus von  $z$  gibt. Dazu schreiben wir

$$z = |z| \exp(i \arg(z)), \quad \zeta = \xi + i v$$

und erhalten nach Einsetzen in  $z = \exp(\zeta)$  sowie durch Vergleich der Radius- und Winkelvariablen die Bedingungen

$$|z| = \exp(\xi), \quad \arg(z) = v \pmod{2\pi},$$

aus denen dann unmittelbar die Darstellungsformel

$$\mathbf{Ln}(z) = \left\{ \ln(|z|) + i(\arg(z) + k2\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für den mehrwertigen Logarithmus von  $z$  abgelesen werden kann. Insbesondere besitzt jedes Element dieser Menge denselben Realteil (nämlich den reellen Logarithmus von  $|z| > 0$ ), aber die Imaginärteile unterscheiden sich. Die Mehrdeutigkeit ergibt sich dabei aus der Tatsache, dass Polarwinkel nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  festgelegt sind. Oder anders gesagt: Auch der Polarwinkel (bzw. das komplexe Argument) von  $z$  ist mehrdeutig, wobei für jedes  $z$  die Menge

$$\mathbf{Arg}(z) = \{\arg(z) + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

alle in Frage kommenden Werte enthält.<sup>16</sup> Mit diesen Notationen können wir den Zusammenhang zwischen komplexem Logarithmus und komplexem Argument auch als

$$\mathbf{Ln}(z) = \ln(|z|) + i \mathbf{Arg}(z)$$

schreiben, wobei die Addition und Multiplikation auf der rechten Seite elementweise angewendet werden, d.h. es gilt  $a + b\{\zeta_1, \zeta_2, \dots\} = \{a + b\zeta_1, a + b\zeta_2, \dots\}$  für alle Zahlen  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Insbesondere sehen wir, dass alle Schwierigkeiten beim komplexen Logarithmus ausschließlich von der Mehrdeutigkeit des Polarwinkels stammen. Diese Mehrdeutigkeit war natürlich in unserer Vorlesung schon immer da, aber bisher nicht wirklich relevant bzw. relativ harmlos.

<sup>16</sup>Die Menge  $\mathbf{Arg}(z)$  hängt nicht davon ab, welche Wahl wir in  $\arg(z)$  treffen und enthält immer alle möglichen Winkelvariablen für  $z$ .

**Beispiele** Wegen  $|i| = 1$  und  $\arg(i) = \frac{1}{2}\pi \bmod 2\pi$  erhalten wir

$$\mathbf{Ln}(i) = \left\{ \dots, -i\frac{7}{2}\pi, -i\frac{3}{2}\pi, +i\frac{1}{2}\pi, +i\frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$$

und

$$\mathbf{Ln}(1-i) = \ln(2) + \left\{ \dots, -i\frac{17}{4}\pi, -i\frac{9}{4}\pi, -i\frac{1}{4}\pi, +i\frac{7}{4}\pi, +i\frac{15}{4}\pi, +i\frac{23}{4}\pi, \dots \right\}$$

kann direkt aus der Polardarstellung  $1-i = \sqrt{2} \exp\left(-i\frac{1}{4}\pi\right)$  abgelesen werden.

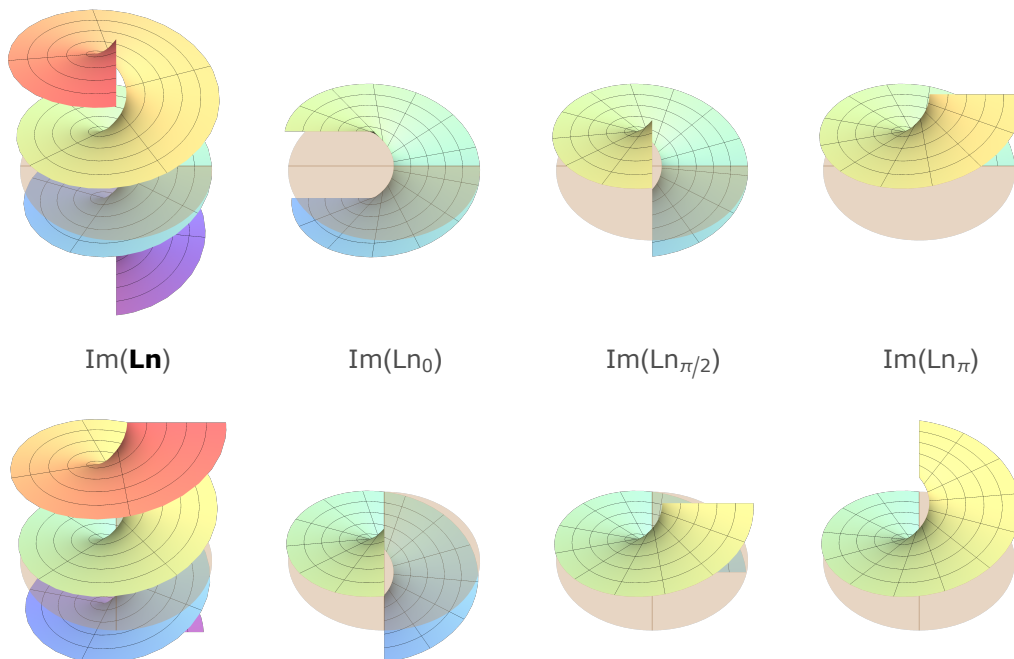
**Bemerkung** Für jede positive reelle Zahl  $z = x + 0i$  gilt

$$\mathbf{Ln}(x) = \ln(x) + \left\{ \dots, -i4\pi, -i2\pi, 0, +i2\pi, +i4\pi, \dots \right\} \quad \text{für } x > 0,$$

d.h. auch in diesem Fall existieren unendlich viele komplexe Zahlen  $\zeta$  mit  $\exp(\zeta) = x$ . Unter diesen gibt es aber nur eine reelle, nämlich  $\ln(x)$ . Für negative reelle Zahlen ergibt sich analog

$$\mathbf{Ln}(x) = \ln(-x) + \left\{ \dots, -i3\pi, -i\pi, +i\pi, +i3\pi, \dots \right\} \quad \text{für } x < 0,$$

aber diesmal finden wir keine reellen Elemente in dieser Menge. Der Logarithmus von 0 existiert aber auch im Komplexen nicht, da die komplexe Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt.



**Abbildung** Zur Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus. *Linke Spalte:* Für jeden Punkt  $z \neq 0$  aus der Einheitskreisscheibe (braun, mit markierter  $x$ -Achse) wurden senkrecht alle Werte für den Polarwinkel, d.h. alle Elemente aus  $\mathbf{Arg}(z)$  aufgetragen. Insgesamt entsteht eine Wendelfläche, die gerade den Imaginärteil des mehrdeutigen Logarithmus beschreibt und die in der oberen bzw. unten Reihe von oben-vorne bzw. oben-links betrachtet wird. *Andere Spalten:* Jeder der unten eingeführten  $\theta$ -Werte weist jedem  $z$  außerhalb des entsprechenden Schlitzes  $S_\theta$  einen eindeutigen Polarwinkel bzw. Imaginärteil des komplexen Logarithmus zu, wodurch ein bestimmtes Stück der Wendelfläche ausgewählt wird. Diese Teilfläche schließt sich aber nicht, denn über dem Schlitz  $S_\theta$  passen ihre Ränder nicht zusammen, sondern unterscheiden sich um den Wert  $2\pi$ .

**Potenzen als mengenwertige Abbildung** Mithilfe des komplexen Logarithmus können auch allgemeine Potenzen (zum Beispiel Wurzeln) definiert bzw. berechnet werden. Dazu betrachten wir für jedes  $z \neq 0$  die Menge

$$\begin{aligned} \mathbf{Pow}_p(z) &:= \left\{ \exp(p\zeta) : \zeta \in \mathbf{Ln}(z) \right\} \\ &= \left\{ \exp(p \ln(|z|) + i p \arg(z) + i p k 2\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \exp(p \ln(|z|) + i p \arg(z)) \left\{ \exp(i p k 2\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\}, \end{aligned}$$

die alle Kandidaten für die  $p$ -te Potenz von  $z$  enthält.<sup>17</sup> Dabei ist  $p \in \mathbb{C}$  eigentlich ein beliebiger komplexer Exponent, aber wir wollen uns zunächst auf reelle  $p$  beschränken, da man für diese die Formel  $\exp(p \ln(|z|)) = |z|^p$  benutzen kann.

Ein wesentlicher Punkt ist nun, dass für gewisse Werte von  $p$  die Menge  $\mathbf{Pow}_p(z)$  gar nicht unendlich viele, sondern nur endlich viele Werte enthält. Bei einem ganzzahligen Exponenten  $p = m \in \mathbb{Z}$  gilt zum Beispiel

$$\exp(i m k 2\pi) = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

und wir erhalten

$$\left\{ \exp(i m k 2\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \{1\}.$$

Insbesondere ist die Mehrdeutigkeit verschwunden und die Menge der Kandidaten besteht in diesem Fall nur aus einem einzigen Element,<sup>18</sup> nämlich

$$\mathbf{Pow}_p(z) = \{z^m\}.$$

Für  $p = 1/2$  ergibt sich aus der obigen Definition die Zwei-Elemente-Menge

$$\begin{aligned} \mathbf{Pow}_{1/2}(z) &= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(|z|)\right) \exp\left(+i \frac{1}{2} \arg(z)\right) \{-1, +1\} \\ &= \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}} \{-1, +1\} \end{aligned}$$

da  $\exp(i \frac{1}{2} k 2\pi)$  für alle ganzzahligen  $k$  immer einen von genau zwei Werten annimmt, nämlich entweder  $\exp(0) = +1$  (falls  $k$  gerade ist) oder  $\exp(i\pi) = -1$  (für ungerade  $k$ ). Aus der Mehrdeutigkeit wird in diesem Fall also eine Zweideutigkeit und  $\mathbf{Pow}_{1/2}(z)$  enthält gerade die beiden komplexen Quadratwurzeln von  $z$ . Oder anders gesagt: es gilt

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(z) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta^2 = z \right\},$$

wobei wir die beiden Quadratwurzeln von  $z$  alternativ auch ohne Verwendung von Logarithmen berechnen können (siehe dazu den Anfang dieses Skriptes). Man benutzt manchmal auch die Kurzschreibweise

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(z) = \left\{ \pm \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}} \right\}.$$

<sup>17</sup>Die Menge  $\mathbf{Pow}_p(z)$  entsteht also per Definition wie folgt: Wir nehmen ein beliebiges Element von  $\mathbf{Ln}(z)$ , multiplizieren es zunächst mit  $p$  und wenden anschließend die Exponentialfunktion an.

<sup>18</sup>Die Formel

$$z^m = \left( \exp(\ln(|z|) + i \arg(z)) \right)^m = \exp(m \ln(|z|) + i m \arg(z))$$

ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion.

Für  $p = 1/3$  ergibt sich

$$\left\{ \exp\left(i \frac{1}{3} k 2\pi\right) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 1, e^{i \frac{2}{3}\pi}, e^{i \frac{4}{3}\pi} \right\}$$

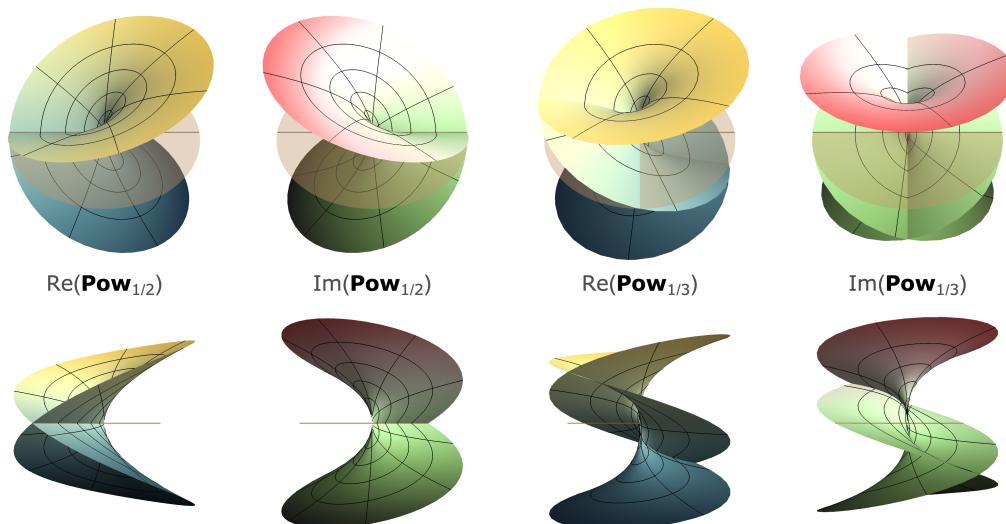
weil  $\exp\left(i \frac{1}{3} k 2\pi\right)$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  genau einen der drei angegebenen Werte annimmt (je nachdem, welchen Rest  $k$  bei Division durch 3 lässt), wobei diese gerade die dritten Einheitswurzeln darstellen. Insbesondere ist die Mehrdeutigkeit diesmal eine Dreideutigkeit und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{Pow}_{1/3}(z) &= \exp\left(\frac{1}{3} \ln(|z|)\right) \exp\left(+i \frac{1}{3} \arg(z)\right) \left\{ 1, e^{i \frac{2}{3}\pi}, e^{i \frac{4}{3}\pi} \right\} \\ &= \left\{ \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3}}, \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3} + i \frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{3} + i \frac{4}{3}\pi} \right\} \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbf{Pow}_{1/3}(z) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta^3 = z \right\}.$$

**Zusammenfassung** Ist  $p = m/n \in \mathbb{Q}$  rational, so enthält  $\mathbf{Pow}_{m/n}(z)$  genau  $n$  Elemente, nämlich die  $n$ -ten komplexen Wurzeln von  $z^m$ . Für jeden anderen Exponenten  $p$  wird  $\mathbf{Pow}_p(z)$  aber abzählbar unendlich viele Elemente besitzen.



**Abbildung** Die zweite und dritte komplexe Wurzel als mehrdeutige Abbildung, wobei für jedes  $z \neq 0$  aus der Einheitskreisscheibe (braune Fläche) die Real- bzw. Imaginärteile der zwei bzw. drei entsprechenden Wurzeln in senkrechter Richtung aufgetragen wurden. Insgesamt entstehen sogenannte Riemannsche Flächen, die sich in endlich vielen Raumkurven selbst durchdringen. Die obere bzw. untere Reihe der Bilder entspricht dabei einem Blick von vorne-oben bzw. vorne-links. Die unten eingeführten  $\theta$ -Werte wählen für jedes  $z$  eine Wurzel aus, so dass die Mehrdeutigkeit eliminiert wird und jeweils eine holomorphe Funktion auf einer geschlitzten Ebene entsteht. Siehe dazu das Bild weiter unten.

### Beispiele

1. Für  $z = 1$  und  $p = 1/n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  erhalten wir via

$$\mathbf{Pow}_{1/n}(1) = \left\{ 1, e^{i \frac{1}{n} 2\pi}, e^{i \frac{2}{n} 2\pi}, \dots, e^{i \frac{n-1}{n} 2\pi} \right\}$$

die  $n$ -ten Einheitswurzeln bzw. die Eckpunkte des regulären Standard- $n$ -Ecks (siehe auch *Analysis 1*), wobei natürlich  $e^{i \frac{n}{n} 2\pi} = e^{i \frac{0}{n} 2\pi} = 1$  gilt.

2. Für  $z = i$  und  $p = i$  erhalten wir

$$\mathbf{Ln}(i) = i \mathbf{Arg}(i), \quad \mathbf{Arg}(i) = \left\{ \dots, -\frac{3}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi, +\frac{5}{2}\pi, +\frac{9}{2}\pi, \dots \right\}$$

sowie

$$\mathbf{Pow}_i(i) = \left\{ e^{-\zeta} : \zeta \in \mathbf{Arg}(i) \right\} = \left\{ \dots, e^{+\frac{3}{2}\pi}, e^{-\frac{1}{2}\pi}, e^{-\frac{5}{2}\pi}, e^{-\frac{9}{2}\pi}, \dots \right\},$$

d.h. alle Kandidaten für die  $i$ -te Potenz von  $i$  sind reell und positiv.

### Bemerkungen

1. Bei allen Betrachtungen ist  $z = 0$  immer ausgeschlossen, denn es gibt keine komplexe Zahl  $\zeta$  mit  $\exp(\zeta) = 0$ . Insbesondere gilt  $\mathbf{Ln}(0) = \emptyset$  (leere Menge) und damit auch  $\mathbf{Pow}_p(0) = \emptyset$  für alle Exponenten  $p \in \mathbb{C}$ . Im Fall  $p \in \mathbb{R}_+$  könnte man aber auch  $\mathbf{Pow}_p(0) = \{0\}$  als Ausnahme von der Regel vereinbaren.
2. Die Mehrdeutigkeit von  $\mathbf{Ln}$  und  $\mathbf{Pow}$  kann auch geometrisch interpretiert bzw. verstanden werden (siehe die Bilder).
3. Es ist mühsam, mit mehrdeutigen Größen bzw. mengenwertigen Abbildungen zu rechnen, und alles andere als trivial, geeignete Differentiations- und Integrationskonzepte einzuführen. Auf der anderen Seite will man in vielen Anwendungen mit komplexen Wurzeln und Logarithmen rechnen. Aus diesem Grund werden wir nun lokal eindeutige Varianten einführen.

## eindeutige Logarithmen und Potenzen auf geschlitzten Ebenen

**Definition** Für jeden Winkelparameter  $\theta \in \mathbb{R}$  betrachten wir die geschlitzte Ebene

$$D_\theta := \mathbb{C} \setminus S_\theta, \quad S_\theta := \left\{ -r \exp(i\theta) : r \in [0, \infty) \right\}$$

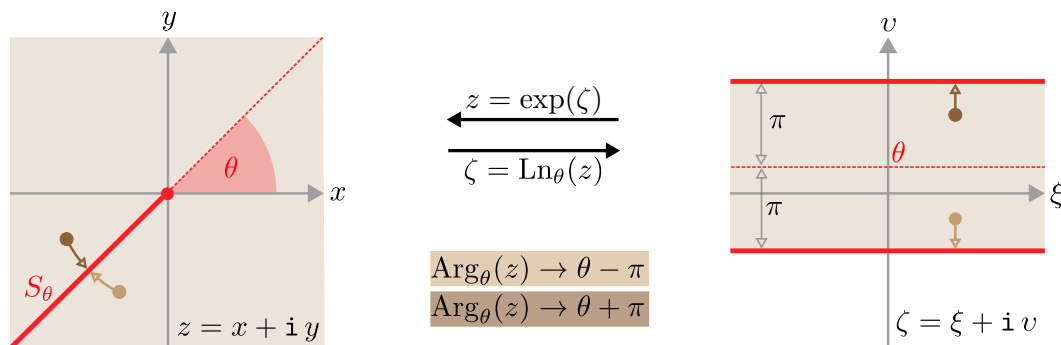
sowie die dazugehörige Argumentfunktion

$$\mathbf{Arg}_\theta : D_\theta \rightarrow (\theta - \pi, \theta + \pi),$$

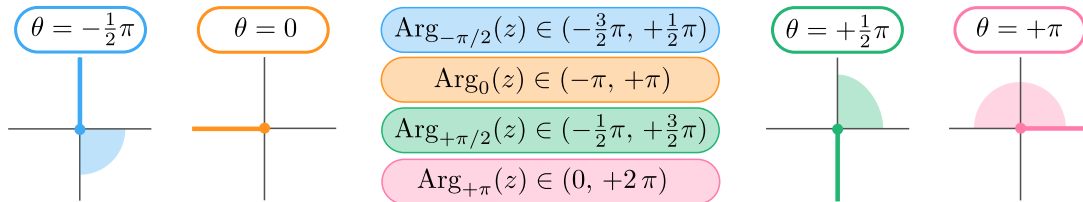
die jeder komplexen Zahl  $z \notin S_\theta$  in *eindeutiger Weise* denjenigen Winkel aus  $\mathbf{Arg}(z)$  zuweist, dessen Wert *größer als*  $\theta - \pi$  und *kleiner als*  $\theta + \pi$  ist (siehe Bild). Mithilfe dieses eindeutigen Winkels  $\mathbf{Arg}_\theta(z)$  können wir nun durch

$$\mathbf{Ln}_\theta(z) := \ln(|z|) + i \mathbf{Arg}_\theta(z), \quad \mathbf{Pow}_{p,\theta}(z) := \exp(p \mathbf{Ln}_\theta(z))$$

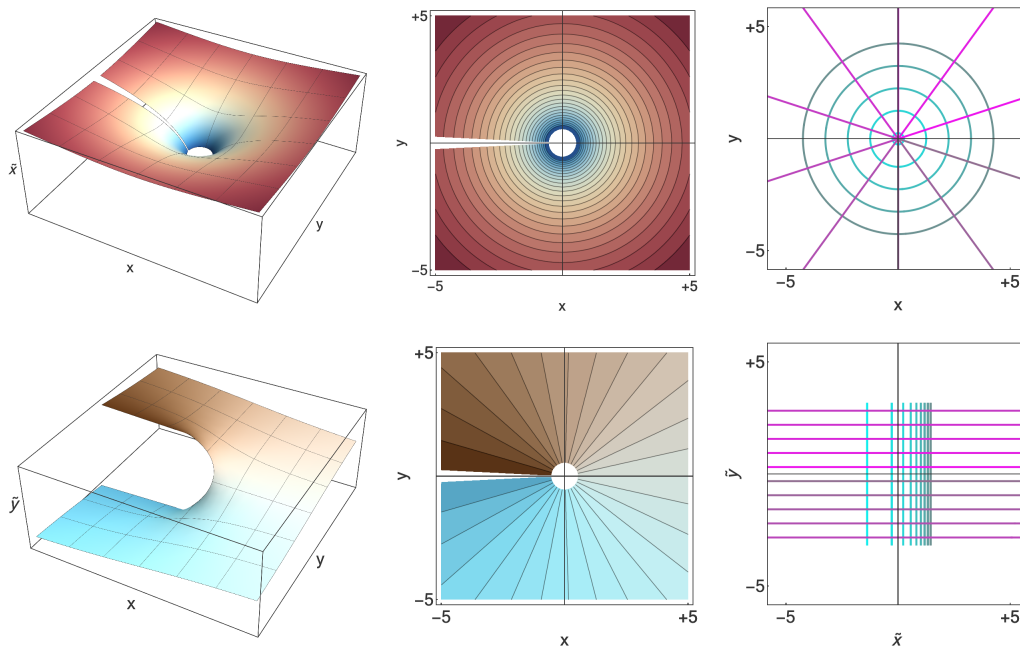
den  $\theta$ -Wert des komplexen Logarithmus bzw. der  $p$ -ten Potenz einführen, der manchmal auch  $\theta$ -Zweig oder  $\theta$ -Ast genannt wird.



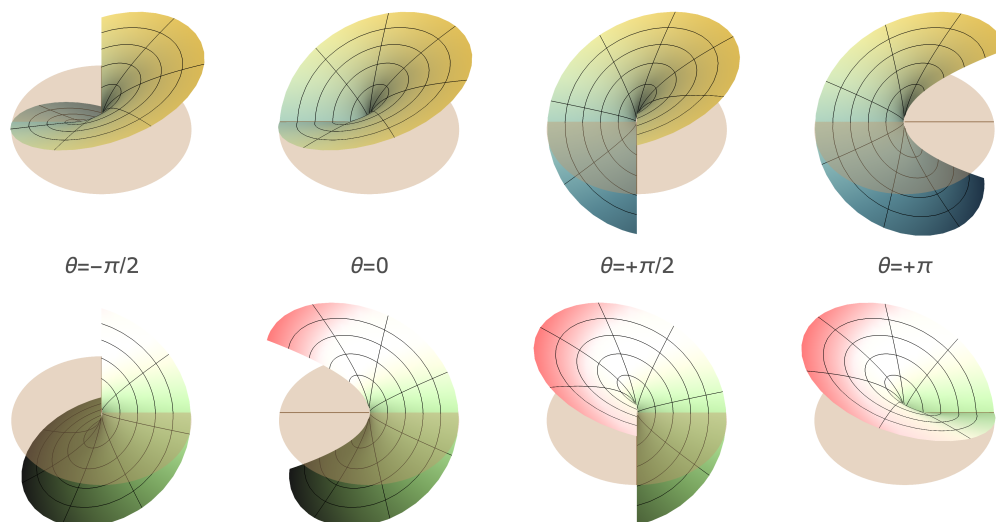
**Abbildung** Zur Definition der Funktionen  $\mathbf{Ln}_\theta$  und  $\mathbf{Arg}_\theta$  auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus S_\theta$ , die das Bild eines offenen horizontalen Streifens unter der Exponentialfunktion ist. Beachte, dass der Ursprung immer zum Schlitz gehört und dass  $\mathbb{C} \setminus S_\theta$  immer offen sowie einfach zusammenhängend ist.



**Abbildung** Der Schlitz und der Wertebereich der Argumentfunktion  $\text{Arg}_\theta$  für vier verschiedene Werte von  $\theta$ , die jeweils durch ein Kreissegment dargestellt sind. Der Fall  $\theta = 0$  (orange) entspricht dem Hauptwert.



**Abbildung** Der Hauptwert des komplexen Logarithmus  $\text{Ln}_0$ , wobei die Werte in der Nähe des Ursprungs bzw. des Schlitzes nicht dargestellt wurden, da es dort eine Singularität bzw. Unstetigkeiten im Imaginärteil gibt.



**Abbildung** Die Graphen des Realteils (oben) sowie des Imaginärteils (unten) der eindeutigen Quadratwurzel  $\text{Pow}_{1/2, \theta}$  für vier verschiedene Wahlen von  $\theta$ , dargestellt über der Einheitskreisscheibe, wobei  $\theta = 0$  dem Hauptwert entspricht. Beachte die Unstetigkeiten über dem jeweiligen Schlitz  $S_\theta$  (braune Linie). Werden zusätzlich noch die Graphen des Real- bzw. Imaginärteils von  $-\text{Pow}_{1/2, \theta}$  geplottet, so entsteht für jedes  $\theta$  insgesamt gerade die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel aus dem Bild oben. Oder anders gesagt: Der Wert von  $\theta$  entscheidet darüber, wo die Riemannsche Fläche „aufgeschnitten“ und welcher der entstehenden Teile ignoriert bzw. als Wurzelfunktion verwendet wird.



**Bemerkungen**

1. Für  $\theta = 0$  sprechen wir auch vom Hauptwert des Logarithmus bzw. der  $p$ -ten Potenz und schreiben oftmals  $\text{Ln}$  statt  $\text{Ln}_0$  bzw.  $\text{Pow}_p$  statt  $\text{Pow}_{p,0}$ . Die Werte für  $\theta \neq 0$  werden manchmal auch Nebenwerte genannt.
2. In der anwendungsorientierten Literatur finden sich häufig Logarithmus- oder Wurzelformeln wie zum Beispiel „ $f(z) = \ln(z^2 - 1)$ “ oder „ $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ “ mit dem Zusatz „wobei ein geeigneter Ast des Logarithmus bzw. der Wurzel zu wählen ist“. Gemeint ist dann meistens  $f(z) = \text{Ln}_\theta(z^2 - 1)$  bzw.  $f(z) = \text{Pow}_{1/2,\theta}(z^2 - 1)$  für ein zu wählendes  $\theta$ , wobei die richtige Wahl von  $\theta$  bzw. des Schlitzes  $S_\theta$  nicht immer offensichtlich ist. Um solche Unklarheiten zu vermeiden, benutzen wir die Funktion  $\ln$  sowie das Wurzelsymbol in dieser Vorlesung ausschließlich für nichtnegative reelle Zahlen, aber niemals für andere komplexe Zahlen.
3. Wir schreiben zum Beispiel

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(-1) = \{-i, +i\}$$

und

$$\text{Pow}_{1/2,-\pi/2}(-1) = -i, \quad \text{Pow}_{1/2,+\pi/2}(-1) = +i,$$

aber niemals „ $\sqrt{-1} = i$ “, obwohl man dies leider sehr oft liest. Die beiden letzten Formeln ergeben sich unmittelbar aus

$$\text{Arg}_{-\pi/2}(-1) = -\pi, \quad \text{Arg}_{+\pi/2}(-1) = +\pi,$$

denn für  $\theta = -\frac{1}{2}\pi$  müssen wir den Winkel für  $z = -1$  aus dem offenen Intervall  $(-\frac{3}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$ , für  $\theta = +\frac{1}{2}\pi$  jedoch aus  $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{3}{2}\pi)$  wählen. Beachte auch, dass  $\text{Pow}_{1/2,0}(-1)$  bei uns nicht definiert ist, da es für  $z = -1$  keinen Winkel in  $(-\pi, +\pi)$  gibt.

4. Wir können mit inversen trigonometrischen Funktionen explizite Formeln für  $\text{Arg}_\theta$  herleiten, müssen aber in Abhängigkeit von  $\theta$  gewisse Fallunterscheidungen treffen. Es gilt zum Beispiel

$$(-\pi, +\pi) \ni \text{Arg}_0(z) = \begin{cases} -\text{arccot}(-x/y) & \text{für } y < 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ +\text{arccot}(+x/y) & \text{für } y > 0 \end{cases}$$

und

$$(0, 2\pi) \ni \text{Arg}_\pi(z) = \begin{cases} \text{arccot}(+x/y) & \text{für } y > 0 \\ \pi & \text{für } y = 0, \\ 2\pi - \text{arccot}(-x/y) & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

und dies impliziert explizite Formeln für die entsprechenden Logarithmen und Potenzen. In der Praxis können wir aber oftmals auch ohne die Verwendung inverser trigonometrischer Funktionen auskommen.

5. Die Funktionen  $\text{Arg}_\theta$  und  $\text{Arg}_{\theta+2\pi}$  bzw.  $\text{Ln}_\theta$  und  $\text{Ln}_{\theta+2\pi}$  sind nicht gleich, da sie wegen  $S_\theta = S_{\theta+2\pi}$  zwar denselben Definitionsbereich, aber unterschiedliche Wertebereiche besitzen. Insbesondere gilt  $\text{Arg}_{\theta+2\pi}(z) = \text{Arg}_\theta(z) + 2\pi$  sowie  $\text{Ln}_{\theta+2\pi}(z) = \text{Ln}_\theta(z) + i2\pi$  für alle  $z \notin S_\theta$ . Für jeden Exponenten  $p$  ergibt sich damit  $\text{Pow}_{p,\theta+2\pi}(z) = \text{Pow}_{p,\theta}(z) \exp(ip2\pi)$ .

6. Für reelle Parameter  $b > 0$  können über die Formeln

$$\mathbf{Log}_b(z) = \frac{1}{\ln(b)} \mathbf{Ln}(z), \quad \text{Log}_{b,\theta}(z) = \frac{1}{\ln(b)} \text{Ln}_\theta(z)$$

auch mehrdeutige bzw. eindeutige komplexe Logarithmen zur Basis  $b$  eingeführt werden, aber diese werden nur selten benutzt.

### Beispiele

1. Wir berechnen

$$\text{Arg}_0(-2i) = -\frac{1}{2}\pi, \quad \text{Pow}_{1/2,0}(-2i) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{1}{4}\pi\right) = +1 - i$$

sowie

$$\text{Arg}_\pi(-2i) = +\frac{3}{2}\pi, \quad \text{Pow}_{1/2,\pi}(-2i) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i.$$

Insbesondere entscheidet der Wert des Parameters  $\theta$ , welche der zwei möglichen Quadratwurzeln von  $-2i$  ausgewählt wird.

2. Es gilt

$$\text{Pow}_{i,0}(i) = \exp(i \text{Ln}_0(i)) = \exp(-\text{Arg}_0(i)) = \exp\left(-\frac{1}{2}\pi\right),$$

aber wir schreiben in dieser Vorlesung **niemals**  $i^i = e^{-\pi/2}$ , das es ja auch andere mögliche Werte für die  $i$ -te Potenz von  $i$  gibt, zum Beispiel

$$\text{Pow}_{i,-\pi}(i) = \exp(i \text{Ln}_{-\pi}(i)) = \exp(-\text{Arg}_{-\pi}(i)) = \exp\left(+\frac{3}{2}\pi\right).$$

**Achtung** Die  $\theta$ -Werte sind nur auf der in  $S_\theta$  geschlitzten Ebene  $D_\theta = \mathbb{C} \setminus S_\theta$  definiert und können auf dem Schlitz *nicht* ausgewertet werden. Genauer gesagt, für jeden Punkt  $z = r e^{i\theta} \in S_\theta$  mit  $r \neq 0$  gibt es wegen

$$\lim_{\varphi \searrow \theta - \pi} \text{Arg}_\theta(r e^{i\varphi}) = \theta - \pi, \quad \lim_{\varphi \nearrow \theta + \pi} \text{Arg}_\theta(r e^{i\varphi}) = \theta + \pi$$

und

$$\lim_{\varphi \searrow \theta - \pi} \text{Ln}_\theta(r e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\theta - i\pi, \quad \lim_{\varphi \nearrow \theta + \pi} \text{Ln}_\theta(r e^{i\varphi}) = \ln(r) + i\theta + i\pi$$

nicht einen, sondern genau zwei sinnvolle Kandidaten für  $\text{Ln}_\theta(z)$ , die sich gerade um der Wert  $i2\pi$  unterscheiden.<sup>19</sup> Analog berechnen wir

$$\lim_{\varphi \searrow \theta - \pi} \text{Pow}_{1/2,\theta}(r e^{i\varphi}) = -i\sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad \lim_{\varphi \nearrow \theta + \pi} \text{Pow}_{1/2,\theta}(r e^{i\varphi}) = +i\sqrt{r} e^{i\theta/2}$$

sowie entsprechende Ausdrücke für die  $\theta$ -Werte der anderen Potenzen  $p \notin \mathbb{Z}$ .

<sup>19</sup>Würden wir einen dieser Kandidaten auswählen, so wäre die entstehende Funktion auf dem Schlitz  $S_\theta$  nicht stetig und damit insbesondere auch nicht differenzierbar. Zum Beispiel verwenden manche Autoren für  $\theta = 0$  die willkürliche Definition

$$\text{Arg}_0(z) := +\pi, \quad \text{Ln}_0(z) := \ln(|z|) + i\pi, \quad \text{Pow}_{1/2,0}(z) := i\sqrt{|z|} \quad \text{für } z \in S_0$$

und erhalten so Hauptwerte, die auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiert sind. Dies ist allerdings nur ein scheinbarer Vorteil, denn die entsprechenden Funktionen sind in jedem Punkt der negativen reellen Halbachse unstetig.



**Theorem (Eigenschaften der  $\theta$ -Werte)** Für jede Wahl von  $\theta \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Aussagen auf der offenen Menge  $D_\theta$ :

1.  $\text{Ln}_\theta$  ist wegen

$$\exp(\text{Ln}_\theta(z)) = z,$$

eine lokale Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und bildet  $D_\theta$  biholomorph auf den horizontalen Streifen

$$\left\{ \zeta = \xi + i v : \theta - \pi < v < \theta + \pi \right\}$$

ab. Insbesondere gilt auch

$$\text{Ln}_\theta(\exp(\zeta)) = \zeta$$

für alle  $\zeta$  mit  $\theta - \pi < \text{Im}(\zeta) < \theta + \pi$ .

2.  $\text{Ln}_\theta$  ist holomorph und liefert via

$$\text{Ln}'_\theta(z) = \frac{1}{z}$$

eine lokale Stammfunktion des Fundamentalmonoms auf  $D_\theta$ .

3. Für jeden Exponenten  $p \in \mathbb{C}$  ist  $\text{Pow}_{p,\theta}$  holomorph mit

$$\text{Pow}'_{p,\theta}(z) = p \text{Pow}_{p-1,\theta}(z)$$

und alle  $z \in D_\theta$ .

4. Für alle  $z \in D_\theta$  und jeden ganzzahligen Exponenten  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $\text{Pow}_{m,\theta}(z) = z^m$ .
5.  $\text{Arg}_\theta$  ist stetig, aber als reellwertige Funktion nicht holomorph.

**Beweis** Die erste Behauptung kann einfach nachgerechnet werden und impliziert die zweite bzw. dritte Behauptung mit dem Umkehrsatz bzw. der Kettenregel. Die vierte Behauptung kann wieder nachgerechnet werden und die fünfte ist eine direkte Folgerung aus den Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann.  $\square$

### Bemerkungen

1. Die Formeln im Theorem illustrieren ein allgemeines Prinzip, dass für beliebige Teilmengen von  $\mathbb{C}$  gilt: Sinnvolle Definitionen des komplexen Logarithmus sowie allgemeiner Potenz- oder Wurzelfunktionen gibt es genau dann, wenn es eine stetige Argumentfunktion gibt.
2. Man kann außerdem zeigen: Jede lokale Stammfunktion von  $f(z) = 1/z$  ist ein Logarithmus, d.h. eine lokale Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Wir können daher  $\text{Ln}_\theta$  auch durch Wegintegrale in der geschlitzten Ebene  $D_\theta$  berechnen. Siehe dazu die Diskussion weiter unten zu den Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz.
3. Die Sonderrolle des Exponenten  $-1$  bei den Monomen kann auch wie folgt verstanden werden: Die Funktion  $f(z) = z^k$  besitzt für  $k \leq -2$  und  $k \geq 0$  eine globale Stammfunktion auf den gesamten Definitionsbereich von  $f$ . Für  $k = -1$  gibt es jedoch nur lokale Stammfunktionen auf gewissen Teilmengen des Definitionsbereichs.

**Zusammenfassung**

1. Auf der punktierten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind der Logarithmus sowie allgemeine Potenzen mehrdeutig, aber wir können die entsprechenden mengenwertigen Abbildungen sehr gut verstehen.
2. Auf jeder geschlitzten Ebene können wir eindeutige Logarithmus- und Potenzfunktionen definieren, wobei diese sogar holomorph sind.
3. Es gibt keine eindeutige Logarithmusfunktion, die auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  stetig oder gar differenzierbar ist. Analoges gilt für Potenzen mit nicht-ganzzahligen Exponenten.

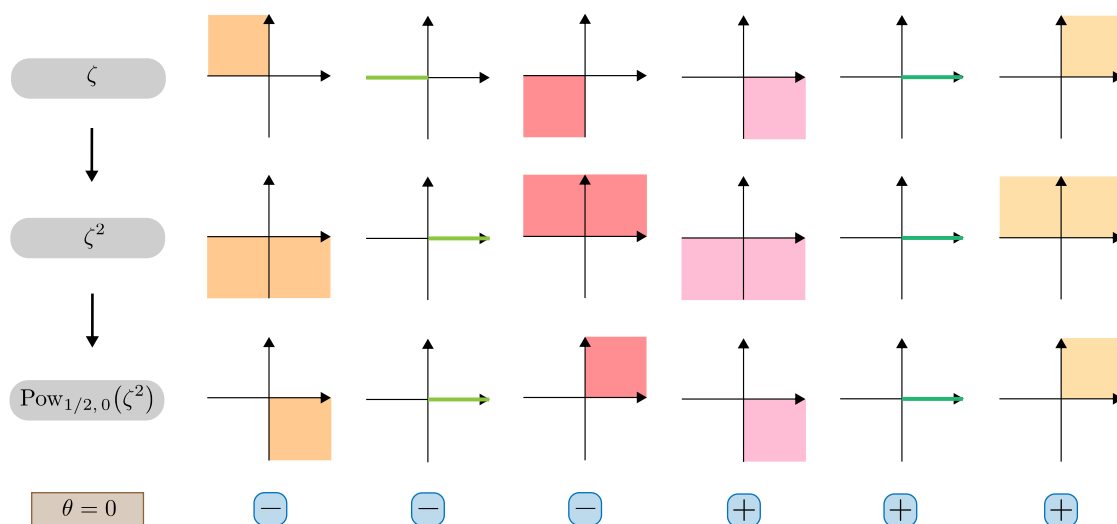
**mehr über Wurzeln und Potenzen** Für jedes  $\zeta \in \mathbb{C}$  ist die komplexe Zahl  $\text{Pow}_{1/2,\theta}(\zeta^2)$  — so sie denn definiert ist — entweder  $-\zeta$  oder  $+\zeta$ , aber das richtige Vorzeichen hängt vom Wert des Parameters  $\theta$  sowie der Lage des Punktes  $\zeta$  ab. Mit den obigen Formeln oder alternativ durch geometrische Überlegungen für die verschiedenen Quadranten und Halbachsen (siehe das Bild und die Übungen) ergibt sich

$$\text{Pow}_{1/2,0}(\zeta^2) = -\zeta \quad \text{falls} \quad \text{Re}(\zeta) < 0, \quad \text{Pow}_{1/2,0}(\zeta^2) = +\zeta \quad \text{falls} \quad \text{Re}(\zeta) > 0$$

sowie

$$\text{Pow}_{1/2,\pi}(\zeta^2) = -\zeta \quad \text{falls} \quad \text{Im}(\zeta) < 0, \quad \text{Pow}_{1/2,\pi}(\zeta^2) = +\zeta \quad \text{falls} \quad \text{Im}(\zeta) > 0,$$

d.h. das richtige Vorzeichen wird für  $\theta = 0$  durch den Realteil von  $\zeta$ , für  $\theta = \pi$  jedoch durch den Imaginärteil von  $\zeta$  festgelegt. Analog ist  $\text{Pow}_{1/2,\theta}(-\zeta^2)$  entweder  $-i\zeta$  oder  $+i\zeta$  und ähnliche Fragen stellen sich bei allen anderen Wurzeln, wobei dann allgemeinere Sektoren anstelle von Quadranten zu untersuchen sind.



**Abbildung** Zur richtigen Vorzeichenwahl (blaue Boxen) in  $\text{Pow}_{1/2,0}(\zeta^2) = \pm\zeta$ , wobei die linke Seite dieser Gleichung auf der imaginären Achse nicht definiert ist, da  $\zeta^2$  genau dann zum Schlitz  $S_0$  gehört, wenn  $\text{Re}(\zeta) = 0$  gilt. Beachte auch, dass die farbig gezeichneten Quadranten und Halbebenen immer offen sind und dass die farbigen Halbachsen nicht den Ursprung enthalten.

**Verallgemeinerung** Die oben eingeführten  $\theta$ -Werte gehören zu einem Schlitz in Form einer Halbgeraden. Im Prinzip können wir aber als Schlitz jede stetige Kurve verwenden, die in 0 startet, in den unendlich fernen Punkt  $\infty$  läuft und keine Doppelpunkte besitzt (zum Beispiel Spiralkurven). Außerhalb eines solchen Schlitzes können wir immer in sinnvoller Weise eine entsprechende Variante des Logarithmus und der Potenzen sowie eine Stammfunktion zu  $f(z) = 1/z$  einführen, obwohl die Formeln natürlich sehr kompliziert sein können.

Die Rolle des Schlitzes  $S$  ist dabei immer dieselbe: Er verhindert, dass wir in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus S$  mit einem geschlossenen Weg um den Ursprung herumlaufen können. Oder anders gesagt: Jede geschlossene Kurve, die den Punkt 0 umläuft, muss den Schlitz  $S$  in mindestens einem Punkt schneiden und kann daher nicht ganz in  $\mathbb{C} \setminus S$  verlaufen. Beachte auch, dass es auf der ganzen punktierten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  weder eine Stammfunktion des Fundamentalmonoms noch einen holomorphen Logarithmus gibt.

**weitere abgeleitete Funktionen\*** Man kann mit Hilfe von Logarithmen auch auch holomorphe Varianten der trigonometrischen Funktionen einführen. Wir wollen diesen Aspekt hier nicht vertiefen, sondern nur ein prototypisches Beispiel angeben. Für jeden Winkelparameter  $\theta$  liefert die Formel

$$\operatorname{Arctan}_\theta(z) = \frac{\operatorname{Ln}_\theta(1 + iz) - \operatorname{Ln}_\theta(1 - iz)}{2i}$$

einen Ast des komplexen Arkustangens, wobei der entsprechende Definitionsbereich in natürlicher Weise durch die beiden Bedingung

$$1 - iz \notin S_\theta, \quad 1 + iz \notin S_\theta$$

festgelegt ist. Insbesondere kann nun nachgerechnet werden, dass  $\operatorname{Arctan}_\theta$  auf einer doppelt geschlitzten Ebene definiert und dort auch holomorph ist. Alternativ können wir natürlich auch wieder die mengenwertige Variante

$$\operatorname{Arctan}(z) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \tan(\zeta) = z \right\}$$

studieren, um einen vollständiges Bild der zugrunde liegenden Mehrdeutigkeit zu erhalten.

**über die Rechenregeln für komplexe Logarithmen und Wurzeln** Für positive reelle Zahlen gilt bekanntlich

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2), \quad \ln(x^2) = 2 \ln(x)$$

und

$$(x_1 x_2)^{1/n} = x_1^{1/n} x_2^{1/n}, \quad (x^2)^{1/n} = (x^{1/n})^2.$$

Diese und ähnliche Rechenregeln dürfen aber **nicht** direkt ins Komplexe übertragen werden, wobei die Nebenwerte viel kritischer als die mengenwertigen Funktionen sind.

### Beispiele

1. Für den Hauptwert  $\text{Ln} = \text{Ln}_0$  berechnen wir

$$\text{Ln}_0(-i) = i \text{Arg}_0(-i) = -i \frac{1}{2} \pi, \quad \text{Ln}_0(+i) = i \text{Arg}_0(+i) = +i \frac{1}{2} \pi,$$

aber  $-1 = (-i)^2 = (+i)^2$  gehört überhaupt nicht zum Definitionsbereich von  $\text{Ln}_0$ . Es kann daher keine einfache Regel geben, wie  $\text{Ln}_0(z^2)$  aus  $\text{Ln}_0(z)$  berechnet werden kann.

2. Für  $\theta = \pi$  sind die entsprechenden Nebenwerte zwar in  $-i$ ,  $+i$  und  $-1$  definiert, aber aus

$$\text{Ln}_\pi(-i) = i \frac{3}{2} \pi, \quad \text{Ln}_\pi(+i) = i \frac{1}{2} \pi, \quad \text{Ln}_\pi(-1) = i \pi$$

folgt

$$2 \text{Ln}_\pi(-i) \neq \text{Ln}_\pi(-1) = 2 \text{Ln}_\pi(+i).$$

Wir sehen also auch hier, dass eine naive Übertragung der reellen Logarithmusgesetze ins Komplexe nicht möglich ist. Mit ähnlichen Rechnungen erhalten wir

$$\text{Pow}_{1/2, \pi}(-1) = \exp\left(i \frac{1}{2} \pi\right) = +i$$

sowie

$$\left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(-i)\right)^2 = \left(\exp\left(i \frac{3}{4} \pi\right)\right)^2 = \exp\left(i \frac{3}{2} \pi\right) = -i$$

und

$$\left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(+i)\right)^2 = \left(\exp\left(i \frac{1}{4} \pi\right)\right)^2 = \exp\left(i \frac{1}{2} \pi\right) = +i.$$

Insbesondere gilt

$$\left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(-i)\right)^2 \neq \text{Pow}_{1/2, \pi}(-1) = \left(\text{Pow}_{1/2, \pi}(+i)\right)^2,$$

und wir schließen, dass auch die Rechengesetze der reellen Quadratwurzeln im Komplexen im Allgemeinen nicht richtig sind.

### Merksätze

1. Bei Logarithmen und allgemeinen Potenzen darf man im Komplexen **nicht** wie im Reellen rechnen!
2. Für *ganzzahlige* Exponenten  $m \in \mathbb{Z}$  gilt aber auch im Komplexen die Formel  $(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m$ , da solche Potenzen ohne Logarithmen, sondern allein durch Multiplikationen und Divisionen, berechnet werden können.
3. Zusatz für Fortgeschrittene: Wenn die reellen Rechenregeln doch angewendet werden, so kann bei Logarithmen nur ein additiver Fehler der Bauart  $i k 2 \pi$  und bei  $p$ -ten Potenzen nur ein multiplikativer Fehler der Bauart  $\exp(i p 2 \pi)^k$  entstehen, wobei  $k$  jeweils eine ganze Zahl ist.

**Bemerkungen**

1. Mit den obigen Definitionen verifizieren wir zum Beispiel die Darstellungsformeln

$$\mathbf{Ln}(2i) = \ln(2) + i \frac{1}{2} \pi + \{ \dots, -i 4 \pi, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, +i 4 \pi, \dots \}$$

und

$$\mathbf{Ln}(-4) = 2 \ln(2) + i \pi + \{ \dots, -i 4 \pi, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, +i 4 \pi, \dots \}.$$

Insbesondere gilt zwar  $-4 = (2i)^2$ , aber eben auch

$$\mathbf{Ln}(-4) \neq 2 \mathbf{Ln}(2i),$$

da nicht jedes Element von  $\mathbf{Ln}(-4)$  das Doppelte einer Zahl aus  $\mathbf{Ln}(2i)$  ist.

2. Es gilt aber immer

$$\mathbf{Ln}(z^2) - 2 \mathbf{Ln}(z) = \{ \dots, -i 4 \pi, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, +i 4 \pi, \dots \}$$

in dem Sinne, dass die Differenz zwischen irgendeinem Element aus  $\mathbf{Ln}(z^2)$  und dem Doppelten irgendeines Elements von  $\mathbf{Ln}(z)$  immer ein Vielfaches von  $i 2 \pi$  ist. Etwas allgemeiner kann man die mengenwertige Gleichung

$$\mathbf{Ln}(z_1 z_2) - \mathbf{Ln}(z_1) - \mathbf{Ln}(z_2) = \{ \dots, -i 2 \pi, 0, +i 2 \pi, \dots \}$$

herleiten, die man aber auch wieder richtig interpretieren muss.

3. Bei den Potenzen gilt immer

$$\mathbf{Pow}_p(z_1 z_2) = \mathbf{Pow}_p(z_1) \mathbf{Pow}_p(z_2),$$

sofern das „Mengenprodukt“ auf der rechten Seite im Sinne von „jeder mit jedem“ verstanden wird.



# Kapitel 2

## Integralsatz von Cauchy und Folgerungen

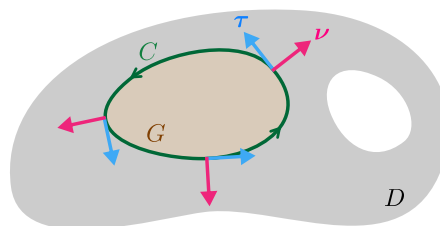
Vorlesung 07-1 : 22. Mai

### 2.1 Integralsatz und Integralformel von Cauchy

**Setting** In diesem und dem nächsten Abschnitt gilt:

1. Die Menge  $D \subset \mathbb{C}$  ist offen und zusammenhängend und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine komplexe Funktion auf  $D$ .
2.  $G \subset D$  ist eine offene und einfach zusammenhängende Menge mit regulärem Rand, wobei sowohl  $G$  als auch  $\partial G$  ganz in  $D$  enthalten sind.
3. Die Kurve  $c : [t_a, t_e] \rightarrow D$  ist stückweise stetig differenzierbar sowie geschlossen und parametrisiert den Rand  $\partial G$  so, dass dieser genau einmal und gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Insbesondere gilt  $C = \text{spur}(c) = \partial G$  sowie  $\text{wnd}_c(z) = +1$  für jedes  $z \in G$ .

Wir nennen  $c$  bzw.  $G$  im Folgenden auch einen elementaren Cauchy-Weg bzw. ein elementares Cauchy-Gebiet.



**Abbildung** Schematische Darstellung der Mengen  $D$ ,  $G$  und  $C$ , wobei die Vektoren  $\nu$  und  $\tau$  aus *Analysis 3* bekannt sind und unten benutzt werden. Beachte, dass hier  $D$  – aber nicht  $G$  – Löcher haben darf und dass der Rand von  $G$  – aber nicht unbedingt der von  $D$  – hinreichend regulär ist.

**Klarstellung** Wir werden den Integralsatz und seine Folgerungen zunächst nur für stetig differenzierbare Funktionen  $f$  beweisen, aber sie gelten sinngemäß für jede holomorphe Funktion. Es wird sich nämlich weiter unten zeigen, dass die Existenz einer komplexen Ableitung schon die Existenz der höheren Ableitungen und damit auch die Stetigkeit aller Ableitungen nach sich zieht. Insbesondere impliziert im Komplexen die einmalige Differenzierbarkeit schon die stetige Differenzierbarkeit zu jeder Ordnung.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Im Reellen ist diese Aussage falsch bzw. eine Variante gilt nur für harmonische Funktionen.

**geometrische Bedeutung des komplexen Kurvenintegrals** Als Vorbereitung auf den Beweis des Satzes von Cauchy identifizieren wir die reelle Entsprechung des komplexen Kurvenintegrals und schreiben in Physikernotation

$$z(t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) + \mathbf{i} y(t) \quad \text{statt} \quad c(t),$$

da dies für unsere momentanen Zwecke übersichtlichere Formeln produziert. Damit gilt auch

$$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + \mathbf{i} v(x(t), y(t)), \quad \dot{z}(t) = \dot{x}(t) + \mathbf{i} \dot{y}(t)$$

und der Integrand auf der rechten Seite der Formel

$$\int_c f(z) dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

kann insgesamt als

$$\begin{aligned} f(z(t)) \dot{z}(t) &= \left( u(x(t), y(t)) + \mathbf{i} v(x(t), y(t)) \right) (\dot{x}(t) + \mathbf{i} \dot{y}(t)) \\ &= \ell(t) \langle \boldsymbol{\phi}(x(t), y(t)), \boldsymbol{\tau}(x(t), y(t)) \rangle + \mathbf{i} \ell(t) \langle \boldsymbol{\phi}(x(t), y(t)), \boldsymbol{\nu}(x(t), y(t)) \rangle \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei

$$\boldsymbol{\phi}(x, y) := \begin{pmatrix} +u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix}$$

gerade das reelle Vektorfeld ist, dessen Komponenten dem Real- und Imaginärteil von  $\overline{f(z)}$  entsprechen. Außerdem bezeichnen  $\boldsymbol{\tau}(x, y)$  bzw.  $\boldsymbol{\nu}(x, y)$  für jeden Randpunkt von  $G$  den in *Analysis 3* eingeführten normierten und positiv orientierten Tangentialvektor bzw. den nach außen zeigenden normierten Normalenvektor. Diese können durch

$$\boldsymbol{\tau}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} +\dot{x}(t) \\ +\dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(x(t), y(t)) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} +\dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden, wobei

$$\ell(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \quad \text{bzw.} \quad ds = \ell(t) dt$$

die Länge des Tangentialvektors an die Kurve  $c$  bzw. das dazugehörige infinitesimale Längenelement sind. Wir können nun die erste Version der reellen Darstellungsformel

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \int_{\partial G} \langle \boldsymbol{\phi}(x, y), \boldsymbol{\tau}(x, y) \rangle ds + \mathbf{i} \int_{\partial G} \langle \boldsymbol{\phi}(x, y), \boldsymbol{\nu}(x, y) \rangle ds$$

ablesen, wobei links das komplexe Kurvenintegral von  $f$  steht. Auf der rechten Seite erscheinen jedoch zwei reelle Kurvenintegrale, nämlich das Stokesches Umlaufintegral (im Realteil) sowie das Gaußsche Durchflussintegral (als Imaginärteil) des Vektorfeldes  $\boldsymbol{\phi}$ .<sup>2</sup> Unter der Annahme, dass dieses stetig differenzierbar ist (im reellen Sinne), können wir die 2D-Versionen der Sätze von Stokes bzw. Gauß anwenden und erhalten die zweite Version der reellen Darstellungsformel

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \iint_G \text{rot } \boldsymbol{\phi}(x, y) dx dy + \mathbf{i} \iint_G \text{div } \boldsymbol{\phi}(x, y) dx dy,$$

wobei auf der rechten Seite nun das Stokessche und das Gaußsche Gebietsintegral über die Menge  $G$  stehen.

<sup>2</sup>Wir benutzen hier wieder, dass  $G$  und  $\partial G$  sowohl als Teilmengen von  $\mathbb{C}$  als auch als Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  betrachtet werden können.



**physikalische Bedeutung** Interpretiert man  $\phi$  als stationäres Geschwindigkeitsfeld einer zweidimensionalen Flüssigkeit, so quantifizieren der Realteil bzw. der Imaginärteil von  $\int_c F'(z) dz$  wieviel Strömungsmittel entlang der Kurve zirkuliert bzw. wieviel durch die Kurve hindurch strömt.

**Bemerkung\*** Man kann die Real- und Imaginärteile des komplexen Kurvenintegrals auch anders darstellen, sofern man zusätzlich noch das Vektorfeld  $\psi$  mit

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$$

eingführt, dass in jedem Punkt senkrecht auf  $\phi$  steht. Dann gilt

$$\int_{\partial G} f(z) dz = - \int_{\partial G} \langle \psi(x, y), \nu(x, y) \rangle ds + i \int_{\partial G} \langle \psi(x, y), \tau(x, y) \rangle ds,$$

d.h. der Real- bzw. Imaginärteil sind durch das Gaußsche bzw. das Stokessche Kurvenintegral zu  $\psi$  bestimmt. Durch Kombination der verschiedenen Formeln kann  $\int_{\partial G} f(z) dz$  schließlich entweder allein durch die zwei Stokesschen oder nur mit den beiden Gaußschen Integralen von  $\phi$  und  $\psi$  dargestellt werden. Die entsprechenden Formeln werden manchmal in der Literatur verwendet.

**Theorem (erste Version des Integralsatzes von Cauchy)** Mit den obigen Notationen gilt

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0,$$

sofern  $f$  stetig differenzierbar (im Sinne der komplexen Differentiation) ist.

**Beweis** Die Definition von  $\phi$  und die Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann liefern

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \phi(x, y) &= -\partial_x v(x, y) - \partial_y u(x, y) = 0, \\ \operatorname{div} \phi(x, y) &= +\partial_x u(x, y) - \partial_y v(x, y) = 0. \end{aligned}$$

In Kombination mit der zweiten Version der reellen Darstellungsformel erhalten wir

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \iint_G 0 dx dy + i \iint_G 0 dx dy = 0 + i 0 = 0$$

und damit die Behauptung. □

### Bemerkungen

1. Das Theorem wird auch *Hauptsatz der Funktionentheorie* genannt und hat, wie wir im Fortgang der Vorlesung sehen werden, sehr weitreichende Konsequenzen. Eine wichtige — aber bei weitem nicht einzige — Anwendung ist die Berechnung komplizierter Kurvenintegrale entlang geschickt gewählter Ersatzwege.
2. Für die Gültigkeit des Theorems ist es sehr wichtig, dass  $f$  komplex differenzierbar ist. Am Ende dieses Abschnitts sehen wir zum Beispiel, dass das Kurvenintegral für die nicht-holomorphe Funktion  $f$  mit  $f(z) = \bar{z}$  nicht verschwindet.

3. In unserem Beweis ist auch die Stetigkeit der Ableitung sehr wichtig, da wir andernfalls nicht unbedingt den Stokesschen Integralsatz anwenden können. In der Literatur wird der Cauchysche Integralsatz oftmals mit anderen Argumenten hergeleitet, die zwar die Existenz, aber eben nicht die Stetigkeit von  $f'$  benutzen. Wir werden weiter unten die Ideen in den alternativen Beweisen diskutieren.

**Anwendung zur Windungszahl** Wir hatten im letzten Abschnitt gesehen, dass das Windungsintegral in

$$\int_{S_\rho(z_*)} \frac{dz}{z - \zeta_*} = +2\pi i \quad \text{für } \zeta_* \in B_\rho(z_*)$$

nur für den Fall  $\zeta_* = z_*$  einfach zu berechnen ist. Wir wollen nun zeigen, wie man diese Formel auch für  $\zeta_* \neq z_*$  mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy ableiten kann. Dazu führen wir (siehe das Bild) insgesamt vier Wege  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$  ein, wobei wir die Funktion  $f(z) = 1/(z - \zeta_*)$  eigentlich nur entlang des Weges  $c_1$  (rot) integrieren wollen, aber den entsprechenden Wert durch Integration entlang der anderen Kurven ermitteln werden. Die Geometrie der Kurven sowie den Eigenschaften komplexer Kurvenintegral implizieren nämlich die Formel

$$\int_{c_3} f(z) dz + \int_{c_4} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz,$$

da sich die Beiträge von den beiden Geradenstücken gegenseitig aufheben. Der Weg  $c_2$  (rosa) durchläuft eine kleine Kreislinie um  $\zeta_*$  mit negativer Orientierung und wir erhalten

$$\int_{c_2} f(z) dz = -2\pi i$$

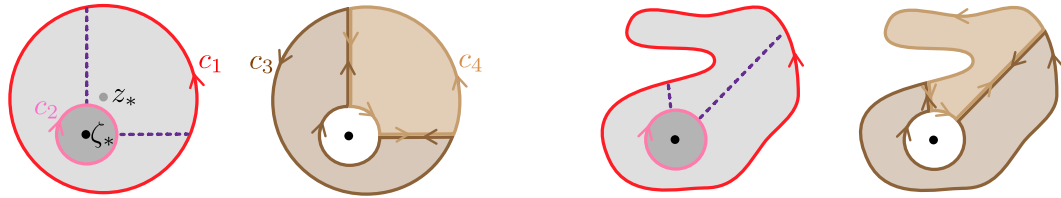
durch direkte Rechnungen wie im Abschnitt über die Windungszahl. Für die Wege  $c_3$  (dunkelbraun) und  $c_4$  (hellbraun) garantiert der Integralsatz von Cauchy hingegen

$$\int_{c_3} f(z) dz = \int_{c_4} f(z) dz = 0,$$

den beide Kurven umschließen jeweils ein elementares Cauchy-Gebiet, auf dem  $f$  stetig differenzierbar ist. Durch Einsetzen der Teilresultate für  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$  erhalten wir schließlich den Wert  $+2\pi i$  für das gesuchte Kurvenintegral von  $f$  über  $c_1$ .

*Achtung:* Der Satz von Cauchy kann nicht direkt auf die Integrale bzgl. der Kurven  $c_1$  und  $c_2$  angewendet werden, denn diese parametrisieren zwar jeweils den Rand eines elementaren Cauchy-Gebiets (Kreisscheibe), aber  $f$  ist wegen der Polstelle in  $\zeta_*$  dort nicht differenzierbar.

*Bemerkung:* Wir haben gerade einen wichtigen Spezialfall des *Residuensatzes* (siehe dazu weiter unten) nachgerechnet. Die wesentlichen Argumente — also die geschickte Einführung weiterer Integrationswege sowie die Ausnutzung des Satzes von Cauchy — werden wir in leicht abgewandelter Form häufig benutzen, wie zum Beispiel im Beweis des *Deformationslemmas*.



**Abbildung** Links: Die vier Wege zur Berechnung von  $\text{wnd}_{S_\varrho(z_*)}(\zeta_*)$  mittels des Integralsatzes von Cauchy, wobei  $f$  in  $\zeta_*$  (schwarz) nicht holomorph ist. Rechts: Analoge Konstruktionen können auch für andere Wege  $c_1$  durchgeführt werden, sofern geschickt neue Wegstrecken (lila) eingeführt werden, die sogar gekrümmt sein könnten. Wichtig ist nur, dass  $c_2$  eine Kreislinie mit Mittelpunkt  $\zeta_*$  ist, dass  $c_1$  und  $c_2$  unterschiedliche Orientierungen aufweisen, und dass  $c_3, c_4$  elementare Cauchy-Wege sind.

**Berechnung eines reellen Integrals** Als anspruchsvolle, aber doch illustrative Anwendung des Integralsatzes von Cauchy berechnen wir das Integral  $\int_0^\infty g(x) dx$  der reellen Funktion

$$g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2},$$

die im Punkt  $x = 0$  stetig ist (Regel von l'Hospital) und für  $x \rightarrow \infty$  hinreichend schnell abklingt, sodass insgesamt das Integral im uneigentlichen Sinne wohldefiniert ist. Die Idee besteht darin, die gesuchte Zahl durch komplexe Kurvenintegrale der Funktion

$$f(z) = \frac{1 - \exp(iz)}{z^2}$$

zu ermitteln, wobei  $f$  stetig differenzierbar auf der punktierten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist und im Ursprung eine Polstelle besitzt.

Wir wählen dazu zwei Radien  $0 < \varepsilon < \varrho < \infty$  und parametrisieren die im Bild dargestellten Teile des entsprechenden Halbkreisringes durch

$$c_1(t) = t \quad \text{mit } t \in [-\varrho, -\varepsilon], \quad c_3(t) = t \quad \text{mit } t \in [+ \varepsilon, +\varrho]$$

sowie

$$c_2(t) = \varepsilon \exp(i\pi - it) \quad \text{mit } t \in [0, \pi], \quad c_4(t) = \varrho \exp(it) \quad \text{mit } t \in [0, \pi].$$

Insbesondere erhalten wir

$$\int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz = \int_{-\varrho}^{-\varepsilon} f(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\varrho} f(t) dt = \int_{\varepsilon}^{\varrho} f(-t) dt + \int_{\varepsilon}^{\varrho} f(t) dt = 2 \int_{\varepsilon}^{\varrho} g(t) dt,$$

wobei wir die Transformationsformel für reelle Integrale sowie die Euler-Formel verwendet haben und auf der rechten Seite die Integrationsvariable  $t$  durch  $x$  ersetzen können. Außerdem folgt

$$0 = \int_{c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{c_j} f(z) dz$$

aus dem Satz von Cauchy, wobei  $G$  hier gerade der obere Halbkreisring ist.

Unser Ziel ist nun, die Summe der Integrale von  $f$  über  $c_2$  und  $c_4$  im Doppellimes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\varrho \rightarrow \infty$  zu berechnen, da diese dann nach Division durch  $-2$  das gesuchte reelle Integral liefert. Wegen  $\sin(t) \geq 0$  für  $0 \leq t \leq \pi$  gilt

$$|f(c_4(t))| \leq \varrho^{-2} \left( 1 + |\exp(i\varrho \cos(t))| \exp(-\varrho \sin(t)) \right) \leq 2\varrho^{-2}$$

und die Standardabschätzung kombiniert mit  $\text{len}(c_4) = \varrho \pi$  zeigt via

$$\left| \int_{c_4} f(z) dz \right| \leq 2 \pi \varrho^{-1} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0,$$

dass  $c_4$  keinen Beitrag zum Endergebnis liefert. Für das Kurvenintegral über die kleine Halbkreislinie  $c_2$  erhalten wir jedoch

$$\begin{aligned} \int_{c_2} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{1 - \exp(i \varepsilon \exp(i \pi - i t))}{\varepsilon^2 \exp(i 2 \pi - i 2 t)} (-i) \varepsilon \exp(i \pi - i t) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1 - \exp(i \varepsilon \exp(i \pi - i t))}{i \varepsilon \exp(\pi i - i t)} dt \\ &= \int_0^\pi (-1 + O(\varepsilon)) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi, \end{aligned}$$

wobei wir im Integranden für jedes  $t$  die Taylor-Approximation

$$\frac{1 - \exp(\zeta)}{\zeta} = -1 + O(|\zeta|)$$

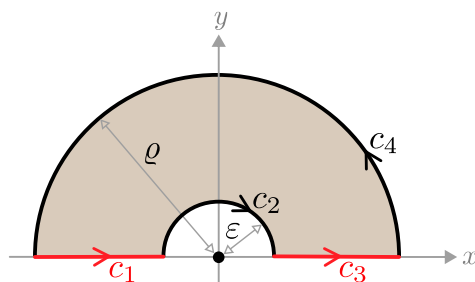
für  $\zeta = i \varepsilon \exp(i \pi - i t)$  ausgewertet haben. Insgesamt haben wir damit

$$\int_0^\infty g(x) dx = \frac{1}{2} \pi$$

gezeigt. Die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \pi$$

kann übrigens durch analoge Rechnungen mit  $f(z) = \exp(i z)/z$  hergeleitet werden.



**Abbildung** Die vier Integrationswege im eben gerechneten Beispiel. Beachte, dass die verwendete Funktion  $f$  eine Polstelle in 0 besitzt und dass  $c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4$  ein elementarer Cauchy-Weg ist.

**Flächenberechnung von  $G$**  Als ein Nebenresultat unserer Anfangsbetrachtungen wollen wir für die nicht-holomorphe Funktion

$$f(z) = \bar{z} \quad \text{bzw.} \quad \phi(x, y) = \begin{pmatrix} +x \\ +y \end{pmatrix}$$

die reelle Entsprechung des komplexen Kurvenintegrals auswerten. Wegen

$$\operatorname{div} \phi(x, y) = 2, \quad \operatorname{rot} \phi(x, y) = 0$$

erhalten wir

$$\int_{\partial G} \bar{z} dz = 2i \operatorname{area}(G),$$

d.h. das komplexe Kurvenintegral von  $f(z) = \bar{z}$  liefert — bis auf den Faktor  $2i$  — gerade den Flächeninhalt  $\operatorname{area}(G)$  der von der Kurve  $c$  eingeschlossenen Menge  $G$ .<sup>3</sup>

**Beispiel** Die von der Kurve

$$c(t) = a \cos(t) + ib \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

eingeschlossene Menge  $G$  ist gerade die achsenparallele Ellipse durch die Punkte  $-a$ ,  $+a$ ,  $-ib$  und  $+ib$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (a \cos(t) - ib \sin(t)) (-a \sin(t) + ib \cos(t)) dt \\ &= (b^2 - a^2) \left( \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) dt \right) + iab \left( \int_0^{2\pi} 1 dt \right) = 0 + i2\pi ab \end{aligned}$$

und erhalten nach Division durch  $2i$  die bekannte Flächenformel für eine Ellipse.

**alternative Notation\*** In den Ingenieur- und Naturwissenschaften schreibt man die Formel für  $\operatorname{area}(G)$  oftmals als

$$\operatorname{area}(G) = + \int_{\partial G} x dy = - \int_{\partial G} y dx$$

und betrachtet sie als Spezialfall des Satzes von Stokes (der in 2D auch Satz von Green genannt wird). Die beiden Integrale sind dabei in Physikernotation im Sinne der formalen Substitutionen  $dx = \dot{x} dt$  und  $dy = \dot{y} dt$  durch

$$\int_{\partial G} x dy = \int_{t_a}^{t_e} x(t) \dot{y}(t) dt \quad \int_{\partial G} y dx = \int_{t_a}^{t_e} y(t) \dot{x}(t) dt$$

gegeben.<sup>4</sup> Das unterschiedliche Vorzeichen entlang von geschlossenen Kurven ergibt sich unmittelbar aus der eindimensionalen partiellen Integrationsformel, da die Randterme sich wegen der Schließungsbedingungen  $x(t_e) = x(t_a)$  und  $y(t_e) = y(t_a)$  gegenseitig aufheben. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\partial G} \bar{z} dz = i \left( \int_{\partial G} x dy - \int_{\partial G} y dx \right) = +2i \int_{\partial G} x dy = -2i \int_{\partial G} y dx$$

und schließen, dass die verschiedenen Formeln, die  $\operatorname{area}(G)$  entweder durch komplexe oder reelle Kurvenintegrale darstellen, alle äquivalent sind.

<sup>3</sup>Für dieses Resultat ist es — wie schon bei der Herleitung der zweiten Version der reellen Darstellungsformel — natürlich wichtig, dass  $c$  den Rand  $\partial G$  genau einmal und in positiver Orientierung durchläuft, da sich andernfalls ein anderer Faktor ergeben würde.

<sup>4</sup>Diese Formeln sind rigoros, sofern  $dx$ ,  $dy$  und  $dt$  als *Differentialformen* auf  $C$  betrachtet werden.

**weitere nützliche Integrale\*** Wir wollen durch Rechnungen im Komplexen auch die Formeln

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n}(t) dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t) dt = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n},$$

herleiten, wobei auf der rechten Seite ein Binomialkoeffizient (und nicht etwa ein Vektor) steht. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$f_{\pm}(z) := \frac{1}{z} \left( z \pm \frac{1}{z} \right)^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} \left( \pm \frac{1}{z} \right)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (\pm 1)^k z^{2n-2k-1}$$

wegen der verallgemeinerten binomischen Formel gilt. Die Wegintegration über die Einheitskreislinie liefert nun

$$\int_{S_1(0)} f_{\pm}(z) dz = \sum_{k=0}^{2n} (\pm 1)^k \binom{2n}{k} \int_{S_1(0)} z^{2n-2k-1} dz = (\pm 1)^n \binom{2n}{n} 2\pi i,$$

da der Beitrag für  $k = n$  gerade eine Windungszahl ist und weil die Wegintegrale der Monome für  $k \neq n$  verschwinden, wobei man dies mit dem Integralsatz von Cauchy oder alternativ durch direkte Rechnungen (siehe dazu weiter oben) bzw. die Verwendung der entsprechenden Stammfunktion begründen kann. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{S_1(0)} f_+(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(\exp(+it) + \exp(-it))^{2n}}{\exp(+it)} i \exp(+it) dt \\ &= \int_0^{2\pi} i (2 \cos(t))^{2n} dt = i 4^n \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t) dt \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{S_1(0)} f_-(z) dz = \int_0^{2\pi} i (2i \sin(t))^{2n} dt = i (-1)^n 4^n \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(t) dt,$$

und die gewünschten Ergebnisse folgen durch Vergleich der verschiedenen Formeln. Beachte, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1}(t) dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t) dt = 0$$

gilt, da sich für ungerade Exponenten die positiven und die negativen Beiträge zu jedem Integral genau die Waage halten.

**Kurvenintegral und Stammfunktionen\*** Wir schreiben wieder

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und wollen nun zusätzlich annehmen, dass

$$f(z) = F'(z)$$

für eine Stammfunktion

$$F(z) = U(x, y) + \mathbf{i} V(x, y)$$

gilt, wobei wir weiter unten diskutieren werden, ob bzw. in welchem Sinne diese immer existiert. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für  $F$  garantieren

$$\begin{pmatrix} \partial_x U(x, y) & \partial_y U(x, y) \\ \partial_x V(x, y) & \partial_y V(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +u(x, y) & -v(x, y) \\ +v(x, y) & +u(x, y) \end{pmatrix},$$

wobei links die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_F(x, y)$  der reellen Entsprechung von  $F$  steht und die Matrix rechts gerade die Drehstreckung ist, die zur komplexen Multiplikation mit  $f(z) = F'(z)$  gehört. Insbesondere gilt

$$\phi(x, y) = \mathbf{grad} U(x, y), \quad \psi(x, y) = \mathbf{grad} V(x, y),$$

d.h. die oben eingeführten Vektorfelder  $\phi$  bzw.  $\psi$  sind der Gradient des Real- bzw. des Imaginärteils der Stammfunktion  $F$ . Diese Beobachtung ist nützlich und liefert die weiteren Darstellungsformeln

$$\operatorname{Re} \left( \int_c F'(z) dz \right) = + \int_c \langle \mathbf{grad} U(x, y), \boldsymbol{\tau}(x, y) \rangle ds = - \int_c \langle \mathbf{grad} V(x, y), \boldsymbol{\nu}(x, y) \rangle ds$$

sowie

$$\operatorname{Im} \left( \int_c F'(z) dz \right) = + \int_c \langle \mathbf{grad} U(x, y), \boldsymbol{\nu}(x, y) \rangle ds = + \int_c \langle \mathbf{grad} V(x, y), \boldsymbol{\tau}(x, y) \rangle ds,$$

die für beliebige — und insbesondere auch nicht-geschlossene — Wege  $c$  gelten.

*Hinweis:* In der Physik wird wegen der unterschiedlichen Vorzeichenkonvention  $-F$  als das komplexe Potential bezeichnet und wir hatten schon weiter oben gesehen, dass  $\mathbf{grad} U = -\mathbf{grad} \operatorname{Re}(-F)$  oftmals als Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit oder als elektrisches Feld interpretiert werden kann. Beachte aber, dass damals  $f$  nicht die komplexe Ableitung von  $F$  war, sondern eine beliebige holomorphe Gebietstransformation bezeichnete.

Vorlesung 07-2 : 26. Mai

**Theorem (Integralformel von Cauchy)** Es gilt

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz$$

in jedem Punkt  $z_* \in G$ , sofern  $f$  stetig differenzierbar ist.

**Beweis** *Teil 1*: Wir formulieren und beweisen zunächst eine Hilfsaussage, die in der Literatur oftmals Deformationslemma genannt wird. Ist  $\check{G}$  ein weiteres elementares Cauchy-Gebiet, das mit seinem Rand  $\partial\check{G}$  vollständig in  $G$  liegt und außerdem den Punkt  $z_*$  enthält, so gilt

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz = \int_{\partial\check{G}} \frac{f(z)}{z - z_*} dz.$$

Diese Aussage können wir — ganz analog zur Diskussion weiter oben zur Berechnung von Windungsintegrale — aus dem Integralsatz von Cauchy ableiten, indem wir den Durchlaufsinne von  $\partial\check{G}$  umdrehen und die offene, aber nicht-einfach zusammenhängende Menge  $G \setminus \{\check{G} \cup \partial\check{G}\}$  in zwei elementare Cauchy-Gebiete zerlegen. Siehe dazu das Bild.

*Teil 2*: Wir werten die im ersten Teil bewiesene Deformationsformel für kleine Kreisscheiben  $\check{G} = B_\varepsilon(z_*)$  aus, wobei der Radius  $\varepsilon > 0$  immer so klein ist, dass  $\check{G}$  und  $\check{C} = \partial\check{G} = S_\varepsilon(z_*)$  ganz in  $G$  und damit auch im Definitionsbereich  $D$  von  $f$  liegen. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals und unter Verwendung der Standardparametrisierung von Kreislinien gilt

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon(z_*)} \frac{f(z)}{z - z_*} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_* + \varepsilon \exp(\mathbf{i}t))}{\varepsilon \exp(\mathbf{i}t)} \mathbf{i} \varepsilon \exp(\mathbf{i}t) dt \\ &= \mathbf{i} \int_0^{2\pi} f(z_* + \varepsilon \exp(\mathbf{i}t)) dt =: \mathbf{i} I_\varepsilon, \end{aligned}$$

und wir wollen nun das Integral  $I_\varepsilon$  mit reeller Integrationsvariable  $0 \leq t \leq 2\pi$  im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  berechnen. Zum einen gilt

$$I_0 = \int_0^{2\pi} f(z_*) dt = f(z_*) \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi f(z_*)$$

und zum anderen impliziert die Theorie der Riemann-Integrale aus *Analysis 1* die Ungleichung

$$|I_\varepsilon - I_0| \leq \int_0^{2\pi} \left| f(z_* + \varepsilon \exp(\mathbf{i}t)) - f(z_*) \right| dt = O(\varepsilon),$$

wobei wir auch die komplexe Taylor-Formel

$$f(z_* + \gamma) - f(z_*) = f'(z_*) \gamma + o(|\gamma|)$$

bzw. ihre Folgerung

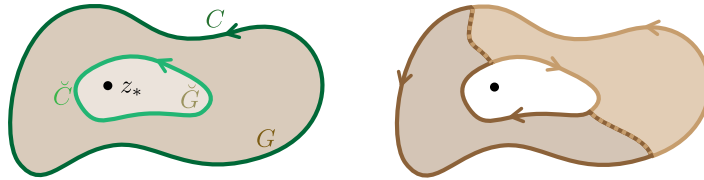
$$\left| f(z_* + \gamma) - f(z_*) \right| \leq |f'(z_*)| |\gamma| + o(|\gamma|) = O(|\gamma|)$$

für  $\gamma = \varepsilon \exp(\mathbf{i}t)$  ausgewertet haben. Da das komplexe Kurvenintegral von  $f$  über  $\partial G$  aber gar nicht vom Parameter  $\varepsilon$  abhängt, und weil wir gerade gezeigt haben, dass  $I_\varepsilon$  gegen  $I_0$  konvergiert, erhalten wir insgesamt

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz = \mathbf{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \mathbf{i} I_0 = \mathbf{i} 2\pi f(z_*)$$

und damit die Behauptung. □





**Abbildung** Das Deformationslemma kann mit geschickten Zerlegungsargumenten bewiesen werden, wobei wir im letzten Abschnitt schon eine ganz ähnliche Konstruktion verwendet hatten.

### Bemerkungen

1. Die Integralformel impliziert die folgende, sehr bemerkenswerte Aussage: Wenn die holomorphe Funktion  $f$  auf dem Rand  $\partial G$  bekannt ist, so kennen wir  $f$  schon auf ganz  $G$ , denn wir können für jedes  $z_* \in G$  den Funktionswert  $f(z_*)$  durch das angegebene Kurvenintegral berechnen (zumindest im Prinzip). Im  $\mathbb{R}^2$  gilt eine analoge Formel zwar für harmonische Funktionen, aber **nicht** für allgemeine stetig differenzierbare Funktionen.
2. Im Spezialfall  $f(z) = 1$  (konstante Funktion) reduziert sich die Cauchysche Integralformel auf

$$1 = \text{wnd}_{\partial G}(z_*).$$

Insbesondere zeigt sich hier schon — da  $\text{wnd}_{\partial G}(z_*) = 0$  für jeden äußeren Punkt  $z_*$  von  $G$  gilt — dass die Bedingung  $z_* \in G$  im Theorem ganz wesentlich ist.

3. Die Mittelwerteigenschaft

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_* + \varepsilon \exp(it)) dt$$

gilt für alle  $\varepsilon > 0$  mit  $S_\varepsilon(z_*) \subset G$  und ergibt sich als Nebenprodukt aus dem Beweis.

4. Wenn  $f$  auf  $G$  durch seine Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt  $z_*$  dargestellt werden kann, d.h. wenn

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k = f(z_*) + f'(z_*) (z - z_*) + \frac{1}{2} f''(z_*) (z - z_*)^2 + \dots$$

für alle  $z \in G \cup \partial G$  gilt, so kann die Cauchysche Integralformel auch direkt via

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_*} dz &= \int_{\partial G} \frac{f(z_*)}{z - z_*} dz + \int_{\partial G} f'(z_*) dz + \int_{\partial G} \frac{1}{2} f''(z_*) (z - z_*) dz + \dots \\ &= f(z_*) 2\pi i + 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

aus den Integralformeln für die verallgemeinerten Monome abgeleitet werden. Wir werden unten sehen, dass die Taylor-Formel lokal immer verwendet werden darf, d.h. auf allen Mengen  $G$ , deren Durchmesser hinreichend klein ist.

5. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Cauchy-Formel zu schreiben. Wir werden zum Beispiel weiter unten die Variante

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } z \in G$$

verwenden, wobei die Integrationsvariable mit  $\zeta$  bezeichnet wird und  $z$  als freie Variable betrachtet werden kann. Diese Formel ist aber äquivalent zu der im Theorem angegebenen Version.

6. Wir können die Cauchysche Integralformel auch benutzen, um gewisse komplexe Kurvenintegrale entlang von elementaren Cauchy-Wegen auszurechnen. Dies setzt natürlich voraus, dass der Integrand in der benötigten Form gegeben ist oder in diese transformiert werden kann.

**Beispiel** Für

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{f(z)}{z - i} \quad \text{mit} \quad f(z) = \frac{z}{z + i}$$

gilt

$$\int_{S_1(i)} g(z) dz = 2\pi i f(i) = i\pi,$$

aufgrund der Cauchyschen Integralformel für  $f$  mit  $z_* = i$  und  $G = B_1(i)$ . Diese konnten wir hier verwenden, da  $f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  holomorph ist und weil die Polstelle  $z = -i$  weder zu  $G$  noch zu  $\partial G$  gehört. Wir hätten dieses Integral aber auch anders berechnen können. Die Partialbruchzerlegung

$$g(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{2} \frac{1}{z + i}$$

liefert zum Beispiel via

$$\int_{S_1(i)} g(z) dz = 2\pi i \left( \frac{1}{2} \text{wnd}_{S_1(i)}(-i) + \frac{1}{2} \text{wnd}_{S_1(i)}(+i) \right) = \pi i (0 + 1)$$

das gleiche Ergebnis.

## 2.2 Folgerungen aus Satz und Formel von Cauchy

**Vorbemerkung** Wir benutzen die Cauchysche Integralformel, um eine ganz zentrale Aussage über holomorphe Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  zu erhalten, die auf einer beliebigen offenen Menge  $D \subset \mathbb{C}$  definiert sind. Insbesondere darf  $D$  wieder Löcher und/oder einen fraktalen Rand besitzen.

**Theorem (lokaler Entwicklungssatz)** Seien  $f$  stetig differenzierbar,  $z_* \in D$  ein beliebiger Punkt und  $\varrho > 0$  ein Radius, sodass die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{B}_\varrho(z_*) = B_\varrho(z_*) \cup S_\varrho(z_*)$  innerhalb von  $D$  liegt. Dann existiert eine Koeffizientenfolge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , sodass die lokale Potenzreihen-Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k \quad \text{für alle } z \in B_\varrho(z_*)$$

gilt, wobei jeder Koeffizient mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(z_*)} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz$$

berechnet werden kann. Insbesondere besitzt  $f$  in  $z_*$  unendlich viele Ableitungen und die Taylor-Formel

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!}$$

liefert eine alternative Darstellung der Koeffizienten  $\alpha_k$ .

**Beweis** Wir fixieren  $z \in B_\varrho(z_*)$  beliebig und schreiben die Integralformel von Cauchy (siehe auch die Bemerkungen oben) als

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(z_*)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Außerdem verwenden wir den Trick mit der geometrischen Reihe, d.h. die Formel

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_*} \frac{1}{1 - \frac{z - z_*}{\zeta - z_*}} = \frac{1}{\zeta - z_*} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_*}{\zeta - z_*} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_*)^k}{(\zeta - z_*)^{k+1}},$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite wegen  $|z - z_*| < |\zeta - z_*| = \varrho$  und aufgrund der Restgliedabschätzung

$$0 \leq \left| \sum_{k=K}^{\infty} \frac{(z - z_*)^k}{(\zeta - z_*)^{k+1}} \right| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \left| \frac{(z - z_*)^k}{(\zeta - z_*)^{k+1}} \right| \leq \varrho^{-1} \sum_{k=K}^{\infty} \left( \frac{|z - z_*|}{\varrho} \right)^k \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

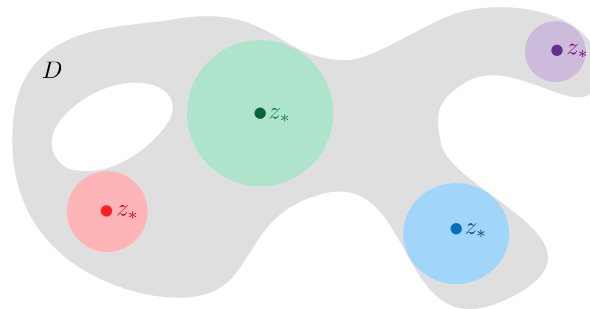
absolut und gleichmäßig bzgl.  $\zeta \in \partial B_\varrho(z_*)$  konvergiert. Durch Einsetzen erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(z_*)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) (z - z_*)^k}{(\zeta - z_*)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_*)^k \int_{S_\varrho(z_*)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{k+1}} d\zeta,$$

wobei wir außerdem benutzt haben, dass wir die Integration und die Reihenbildung wegen der gleichmäßigen Konvergenz vertauschen können (siehe dazu *Analysis 1*) und dass die Faktoren  $(z - z_*)^k$  nicht von der Integrationsvariablen  $\zeta$  abhängen. Dies ist gerade die gewünschte Reihendarstellung<sup>5</sup> und die Theorie der Potenzreihen garantiert die Existenz aller Ableitungen in  $z_*$  sowie die Taylor-Formel für die  $\alpha_k$ .  $\square$

### Bemerkungen

1. Weil  $D$  offen ist, existiert für jedes  $z_* \in D$  wirklich ein positiver Radius  $\varrho$  mit den gewünschten Eigenschaften (er kann aber sehr klein sein). Da  $z_*$  außerdem beliebig gewählt werden kann, besitzt die holomorphe Funktion  $f$  unendlich viele Ableitungen auf der ganzen Menge  $U$ , wobei dann jede Ableitung auch stetig ist. Im Reellen ist die analoge Aussage falsch, denn aus der Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung folgt dort noch lange nicht die Existenz aller Ableitungen.
2. Das Theorem besagt insbesondere, dass jede holomorphe Funktion in der Nähe eines jeden Punktes ihres Definitionsbereichs als Potenzreihe geschrieben werden kann. Auch hier existiert keine Entsprechung in der reellen Analysis, denn dort gibt es Funktionen, die zwar in jedem Punkt unendlich oft differenzierbar sind, aber trotzdem nicht überall lokal als Taylor-Reihe dargestellt werden können.<sup>6</sup>
3. Die Taylor-Entwicklung von  $f$  im Punkt  $z_*$  gilt im Allgemeinen nicht auf ganz  $D$ , d.h. es gibt meist keine *globale* Potenzreihen-Darstellung von  $f$ , sondern nur eine *lokale* in jedem Punkt  $z_* \in D$ , wobei die Koeffizienten natürlich von  $z_*$  abhängen. Wir können aber mit etwas mehr Aufwand die Konvergenz der Reihe auf der größten offenen Kreisscheibe um  $z_*$  garantieren, die noch ganz in  $D$  liegt (siehe das Bild).



**Abbildung** Beispiel für eine offene Menge  $D$  (grau). Jede holomorphe Funktion  $f$  auf  $D$  kann in jedem Punkt  $z_* \in D$  in eine Potenzreihe entwickelt werden, aber diese konvergiert im Allgemeinen nur auf der größten offenen Kreisscheibe, die noch ganz zu  $D$  gehört, wobei dann der Rand dieser Kreisscheibe nicht mehr ganz in  $D$  enthalten sein wird. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass der Konvergenzkreis größer als vorhergesagt ist (siehe die Beispiele).

<sup>5</sup>Mit den Notationen aus dem Beweis ergibt sich zunächst

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(z_*)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_*)^{k+1}} d\zeta,$$

aber am Ende können wir die Integrationsvariable  $\zeta$  wieder in  $z$  umbenennen.

<sup>6</sup>Ein Standardbeispiel (siehe *Analysis 1*) ist  $f(x) = \exp(-1/x)$  für  $x > 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$ . Diese Funktion  $f$  ist in jedem Punkt unendlich oft differenzierbar, aber alle Ableitungen verschwinden in  $x = 0$ . Insbesondere kann  $f$  in der Nähe des Ursprungs nicht als Taylor-Reihe geschrieben werden.

**Beispiele**

1. Wir betrachten das verallgemeinerte Monom  $f(z) = 1/z$  als holomorphe Funktion auf der punktierten Ebene  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und berechnen zunächst induktiv ihre Ableitungen zu

$$f^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}} \quad \text{für alle } z \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{N}_0.$$

Für jeden Entwicklungspunkt  $z_* \neq 0$  erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_*^{k+1}} (z - z_*)^k$$

als Taylor-Reihen-Darstellung. Diese gilt aber nur für  $z \in B_{|z_*|}(z_*)$ , denn die Cauchy-Hadamard-Formel (bzw. die entsprechende Quotientenformel) impliziert, dass  $|z_*|$  gerade der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist. Insbesondere gilt  $0 \in S_{|z_*|}(z_*)$ , d.h. der Konvergenzkreis ist hier wirklich die größte Kreisscheibe um  $z_*$ , die ganz in  $D$  enthalten ist. Mit  $z_* = 1$  bzw.  $z_* = 2i$  ergibt sich nach kleineren Rechnungen zum Beispiel

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - 1)^k = \frac{1}{z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k+1}}{2^{k+1}} (z - 2i)^k,$$

wobei das linke bzw. das rechte Gleichheitszeichen nur für  $|z - 1| < 1$  bzw.  $|z - 2i| < 2$  gilt, sodass die Doppelformel nur für  $z \in B_1(1) \cap B_1(2i) \neq \emptyset$  verwendet werden darf.

*Bemerkung\**: Der lokale Entwicklungssatz liefert die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(z_*)} \frac{dz}{z(z - z_*)^{k+1}}$$

für jeden Radius  $0 < \varrho < |z|_*$ , wobei dies im konkreten Fall auch wie folgt begründet werden kann: Wenn wir die Formel

$$\frac{1}{z(z - z_*)^{k+1}} = \frac{1}{(z - z_*)^{k+2}} - \frac{z_*}{z(z - z_*)^{k+2}}$$

auf beiden Seiten über  $S_\varrho(z_*)$  integrieren, so fällt der erste Term auf der rechten Seite weg, da es eine entsprechende Stammfunktion gibt. Nach Division durch  $2\pi i$  erhalten wir die Rekursionsformel  $\alpha_k = -z_* \alpha_{k+1}$ , aus der wir induktiv die Taylor-Formel für  $\alpha_k$  rekonstruieren können.

2. Für den Hauptwert<sup>7</sup> des Logarithmus, d.h. mit

$$f(z) = \operatorname{Ln}(z), \quad D = \mathbb{C} \setminus S, \quad S = \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0 \text{ und } x \leq 0\}$$

erhalten wir via

$$f^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{z^k} \quad \text{für alle } z \notin S \text{ und } k \geq 1$$

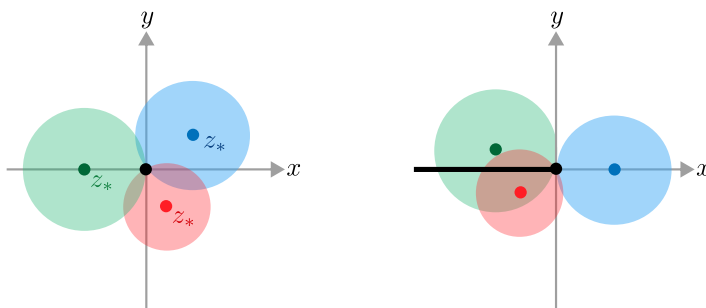
<sup>7</sup>Die Hauptwerte hatten wir weiter oben eingeführt und entsprechen der Wahl  $\theta = 0$ .

die lokale Taylor-Reihendarstellung

$$\operatorname{Ln}(z) = \operatorname{Ln}(z_*) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k z_*^k} (z - z_*)^k = \operatorname{Ln}(z_*) + \frac{z - z_*}{z_*} - \frac{(z - z_*)^2}{2 z_*^2} + \dots$$

Die Cauchy-Hadamard-Formel liefert auch in diesem Beispiel  $|z - z_*| < |z_*|$  als Konvergenzbedingung für die Potenzreihe, wobei dies wegen  $0 \in S_{|z_*|}(z_*)$  im Fall von  $\operatorname{Re}(z_*) \geq 0$  gerade der größten offenen Kreisscheibe um  $z_*$  entspricht, die gerade noch in der geschlitzten Ebene  $D$  liegt.

*Bemerkung\**: Für jedes  $z_* \in D$  mit  $\operatorname{Re}(z_*) < 0$  enthält der Konvergenzkreis der Taylor-Reihe auch Punkte aus dem Schlitz  $S$  (aber niemals den Ursprung). Diese auf den ersten Blick sehr überraschende Beobachtung hat damit zu tun, dass man auf dem Schlitz sehr wohl eine komplexe Logarithmusfunktion einzuführen kann, nämlich die weiter oben diskutierten  $\theta$ -Werte.



**Abbildung** Ausgewählte Konvergenzkreise der Taylor-Reihenentwicklung für das Monom  $f(z) = 1/z$  (links) bzw. für den Hauptwert  $f(z) = \operatorname{Ln}(z)$  (rechts), wobei das Komplement des Definitionsbereiches von  $f$  (Polstelle bzw. Schlitz) schwarz dargestellt ist. Beachte, dass die Konvergenzkreise rechts (aber nicht links) zum Teil größer sind, als vom lokalen Entwicklungssatz vorhergesagt.

**Korollar (Variante der verallgemeinerten Cauchy-Formel)** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $f$  gilt

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_*),$$

für jeden Punkt  $z_* \in G$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis** Für jede hinreichend kleine Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z_*$  ergibt sich die Formel direkt aus der Taylor- und der Cauchy-Formel im lokalen Entwicklungssatz. Für allgemeinere Mengen  $G$  können wir wieder eine Variante des Deformationslemmas verwenden, siehe den Beweis des Cauchy-Integralsatzes.  $\square$

**Bemerkung**

1. Für die konstante Funktion  $f(z) = 1$  ergeben sich die Fundamentalintegrale der verallgemeinerten Monome mit negativem Exponenten.
2. Das Lemma ermöglicht es, gewisse Klassen von Kurvenintegralen sehr einfach zu berechnen (siehe die Beispiele). Beachte dabei, dass der Integrand eine Polstelle in  $z_*$  besitzt.

- Im Fall von  $z_* \in \partial G$  können die Integrale nicht ausgewertet werden, da dann die Singularität des Integranden auf dem Integrationsweg liegt. Ist  $z_*$  jedoch ein äußerer Punkt von  $G$ , so verschwindet das Kurvenintegral für jeden Wert von  $k \in \mathbb{N}$  nach dem Integralsatz von Cauchy, da dann der Integrand holomorph auf der offenen Menge  $D \setminus \{z_*\}$  ist und diese Menge sowohl  $G$  als auch  $\partial G$  enthält.
- Wir werden unten sehen, dass die Formel im Lemma auch als Spezialfall des allgemeineren *Residuentheorems* betrachtet werden kann.

### Beispiele

- Für  $z_* \in G$  ergeben sich die Formeln

$$\int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z - z_*)^2} dz = +2\pi i \cos(z_*), \quad \int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z - z_*)^3} dz = -\pi i \sin(z_*)$$

und

$$\int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z - z_*)^4} dz = -\frac{1}{3}\pi i \cos(z_*), \quad \int_{\partial G} \frac{\sin(z)}{(z - z_*)^5} dz = +\frac{1}{12}\pi i \sin(z_*)$$

aus der verallgemeinerten Cauchy-Formel für  $k = 1, k = 2, k = 3$  und  $k = 4$ .

- Die Formel

$$I := \int_{S_3(0)} \frac{\exp(z)}{z^3 + 2z^2} dz = \frac{1}{2} i \pi (3 + e^{-2})$$

kann auch mit der verallgemeinerten Cauchy-Formel hergeleitet werden, obwohl der Nenner  $z^3 + 2z = z^2(z + 2)$  zwei Nullstellen in  $B_3(0)$  besitzt. Nach Einsetzen der Partialbruchzerlegung

$$\frac{4}{z^3 + 2z^2} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z + 2}$$

können wir die drei entsprechenden Einzelintegrale durch Punktauswertung der Exponentialfunktion und ihrer Ableitung bestimmen. Dies liefert

$$\begin{aligned} 4I &= - \int_{S_3(0)} \frac{\exp(z)}{z} dz + 2 \int_{S_3(0)} \frac{\exp(z)}{z^2} dz + \int_{S_3(0)} \frac{\exp(z)}{z + 2} dz \\ &= -\frac{2\pi i}{0!} \exp(0) + 2 \frac{2\pi i}{1!} \exp'(0) + \frac{2\pi i}{0!} \exp(-2) \\ &= 2\pi i (3 + \exp(-2)) \end{aligned}$$

und das gewünschte Ergebnis folgt unmittelbar.

- Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \int_{S_1(0)} \frac{\exp(z)}{z^3 + 2z^2} dz &= \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{d}{dz} \frac{\exp(z)}{z + 2} \right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \left( \frac{\exp(z)(z + 1)}{(z + 2)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2} \pi i, \end{aligned}$$

wobei in diesem Fall die Polstelle  $-2$  ein äußerer Punkt von  $B_1(0)$  ist und die verallgemeinerte Cauchy-Formel für  $f(z) = \exp(z)/(z + 2)$  ausgewertet wurde.

## 2.3 Weitere Folgerungen

**Lemma (Cauchysche Ungleichung)** Mit den Voraussetzungen und Notationen aus dem lokalen Entwicklungssatz gilt

$$|f^{(k)}(z_*)| \leq \frac{k!}{\varrho^k} M_\varrho(z_*) \quad \text{mit} \quad M_\varrho(z_*) := \max_{z \in S_\varrho(z_*)} |f(z)|,$$

d.h. alle Ableitungen von  $f$  in  $z_*$  können durch die Werte von  $f$  auf einer Kreislinie um  $z_*$  abgeschätzt werden.

**Beweis** Wir wenden die Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale auf die verallgemeinerte Cauchy-Formel an und erhalten

$$|\alpha_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(z_*)} \frac{f(z)}{(z - z_*)^k} dz \right| \leq \frac{M_\varrho(z_*)}{2\pi \varrho^{k+1}} \text{len}(S_\varrho(z_*)).$$

Da die Länge des Integrationsweges durch  $\text{len}(S_\varrho(z_*)) = 2\pi\varrho$  gegeben ist, ergibt sich die Behauptung nach Einsetzen der Taylor-Formel  $\alpha_k = f^{(k)}(z_*)/k!$ .  $\square$

**Lemma (Satz von Liouville)** Jede auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig differenzierbare Funktion ist entweder konstant oder unbeschränkt.

**Beweis** Wir nehmen an, dass die holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  via

$$M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$$

beschränkt ist und wollen zeigen, dass  $f$  dann schon konstant sein muss. Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  und jeden Radius  $\varrho > 0$  folgt

$$|f'(z)| \leq \frac{M_\varrho(z)}{\varrho} \leq \frac{M}{\varrho}$$

aus der Cauchyschen Ungleichung und wir können nun  $\varrho$  bei festem  $z$  immer größer werden lassen. Insbesondere erhalten wir

$$|f'(z)| = 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(z) = 0$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  im Limes  $\varrho \rightarrow \infty$ . Da  $f$  aber eine Stammfunktion von  $f'$  ist, gilt außerdem

$$\int_{[0, z]} f'(\zeta) d\zeta = f(z) - f(0),$$

wobei  $[0, z]$  die Verbindungsstrecke zwischen 0 und  $z$  bezeichnet, die wir zum Beispiel durch  $c(t) = tz$  mit  $t \in [0, 1]$  parametrisieren können. Insgesamt ergibt sich

$$f(z) = f(0) + \int_{[0, z]} 0 d\zeta = f(0)$$

für jedes  $z \in \mathbb{C}$ , d.h. die beschränkte Funktion  $f$  ist in der Tat konstant.  $\square$



**Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)** Jedes komplexe Polynom vom Grad  $K \geq 1$ , d.h. jede Funktion der Bauart

$$f(z) = \alpha_K z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{mit} \quad \alpha_K \neq 0,$$

kann via

$$f(z) = \alpha_K (z - z_K) (z - z_{K-1}) \dots (z - z_2) (z - z_1)$$

als Produkt von genau  $K$  Linearfaktoren geschrieben werden. Dabei sind die  $z_k$  gerade die Nullstellen von  $f$ , die hier aber *nicht* paarweise verschieden sein müssen.

**Beweis** *funktionentheoretisches Hauptargument*: Wir können  $\alpha_K = 1$  annehmen und zeigen zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, dass  $f$  mindestens eine Nullstelle besitzen muss. Dazu nehmen wir an, dass  $f$  keine Nullstelle besitzt. In diesem Fall ist die Funktion  $g$  mit

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}$$

auf ganz  $\mathbb{C}$  wohldefiniert und nach den Rechenregeln der komplexen Ableitung dort auch holomorph. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| \frac{1}{z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^K} \left| \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{K-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{K-1}} + \frac{\alpha_0}{z^K}} \right| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

und wir schließen, dass  $g$  beschränkt ist. Der Satz von Liouville impliziert, dass  $g$  und damit auch  $f$  konstant ist, aber ein Polynom ist nur konstant, wenn es den Grad 0 besitzt. Das ist allerdings ein Widerspruch zur Voraussetzung  $K \geq 1$  und unsere Annahme muss daher falsch gewesen sein.

*Abspaltargument*: Wir haben bereits gezeigt, dass das Polynom  $f$  — das wir im Folgenden auch  $f_K$  nennen — mindestens eine Nullstelle besitzt. Wie wählen nun diese bzw. eine und nennen sie  $z_K$ . Für  $K = 1$  sind wir auch schon fertig und im Fall von  $K \geq 2$  schließen wir, dass

$$f_K(z) = (z - z_K) f_{K-1}(z)$$

für ein Polynom  $f_{K-1}$  vom Grad  $K - 1$  gelten muss. Dieses Argument haben wir schon oft benutzt, denn  $f_{K-1}$  kann in jedem konkreten Fall mittels Polynomdivision aus  $f_K$  berechnet werden. Die Existenz von  $f_{K-1}$  kann aber auch abstrakt wie folgt begründet werden: Wir schreiben  $f_K$  als Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt  $z_K$ . Dabei werden — wegen  $f_K(z_K) = 0$  sowie  $f_K^{(k)}(z) = 0$  für  $k > K$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  — höchstens die Terme mit den Potenzen  $(z - z_K)^1, \dots, (z - z_K)^K$  nicht verschwinden und wir können anschließend gliedweise durch  $(z - z_K)$  dividieren. Dies liefert

$$f_{K-1}(z) = \sum_{k=1}^K \frac{f_K^{(k)}(z_K)}{k!} (z - z_K)^{k-1} = \frac{1}{1!} f_K^{(1)}(z_K) + \dots + \frac{1}{K!} f_K^{(K)}(z_K) (z - z_K)^{K-1},$$

wobei wir dann wieder ausmultiplizieren können.

rekursives Argument: Wir können den ersten Teil des Beweises sinngemäß auch auf das Polynom  $f_{K-1}$  anwenden. Dies liefert die Existenz von  $z_{K-1}$  als Nullstelle von  $f_{K-1}$ , sodass wir analog zum zweiten Schritt

$$f_{K-1}(z) = (z - z_{K-1}) f_{K-2}(z)$$

schreiben können, wobei  $f_{K-2}$  nun ein Polynom vom Grad  $K - 2$  ist, auf dass im Anschluss nochmal der erste Beweisschritt angewendet wird. Durch Iteration spalten wir sukzessive  $K$  Linearfaktoren ab und erhalten insgesamt  $K$  Nullstellen.  $\square$

### Bemerkungen

1. Oftmals benutzen wir die alternative Darstellungsformel

$$f(z) = \alpha_K (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_L)^{n_L},$$

wobei die  $z_l$  nun die paarweise verschiedenen Nullstellen sind und der Exponent  $n_l \in \mathbb{N}$  die algebraische Vielfachheit von  $z_l$  genannt wird.

2. Wir können den Fundamentalsatz auch wie folgt formulieren: Jedes komplexe Polynom vom Grad  $K$  besitzt *bei richtiger Zählung* genau  $K$  Nullstellen.
3. Die Beweisidee kann **nicht** im Fall  $K = \infty$  (Potenzreihen) verwendet werden, da dann die Funktion  $g$  aus dem Beweis nicht mehr beschränkt sein muss. Das wichtigste Gegenbeispiel ist die Exponentialfunktion  $f(z) = \exp(z)$ , die auf  $D = \mathbb{C}$  gar keine Nullstelle (und nicht etwa unendlich viele) besitzt. Für jedes  $K \in \mathbb{N}$  besitzt aber die „abgeschnittene Exponentialreihe“  $f(z) = \sum_{k=0}^K z^k/k!$  als Polynom  $K$  Nullstellen.<sup>8</sup>

**Theorem (Maximumprinzip)** Ist  $f$  stetig differenzierbar und nicht konstant auf einer offenen Menge  $D$ , so besitzt  $|f|$  kein lokales Maximum in  $D$ . Das Maximum von  $|f|$  kann also nur am Rand  $\partial D$  angenommen werden.<sup>9</sup>

**Beweisskizze** Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass es einen strikten Maximierer  $z_* \in D$  gibt, sodass

$$|f(z_*)| > |f(z)|$$

für alle  $z \in D$  mit  $z \neq z_*$  gilt. Da  $D$  offen ist, gibt es einen Radius  $\varepsilon > 0$ , sodass die Kreisscheibe  $B_\varepsilon(z_*)$  und ihr Rand ganz in  $D$  liegen. Die Integralformel von Cauchy bzw. die aus ihr abgeleitete Mittelwerteigenschaft implizieren

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z - z_*} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_* + \varepsilon \exp(it)) dt$$

und damit auch

$$|f(z_*)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_* + \varepsilon \exp(it))| dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_*)| dt = |f(z_*)|.$$

Diese Ungleichung impliziert den Widerspruch  $|f(z_*)| < |f(z_*)|$  und wir schließen, dass die Annahme von oben falsch gewesen sein muss.  $\square$

<sup>8</sup>Im Limes  $K \rightarrow \infty$  werden diese Nullstellen im Unendlichen verschwinden.

<sup>9</sup>Die Funktion  $|f|$  ist in natürlicher Weise durch  $|f|(z) = |f(z)|$  definiert.

**Bemerkungen**

1. Unsere Beweisskizze ist nicht ganz wasserfest, denn es könnte ja nicht-strikte Maximierer von  $|f|$  in  $D$  geben. Der richtige Beweis enthält daher noch einige argumentative Schlenker, die wir hier aber nicht im Detail darstellen wollen.
2. Es gibt kein Minimumprinzip, denn  $|f|$  kann sehr wohl sein Minimum in einem inneren Punkt von  $D$  annehmen, zum Beispiel in komplexen Nullstellen  $z_*$  mit  $|f(z_*)| = 0$ .
3. Wir haben nur vorausgesetzt, dass der Definitionsbereich  $D$  eine offene Menge ist. Insbesondere muss  $D$  kein elementares Cauchy-Gebiet sein.
4. Wir werden weiter unten einen zweiten Beweis führen und das Maximumprinzip aus dem Offenheitsprinzip herleiten.

**Beispiele**

1. Mit  $D = B_1(0)$  und

$$f(z) = \frac{1}{z - \mathbf{i}}$$

ergibt sich via  $z = x + \mathbf{i}y$  die Formel

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{x + \mathbf{i}(y-1)} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} - \mathbf{i} \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} \right| = \frac{1}{g(x, y)}$$

mit

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

Mit elementaren Argumenten zeigen wir, dass der Punkt  $(0, -1)$  bzw.  $(0, +1)$  der eindeutige und strikte Maximierer bzw. Minimierer von  $g$  auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  ist.<sup>10</sup> Insbesondere gilt

$$\lim_{z \rightarrow -\mathbf{i}} |f(z)| = \frac{1}{2} = |f(-\mathbf{i})| < |f(z)| < \infty = |f(+\mathbf{i})| = \lim_{z \rightarrow +\mathbf{i}} |f(z)|$$

für alle  $z \in B_1(0)$  und wir haben für dieses Beispiel das Maximumprinzip direkt hergeleitet und konkretisiert.

2. Betrachten wir den Sinus als holomorphe Funktion auf der Menge  $D = B_\varrho(0)$ , so kann für jedes  $z \in B_\varrho(0)$  die Abschätzung

$$|f(z)| < |f(\pm \varrho \mathbf{i})| = \sinh(\varrho)$$

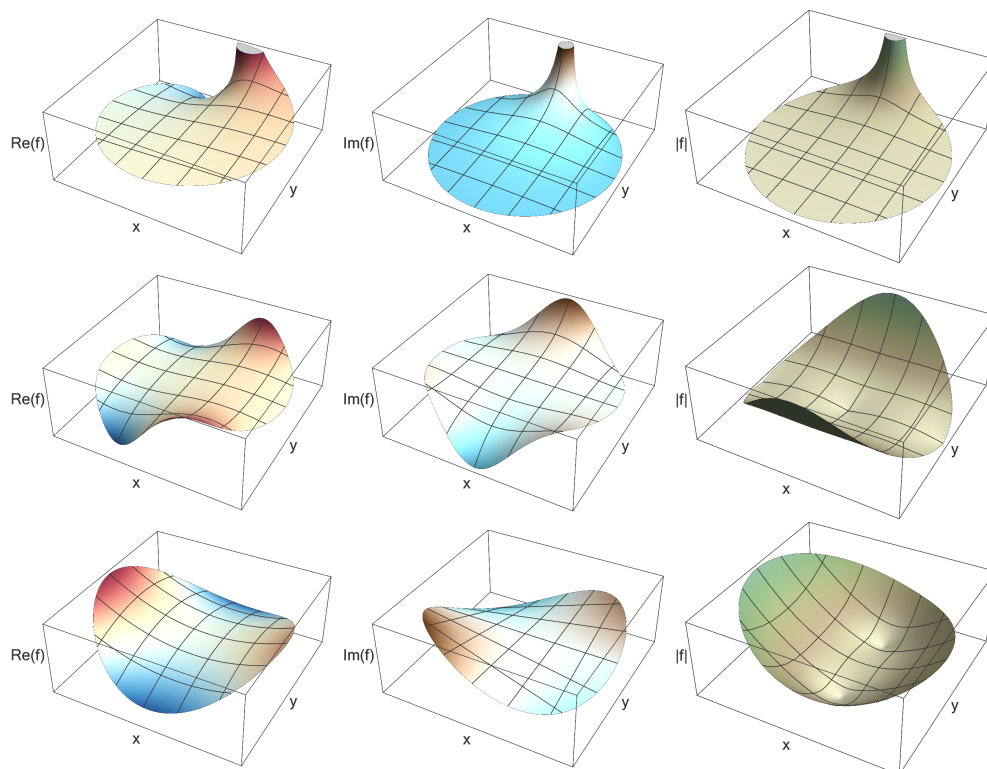
mit reellen Rechnungen und unter Verwendung von

$$f(z) = \sin(x) \cosh(y) + \mathbf{i} \cos(x) \sinh(y), \quad |f(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$

gezeigt werden. Das Maximum von  $|f|$  wird hier also in zwei Randpunkten angenommen, nämlich in  $\pm \mathbf{i} \varrho$ . Das entsprechende Minimum wird hingegen in jeder Nullstelle der Sinusfunktion und damit insbesondere im Punkt 0 realisiert.

<sup>10</sup>Die Funktion  $g$  beschreibt gerade den euklidischen Abstand vom Punkt  $(0, 1)$ .

3. Die konstante Funktion  $f(z) = 1$  ist holomorph und nimmt in jedem Punkt von  $D = \mathbb{C}$  sein Maximum und sein Minimum an. Dieser Entartungsfall wird im Theorem ausgeschlossen.



**Abbildung** Drei holomorphe Funktionen  $f$  auf der Kreisscheibe  $B_\rho(0)$ , wobei in jeder Zeile der Graph von  $u = \operatorname{Re}(f)$ ,  $v = \operatorname{Im}(f)$  und  $\sqrt{u^2 + v^2} = |f|$  als Funktion in den Variablen  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$  dargestellt sind. *Oben:*  $f(z) = 1/(z - i)$  mit  $\rho = 1$ , siehe das erste Beispiel. *Mitte:*  $f(z) = \sin(z)$  mit  $\rho = \pi$ , siehe das zweite Beispiel. *Unten:*  $f(z) = z^2 - z + 2$  mit  $\rho = 3$ .

Vorlesung 08-2 : 09. Juni

## über komplexe Stammfunktionen

**Voraussetzung** In diesem Abschnitt ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion und  $U \subset D$  eine offene sowie zusammenhängende Teilmenge des Definitionsbereichs von  $f$ . Außerdem bezeichnet  $c$  immer einen Integrationsweg in  $U$ , d.h.  $c$  ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit  $C = \operatorname{spur}(c) \subset U$ .

**Theorem (Kriterien für die Existenz einer Stammfunktion)** Die folgenden drei Aussagen sind paarweise äquivalent:

1. Es gilt

$$\int_c f(z) dz = 0$$

für jeden *geschlossenen* Integrationsweg  $c$  in  $U$ .

2. Das Kurvenintegral von  $f$  ist wegunabhängig in  $U$ , d.h. es gilt

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz$$

für je zwei Integrationswege  $c_1$  und  $c_2$  in  $U$ , die dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen.

3.  $f$  besitzt eine (lokale) Stammfunktion in  $U$ , d.h. es existiert eine holomorphe Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = F'(z)$$

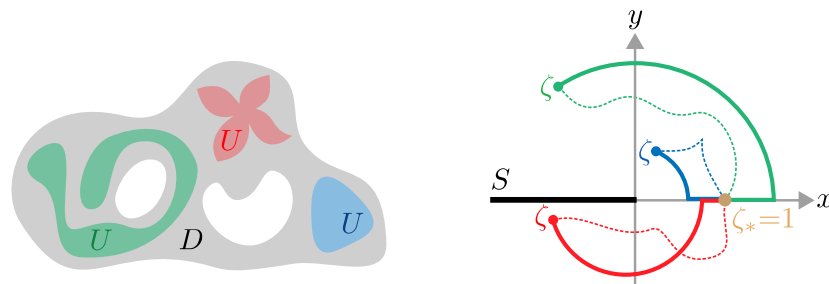
für alle  $z \in U$  gilt.

**Beweis** Wir hatten mit dem *Hauptsatz über Kurvenintegrale* in *Analysis 3* ein ganz analoges Resultat für reelle Kurvenintegrale hergeleitet und können den Beweis fast abschreiben: wir verwenden komplexe anstelle reeller Kurvenintegrale und ersetzen das Wort *Potential* durch *Stammfunktion*. Insbesondere können wir Stammfunktion analog zu *Analysis 3* durch geeignete Kurvenintegralen bestimmen, wobei wir die wesentlichen Ideen gleich im Anschluss noch einmal erklären werden.  $\square$

**Ergänzung\*** Ist  $U$  sogar einfach zusammenhängend, so kann im Theorem noch eine vierte äquivalente Bedingung aufgeführt werden, nämlich

4.  $f$  ist holomorph auf  $U$ .

Die Implikation 1.  $\Rightarrow$  4. wird *Satz vom Morera* genannt und weiter unten bewiesen.



**Abbildung** Links: Schematische Darstellung der zweiten Version des Integralsatzes von Cauchy, wobei jede der farbigen Mengen offen und einfach zusammenhängend ist (also im Gegensatz zu  $D$  kein Loch aufweist). Rechts: Zur Konstruktion der Stammfunktion im Beispiel, wobei für drei verschiedene Wahlen von  $\zeta$  der verwendete Integrationsweg  $c_{\zeta_*,\zeta}$  als durchgehende Linie gezeichnet wurde. Die gestrichelten Linien illustrieren alternative Integrationswege.

**Konstruktion von Stammfunktionen** Die lokale Stammfunktion  $F$  von  $f$  in  $U$  kann, sofern Sie existiert, wie folgt konstruiert werden, wobei wir dieselbe Idee schon bei der Potentialtheorie in *Analysis 2* benutzt hatten.

Wir fixieren  $\zeta_* \in D$  beliebig und wählen für jeden anderen Punkt  $\zeta \in U$  einen Verbindungsweg  $c_{\zeta_*,\zeta}$ , der in  $\zeta_*$  startet, ganz in  $U$  verläuft und im Punkt  $\zeta$  endet. Es gibt natürlich viele solcher Verbindungswege, aber das Endergebnis wird wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals in  $U$  nicht von der konkreten Wahl des Weges abhängen.

Wir legen außerdem den Wert  $F(\zeta_*)$  beliebig fest und können die entsprechende Stammfunktion in jedem Punkt  $\zeta \in U$  durch

$$F(\zeta) = F(\zeta_*) + \int_{c_{\zeta_*,\zeta}} f(z) dz,$$

d.h. durch Integration von  $f$  entlang des gewählten Verbindungsweges berechnen.

**Beispiel** Wir betrachten noch einmal das Monom  $f(z) = 1/z$  auf  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und konstruieren durch Wegintegration eine Stammfunktion auf der geschlitzten Ebene

$$U := \mathbb{C} \setminus S, \quad S := \{x + iy : y = 0 \text{ und } x \leq 0\},$$

die eine offene und einfach zusammenhängende Teilmenge des Definitionsbereichs  $D$  ist. Dazu setzen wir  $\zeta_* = 1$  sowie  $F(\zeta_*) = 0$  und betrachten für jedes  $\zeta \in U$  den zusammengesetzten Verbindungsweg

$$c_{\zeta_*, \zeta} = c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]} \oplus c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]},$$

der via

$$c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]}(z) = -t + |\zeta| (t + 1) \quad \text{für } t \in [-1, 0]$$

und

$$c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]} = |\zeta| \exp(it) \quad \text{mit } t \in [0, \text{Arg}(\zeta)]$$

zunächst ein Stück auf der horizontalen Achse und anschließend auf einem Kreisbogen mit Mittelpunkt 0 verläuft (siehe Bild oben). Wir könnten auch einen anderen Verbindungsweg betrachten, aber mit dieser Wahl sind die Kurvenintegrale besonders einfach. Direkte Rechnungen ergeben

$$\int_{c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]}} \frac{dz}{z} = \int_{-1}^0 \frac{|\zeta| - 1}{-t + |\zeta| (t + 1)} dt = \left[ \ln \left( -t + |\zeta| (t + 1) \right) \right]_{t=-1}^{t=0} = \ln(|\zeta|)$$

sowie

$$\int_{c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]}} \frac{dz}{z} = \int_0^{\text{Arg}(\zeta)} \frac{|\zeta| i \exp(it)}{|\zeta| \exp(it)} dt = \int_0^{\text{Arg}(\zeta)} i dt = i \text{Arg}(\zeta),$$

und wir erhalten<sup>11</sup> insgesamt die lokale Stammfunktion

$$F(\zeta) = \ln(|\zeta|) + i \text{Arg}(\zeta) = \text{Ln}(\zeta).$$

Damit haben wir das schon bekannte Resultat, nämlich  $\text{Ln}'(\zeta) = 1/\zeta$  für alle  $\zeta \in U$ , mit einer anderen Methode hergeleitet. Beachte, dass für  $\zeta \in \mathbb{R}$  mit  $\zeta \geq 0$  der Weg  $c_{\zeta_*, \zeta}^{[2]}$  entartet und keinen Beitrag zur Stammfunktion liefert. Für  $|\zeta| = 1$  entartet hingegen  $c_{\zeta_*, \zeta}^{[1]}$ .

**Folgerung (zweite Version des Integralsatzes von Cauchy)** Ist  $U$  sogar einfach zusammenhängend und  $f$  stetig differenzierbar, so gilt

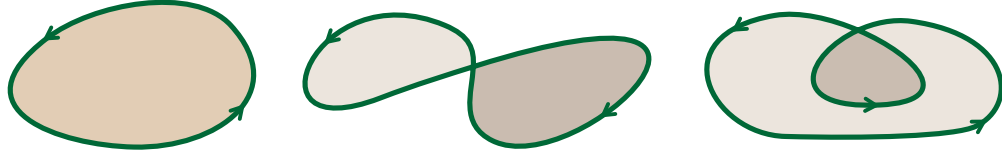
$$\int_c f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg in  $U$ . Insbesondere existiert auf  $U$  eine lokale Stammfunktion zu  $f$ .<sup>12</sup>

<sup>11</sup> $\text{Arg} = \text{Arg}_0$  bzw.  $\text{Ln} = \text{Ln}_0$  ist der Hauptwert des komplexen Arguments bzw. des komplexen Logarithmus.

<sup>12</sup>Jedes elementare Cauchy-Gebiet  $G \subset D$  kann als Menge  $U$  verwendet werden. Beachte jedoch, dass nicht jede offene und einfach zusammenhängende Menge  $U$  ein elementares Cauchy-Gebiet ist, da der Rand von  $U$  nicht unbedingt durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve parametrisierbar, sondern sogar fraktal sein kann.

**Beweis** Im einfachsten Fall enthält  $c$  keine Mehrfachpunkte und parametrisiert den Rand eines elementaren Cauchy-Gebietes  $G$ , wobei die gewünschte Integralformel dann direkt aus der ersten Version des Cauchyschen Integralsatzes folgt. Wenn es jedoch Doppel- oder Mehrfachpunkte gibt, so berandet  $C$  mehrere Cauchy-Gebiete und wir können das Kurvenintegral in mehrere Teilintegrale aufspalten, für die dann jeweils der Integralsatz angewendet werden kann (siehe dazu das Bild). Die Existenz einer Stammfunktion ergibt sich in jedem Fall aus dem vorherigen Theorem.  $\square$



**Abbildung** Ein geschlossener Integrationsweg (grün) ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und berandet im Allgemeinen mehrere Cauchy-Gebiete (braun).

**Achtung** Im Allgemeinen können wir nicht erwarten, dass eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  (differenzierbar oder nicht) eine globale Stammfunktion auf  $D$  besitzt. Das Standard-Gegenbeispiel ist wieder  $f(z) = 1/z$  mit  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , denn da das Fundamentalintegral

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad \text{und} \quad \text{wind}_{\partial B_1(0)}(0) = 2\pi i$$

nicht verschwindet, kann es auf der punktierten Ebene  $D$  keine Stammfunktion geben. Da  $f$  aber stetig differenzierbar ist, existiert eine lokale Stammfunktion auf jeder einfach zusammenhängenden Teilmenge  $U$  von  $D$ , zum Beispiel auf jeder geschlitzten Ebene.

**Folgerung** (Satz von Morera) Gilt

$$\int_c f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg  $c$  in  $U$ , so ist  $f$  stetig differenzierbar auf  $U$ .

**Beweis** Das Theorem liefert eine Stammfunktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  auf  $U$  und der lokale Entwicklungssatz garantiert, dass  $F$  und damit auch  $f$  im komplexen Sinne unendlich oft differenzierbar ist.  $\square$

### Bemerkungen

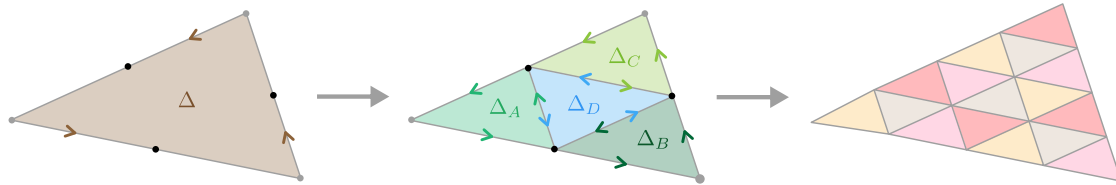
1. Ist die Voraussetzung im Satz erfüllt, so ist  $f$  nicht nur einmal, sondern sogar unendlich oft stetig differenzierbar. Dies ergibt sich sofort aus dem Beweis bzw. dem lokalen Entwicklungssatz.
2. Der Satz von Morera ist die Umkehrung der zweiten Fassung des Integralsatzes von Cauchy und aus theoretischer Sicht ausgesprochen wichtig, da mit ihm die komplexe Differenzierbarkeit einer gegebenen stetigen Funktion allein durch die Betrachtung entsprechender Kurvenintegrale nachgewiesen werden kann. Er



impliziert insbesondere, dass der gleichmäßige Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen selbst holomorph ist.<sup>13</sup>

## über den Satz von Cauchy für holomorphe Funktionen\*

**Vorbemerkung** Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, wie der Integralsatz von Cauchy und seine Folgerungen für holomorphe Funktionen — d.h. ohne die Annahme der stetigen Differenzierbarkeit und daher ohne Verwendung des Integralsatzes von Stokes — hergeleitet werden kann. Der Ausgangspunkt ist dabei das *Lemma von Goursat*, dass wir mit der *Pringsheimschen Methode* beweisen.



**Abbildung** Zum Pringsheimschen Beweis des Lemmas von Goursat: Mithilfe der Seitenmittelpunkte (schwarz) kann jedes Dreieck  $\Delta$  in vier kongruente Teildreiecke  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$ ,  $\Delta_C$  und  $\Delta_D$  zerlegt werden. Bei dieser Zerlegung wird der Umfang bzw. der Flächeninhalt halbiert bzw. geviertelt.

**Theorem (Lemma von Goursat)** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

für jedes offene Dreieck  $\Delta$ , dessen Abschluss  $\bar{\Delta}$  ganz in  $D$  liegt.

**Beweis** sukzessive Zerlegung des Dreiecks  $\Delta$ : Wie im Bild dargestellt, zerlegen wir  $\Delta$  in vier kongruente Teildreiecke und verifizieren die Formel

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_A} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_B} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_C} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_D} f(z) dz,$$

wobei sich die Beiträge über die inneren Kanten gerade aufheben, da jede dieser Kanten genau zweimal, aber jeweils mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen wird. Wir setzen nun  $\Delta_0 := \Delta$  und wählen  $\Delta_1$  aus  $\{\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D\}$  mit

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| = \max_{i \in \{A, B, C, D\}} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z) dz \right|$$

und erhalten

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq \sum_{i \in \{A, B, C, D\}} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|.$$

<sup>13</sup>Im Reellen ist der gleichmäßige Grenzwert einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen im Allgemeinen nicht differenzierbar. Ein Standardbeispiel sind die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \ln(\cosh(nx)),$$

die für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen die Betragsfunktion konvergieren.



Durch Iteration der Konstruktionsvorschrift  $\Delta_0 \rightsquigarrow \Delta_1$  können wir rekursiv eine Folge

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

von ineinander geschachtelten Dreiecken konstruieren. Für diese gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right|$$

sowie

$$\text{area}(\overline{\Delta}_n) = \frac{\text{area}(\overline{\Delta})}{4^n}, \quad \text{len}(\partial\Delta_n) = \frac{\text{len}(\partial\Delta)}{2^n},$$

wobei alle Dreiecke  $\Delta_n$  im elementargeometrischen Sinne zueinander ähnlich sind. Nach dem zweidimensionalen Analogon zum Intervallschachtelungsprinzip (auch Cantorsches Durchschnittsprinzip genannt) gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\Delta}_n = \{\zeta\},$$

für genau einen Punkt  $\zeta \in \overline{\Delta}$ , in dem wir nun die Differenzierbarkeit von  $f$  auswerten.

*Abschätzung des Integrals:* Aufgrund des weiter oben bewiesenen äquivalenten Kriteriums für komplexe Differenzierbarkeit ist die durch

$$g(\zeta) := 0, \quad g(z) := \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \quad \text{für } z \neq \zeta$$

definierte Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $z = \zeta$  stetig<sup>14</sup> und daher gilt insbesondere

$$\eta_n := \sup_{z \in \overline{\Delta}_n} |g(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Außerdem ergibt sich via

$$f(z) = f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + g(z)(z - \zeta)$$

die Formel

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz &= \left( f(\zeta) - \zeta f'(\zeta) \right) \int_{\partial\Delta_n} 1 dz + f'(\zeta) \int_{\partial\Delta_n} z dz + \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - \zeta) dz \\ &= 0 + 0 + \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - \zeta) dz, \end{aligned}$$

da sowohl 1 als auch  $z$  als Funktion in  $z$  eine Stammfunktion auf ganz  $\mathbb{C}$  besitzen (nämlich  $z$  und  $\frac{1}{2}z^2$ ) und daher die entsprechenden Kurvenintegrale verschwinden. Mit der Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale — und unter Verwendung der sehr groben Abschätzung  $|z - \zeta| \leq \text{len}(\partial\Delta_n)$  für alle  $z \in \overline{\Delta}_n$  — erhalten wir schließlich

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \text{len}(\partial\Delta_n) \sup_{z \in \partial\Delta_n} (|g(z)| |z - \zeta|) \leq \eta_n (\text{len}(\partial\Delta_n))^2$$

<sup>14</sup>Beachte auch, dass  $f$  als differenzierbare Funktion selbst stetig ist. Wir wissen aber nicht, ob  $f'$  stetig ist.

und damit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \eta_n (\text{len}(\partial\Delta_n))^2 = 4^n \eta_n \left( \frac{\text{len}(\partial\Delta)}{2^n} \right)^2 = \eta_n (\text{len}(\partial\Delta))^2$$

nach Einsetzen der obigen Formel. Die Behauptung folgt nun im Limes  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

### **Bemerkungen**

1. Das Lemma von Goursat liefert die erste Version des Cauchyschen Integralsatzes auf Dreiecksgebieten, wobei wir im Beweis wirklich nur die Existenz, aber nicht die Stetigkeit von  $f'$  benutzt haben. Durch analoge Zerlegungsargumente kann der Cauchysche Integralsatz übrigens auch auf Quadern oder anderen Polyedern hergeleitet werden.
2. Durch eine geeignete Approximation von Cauchy-Gebieten mit Dreiecken kann man zeigen, dass  $\int_{\partial G} f(z) dz$  für jede holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und alle elementaren Cauchy-Gebiete  $G \subset D$  gilt. Anschließend können wir — analog zum Beweis des lokalen Entwicklungssatzes — beweisen, dass die holomorphe Funktion  $f$  sogar unendlich oft differenzierbar ist und dass die verallgemeinerte Cauchy-Formel gilt. Alternativ können wir mittels Wegintegration die Existenz einer Stammfunktion auf allen hinreichend guten Mengen zeigen und dann den lokalen Entwicklungssatz auf diese Stammfunktion anwenden.

**Merkregel** Alle mathematischen Aussagen, die wir in diesem Kapitel für stetig differenzierbare Funktionen formuliert und bewiesen haben, gelten auch für holomorphe Funktionen.

## 2.4 Nullstellen holomorpher Funktionen

**Voraussetzung** In diesem Abschnitt ist  $D \subset \mathbb{C}$  offen sowie zusammenhängend und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph. Ein Punkt  $z_* \in D$  mit  $f(z_*) = 0$  wird wie üblich Nullstelle von  $f$  genannt.

**Theorem (Vielfachheit einer Nullstelle)** Die Vielfachheit  $k_*$  einer Nullstelle  $z_* \in D$  von  $f$  kann auf die folgenden, paarweise äquivalenten Weisen charakterisiert werden:

1. Die ersten  $k_*$  Ableitungen von  $f$  verschwinden in  $z_*$  im Sinne von

$$f^{(0)}(z_*) = 0, \quad f^{(1)}(z_*) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k_*-1)}(z_*) = 0$$

und  $f^{(k_*)}(z_*) \neq 0$ .<sup>15</sup>

2. Die ersten  $k_*$  Taylor-Koeffizienten von  $f$  verschwinden im Punkt  $z_*$ , d.h. in einer Kreisscheibe  $B_\rho(z_*)$  gilt

$$f(z) = \sum_{k=k_*}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} + \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*+1} + \dots$$

bzw.

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_{k_*-1} = 0$$

mit  $\alpha_{k_*} \neq 0$ .

3. Die Funktion  $g$  mit

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k_*}}$$

besitzt eine lokale Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt  $z_*$ , die einen von Null verschiedenen konstanten Anteil, aber keine negativen Potenzen von  $z - z_*$  enthält.

4. Die Funktion  $g$  ist auch im Punkt  $z_*$  im Sinne von

$$0 \neq g(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} g(z)$$

wohldefiniert, d.h. der Grenzwert auf der rechten Seite existiert und verschwindet nicht.

**Beweis** Alle behaupteten Äquivalenzen ergeben sich unmittelbar aus dem lokalen Entwicklungssatz, d.h. aus der Taylor-Reihendarstellung von  $f$  im Punkt  $z_*$ .  $\square$

<sup>15</sup>Die letzte Bedingung stellt sicher, dass es sich nicht um eine Nullstelle höherer Ordnung handelt.

**Bemerkungen**

- Wir schreiben auch

$$\text{ord}_f(z_*) := k_*$$

und nennen  $k_*$  die Ordnung von  $f$  in  $z_*$ . Ist  $z_* \in D$  keine Nullstelle von  $f$ , so setzen wir  $\text{ord}_f(z_*) := 0$  und die Aussagen des Theorems gelten dann mit  $k_* = 0$ .

- Die Formel  $g(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} g(z) = \alpha_{k_*}$  kann alternativ auch durch  $k_*$ -maliges Anwenden der Regel von l'Hospital begründet werden. Diese gilt auch im Komplexen, wobei die Herleitung ganz analog zum Reellen erfolgt.

**Beispiel** Die holomorphe Funktion

$$f(z) = \sin(z) - z + \frac{1}{6}z^3$$

besitzt in  $z_* = 0$  eine fünffache Nullstelle, d.h. es gilt  $\text{ord}_f(0) = 5$ . Dies können wir auf vier verschiedene, aber paarweise äquivalente, Arten begründen bzw. interpretieren:

- Es gilt

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

sowie  $f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$ , wobei wir dies zum Beispiel durch direkte Rechnungen verifizieren können.

- Aus der Reihenentwicklung des Sinus folgt unmittelbar

$$f(z) = \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots\right) - z + \frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots$$

und wir sehen, dass der erste nicht-verschwindende Taylor-Term den Exponenten 5 besitzt, wobei  $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$  der entsprechende Koeffizient ist.

- Die Laurent-Entwicklung von  $g(z) = f(z)/z^5$  im Entwicklungspunkt  $z_* = 0$  ist durch

$$g(z) = \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}z^2 + \frac{1}{9!}z^4 - \frac{1}{11!}z^6 + \dots$$

gegeben. Sie enthält keine negativen Potenzen, aber einen nicht verschwindenden konstanten Anteil, nämlich wieder  $\frac{1}{120}$ .

- Für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_n \rightarrow z_*$  gilt  $g(z_n) \rightarrow \frac{1}{120}$ , wobei wir dies bei Bedarf durch mehrfache Anwendung der Regel von l'Hospital (die auch im Komplexen gilt) ableiten können.

**Theorem (Identitätssatz, Version 1)** Die folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent:

- $f$  verschwindet identisch auf  $D$ ,
- $f$  besitzt eine Nullstelle der Ordnung  $\infty$ , d.h. es existiert  $z_* \in D$  mit  $f^{(k)}(z_*) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

## 3. die Nullstellenmenge

$$N_f := \{z \in D : f(z) = 0\},$$

besitzt einen Häufungspunkt  $z_*$  in  $D$ .<sup>16</sup>

**Beweis** Die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2) ist trivial und (2)  $\Rightarrow$  (3) gilt, weil  $N_f$  nach dem Struktursatz mindestens eine offene Kreisscheibe enthält.

(3)  $\Rightarrow$  (2): Wir betrachten eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N_f$ , sodass  $z_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen einen Punkt  $z_* \in D$  konvergiert. Aufgrund des Entwicklungssatzes gilt auf einer kleinen Kreisscheibe  $B_\varrho(z_*)$  die Taylor-Formel

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$$

mit den Koeffizienten  $\alpha_k = f^{(k)}(z_*)/k!$  und wir zeigen nun durch vollständige Induktion über  $K$ , dass die Aussage

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{K-1} = 0$$

für alle  $K \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Der Induktionsanfang mit  $K = 1$  ergibt sich via

$$\alpha_0 = f(z_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

aus der Stetigkeit von  $f$  und im Induktionsschritt  $K \rightsquigarrow K + 1$  argumentieren wir wie folgt: Die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - \alpha_K (z - z_*)^K}{(z - z_*)^{K+1}} = \alpha_{K+1} + \alpha_{K+2}(z - z_*) + \dots$$

ist nach Induktionsvoraussetzung auf ganz  $B_\varrho(z_*)$  wohldefiniert sowie stetig — siehe das vorherige Theorem für  $g(z_*)$  — und nach Konstruktion liegt  $z_n$  für alle hinreichend großen  $n$  in der Kreisscheibe  $B_\varrho(z_*)$ . Insbesondere gilt

$$0 = \frac{f(z_n)}{(z_n - z_*)^K} = \alpha_K + (z_n - z_*)g(z_n)$$

und der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert  $\alpha_K = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Der lokale Entwicklungssatz sowie das vorherige Theorem implizieren, dass die Menge

$$N_* = \{z_* \in D : f^{(k)}(z_*) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

offen ist, da sie mit jedem Punkt  $z_*$  auch eine kleine Kreisscheibe  $B_\varrho(z_*)$  enthält.<sup>17</sup> Andererseits ist  $N_*$  auch abgeschlossen unter punktwiser Konvergenz in  $D$ , da alle Ableitungen von  $f$  differenzierbar und damit auch stetig sind. Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $N_*$  sowohl offen als auch abgeschlossen bzgl. der Relativtopologie von  $D$  ist.<sup>18</sup> Da  $D$  zusammenhängend ist, folgt  $N_* = D$  oder  $N_* = \emptyset$ , aber der zweite Fall kann nach Voraussetzung nicht eintreten.  $\square$

<sup>16</sup>Ganz allgemein gilt:  $z_*$  heißt Häufungspunkt der Menge  $N$ , wenn es approximierenden Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N \setminus \{z_*\}$  gibt mit  $z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ . Beachte,  $z_*$  nicht unbedingt in  $N$ , aber immer im Abschluß  $\overline{N}$  sowie in  $D$  liegt, und dass hier immer  $z_n \neq z_*$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

<sup>17</sup>In der Tat, aus  $f^{(k)}(z_*) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt  $f(z) = 0$  für alle  $z \in B_\varrho(z_*)$  aus der lokalen Taylor-Reihendarstellung von  $f$ . Insbesondere verschwindet  $f$  auf der dieser Kreisscheibe und dasselbe gilt dann auch für alle Ableitungen von  $f$ . Wir haben  $z \in N_*$  für jedes  $z \in B_\varrho(z_*)$  bzw.  $B_\varrho(z_*) \subseteq N_*$  bewiesen.

<sup>18</sup>Siehe das Kapitel zu den metrischen und topologischen Grundbegriffen in *Analysis 2*.

**Theorem (Identitätssatz, Version 2)** Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere holomorphe Funktion, sodass die Menge

$$N_{f-g} = \{z \in D : f(z) = g(z)\} \subseteq \mathbb{C}$$

einen Häufungspunkt in  $D$  besitzt. Dann sind  $f$  und  $g$  identisch, d.h. es gilt  $N_{f-g} = D$ .

**Beweis** Wir wenden die erste Version auf die Differenz  $f - g$  an.  $\square$

### Bemerkungen

1. Der Identitätssatz impliziert, dass es — außer der trivialen Funktion mit  $f(z) = 0$  für alle  $z \in D$  — keine holomorphe Funktion gibt, die eine Nullstelle der Ordnung  $\infty$  besitzt bzw. für die in einem Entwicklungspunkt  $z_*$  alle Taylor-Koeffizienten verschwinden.
2. In der Literatur wird der Identitätssatz manchmal auf für zwei Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z - z_*)^k$$

mit demselben Entwicklungspunkt  $z_*$  formuliert:

Es gilt  $\alpha_k = \beta_k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  genau dann, wenn eine approximierende Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  existiert, sodass  $z_n \neq z_*$  und  $f(z_n) = g(z_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.

Hierbei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass  $f(z_n)$  und  $g(z_n)$  wohldefiniert sind, d.h. dass jeder Punkt  $z_n$  in der Konvergenzkreisscheibe von sowohl  $f$  als auch von  $g$  liegt.

**Lemma (nützliches Nullstellenkriterium)** Gilt  $\overline{B_\rho(\zeta)} \subset D$  sowie

$$|f(z_*)| < \min_{z \in S_\rho(z_*)} |f(z)|,$$

so besitzt  $f$  eine Nullstelle in  $B_\rho(z_*)$ .

**Beweis** Angenommen, die Behauptung ist falsch, d.h. es gilt  $|f(z)| > 0$  für alle  $z \in B_\rho(z_*)$ . Nach Voraussetzung gilt außerdem  $|f(z)| > 0$  für alle  $z \in S_\rho(z_*)$  und die Stetigkeit von  $f$  sowie die Kompaktheit von  $\overline{B_\rho(z_*)}$  implizieren zunächst

$$\min_{z \in \overline{B_\rho(z_*)}} |f(z)| > 0$$

und anschließend die Existenz einer offenen Menge  $U$ , so dass

$$\overline{B_\rho(z_*)} \subset U \subseteq D \quad \text{und} \quad f(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in U.$$

Insbesondere wird durch

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

eine holomorphe Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  definiert und das Maximumprinzip (angewendet auf  $g$  und  $U$ ) liefert

$$\frac{1}{|f(z_*)|} = |g(z_*)| \leq \max_{z \in S_\rho(z_*)} |g(z)| = \frac{1}{\min_{z \in S_\rho(z_*)} |f(z)|}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung und unsere Annahme muss daher falsch sein.  $\square$

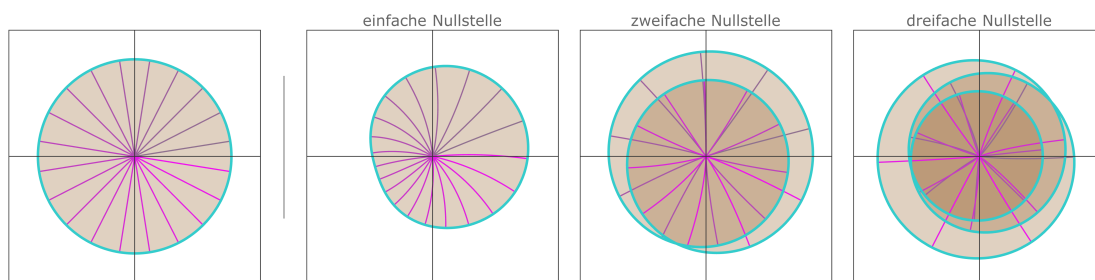
**Bemerkungen**

1. Im Englischen wird diese Aussage als *Minimal Modulus Principle* bezeichnet.
2. Der Beweis zeigt, dass das Lemma nicht nur auch auf Kreisscheiben, sondern sinngemäß auch auf anderen Mengen gilt, zum Beispiel auf jedem elementaren Cauchy-Gebiet  $G$ .

**über die Anzahl der Nullstellen** Ist  $G$  ein elementares Cauchy-Gebiet in  $D$ , so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\{z_* \in G : f(z_*)=0\}} \text{ord}_f(z_*),$$

sofern keine Nullstelle von  $f$  auf  $\partial G$  liegt. Insbesondere zählt das Kurvenintegral auf der linken Seite die Nullstellen von  $f$  in  $G$  unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit. Für Polynome hatten wir diese Formel (mit leicht anderer Notation auf der rechten Seite) schon mit Windungszahlen hergeleitet und für allgemeinere Funktionen  $f$  werden wir sie weiter unten mit einem anderen Argument begründen. Wir werden auch sehen, dass das nullstellenzählende Integral eigentlich eine Windungszahl im Bildraum von  $f$  ist. Siehe dazu das Bild.



**Abbildung** Drei typische Beispiele für das lokale Abbildungsverhalten einer holomorphen Funktion  $f$  mit  $f(0) = 0$ , wobei  $\text{ord}_f(0)$  die Werte 1, 2 bzw. 3 annimmt und jeweils dargestellt wird, wie eine kleine Kreisscheibe um 0 (ganz links) unter  $f$  deformiert wird. Die Vielfachheit der Nullstelle, also die Zahl  $\text{ord}_f(0)$ , gibt dabei gerade an, wie oft sich das Bild der Randkreislinie (türkis) im Bildraum um die 0 windet.

## 2.5 Isolierte Singularitäten und Polstellen

**Vorbemerkung** In Folgenden betrachten wir isolierte Lücken im Definitionsbereich  $D$  der holomorphen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und beweisen, dass  $f$  in der Nähe eines solchen Punktes in eine Laurent-Reihe entwickelt werden kann.

**Definition** Ein Punkt  $z_* \notin D$  wird isolierte Singularität von  $f$  genannt, sofern es einen Radius  $\varrho > 0$  gibt, so dass die punktierte Kreisscheibe  $A_{0,\varrho}(z_*) = B_\varrho(z_*) \setminus \{z_*\}$  ganz in  $D$  liegt. Oder anders gesagt: Die isolierten Singularitäten von  $f$  sind gerade die *Einpunktlöcher* in  $D$ .

### Beispiele

#### 1. Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

besitzt eine isolierte Singularität in  $z_* = 0$ . Für  $z \neq 0$  ergibt sich aber

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots}{z} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots$$

aus der Reihendarstellung des Sinus und wir können auf der rechten Seite problemlos  $z = 0$  setzen. Die Singularität von  $f$  in 0 ist in diesem Beispiel also harmlos und wir werden sie unten als hebbar klassifizieren. Man könnte auch von einer *nur scheinbaren* Polstelle reden, aber diese Sprechweise hat sich nicht durchgesetzt.

#### 2. Auch die Funktion

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$$

besitzt eine isolierte Singularität in  $z_* = 0$ . Für  $z \neq 0$  gilt die Reihendarstellung

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots}{z} = z^{-1} + 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots,$$

aber diesmal besitzt der führende Term einen negativen Exponenten und wir können nicht  $z = 0$  setzen. Es handelt sich bei diesem Beispiel um eine Polstelle, d.h. um eine *echte* Singularität.

#### 3. Die Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \dots + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-1} + 1$$

ist das Standardbeispiel für eine sogenannte wesentliche Singularität, da hier unendlich viele negative Potenzen von  $z$  auftreten bzw. berücksichtigt werden müssen.



**Lemma (Zerlegungs- und Darstellungssatz auf Kreisringen)** Seien  $z_* \in \mathbb{C}$  ein fixierter Punkt,  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$  zwei beliebige Radien und  $f : A_{r_1, r_2}(z_*) \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann existieren genau zwei holomorphe Funktionen

$$f_H : \mathbb{C} \setminus \overline{B}_{r_1}(z_*) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f_N : B_{r_2}(z_*) \rightarrow \mathbb{C},$$

sodass

$$f(z) = f_H(z) + f_N(z) \quad \text{für alle } z \in A_{r_1, r_2}(z_*)$$

sowie  $f_H(z) \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$  gilt. Außerdem kann  $f$  auf dem Kreisring  $A_{r_1, r_2}(z_*)$  via

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - m)^k$$

als Laurent-Reihe geschrieben werden, wobei die Koeffizienten für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und jeden Radius  $\varrho \in (r_1, r_2)$  durch

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(m)} \frac{f(z)}{(z - m)^{k+1}} dz$$

berechnet werden können.

**Beweis** O.B.d.A. nehmen wir  $z_* = 0$  an.

Existenz der Zerlegung: Für jedes  $\varrho \in (r_1, r_2)$  wird durch

$$f_\varrho(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varrho(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

eine Funktion  $f_\varrho : \mathbb{C} \setminus S_\varrho(0) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert und die Eigenschaften von Kurvenintegralen implizieren, dass  $f$  holomorph ist (Übungsaufgabe). Durch Fallunterscheidungen, geschickte Zerlegung oder Kombination von Integrationswegen sowie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen — siehe dazu das Bild — zeigen wir, dass die Hilfsformeln

$$f_{\varrho_2}(z) - f_{\varrho_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } r_1 < |z| < \varrho_1, \\ f(z) & \text{für } \varrho_1 < |z| < \varrho_2, \\ 0 & \text{für } \varrho_2 < |z| < r_2. \end{cases}$$

für alle  $r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$  und jedes  $z \in A_{r_1, r_2}(0)$  erfüllt sind. Wir setzen schließlich

$$f_H(z) := -f_\varrho(z) \quad \text{für } |z| > r_1 \quad \text{mit } r_1 < \varrho < |z|$$

sowie

$$f_N(z) := +f_\varrho(z) \quad \text{für } |z| < r_2 \quad \text{mit } |z| < \varrho < r_2,$$

wobei die Hilfsformeln — ausgewertet für Radien  $\varrho_1, \varrho_2$  mit  $r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < |z|$  bzw.  $|z| < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$  — sicherstellen, dass der Wert von  $f_H(\zeta)$  bzw.  $f_N(\zeta)$  nicht von der konkreten Wahl des Radius  $\varrho$  abhängt. Die so definierten Funktionen  $f_H$  und  $f_N$  sind holomorph auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich und auf dem Kreisring  $A_{r_1, r_1}(0)$

liefern sie zusammen für jedes  $z$  mit  $r_1 < |z| < r_2$  eine additive Zerlegung von  $f(z)$ . Außerdem folgt

$$|f_{\mathbb{H}}(z)| \leq 2\pi \varrho \sup_{\zeta \in S_{\varrho}(0)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \leq \frac{C_{\varrho}}{|\zeta - z|} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

aus der Standardabschätzung.

Eindeutigkeit der Zerlegung: Seien  $\tilde{f}_{\mathbb{H}}$  und  $\tilde{f}_{\mathbb{N}}$  zwei weitere Funktionen mit den in der Behauptung geforderten Eigenschaften. Dann wird durch

$$h(z) := f_{\mathbb{H}}(z) - \tilde{f}_{\mathbb{H}}(z) \quad \text{für } |z| > r_1, \quad h(z) := \tilde{f}_{\mathbb{N}}(z) - f_{\mathbb{N}}(z) \quad \text{für } |z| < r_2$$

wegen

$$f_{\mathbb{H}}(z) - \tilde{f}_{\mathbb{H}}(z) = \tilde{f}_{\mathbb{N}}(z) - f_{\mathbb{N}}(z) \quad \text{für } r_1 < |z| < r_2$$

in sinnvoller Weise eine Funktion  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert. Diese ist nach Konstruktion holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  und außerdem beschränkt wegen  $h(z) \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Der Satz von Liouville impliziert, dass  $h$  konstant ist, aber als Konstante kommt nur der Wert 0 in Frage.

Reihendarstellung: Die Funktion  $f_{\mathbb{N}}$  ist holomorph auf der offenen Kreisscheibe  $B_{r_2}(0)$  und kann dort nach dem lokalen Entwicklungssatz als Taylor-Reihe geschrieben werden, d.h. es gilt

$$f_{\mathbb{N}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{\mathbb{N}}^{(m)}(0)}{m!} z^m \quad \text{für alle } |z| < r_2.$$

Wir definieren eine Funktion  $g_{\mathbb{H}}$  durch

$$g_{\mathbb{H}}(z) := \begin{cases} f_{\mathbb{H}}(1/z) & \text{für } 0 < |z| < 1/r_1, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

die nach Konstruktion holomorph auf der punktierten Kreisscheibe  $B_{1/r_1}(0) \setminus \{0\}$  ist. Außerdem gilt

$$\frac{g_{\mathbb{H}}(z) - h_{\mathbb{H}}(0)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}(0)} \frac{f(\zeta)}{1 - z\zeta} d\zeta \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}(0)} f(\zeta) d\zeta$$

und wir schließen, dass  $g_{\mathbb{H}}$  holomorph auf der ganzen Kreisscheibe  $B_{1/r_1}(0)$  ist und daher nach dem lokalen Entwicklungssatz via

$$g_{\mathbb{H}}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{\mathbb{H}}^{(m)}(0)}{m!} z^m \quad \text{für alle } |z| < 1/r_1$$

als absolut konvergente Taylor-Reihe dargestellt werden kann. Insbesondere gilt

$$f_{\mathbb{H}}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{\mathbb{H}}^{(m)}(0)}{m!} z^{-m} \quad \text{für alle } |z| > r_1$$

und wir haben insgesamt gezeigt, dass  $f = f_{\mathbb{H}} + f_{\mathbb{N}}$  in jedem Punkt  $z$  mit  $r_1 < |z| < r_2$  eine absolut konvergente Laurent-Reihendarstellung besitzt, wobei die Koeffizienten zunächst abstrakt via

$$\alpha_k = \frac{g_{\mathbb{H}}^{(m)}(0)}{m!} \quad \text{falls } k = -m < 0, \quad \alpha_k = \frac{f_{\mathbb{N}}^{(m)}(0)}{m!} \quad \text{falls } k = +m \geq 0$$

in Form von Ableitungen gegeben sind.

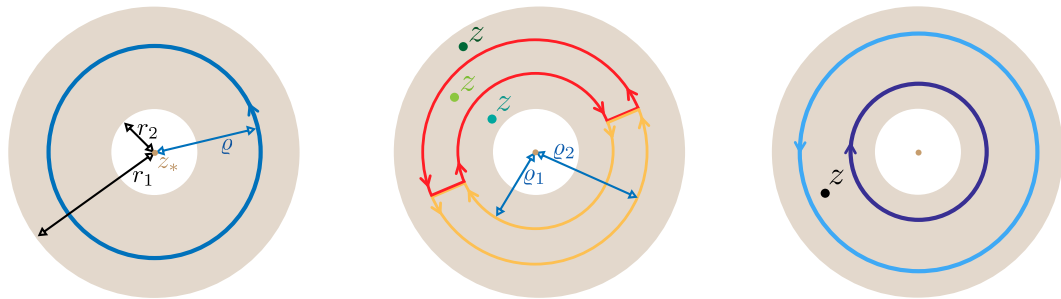
Integralformel: Wir fixieren  $\varrho \in (r_1, r_2)$  sowie  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig und schreiben

$$z^{-k-1} f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m z^{m-k-1}$$

für jedes  $z \in S_\varrho(0)$ . Dies liefert

$$\int_{S_\varrho(0)} z^{-k-1} f(z) dz = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \int_{S_\varrho(0)} z^{m-k-1} dz = 2\pi i \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \delta_m^k = 2\pi i \alpha_k,$$

wobei  $\delta_m^k$  das Kronecker-Delta<sup>19</sup> ist und wir benutzt haben, dass die Laurent-Reihe lokal gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von  $A_{r_1, r_2}(0)$  konvergiert und wir daher die Integration bzgl.  $z$  und die Summation bzgl.  $m$  miteinander vertauschen dürfen.  $\square$



**Abbildung** *Links*: Der Kreisring (braun) im Lemma sowie eine Kreislinie  $S_\varrho(z_*)$  (blau), mit der die Hilfsfunktion  $f_\varrho$  in Abhängigkeit des Parameters  $\varrho$  im Beweis eingeführt wird. *Mitte*: Bei der Herleitung der Hilfsformeln betrachten wir in Abhängigkeit von  $z$  (grün) die Ränder von zwei halben Kreisringen (orange und rot) und werten dort jeweils den Integralsatz von Cauchy aus. *Rechts*: Für jeden Punkt  $z$  im Kreisring (schwarz) wird der Wert  $f_H(z)$  bzw.  $f_N(z)$  durch ein Kurvenintegral entlang einer geeignet gewählten Kreislinie (dunkel- bzw. hellblau) eingeführt, wobei die unterschiedliche Orientierung die getroffene Vorzeichenwahl widerspiegelt.

### Bemerkungen

1. Die Funktionen  $f_H$  und  $f_N$  werden der Hauptteil bzw. der Nebenteil von  $f$  genannt, wobei dies konsistent mit der entsprechenden Namensgebung für Laurent-Reihen ist.
2. Die Integralformel im Theorem ist wieder die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel, die aber diesmal nicht nur für positive, sondern auch für negative Exponenten  $k$  ausgewertet wird. Beachte auch, dass der Radius  $\varrho$  beliebig im Intervall  $(r_1, r_2)$  gewählt werden kann.
3. Der Beweis des Lemma impliziert indirekt, dass der gegebene Kreisring mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  mindestens so groß ist, wie der Konvergenzkring der Laurent-Reihe, wobei dessen Radien mittels der Cauchy-Hadamard-Formel durch die Koeffizienten  $\alpha_k$  festgelegt sind. Sollte der Konvergenzkring sogar größer sein, so kann  $f$  holomorph fortgesetzt werden.

<sup>19</sup>Es gilt  $\delta_m^k = 1$  für  $m = k$  und  $\delta_m^k = 0$  für  $m \neq k$ .

**Korollar (lokaler Entwicklungssatz für isolierte Singularitäten)** Ist  $z_*$  eine isolierte Singularität von  $f$ , so kann  $f$  auf jeder in  $z_*$  punktierten offenen Kreisscheibe, die ganz in  $D$  liegt, in eine Laurent-Reihe entwickelt werden. Die entsprechenden Koeffizienten können mittels der verallgemeinerten Cauchy-Formel entlang jeder Kreislinie berechnet werden, die ganz in  $D$  liegt.

**Beweis** Die Behauptung ergibt sich direkt aus dem vorherigen Lemma, sofern dieses mit  $r_1 = 0$  ausgewertet wird.  $\square$

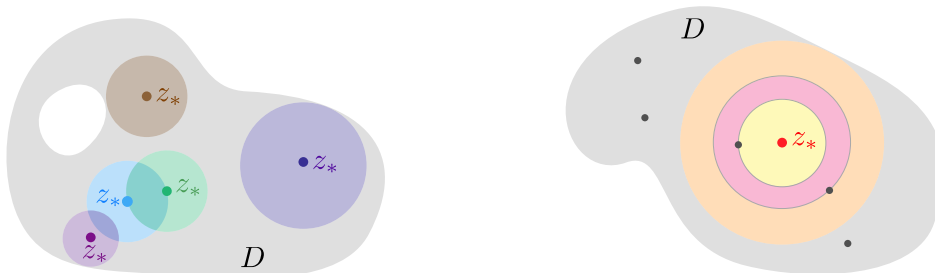
### Bemerkungen

1. Mit einem Deformationsargument können wir wieder die allgemeinere Variante

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} dz$$

der Cauchy-Formel herleiten, wobei  $G$  ein elementares Cauchy-Gebiet ist, sodass  $G \setminus \{z_*\}$  sowie  $\partial G$  ganz in  $D$  enthalten sind. Wir können anstelle von Kreislinien also zum Beispiel auch Rechteckswege benutzen.

2. Es gibt auch einen Identitätssatz für Laurent-Reihen. Insbesondere stimmen zwei holomorphe Funktionen, die auf demselben Kreisring gegeben sind, genau dann überein, wenn sie dieselben Koeffizienten besitzen.
3. Das Lemma kann nicht nur auf punktierte Kreisscheiben, sondern auch auf andere Kreisringe mit dem Mittelpunkt  $z_*$  angewendet werden, wobei dann die Laurent-Koeffizienten anders sein werden. Siehe dazu das rechte Bild sowie die Diskussion weiter unten zu multiplen Reihendarstellungen.



**Abbildung** Links: Für jede isolierte Singularität  $z_*$  (farbige Punkte) existiert eine entsprechende lokale Laurent-Reihendarstellung von  $f$  und diese konvergiert auf der größten punktierten Kreisscheibe  $A_{0,\varrho}(z_*)$ , die noch ganz in  $D$  liegt. Insbesondere wird der maximale Radius  $\varrho$  durch den Rand von  $D$  und die Lage der anderen Singularitäten bestimmt. Die Cauchy-Formel für die Koeffizienten werten wir jedoch mit einem beliebigen, aber nichtmaximalen Radius aus damit  $S_\varrho(z_*)$  ganz in  $D$  liegt. Rechts: Zu einem festen Entwicklungspunkt  $z_*$  (rot) kann es mehrere Laurent-Reihen mit verschiedenen Koeffizienten geben. Die entsprechenden maximalen Kreisringe (gelb, rosa, orange) sind dann disjunkt und werden durch andere isolierte Singularitäten (schwarz) getrennt.

**Klassifikation und Ordnung** Ist  $z_*$  eine isolierte Singularität von  $f$  und

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$$

die lokale Laurent-Reihe auf der punktierten Kreisscheibe  $B_\varrho(z_*) \setminus \{z_*\}$ , wo wird

$$\text{ord}_f(z_*) = \inf \{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\}$$

die Ordnung von  $z_*$  genannt.

1. Im Fall von  $\text{ord}_f(z_*) = -\infty$  gibt es unendlich viele, jeweils nicht verschwindende Koeffizienten  $\alpha_k$  zu negativen Exponenten und  $z_*$  wird wesentliche Singularität genannt.
2. Bei einer Polstelle gilt  $-\infty < \text{ord}_f(z_*) < 0$  und die entsprechende Laurent-Reihe enthält nur endlich viele, aber mindestens einen nicht-trivialen Term mit negativem Exponent  $k$ . Bei  $\text{ord}_f(z_*) = -1$  bzw.  $\text{ord}_f(z_*) = -2$  sprechen wir auch von einer einfachen bzw. zweifachen Polstelle.
3. Im Fall von  $\text{ord}_f(z_*) \geq 0$  heißt  $z_*$  hebbare Singularität. Siehe dazu auch die Kommentare unten.

Die Ordnung einer isolierten Singularität liefert also – analog zur Ordnung von Nullstellen – die *führende Potenz* in der lokalen Reihendarstellung von  $f$ . Prototypische Beispiele hatten wir bereits oben diskutiert.

**über hebbare Singularitäten** Ist  $z_*$  eine hebbare Singularität von  $f$ , so ist die Laurent-Reihe eigentlich eine Taylor-Reihe und  $f$  kann mittels der Grenzwertformeln

$$f(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} f(z) = \alpha_0, \quad f'(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} f'(z) = \alpha_1, \quad \dots$$

als holomorphe Funktion im Punkt  $z_*$  angesehen werden, wobei  $k_* = \text{ord}_f(z_*)$  gerade die entsprechende Ordnung ist. Insbesondere ist  $z_*$  im Fall von  $k_* > 0$  eigentlich eine  $k_*$ -fache Nullstelle von  $f$ .

**Beispiel** Definieren wir die Funktion  $f$  durch die Formel

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z},$$

so besitzt  $f$  in 0 eine isolierte Singularität im Ursprung, da sowohl der Zähler als auch der Nenner für  $z = 0$  verschwinden und  $0/0$  auch im Komplexen nicht definiert ist. Es handelt sich aber um eine hebbare (oder *scheinbare*) Singularität, denn die Reihenentwicklung des Kosinus impliziert die Taylor-Darstellung

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{720} z^6 + \dots\right)}{z} = \frac{1}{2} z - \frac{1}{24} z^3 + \dots$$

und damit  $\text{ord}_f(0) = +1$ . Insbesondere ist 0 eigentlich eine einfache Nullstelle von  $f$ .

**Merkregel** Hebbare Singularitäten können „wegdiskutiert“ werden. Für Polstellen gilt dies jedoch nicht.

**Zusammenfassung** Isolierte Singularitäten von  $f$  können analog zu Nullstellen und anderen Punkten des Definitionsbereichs behandelt werden. Insbesondere gibt es zu jedem Punkt  $z_*$  immer eine lokale Reihendarstellung, wobei die Ordnung von  $f$  in  $z_*$  angibt, ob es sich dabei um eine Taylor-Reihe auf einer Kreisscheibe oder um eine Laurent-Reihe auf einer punktierten Kreisscheibe handelt.

**Klarstellung** Es kann auch nicht-isolierte Singularitäten geben, zum Beispiel die Punkte im Schlitz beim Hauptwert des komplexen Logarithmus. Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe solcher Punkte kann deutlich komplizierter sein und wird in unserer Vorlesung nicht untersucht werden. Die wesentlichen Singularitäten werden uns auch nicht weiter interessieren.

**Ordnung und Quotienten** Gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

für zwei holomorphe Funktionen  $g$  und  $h$  auf  $U$ , so können wir

$$\text{ord}_f(z_*) = \text{ord}_g(z_*) - \text{ord}_h(z_*)$$

für jedes  $z_* \in U$  mit lokalen Reihendarstellungen zeigen (siehe die Übungen). Diese Formel ist besonders nützlich, wenn  $z_*$  eine gemeinsame Nullstelle von  $g$  und  $h$  ist. Sie besagt dann, dass eine  $m_*$ -fache Nullstelle dividiert durch eine  $n_*$ -fache Nullstelle für  $m_* > n_*$  eine Nullstelle, bei  $m_* < n_*$  aber eine Polstelle ergibt.

**multiple Reihendarstellungen mit gleichem Entwicklungspunkt\***

**Vorbemerkung** Wir hatten oben schon angedeutet, dass es für eine gegebene holomorphe Funktion  $f$  und einen fixierten Entwicklungspunkt  $z_*$  mehrere Laurent-Reihendarstellungen geben kann, wobei diese aber disjunkte Konvergenzkreisinge aufweisen (siehe die Bilder). Wir wollen dieses Phänomen nun einem Beispiel genauer studieren.

**Beispiel** Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

die die zwei Polstellen 1 und 2 besitzt und holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$  ist.

1.  $f$  besitzt Laurent-Reihendarstellungen auf den punktierten Kreisscheiben  $A_{0,1}(1)$  und  $A_{0,1}(2)$ , wobei die jeweils andere Polstelle auf dem Rand liegt. Wir können die entsprechenden Laurent-Koeffizienten mithilfe von Kurvenintegralen berechnen, aber in diesem Beispiel ist es einfacher, wieder den *Trick mit der geometrischen Reihe* anzuwenden. Aus

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k$$

bzw.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(-1)(z-2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k$$

ergibt sich

$$\underline{0 < |z-1| < 1} : f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^{k-1} = -(z-1)^{-1} - 1 - (z-1) - \dots$$

bzw.

$$\underline{0 < |z-2| < 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^{k-1} = (z-2)^{-1} - 1 + (z-2) - \dots$$

Damit haben wir die lokalen Laurent-Entwicklungen identifiziert und können mit der Quotientenversion der Hadarmard-Formel auch leicht nachprüfen, dass  $A_{0,1}(1)$  bzw.  $A_{0,1}(2)$  wirklich der entsprechende Konvergenzkreising ist.

2.  $f$  besitzt aber auch Laurent-Entwicklungen auf den Kreisingen  $A_{1,\infty}(1)$  bzw.  $A_{1,\infty}(2)$ . Die entsprechenden Koeffizienten erfüllen die Gleichung

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_2(1)} \frac{f(z)}{(z-1)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_2(1)} \frac{dz}{(z-1)^{k+2}(z-2)}$$

bzw.

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_2(2)} \frac{f(z)}{(z-2)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_2(2)} \frac{dz}{(z-1)(z-2)^{k+2}},$$

wobei wir den Integrationsweg so gewählt haben, dass er ganz in  $A_{1,\infty}(1)$  bzw.  $A_{1,\infty}(2)$  liegt. Wir werden aber erst weiter unten sehen, wie man diese Integrale elegant berechnen kann. Im Moment wollen wir nochmal den *Trick mit der geometrischen Reihe*, aber diesmal leicht abgewandelt, verwenden. Es gilt nämlich auch

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1} \right)^k$$

bzw.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1 - \frac{-1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{z-2} \right)^k$$

und damit auch

$$\underline{|z-1| > 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^{-k-2} = \dots + (z-1)^{-3} + (z-1)^{-2}$$

bzw.

$$\underline{|z-2| > 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^{-k-2} = \dots - (z-2)^{-3} + (z-2)^{-2}.$$

Insgesamt haben wir damit jeweils eine zweite Laurent-Entwicklung für  $f$  im Entwicklungspunkt 1 bzw. 2 gefunden. Beachte aber, dass die geometrische Hilfsreihe diesmal nur für  $1/|z-1| < 1$  bzw.  $1/|z-2| < 1$  konvergiert, d.h. die zweite Laurent-Reihe für  $f$  konvergiert wirklich nur auf  $A_{1,\infty}(1)$  bzw.  $A_{1,\infty}(2)$ .

3. Im Entwicklungspunkt 0 besitzt  $f$  sogar drei Reihendarstellungen, nämlich auf den Kreisingen  $A_{0,1}(0)$ ,  $A_{1,2}(0)$  und  $A_{2,\infty}(0)$ , wobei die erste die Taylor-Reihe von  $f$  im Punkt 0 ist. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

sowie den vier Trick-Anwendungen

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z} \right)^k$$

und

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^k, \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

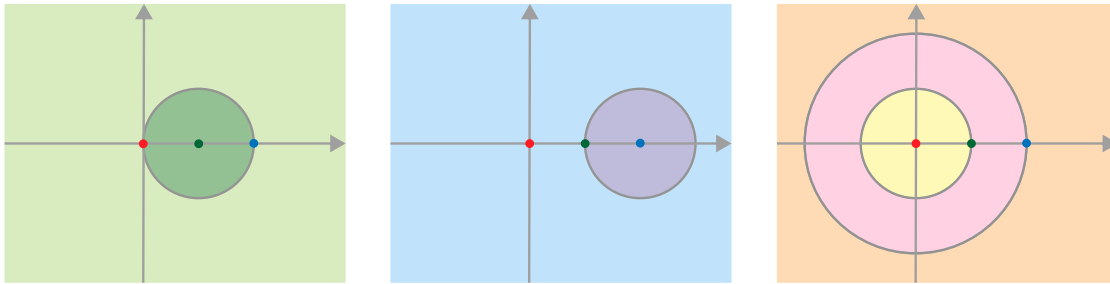
ergeben sich insgesamt die drei gesuchten Darstellungsformeln:

$$\underline{0 \leq |z| < 1} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) z^k = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \dots$$

$$\underline{1 < |z| < 2} : f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^k = \dots - z^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \dots$$

$$\underline{2 < |z|} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 1) z^{-k-1} = \dots + 7z^{-3} + 3z^{-2} + 1z^{-1}$$

Beachte, dass die Konvergenzbereiche dieser Reihen wieder konsistent mit den theoretischen Vorhersagen sowie den Konvergenzbedingungen für die vier benutzten Hilfsreihen sind.



**Abbildung** Die offenen Konvergenzgebiete (Kreisscheiben oder Kreisringe) der insgesamt sieben verschiedenen Laurent-Reihendarstellungen aus dem Beispiel, wobei die Punkte 1 (grün) und 2 (blau) die Polstellen von  $f$  sind, beide die Ordnung  $-1$  besitzen und die Größe aller Konvergenzgebiete festlegen. Im Ursprung (rot) ist  $f$  holomorph, sodass die Reihe auf der gelben Kreisscheibe eine Taylor-Reihe ist.



## 2.6 Residuensatz

**Definition** Ist  $z_*$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , so wird

$$\operatorname{res}_f(z_*) := \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\rho(z_*)} f(z) dz$$

das Residuum von  $f$  in  $z_*$  genannt.

### Bemerkungen

1. Es gelten die Notationen aus dem lokalen Entwicklungssatz für Singularitäten. Insbesondere ist es für das Gleichheitszeichen wichtig, dass  $f$  holomorph auf der punktierten Kreisscheibe  $A_{0,\rho}(z_*)$  ist und dass diese mit ihrem Außenrand  $S_\rho(z_*)$  ganz in  $D$  liegt. Insbesondere darf es in  $A_{0,\rho}(z_*)$  neben  $z_*$  keine weitere isolierte Singularität von  $f$  geben.
2. Der Wert von  $\operatorname{res}_f(z_*)$  hängt nicht von der Wahl des Radius  $\rho$  ab, solange dieser so klein ist, dass die eben diskutierten geometrischen Bedingungen erfüllt sind.
3. Ist  $z_* \in D$  ein Punkt des Definitionsbereichs von  $f$ , so setzen wir  $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$ . Die angegebene Doppelformel gilt dann weiterhin wegen des Integralsatzes von Cauchy und weil  $f$  in diesem Fall auf  $B_\rho(0)$  als Taylor-Reihe geschrieben werden kann.
4. Ist  $z_*$  eine hebbare Singularität, so gilt auch immer  $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$ . Ist  $z_*$  jedoch Polstelle oder wesentliche Singularität, so kann  $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$  oder  $\operatorname{res}_f(z_*) \neq 0$  gelten.

### Beispiele

1. Für das verallgemeinerte Monom  $f(z) = (z - z_*)^m$  gilt

$$\operatorname{res}_f(z_*) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = -1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. auch hier manifestiert sich wieder die Sonderrolle des Exponenten  $-1$ .

2. Aus der Reihendarstellung des Kosinus ergibt sich

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^5} = \frac{1}{z^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = -\frac{1}{2} z^{-3} + \frac{1}{24} z^{-1} - \frac{1}{720} z^{+1} + \dots$$

und damit

$$\operatorname{res}_f(0) = \frac{1}{24}.$$

In allen anderen Punkten  $z_* \in \mathbb{C}$  ist  $f$  holomorph und daher gilt  $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$ .

## 3. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}$$

besitzt die beiden Polstellen  $z_* = 1$  und  $z_* = i$ , für die wir die entsprechenden Residuen zum Beispiel mit den weiter unten diskutierten Methoden ermitteln können. Hier wollen wir aber nochmal den *Trick mit der geometrischen Reihe* verwenden, um zunächst die jeweiligen Laurent-Reihenentwicklungen vollständig anzugeben. Dazu berechnen wir

$$f(z) = \frac{\mu}{z-1} \frac{1}{1+\mu(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^{k+1} (z-1)^{k-1}$$

und

$$f(z) = -\frac{\mu}{z-i} \frac{1}{1-\mu(z-i)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k+1} (z-i)^{k-1},$$

wobei  $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  gilt, und erhalten

$$\operatorname{res}_f(1) = +\mu, \quad \operatorname{res}_f(i) = -\mu$$

durch Auswertung der Reihenglieder für  $k = 0$ , da dieser Index hier jeweils der Potenz  $(z - z_*)^{-1}$  entspricht.

**Voraussetzungen** Wir betrachten im Folgenden

1. eine offene und zusammenhängende Menge  $U$ ,
2. endlich viele und paarweise verschiedene Punkte  $z_1, \dots, z_N$  in  $U$ ,
3. eine Funktion  $f$ , die holomorph in  $D := U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$  ist und in jedem  $z_n$  eine isolierte Singularität besitzt.

**Bemerkungen**

1. Prototypische Beispiele sind rationale Funktionen der Bauart

$$f(z) = \frac{g(z)}{q(z)},$$

wobei  $g$  holomorph auf  $U$  ist und  $q$  ein Polynom bezeichnet, dessen Nullstellen gerade die Punkte  $z_n$  sind.

2. Es gibt einen wichtigen Unterschied zwischen  $D$  und  $U$ : Die Punkte  $z_n$  sind Einpunktlöcher von  $D$ , aber sie gehören zu  $U$ .
3. Gilt  $\operatorname{ord}_f(z_n) \neq -\infty$  für alle  $n = 1 \dots N$ , so ist jeder Punkt  $z_n$  entweder Polstelle oder hebbare Singularität von  $f$ . In diesem Fall wird  $f$  oft auch meromorph auf  $U$  genannt.
4. Wir könnten in unseren Betrachtungen auch unendlich viele Punkte  $z_n$  zulassen, sofern es für diese keinen Häufungspunkt in  $U$  gibt.

**Theorem (Residuensatz, Version 1)** Ist  $G \subset U$  ein elementares Cauchy-Gebiet in  $U$ , so gilt

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_n \in G} \operatorname{res}_f(z_n),$$

sofern  $\partial G$  ganz in  $U$  liegt und keinen der Punkte  $z_n$  enthält. Hierbei werden auf der rechten Seite nur die Residuen der isolierten Singularitäten  $z_1, \dots, z_N$  gezählt, die im Inneren von  $G$  liegen.

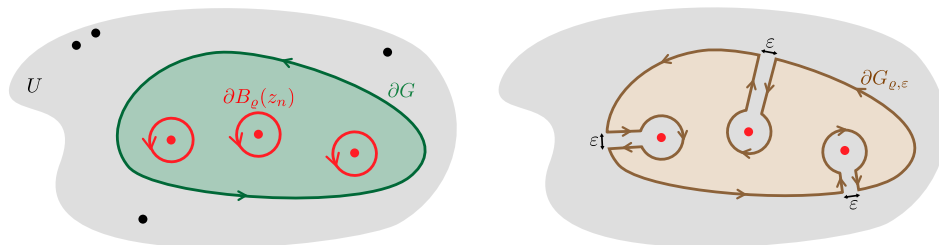
**Beweis** Wir wählen einen Radius  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, sodass die punktierten Kreisscheiben  $B_\varepsilon(z_n) \setminus \{z_n\}$  sowie die Kreislinien  $S_\varepsilon(z_n)$  jeweils vollständig in  $D$  liegen und betrachten das im Bild dargestellte Cauchy-Gebiet  $G_{\varrho, \varepsilon}$ , auf dem  $f$  holomorph ist. Dann gilt einerseits

$$0 = \int_{\partial G_{\varrho, \varepsilon}} f(z) dz$$

nach dem Integralsatz von Cauchy. Andererseits impliziert unsere Konstruktion sowie die Stetigkeit von  $f$  die Approximationsaussage

$$\int_{\partial G_{\varrho, \varepsilon}} f(z) dz = \int_{\partial G} f(z) dz - \sum_{z_n \in G} \int_{S_\varepsilon(z_n)} f(z) dz + o(1),$$

wobei  $o(1)$  einen Fehlerterm bezeichnet, der beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwindet. Die Behauptung folgt nun unmittelbar wegen  $\int_{S_\varepsilon(z_n)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(z_n)$ .  $\square$



**Abbildung** Schematische Darstellung der ersten Version des Residuensatzes. Bei der Integration von  $f$  über den Rand von  $G$  (grün) sind die Singularitäten im Inneren von  $G$  (rot), aber nicht die anderen (schwarz), relevant und das Integral über  $\partial G$  kann durch eine Summe von Residuen, d.h. von Integralen über hinreichend kleine Kreislinien (rot) ersetzt werden. Im Beweis wird eine Variante des Deformationslemmas verwendet.

### Bemerkungen

1. Der Residuensatz ist einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie und spielt auch in den Anwendungswissenschaften eine sehr große Rolle. Er erlaubt es zum Beispiel, komplizierte Integrale im Reellen oder Komplexen relativ einfach auszurechnen. Wir werden das im nächsten Abschnitt genauer studieren.
2. Beachte, dass bei uns der Rand von  $\partial G$  mit positiver Orientierung parametrisiert wird. Wird  $\partial G$  jedoch im Uhrzeigersinn durchlaufen, so gilt eine Variante des Residuensatzes mit geänderten Vorzeichen (entweder auf der linken oder der rechten Seite der Formel).

**Beispiel** Wir betrachten noch einmal die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)},$$

für die bereits oben die Residuen in den beiden Polstellen 1 und  $i$  bestimmt hatten. Die Formeln

$$\int_{S_{1/2}(0)} f(z) dz = 0, \quad \int_{S_2(i)} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_f(1) + \operatorname{res}_f(i)) = 0$$

sowie

$$\int_{S_{3/2}(2)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_f(1) = -\pi + i\pi$$

ergeben sich nun unmittelbar aus dem Residuensatz.

**Verbindung zu den anderen Integralsätzen** Der Residuensatz gilt auch in jedem Punkt  $z_* \in D$  des Definitionsbereiches  $D$ , wobei dann  $\operatorname{res}_f(z_*) = 0$  gilt und wir gerade den Satz von Cauchy erhalten. In einem solchen Punkt kann der Residuensatz für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  außerdem für die Funktion

$$g_k(z) = \frac{f(z)}{(z-z_*)^{k+1}}$$

ausgewendet werden und liefert gerade die verallgemeinerte-Cauchy-Formel für  $f$  mit Parameter  $k$ . In der Tat, mit  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m (z-z_*)^m$  erhalten wir

$$g_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m (z-z_*)^{m-k-1} = \alpha_0 z^{-k-1} + \alpha_1 z^{-k} + \dots + \alpha_k z^{-1} + \alpha_{k+1} z^0 + \dots$$

und damit

$$\operatorname{res}_{g_k}(z_*) = \alpha_k = \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!}.$$

Analog kann in jeder isolierten Singularität  $z_* = z_n$  von  $f$  dargumentiert werden, wobei dann die Taylor-Reihe von  $f$  durch eine entsprechende Laurent-Reihe zu ersetzen ist.

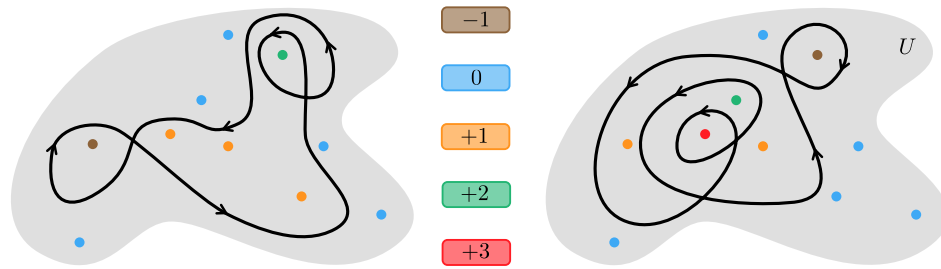
Zusammenfassung: Der Residuensatz enthält alle bisher abgeleiteten Integralformeln als Spezialfall.

**Theorem (Residuensatz, Version 2)** Ist  $U$  einfach zusammenhängend, so gilt

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{wnd}_c(z_n) \operatorname{res}_f(z_n)$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg  $c$  in  $U$ , sofern dieser durch keinen der Punkte  $z_n$  läuft.

**Beweisidee** Durch sukzessives Aufspalten in Doppelpunkten kann die allgemeinere Fassung auf die erste Version zurückgeführt werden.  $\square$



**Abbildung** In der zweiten Version des Residuensatzes ist ein beliebiger geschlossener Integrationsweg  $c$  (schwarze Kurve links bzw. rechts) zugelassen, sofern dieser durch keine Singularität läuft. Der Beitrag jeder isolierten Singularität (farbige Punkte) ist das Produkt ihrer Windungszahl bzgl.  $c$  (die verschiedenen Farben) und ihrem Residuum bzgl.  $f$ .

**Beispiel** Wir betrachten  $f(z) = 1/z$  mit  $U = \mathbb{C}$  und  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sowie die zwei Integrationswege

$$c_{\pm}(t) = \exp(\mathbf{i} n t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ , die beide den Ursprung genau  $n$  mal, aber eben mit unterschiedlicher Orientierung, umlaufen. In diesem einfachen Beispiel gibt es nur die Singularität bei  $z_1 = 0$  und wir haben bereits alles ausgerechnet. Insbesondere gilt

$$\operatorname{res}_f(0) = 1, \quad \operatorname{wnd}_{c_{\pm}}(0) = \pm n, \quad \int_{c_{\pm}} f(z) dz = \pm 2\pi \mathbf{i} n,$$

und wir sehen, dass im Allgemeinen das Kurvenintegral von  $f$  nicht nur von Residuen (Eigenschaften der Funktion), sondern auch von Windungszahlen (Eigenschaften des Integrationsweges) abhängt. In der ersten Version des Residuensatzes gilt immer  $\operatorname{wnd}_{\partial G}(z_n) = +1$  (im Fall von  $z_n \in G$ ) oder  $\operatorname{wnd}_{\partial G}(z_n) = 0$  (für  $z_n \notin G$ ).

**Bemerkung** In der zweiten Version des Residuensatzes ist es sehr wichtig, dass  $U$  selbst keine Löcher besitzt, denn andernfalls kann die Formel falsch sein. Ein einfaches Gegenbeispiel ist  $U = D = A_{1,3}(0)$  mit  $f(z) = 1/z$  und  $c$  als Standardparametrisierung von  $S_2(0)$ . In diesem Fall ist  $f$  holomorph auf  $U$  und die rechte Seite der Residuenformel verschwindet (eine Summe von  $N = 0$  Summanden ist selbst 0), aber die linke Seite liefert den Wert  $2\pi \mathbf{i}$ . In der ersten Version des Satzes wird dieses Gegenbeispiel durch die Forderung ausgeschlossen, dass das elementare Cauchy-Gebiet  $G$  ganz in  $U$  liegen muss.

**Berechnung von Residuen** Ist eine lokale Laurent-Reihendarstellung auf einer punktierten Kreisscheibe um  $z_*$  bekannt, so kann das Residuum einfach abgelesen werden, nämlich als der Koeffizient vor  $(z - z_*)^{-1}$ . Darüber hinaus gibt es die folgenden, aber letztlich äquivalenten Möglichkeiten:

**als Grenzwert** Ist  $z_*$  eine einfache Polstelle von  $f$  (d.h.  $\operatorname{ord}_f(z_*) = -1$ ), so gilt

$$\operatorname{res}_f(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) f(z).$$

Für zwei- oder mehrfache Polstellen kann diese Formel aber nicht verwendet werden, denn der Grenzwert wird wegen  $\lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) f(z) = \infty$  nicht in  $\mathbb{C}$  existieren. Siehe dazu auch weiter unten.

Beispiel: Für

$$f(z) = \frac{\exp(i z)}{z^2 + 1} = \frac{\exp(i z)}{(z + i)(z - i)}$$

erhalten wir

$$\operatorname{res}_f(\pm i) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{\exp(i z)}{z \pm i} = \frac{e^{\mp 1}}{\pm 2i} = \mp i \frac{1}{2} e^{\mp 1}$$

in den beiden Polstellen.

**als Quotient** Gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{mit} \quad h(z_*) = 0 \quad \text{und} \quad h'(z_*) \neq 0,$$

für zwei holomorphe Funktionen  $g$  und  $h$ , so folgt

$$\operatorname{res}_f(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_*)}{z - z_*}} = \frac{g(z_*)}{h'(z_*)}$$

aus der ersten Regel.

Beispiel: Beim komplexen Kotangens ergibt sich

$$\operatorname{res}_{\cot}(m\pi) = \frac{\cos(m\pi)}{\sin'(m\pi)} = 1$$

für jedes  $m \in \mathbb{Z}$ .

**in Form einer Ableitung** Im Fall einer  $n$ -fachen Polstelle  $z_*$ , also für  $\operatorname{ord}_f(z_*) = -n$ , kann die Formel

$$\operatorname{res}_f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( (z - z_*)^n f(z) \right)$$

verwendet werden, wobei wir im Spezialfall  $n = 1$  wieder die Formel von oben erhalten.

Beispiel: In den beiden Polstellen von

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)^5}$$

gilt  $\operatorname{ord}_f(-1) = -5$  und

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(-1) &= \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^4}{dz^4} \frac{z^2}{z-1} = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{z^2}{z-1} \right)'''' \\ &= \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{24}{(z-1)^5} = -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

bzw.  $\operatorname{ord}_f(+1) = -1$  und  $\operatorname{res}_f(+1) = \lim_{z \rightarrow +1} z^2/(z+1)^5 = +\frac{1}{32}$ .

**mit Näherungsformeln** Oftmals berechnen wir nur die führenden Terme in der Laurent-Entwicklung.

Beispiel: Die Reihenentwicklung des Sinus impliziert für  $f(z) = 1/(z^2 \sin(z))$  die Formel

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)} = \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)\right) = z^{-3} + \frac{1}{6}z^{-1} + O(z)$$

und damit  $\operatorname{res}_f(+1) = \frac{1}{6}$ , wobei wir im Zwischenschritt die geometrische Summenformel  $1/(1 - \zeta) = 1 + \zeta + \dots$  mit  $\zeta = \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)$  verwendet haben (siehe dazu die Übungen).

Vorlesung 10-2 : 23. Juni

**Anwendung auf Reihenberechnungen\*** Man kann mit dem Residuensatz nicht nur Integrale, sondern auch reelle Reihen berechnen. Als prototypisches Beispiel wollen wir die berühmte Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

aus dem Residuensatz herleiten.<sup>20</sup> Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{\cot(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{i}{z^2} \frac{\exp(+iz) + \exp(-iz)}{\exp(+iz) - \exp(-iz)}$$

und wollen diese nun über Kreislinien mit großem Radius integrieren. Wir hatten oben gesehen, dass der Kotangens die Polstellen

$$\operatorname{ord}_{\cot}(m\pi) = -1, \quad \operatorname{res}_{\cot}(m\pi) = 1$$

mit Parameter  $m \in \mathbb{Z}$  besitzt.<sup>21</sup> Für jedes  $m \neq 0$  verifizieren wir mithilfe der Taylor-Reihen des Kosinus und des Sinus die Approximationsformel

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(m\pi + O(z - m\pi))^2} \frac{(-1)^m + O((z - m\pi)^2)}{(-1)^m (z - m\pi) + O((z - m\pi)^2)} \\ &= \frac{1}{m^2 \pi^2} \frac{1}{z - m\pi} \left(1 + O(z - m\pi)\right) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\operatorname{res}_f(m\pi) = \frac{1}{m^2 \pi^2} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Im Ursprung bzw. für  $m = 0$  ist es ein bisschen komplizierter, aber mittels

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)}{z - \frac{1}{6}z^3 + O(z^5)} = \frac{1}{z^3} \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)}{1 - \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)\right) \left(1 + \frac{1}{6}z^2 + O(z^4)\right) \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{1}{3}z^2 + O(z^4)\right) \end{aligned}$$

<sup>20</sup>Alternativ kann diese Formel auch mit Hilfe von Fourier-Reihe bewiesen werden. Siehe dazu *Analysis 1*.

<sup>21</sup>Da der komplexe Sinus nur reelle Nullstellen hat (Übungsaufgabe), gibt es keine weiteren Polstellen.

ergibt sich

$$\operatorname{ord}_f(0) = -3, \quad \operatorname{res}_f(0) = -\frac{1}{3}.$$

Der Residuensatz impliziert nun die Hilfsformel

$$\int_{S_{\varrho_n}(0)} f(z) \, dz = 2\pi i \left( -\frac{1}{3} + 2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2 \pi^2} \right),$$

wobei es wichtig ist, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Kreislinie vom Radius  $\varrho_n = (n + 1/2)\pi$  um den Mittelpunkt 0 keine der Singularitäten enthält, und dass die Polstellen bei  $-m\pi$  und  $+m\pi$  denselben Beitrag liefern. Andererseits gilt auf dem Integrationsweg

$$z = \varrho_n \exp(it), \quad \exp(\pm iz) = \exp(i\varrho_n \cos(t)) \exp(\pm \varrho_n \sin(t))$$

mit  $t \in [0, 2\pi]$  und wir können mit rein reellen Argumenten zeigen, dass dies

$$|\cot(z)| \leq 4 \quad \text{und} \quad |f(z)| \leq \frac{4}{\varrho_n^2} \quad \text{für} \quad z \in S_{\varrho_n}(0)$$

impliziert. Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale garantiert

$$\left| \int_{S_{\varrho_n}(0)} f(z) \, dz \right| \leq \frac{4 \operatorname{len}(S_{\varrho_n}(0))}{\varrho_n^2} = \frac{8\pi\varrho_n}{\varrho_n^2} = \frac{8}{n + \frac{1}{2}},$$

d.h. die linke Seite in der obigen Hilfsformel verschwindet im Limes  $n \rightarrow \infty$ . Der Grenzwert auf der rechten Seite muss dann auch 0 sein und dies liefert die Behauptung.

Bemerkung: Die Formel

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

kann analog durch Anwendung des Residuensatzes auf

$$f(z) = \frac{\csc(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$$

hergeleitet werden (siehe die Hausaufgaben).

Ausblick: Die Riemannsche Zeta-Funktion ist formal durch

$$\zeta(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^z}$$

definiert und wir haben gerade  $\zeta(2)$  berechnet. Für allgemeine komplexe Argumente  $z \in \mathbb{C}$  ist diese Funktion — bzw. ihre maximale holomorphe Fortsetzung — jedoch nicht vollständig verstanden und Gegenstand eines der mathematischen *Millenniumsprobleme*. Siehe dazu die *Riemannsche Vermutung* auf WIKIPEDIA.



## 2.7 Integralberechnung mit Residuen

**Vorbemerkung** In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie gewisse Klassen reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden können. Man spricht auch vom *Residuenkalkül*, das in den Anwendungswissenschaften vielleicht noch wichtiger als innerhalb der Mathematik ist. Beachte dabei, dass für eine holomorphe Funktion der Ausdruck

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f(z) dz$$

sowohl als vektorwertiges Riemann-Integral bzgl. der reellen Variablen  $x \in [a, b]$  als auch als komplexes Kurvenintegral entlang des Weges  $c(t) = t + 0i$  mit  $t \in [a, b]$  interpretiert werden kann.

**Notation** Wir benutzen in diesem Abschnitt spezielle Schreibweisen für Summen, wie zum Beispiel

$$\sum_{z \in B_\varrho(0)} \operatorname{res}_f(z) \quad \text{oder} \quad \sum_{|z| < \varrho} \operatorname{res}_f(z).$$

Damit ist nicht gemeint, dass der Summationsindex  $z$  wirklich die ganze Kreisscheibe  $B_\varrho(0)$  durchläuft (was aus mathematischer Sicht auch wirklich unsinnig wäre), sondern es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die Summe nur über die Punkte  $z \in B_\varrho(0)$  gebildet wird, für die auch  $\operatorname{res}_f(z) \neq 0$  gilt. Das werden dann in aller Regel nur endlich viele Punkte sein. In Ausnahmefällen können es auch mal *abzählbar unendlich viele* Punkte sein, wobei dann die Summe eine (absolut konvergente) Reihe ist.

**Theorem (reelle Integrale rationaler Funktionen)** Seien  $p$  und  $q$  zwei gegebene Polynome, sodass der Grad von  $q$  den von  $p$  um mindestens 2 übersteigt und  $q$  keine reellen Nullstellen besitzt. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) < 0} \operatorname{res}_{p/q}(z) = +2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_{p/q}(z),$$

wobei die obige Summennotation verwendet wird.

**Beweis** Die Nullstellen von  $q$  sind gerade die isolierten Singularitäten der Funktion  $f = p/q$ , die in jedem anderen Punkt komplex differenzierbar ist. Wir betrachten nun einen Radius  $\varrho$ , der so groß ist, dass alle Nullstellen von  $q$  in  $B_\varrho(0)$  enthalten sind, und integrieren  $f$  über die im Bild dargestellten Wege  $c_{-, \varrho}$ ,  $c_{+, \varrho}$  und  $c_{0, \varrho}$ . Der Residuensatz kann sowohl auf der unteren als auch auf der oberen Halbkreisscheibe angewendet werden und liefert

$$\int_{c_{0, \varrho} \oplus c_{-, \varrho}} f(z) dz = - \sum_{\operatorname{Im}(z) < 0} \operatorname{res}_f(z), \quad \int_{c_{0, \varrho} \oplus c_{+, \varrho}} f(z) dz = + \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_f(z),$$

wobei wir benutzt haben, dass  $c_{0,\varrho} \oplus c_{-, \varrho}$  bzw.  $c_{0,\varrho} \oplus c_{+, \varrho}$  den jeweiligen Rand mit negativer bzw. positiver Orientierung parametrisieren. Die Voraussetzung über die Polynomgrade von  $p$  und  $q$  impliziert außerdem

$$|f(z)| \leq \frac{\mu}{|z|^2} = \frac{\mu}{\varrho^2}$$

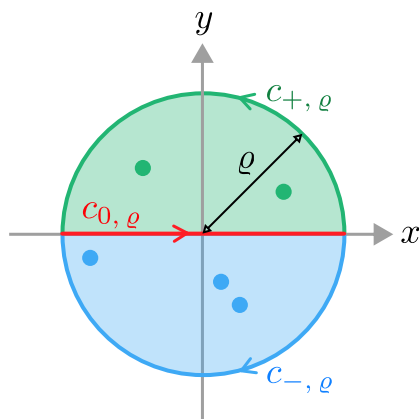
für eine geeignete Konstante  $\mu$  und alle  $z \in B_\varrho(0)$ , sodass

$$\left| \int_{c_{\pm, \varrho}} f(z) dz \right| \leq \frac{\mu 2\pi\varrho}{\varrho^2} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$$

eine direkte Konsequenz der Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale ist. Andererseits konvergiert das Integral von  $f$  über den Weg  $c_{0,\varrho}$  für  $\varrho \rightarrow \infty$  gegen die linke Seite der Behauptung und es gilt

$$\int_{c_{0,\varrho} \oplus c_{\pm, \varrho}} f(z) dz = \int_{c_{0,\varrho}} f(z) dz + \int_{c_{\pm, \varrho}} f(z) dz$$

aufgrund der Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals. □



**Abbildung** Die Integrationswege aus dem Beweis des vorangegangenen Theorems, wobei die blauen bzw. die grünen Punkte die Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  repräsentieren.

**Beispiel** Die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

besitzt die vier jeweils einfachen Polstellen

$$z_1 = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \frac{+1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{+1-i}{\sqrt{2}},$$

die gerade die (jeweils einfachen) Nullstellen des Nennerpolynoms sind. Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2}{(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \\ &= \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \end{aligned}$$

sowie drei analogen Formeln erhalten wir

$$\operatorname{res}_f(z_1) = \frac{+1 - \mathbf{i}}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res}_f(z_2) = \frac{-1 - \mathbf{i}}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res}_f(z_3) = \frac{-1 + \mathbf{i}}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{res}_f(z_4) = \frac{+1 + \mathbf{i}}{4\sqrt{2}}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

wobei der Wert auf der rechten Seite entweder als  $+2\pi \mathbf{i} (\operatorname{res}_f(z_1) + \operatorname{res}_f(z_2))$  oder als  $-2\pi \mathbf{i} (\operatorname{res}_f(z_3) + \operatorname{res}_f(z_4))$  berechnet werden kann.

**Integrale mit trigonometrischen Funktionen** Mittels Residuen können auch viele reelle Integrale berechnet werden, in denen Quotienten polynomieller Ausdrücke in Sinus und Kosinus auftauchen. Als einfaches Beispiel berechnen wir

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \cos(t)},$$

wobei  $|\mu| > 1$  für den reellen Parameter  $\mu$  gelten soll. Dazu studieren wir die komplexe Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\mathbf{i}z} \frac{1}{\left(\mu + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{-2\mathbf{i}}{z^2 + 2\mu z + 1},$$

denn die Definition des komplexen Kurvenintegrals kombiniert mit der Euler-Formel sowie der Standardparametrisierung von  $\partial B_1(0)$  impliziert

$$\int_{S_1(0)} f(z) \, dz = \int_0^{2\pi} f(\exp(\mathbf{i}t)) \mathbf{i} \exp(\mathbf{i}t) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \frac{1}{2} \exp(\mathbf{i}t) + \frac{1}{2} \exp(-\mathbf{i}t)} = I.$$

Die Funktion  $f$  besitzt die beiden einfachen Polstellen

$$z_{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$$

und wir erhalten

$$\operatorname{res}_f(z_{\pm}) = \lim_{z \rightarrow z_{\pm}} (z - z_{\pm}) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_{\pm}} \frac{-2\mathbf{i}}{z - z_{\mp}} = \frac{\mp 2\mathbf{i}}{z_+ - z_-} = \frac{\mp \mathbf{i}}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

Allerdings liegt für  $\mu < -1$  bzw.  $\mu > +1$  nur  $z_-$  bzw.  $z_+$  im Inneren von  $B_1(0)$ , sodass

$$I = 2\pi \mathbf{i} \operatorname{res}_f(z_{\operatorname{sgn}(\mu)}) = \operatorname{sgn}(\mu) 2\pi / \sqrt{\mu^2 - 1}$$

aus dem Residuensatz folgt, wobei  $\operatorname{sgn}(\mu)$  hier entweder  $-$  oder  $+$  ist.

*Bemerkung:* Mit analogen Argumenten können wir auch andere trigonometrische Integrale berechnen. Siehe dazu die Übungen.

**Theorem (Jordan-Lemma)** Seien  $p$  und  $q$  zwei Polynome, sodass der Grad von  $q$  den von  $p$  um mindestens 1 übersteigt und  $q$  keine reellen Nullstellen besitzt. Für jeden reellen Parameter  $\kappa > 0$  gilt dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\pm\kappa}(x) dx = \pm 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) \geq 0} \operatorname{res}_{f_{\pm\kappa}}(z) \quad \text{mit} \quad f_{\pm\kappa}(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \exp(\pm i \kappa z).$$

Insbesondere sind für das Integral von  $f_{+\kappa}$  bzw.  $f_{-\kappa}$  nur diejenigen Polstellen relevant, die einen positiven bzw. negativen Imaginärteil aufweisen.

**Beweis** Wir leiten nur die Formel mit  $f_{+\kappa}$  her, da die Argumente für das Integral von  $f_{-\kappa}$  im Wesentlichen dieselben sind. Die Singularitäten von  $f_{+\kappa}$  sind wieder die (endlich vielen) Nullstellen von  $q$  und liegen entweder in der unteren Halbebene oder in dem im Bild dargestellten Rechteck, sofern der Parameter  $\sigma$  hinreichend groß ist. Der Residuensatz liefert

$$\sum_{j=1}^4 \int_{c_{\sigma,j}} f_{+\kappa}(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_f(z),$$

wobei

$$\int_{c_{\sigma,1}} f_{+\kappa}(z) dz \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\pm\kappa}(x) dx$$

für das Integral über den ersten Teilweg gilt. Es bleibt zu zeigen, dass die drei anderen Teilwegintegrale im Limes  $\sigma \rightarrow \infty$  verschwinden. Die Voraussetzungen an die Polynomgrade von  $p$  und  $q$  implizieren

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{\mu}{|z|} \leq \frac{\mu}{\sigma} \quad \text{für alle } z \in C_{\sigma,2} \cup C_{\sigma,3} \cup C_{\sigma,4} \quad \text{mit} \quad C_{\sigma,j} = \operatorname{spur}(c_{\sigma,j}),$$

wobei  $\mu > 0$  eine geeignete Konstante bezeichnet und  $\sigma$  hinreichend groß ist. Außerdem gilt

$$|\exp(+i \kappa z)| \leq \exp(-\kappa \sigma) \quad \text{für alle } z \in C_{\sigma,3}$$

und wegen  $\operatorname{len}(c_{\sigma,3}) = 2\sigma$  folgt damit

$$\left| \int_{c_{\sigma,3}} f_{+\kappa}(z) dz \right| \leq \frac{\mu \operatorname{len}(c_{\sigma,3}) \exp(-\kappa \sigma)}{\sigma} = 2\mu \exp(-\kappa \sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0$$

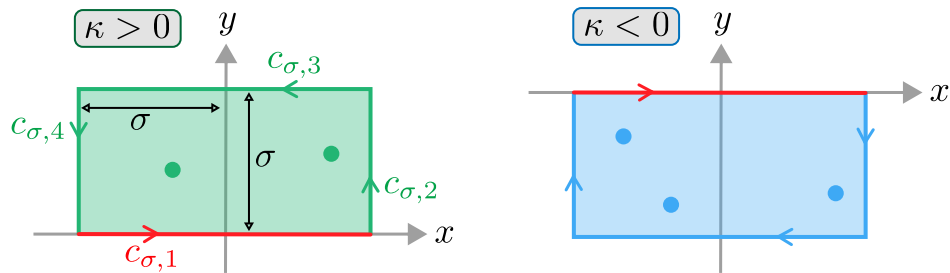
aus der Standardabschätzung für Kurvenintegrale. Mit der Parametrisierungsformel

$$c_{\sigma,2}(t) = \sigma + it, \quad t \in [0, \sigma]$$

erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_{\sigma,2}} f_{+\kappa}(z) dz \right| &= \left| \int_0^\sigma \frac{p(c_{\sigma,2}(t))}{q(c_{\sigma,2}(t))} \exp(i\kappa\sigma - \kappa t) dt \right| \leq \int_0^\sigma \left| \frac{p(c_{\sigma,2}(t))}{q(c_{\sigma,2}(t))} \right| \exp(-\kappa t) dt \\ &\leq \frac{\mu}{\sigma} \int_0^\sigma \exp(-\kappa t) dt = \frac{\mu}{\sigma\kappa} (1 - \exp(-\kappa\sigma)) \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt für das Integral über  $c_{\sigma,4}$  und die Behauptung folgt nach Kombination aller Teilergebnisse.  $\square$



**Abbildung** Die Integrationswege aus dem Beweis des Jordan-Lemmas, wobei es wirklich wichtig ist, dass diese für  $f_{+\kappa}$  bzw.  $f_{-\kappa}$  in der oberen bzw. unteren Halbebene liegen. Andernfalls wären die Beiträge über die nicht-roten Teilwege nicht klein, sondern könnten im Gegenteil sehr groß sein.

### Bemerkungen

1. Das Jordan-Lemma erlaubt zum Beispiel die effektive Berechnung gewisser Fourier-Integrale (siehe weiter unten). Dabei kann das reelle Integral im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals oder auch nur im Sinne eines Cauchyschen Integralhauptwertes existieren (siehe *Analysis 1* für den Unterschied).
2. Es gibt Varianten des Jordan-Lemmas, in denen der Polynomquotient  $p(z)/q(z)$  durch eine andere Funktionenklasse ersetzt wird. Es wird aber immer der Term  $\exp(\pm i\kappa z)$  auftauchen.
3. Wegen der Euler-Formel können mit dem Jordan-Lemma auch Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\kappa x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\kappa x) dx$$

berechnet werden.

### Beispiele

1. Mit  $p(z) = 1$  und  $q(z) = 1 + z^2$  besitzen die beiden Funktionen

$$f_{\pm\kappa}(z) = \frac{\exp(\pm i\kappa z)}{1 + z^2}$$

für jede Wahl von  $\kappa > 0$  isolierte Singularitäten in den Punkten  $-i$  und  $+i$ , wobei einfache Rechnungen  $\text{ord}_{f_{\pm\kappa}}(-i) = \text{ord}_{f_{\pm\kappa}}(+i) = -1$  sowie

$$\text{res}_{f_{\pm\kappa}}(-i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{\pm i\kappa z}}{z - i} = +i \frac{1}{2} e^{\pm\kappa}$$

und

$$\operatorname{res}_{f_{\pm\kappa}}(+i) = \lim_{z \rightarrow +i} \frac{e^{\pm i\kappa z}}{z+i} = -i \frac{1}{2} e^{\mp\kappa}$$

liefern. Mit dem Jordan-Lemma erhalten wir schließlich die Riemann-Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\kappa x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\kappa} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+i\kappa x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\kappa},$$

wobei für  $f_{-\kappa}$  bzw.  $f_{+\kappa}$  nur das Residuum in  $-i$  bzw.  $+i$  ausgewertet wurde.

*Bemerkung:* Die Endformel gilt in diesem Beispiel auch für  $\kappa = 0$  und kann (via  $\pm\kappa = 2\pi\xi$ ) im Kontext des nächsten Kapitels wie folgt interpretiert werden: Die Fourier-Transformierte von  $u(x) = 1/(1+x^2)$  ist  $\hat{u}(\xi) = \pi \exp(-2\pi|\xi|)$ .

2. Um das Integral

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^2} dx$$

zu berechnen, wollen wir das Jordan-Lemma mit  $\kappa = 1$  sowie  $p(z) = z$  und  $q(z) = 1+z^2$  anwenden, denn es gilt

$$I = \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{+1}(x) dx \right), \quad f_{+1}(z) = \frac{z \exp(iz)}{1+z^2}.$$

Es gibt wieder die beiden einfachen Polstellen  $-i$  und  $+i$ , wobei uns aber nur  $+i$  interessiert. Das entsprechende Residuum ist durch

$$\operatorname{res}_{f_{+1}}(+i) = \lim_{z \rightarrow +i} (z+i) f_{+1}(z) = \lim_{z \rightarrow +i} \frac{z \exp(iz)}{z-i} = \frac{i \exp(-1)}{2i} = \frac{1}{2} e^{-1}$$

gegeben und das Jordan-Lemma liefert via

$$I = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \frac{1}{2} e^{-1} \right) = \pi e^{-1}$$

den Wert des gesuchten Integrals.

**Lemma (nützliche Formel zur Fourier-Transformation)** Die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} e^{\pm i\kappa x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{4\sigma}\right)$$

gilt für alle  $\sigma > 0$  und  $\kappa > 0$ .

**Beweis** Wir fixieren  $\sigma > 0$  und berechnen das Kurvenintegral der holomorphen Funktion  $f(z) = e^{-\sigma z^2}$  über den im Bild dargestellten Rechtecksweg, wobei  $\varrho > 0$  und  $\mu \neq 0$  zwei weitere reellen Parameter sind und wir zunächst  $\mu > 0$  annehmen. Der Satz von Cauchy impliziert

$$0 = \sum_{j=1}^4 \int_{c_{\mu, \varrho, j}} e^{-\sigma z^2} dz$$

und wir bemerken, dass die Dreiecksungleichung für vektorwertige Riemann-Integrale die Konvergenzaussagen

$$\left| \int_{c_{\mu, \varrho, 2}} e^{-\sigma z^2} dz \right| \leq \int_0^{\mu} \left| i e^{-\sigma(\varrho + iy)^2} \right| dy \leq e^{-\sigma \varrho^2} \int_0^{\mu} e^{\sigma y^2} dy \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$$

sowie

$$\left| \int_{c_{\mu, \varrho, 4}} e^{-\sigma z^2} dz \right| \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0$$

impliziert. Andererseits gilt

$$\int_{c_{\mu, \varrho, 1}} e^{-\sigma z^2} dz = \int_{-\varrho}^{+\varrho} e^{-\sigma x^2} dx \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}}$$

sowie

$$\int_{c_{\mu, \varrho, 3}} e^{-\sigma z^2} dz = \int_{+\varrho}^{-\varrho} e^{-\sigma(x+i\mu)^2} dx \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(x+i\mu)^2} dx$$

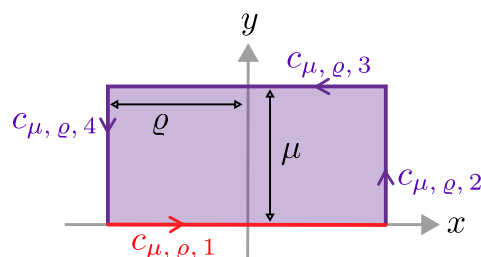
im Sinne uneigentlicher Riemann-Integrale. Im Limes  $\varrho \rightarrow \infty$  ergibt sich damit

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(x+i\mu)^2} dx = e^{+\sigma \mu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} e^{-i2\sigma \mu x} dx$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x^2} e^{-i2\sigma \mu x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} e^{-\sigma \mu^2}$$

für jeden Wert  $\mu > 0$ . Diese Formel gilt offensichtlich auch für  $\mu = 0$  und im Fall von  $\mu < 0$  kann sie mit analogen Argumenten hergeleitet werden. Die Behauptung ergibt sich schließlich, wenn wir  $\mu = \pm \kappa / (2\sigma)$  setzen.  $\square$



**Abbildung** Die Integrationswege aus dem Beweis des Lemmas für  $\mu > 0$ . Für  $\mu < 0$  wird alles an der  $x$ -Achse gespiegelt.

**Bemerkung** Die Formel ist wichtig und impliziert, dass die Fourier-Transformierte einer Glockenfunktion in  $x$  eine Glockenfunktion in  $\kappa$  mit anderen Parametern ist. Insbesondere kann mit ihr die *Heisenbergsche Unschärferelation der Quantenmechanik* verstanden und exemplifiziert werden.

Vorlesung 11-2 : 30. Juni

## Integrale mit Logarithmen und allgemeinen Potenzen\*

**Vorbemerkung** Wir wollen schließlich reelle Integrale mit allgemeinen Potenzen berechnen, wobei dann zunächst ein geeigneter Ast des komplexen Arguments gewählt werden muss.<sup>22</sup> Wir werden keine abstrakten Theoreme formulieren, sondern das prinzipielle Verfahren anhand zweier Beispiele erklären.

**Erstes Beispiel** Um das reelle Integral

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)^2} dx$$

mit gegebenem Parameter  $-1 < \alpha < +3$  zu berechnen, integrieren wir die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{\text{Pow}_{\alpha, \pi/2}(z)}{(1+z^2)^2} = \frac{\exp(\alpha \text{Ln}_{\pi/2}(z))}{(1+z^2)^2}$$

über den im Bild dargestellten Weg  $c_{\varrho, \varepsilon}$ , wobei wir via  $\theta = \pi/2$  den Ast des komplexen Logarithmus gewählt haben, dessen Schlitz im Definitionsbereich die untere vertikale Halbachse ist.<sup>23</sup> Die Punkte  $-i$  und  $+i$  sind jeweils eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms, aber da  $-i$  im Schlitz liegt, ist  $+i$  die einzige isolierte Singularität von  $f$ . Diese besitzt die Ordnung  $-2$  und wir berechnen daher das entsprechende Residuum durch

$$\begin{aligned} \text{res}_f(+i) &= \lim_{z \rightarrow +i} \frac{d}{dz} \left( \frac{\text{Pow}_{\alpha, \pi/2}(z)}{(z+i)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow +i} \frac{\alpha \text{Pow}_{\alpha-1, \pi/2}(z) (z+i)^2 - 2 \text{Pow}_{\alpha, \pi/2}(z) (z+i)}{(z+i)^4} \\ &= \frac{-4\alpha \exp(i(\alpha-1)\frac{1}{2}\pi) - i4 \exp(i\alpha\frac{1}{2}\pi)}{16} \\ &= i \frac{1}{4} (\alpha-1) \exp(i\alpha\frac{1}{2}\pi), \end{aligned}$$

wobei wir die Formeln

$$\text{Arg}_{\pi/2}(+i) = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{Pow}_{p, \pi/2}(+i) = \exp(p \text{Arg}_{\pi/2}(+i)) = \exp(i p \frac{1}{2}\pi)$$

<sup>22</sup>Insbesondere zeichnen wir durch die Festlegung des Winkelparameters  $\theta$  eine geschlitzte Ebene als Definitionsbereich der Argument- sowie der eindeutigen Logarithmus-Funktion aus.

<sup>23</sup>Insbesondere ist  $\text{Ln}_{\pi/2}(z)$  in  $z = x + iy$  wohldefiniert und holomorph, sofern  $y \neq 0$  oder  $x > 0$  gilt.



benutzt haben. Der Residuensatz impliziert unter der Annahme  $0 < \varepsilon < 1 < \varrho$  daher die Formel

$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon}} f(z) dz = \frac{1}{2} \pi (1 - \alpha) e^{i \alpha \pi / 2},$$

und wir wollen nun die Beiträge der vier Einzelwege im Doppellimes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\varrho \rightarrow \infty$  berechnen. Für den großen Halbkreisweg erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_{\varrho, \varepsilon, 2}} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{\varrho^\alpha \exp(+i \alpha t) i \varrho \exp(+i t)}{(1 + \varrho^2 \exp(+i 2 t))^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\varrho^{1+\alpha}}{(\varrho^2 - 1)^2} dt \leq \varrho^{\alpha-3} \int_0^\pi \frac{dt}{(1 - 1/\varrho^2)^2} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Standardparametrisierung von Halbkreislinien, die Nebenrechnung

$$\begin{aligned} \text{Pow}_{\alpha, \pi/2}(\varrho \exp(i t)) &= \exp\left(\alpha \text{Ln}_{\pi/2}(\varrho \exp(i t))\right) \\ &= \exp\left(\alpha \ln \varrho + \alpha i \text{Arg}_{\pi/2}(\exp(i t))\right) \\ &= \exp\left(\alpha \ln \varrho + \alpha i t\right) = \varrho^\alpha \exp(i \alpha t) \end{aligned}$$

mit  $t \in [0, \pi]$  sowie die Hilfsabschätzung  $|1 + \varrho^2 \exp(i 2 t)| \geq \varrho^2 - 1$  benutzt haben. Mit ähnlichen Argumenten kann auch

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_{\varrho, \varepsilon, 4}} f(z) dz \right| &\leq \int_\pi^{2\pi} \left| \frac{\varepsilon^\alpha \exp(-i \alpha t) (-i) \varepsilon \exp(-i t)}{(1 + \varepsilon^2 \exp(-i 2 t))^2} \right| dt \\ &\leq \int_\pi^{2\pi} \frac{\varepsilon^{1+\alpha}}{(1 - \varepsilon^2)^2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

gezeigt werden, d.h. auch der kleine Halbkreisweg liefert beim Grenzübergang keinen Beitrag. Andererseits gilt

$$\text{Pow}_{\alpha, \pi/2}(x) = x^\alpha \quad \text{bzw.} \quad \text{Pow}_{\alpha, \pi/2}(x) = (-x)^\alpha e^{i \alpha \pi}$$

für alle reellen Argumente  $x > 0$  bzw.  $x < 0$  und wir erhalten

$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon, 1}} f(z) dz = \int_{+\varepsilon}^{+\varrho} \frac{x^\alpha}{(1 + x^2)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} I$$

sowie

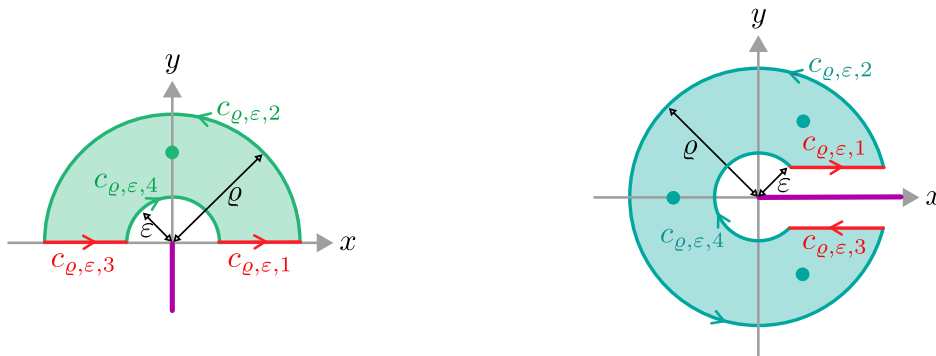
$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon, 4}} f(z) dz = \int_{-\varrho}^{-\varepsilon} \frac{(-x)^\alpha e^{i \alpha \pi}}{(1 + x^2)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} e^{i \alpha \pi} I,$$

wobei wir in der letzten Rechnung abschließend  $x = -\tilde{x}$  substituiert haben. Insgesamt ergibt sich durch Einsetzen der Wert

$$I = \frac{\frac{1}{2} \pi (1 - \alpha) e^{i \alpha \pi / 2}}{1 + e^{i \alpha \pi}} = \frac{(1 - \alpha) \pi}{4 \cos(\alpha \pi / 2)}$$

für das gesuchte reelle Integral in Abhängigkeit des Parameters  $\alpha$ , wobei die rechte Seite auch für  $\alpha = 1$  ausgewertet werden kann und den Wert  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{(1 - \alpha) \pi}{4 \cos(\alpha \pi / 2)} = \frac{1}{2}$  liefert.

*Bemerkung:*  $I$  ist nur für  $\alpha \in (-1, +3)$  im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals definiert und dies spiegelt sich auch in den bei der Herleitung verwendeten Abschätzungen wider.



**Abbildung** Links: Der Integrationsweg (grün und rot) aus dem ersten Beispiel sowie der Schlitz (lila) des gewählten Nebenwerts des Logarithmus. Beachte, dass hier nur die Polstelle  $+i$  (grüner Punkt) wichtig ist. Rechts: Im zweiten Beispiel integrieren wir über die „Schlüssellochkontour“, wobei es diesmal drei Polstellen (türkise Punkte) gibt und der Schlitz des verwendeten Nebenwerts der Wurzel (lila) auf der positiven reellen Halbachse liegt.

**Zweites Beispiel** Für das Integral

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3} dx$$

betrachten wir

$$f(z) = \frac{\text{Pow}_{1/2, \pi}(z)}{1 + z^3} = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \text{Ln}_{\pi}(z)\right)}{1 + z^3},$$

wobei wir diesmal einen anderen Integrationsweg (siehe das Bild) sowie den Ast des komplexen Logarithmus mit  $\theta = \pi$  benutzen, dessen Schlitz mit der positiven reellen Halbachse zusammenfällt. In diesem Beispiel gibt es die drei jeweils einfachen Polstellen

$$z_1 = e^{+i \pi / 3}, \quad z_2 = e^{+i \pi} = -1, \quad z_3 = e^{-i \pi / 3},$$

deren Argumente durch

$$\text{Arg}_{\pi}(z_1) = \frac{1}{3} \pi, \quad \text{Arg}_{\pi}(z_2) = \pi, \quad \text{Arg}_{\pi}(z_3) = \frac{5}{3} \pi$$

gegeben sind. Wir erhalten also

$$\text{Pow}_{1/2, \pi}(z_1) = e^{i \pi / 6}, \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(z_2) = e^{i \pi / 2}, \quad \text{Pow}_{1/2, \pi}(z_3) = e^{i 5 \pi / 6}$$

und damit auch

$$\operatorname{res}_f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{\operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = -\frac{1}{3} \mathbf{i}$$

sowie

$$\operatorname{res}_f(z_2) = \frac{\operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} = +\frac{1}{3} \mathbf{i}, \quad \operatorname{res}_f(z_3) = \frac{\operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} = -\frac{1}{3} \mathbf{i}.$$

Im Fall von  $\varepsilon < 1 < \varrho$  liefert der Residuensatz das Zwischenergebnis

$$\int_{C_{\varrho, \varepsilon}} f(z) dz = 2\pi \mathbf{i} \sum_{j=1}^3 \operatorname{res}_f(z_j) = \frac{2}{3} \pi,$$

das wir nun weiter vereinfachen wollen. Die Beiträge der beiden Kreissegmente zum Kurvenintegral können im Doppellimes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $\varrho \rightarrow \infty$  wieder vernachlässigt werden, wobei dies mithilfe der Standardabschätzung für Kurvenintegrale und unter Ausnutzung der Hilfsresultate

$$|f(z)| \leq \frac{\varrho^{1/2}}{\varrho^3 - 1} \quad \text{für } z \in C_{\varrho, \varepsilon, 2}, \quad |f(z)| \leq \frac{\varepsilon^{1/2}}{1 - \varepsilon^3} \quad \text{für } z \in C_{\varrho, \varepsilon, 4}$$

begründet werden kann. Da für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon$  sowie alle  $z \in C_{\varrho, \varepsilon, 1}$  bzw.  $z \in C_{\varrho, \varepsilon, 3}$  die Approximationen

$$\operatorname{Arg}_{1/2, \pi}(z) \gtrsim 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Arg}_{1/2, \pi}(z) \lesssim 2\pi$$

sowie

$$\operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(z) \approx +\sqrt{\operatorname{Re}(z)} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(z) \approx -\sqrt{\operatorname{Re}(z)}$$

gelten,<sup>24</sup> ergibt sich außerdem

$$\int_{C_{\varrho, \varepsilon, 1}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{+\sqrt{x}}{1+x^3} dx = I$$

sowie

$$\int_{C_{\varrho, \varepsilon, 3}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} \int_{\infty}^0 \frac{-\sqrt{x}}{1+x^3} dx = I,$$

<sup>24</sup>Um diese Formeln herzuleiten, betrachten wir  $x > 0$  und  $\delta > 0$ , setzen  $y = \pm\delta$  und berechnen

$$\operatorname{Arg}_{\pi}(x - \mathbf{i}\delta) = 2\pi - \arctan(\delta/x), \quad \operatorname{Arg}_{\pi}(x + \mathbf{i}\delta) = \arctan(\delta/x).$$

Dies liefert

$$\operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(x - \mathbf{i}\delta) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{x^2 + \delta^2}) + 2\pi - \mathbf{i}\arctan(\delta/x))\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sqrt{x} \exp(\mathbf{i}\pi) = -\sqrt{x}$$

sowie

$$\operatorname{Pow}_{1/2, \pi}(x + \mathbf{i}\delta) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{x^2 + \delta^2}) + \mathbf{i}\arctan(\delta/x))\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sqrt{x} \exp(0) = +\sqrt{x}$$

wegen  $|x - \mathbf{i}\delta| = |x + \mathbf{i}\delta| = \sqrt{x^2 + \delta^2}$ .

wobei in der letzten Formel das negative Vorzeichen vor der Wurzel nach Vertauschen der Integrationsgrenzen verschwindet. Insgesamt folgt

$$\int_{c_{\varrho, \varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow \infty} 2I$$

und damit  $I = \pi/3$ .

## 2.8 Argumentprinzip

**Theorem (Null- und Polstellen zählendes Integral)** Mit den Notationen und Voraussetzungen der ersten Version des Residuensatzes gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in G, \text{ord}_f(z) \neq 0} \text{ord}_f(z),$$

sofern  $f$  keine wesentliche Singularität besitzt und der Integrand auf der linken Seite wohldefiniert auf  $\partial G$  ist. Insbesondere addiert die Summe auf der rechten Seite die positiven Ordnungen aller Nullstellen von  $f$  in  $G$  sowie die negativen Ordnungen aller Polstellen von  $f$  in  $G$ .

**Beweis** Die Funktion  $g : E \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad E := D \setminus \{z : f(z) = 0\}$$

ist holomorph auf der offenen Menge  $E$ . Jeder Punkt  $z_* \in U \setminus E$  ist entweder Pol- oder Nullstelle von  $f$  und die lokale Reihenentwicklung

$$f(z_*) = \sum_{k=k_*}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k,$$

mit  $\alpha_{k_*} \neq 0$  gilt auf jeder (hinreichend kleinen) punktierten Kreisscheibe  $A_{0,\varrho}(z_*)$ , die ganz in  $E$  enthalten ist. Dabei ist  $k_* = \text{ord}_f(z_*)$  entweder negative oder positive und in beiden Fällen erhalten wir

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{k_* \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*-1} + (k_* + 1) \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*} + \dots}{\alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} + \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*+1} + \dots} \\ &= \frac{k_* \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*-1} \left(1 + O(z - z_*)\right)}{\alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} \left(1 + O(z - z_*)\right)} = \frac{k_*}{z - z_*} \left(1 + O(z - z_*)\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\text{ord}_g(z_*) = -1, \quad \text{res}_g(z_*) = k_*.$$

In jedem Punkt  $z_* \in E$  gilt jedoch  $k_* = \text{ord}_f(z_*) = 0$  mit  $\alpha_0 \neq 0$  und die lokale Reihendarstellung von  $f$  impliziert

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2(z - z_*) + 3\alpha_3(z - z_*)^2 + \dots}{\alpha_0 + \alpha_1(z - z_*) + \alpha_2(z - z_*)^2 + \dots} \xrightarrow{z \rightarrow z_*} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \in \mathbb{C},$$

d.h. es gilt

$$\text{ord}_g(z_*) \geq 0, \quad \text{res}_g(z_*) = 0.$$

Insgesamt haben wir die folgenden Aussagen etabliert:

1. Jede Nullstelle  $z_*$  von  $f$  (einfach oder mehrfach) ist eine einfache Polstelle von  $g$  und es gilt  $\operatorname{res}_g(z_*) = \operatorname{ord}_f(z_*)$ .
2. Jede Polstelle von  $f$  (einfach oder mehrfach) ist ebenfalls eine einfache Polstelle von  $g$ , wobei wieder  $\operatorname{res}_g(z_*) = \operatorname{ord}_f(z_*)$  gilt.
3. Es gibt darüber hinaus keine weiteren isolierten Singularitäten von  $g$ .

Mit diesen Erkenntnissen folgt die Behauptung aus dem Residuensatz, sofern dieser auf  $g$  und  $E$  anstelle von  $f$  und  $D$  angewendet wird.  $\square$

### Bemerkungen

1. Das Theorem wird oftmals auch Cauchysches Argumentprinzip genannt, aber die Herkunft dieses Namens erschließt sich nicht unmittelbar. Es spielt auch in den Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle und impliziert zum Beispiel das *Nyquist-Kriterium* in der Regelungstechnik.
2. Man schreibt die rechte Seite oftmals auch verkürzt als  $\sum_{z \in G} \operatorname{ord}_f(z)$ , wobei dann immer gemeint ist, dass nur über die Punkte summiert wird, für die  $\operatorname{ord}_f(z) \neq 0$  gilt.
3. Auch hier gibt es eine allgemeinere Variante, bei der Integrale über beliebige geschlossene Integrationswege zugelassen sind, wobei dann auf der rechten Seite zusätzlich Windungszahlen zu berücksichtigen sind.

### Beispiele

1. Die Funktion

$$f(z) = (z - n_1)^3 (z - n_2)$$

besitzt die dreifache Nullstelle  $n_1$  sowie die einfache Nullstelle  $n_2$ , aber gar keine Polstellen. Das Argumentprinzip liefert daher

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \notin G \text{ und } n_2 \notin G, \\ +3 & \text{falls } n_1 \in G \text{ und } n_2 \notin G, \\ +1 & \text{falls } n_1 \notin G \text{ und } n_2 \in G, \\ +4 & \text{falls } n_1 \in G \text{ und } n_2 \in G. \end{cases}$$

Alternativ können wir diese Formel auch mit dem Residuensatz begründen, sofern dieser für  $g = f'/f$  ausgewertet wird. Es gilt nämlich

$$g(z) = \frac{3(z - n_1)^2(z - n_2) + (z - n_1)^3}{(z - n_1)^3(z - n_2)} = \frac{+3}{z - n_1} + \frac{+1}{z - n_2}$$

und wir erhalten

$$\operatorname{ord}_g(n_1) = -1, \quad \operatorname{res}_g(n_1) = +3 = \operatorname{ord}_f(n_1)$$

sowie

$$\operatorname{ord}_g(n_2) = -1, \quad \operatorname{res}_g(n_2) = +1 = \operatorname{ord}_f(n_2),$$

wobei wir zum Beispiel benutzt haben, dass  $1/(z - n_2)$  holomorph im Punkt  $n_1$  ist und daher eine entsprechende Taylor-Entwicklung besitzt. Insbesondere sehen wir (wie schon im Beweis): Jede der beiden Nullstellen von  $f$  ist eine einfache Polstelle von  $g$ , wobei das Residuum bzgl.  $g$  gerade der Ordnung bzgl.  $f$  entspricht. Das Kurvenintegral von  $g$  über den Rand  $\partial G$  zählt hier also die Nullstellen  $f$  in  $G$  mit ihrer Vielfachheit.

2. Das Argumentprinzip impliziert für

$$f(z) = \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)^2}$$

die Zählformeln

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_1 \notin G \text{ und } p_2 \notin G, \\ -1 & \text{falls } p_1 \in G \text{ und } p_2 \notin G, \\ -2 & \text{falls } p_1 \notin G \text{ und } p_2 \in G, \\ -3 & \text{falls } p_1 \in G \text{ und } p_2 \in G, \end{cases}$$

denn diesmal besitzt  $f$  zwei Pol-, aber keine Nullstellen. Auch in diesem Beispiel können wir alternativ den Residuensatz für  $g = f'/f$  verwenden, denn mit

$$g(z) = \frac{\frac{-1}{(z - p_1)^2(z - p_2)^2} + \frac{-2}{(z - p_1)(z - p_2)^3}}{\frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)^2}} = \frac{-1}{z - p_1} + \frac{-2}{z - p_2}$$

ergeben sich

$$\text{ord}_g(p_1) = -1, \quad \text{res}_g(p_1) = -1 = \text{ord}_f(p_1)$$

und

$$\text{ord}_g(p_2) = -1, \quad \text{res}_g(p_2) = -2 = \text{ord}_f(p_2)$$

nach kleinen Hilfsüberlegungen. Oder anders gesagt: Jede der beiden Polstellen von  $f$  ist eine einfache Polstelle von  $g$ , wobei Residuum bzgl.  $g$  und Ordnung bzgl.  $f$  dasselbe sind.

3. Die Funktion

$$f(z) = \frac{z - n}{z - p}$$

besitzt die einfache Nullstelle  $n$  sowie die einfache Polstelle  $p$  und aus

$$g(z) = \frac{\frac{(z - p) - (z - n)}{(z - p)^2}}{\frac{z - n}{z - p}} = \frac{+1}{z - n} + \frac{-1}{z - p}$$

kann

$$\text{ord}_g(n) = \text{ord}_g(p) = -1, \quad \text{res}_f(n) = +1, \quad \text{res}_g(p) = -1$$

abgelesen werden. Insbesondere liefern das Argumentprinzip für  $f$  sowie der Residuensatz für  $g$  beide die Zählformeln

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \notin G \text{ und } p \notin G, \\ +1 & \text{falls } n \in G \text{ und } p \notin G, \\ -1 & \text{falls } n \notin G \text{ und } p \in G, \\ 0 & \text{falls } n \in G \text{ und } p \in G. \end{cases}$$

**geometrische Bedeutung** Wir betrachten  $f$  als Transformation von  $U$  nach  $\mathbb{C}^*$  (wobei  $f(z_n) = \infty$  für jede Polstellen  $z_n$  gilt) und schreiben wieder

$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{c}(t) = f(c(t)).$$

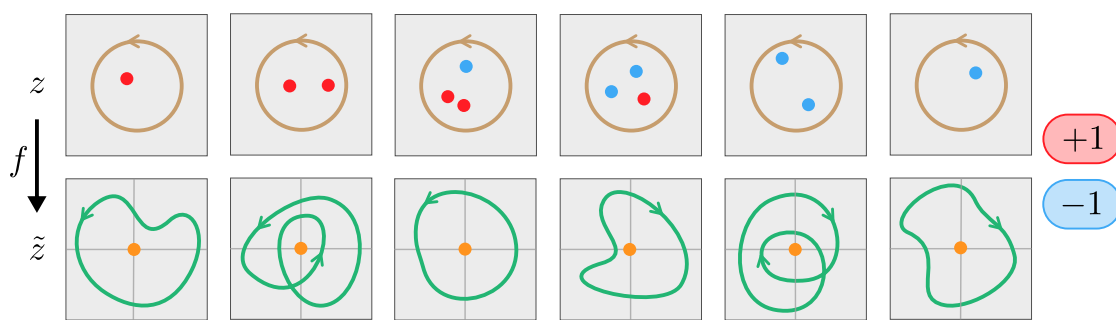
Punkte  $z \in U$  werden von  $f$  also auf Punkte  $\tilde{z} \in \mathbb{C}^*$  abgebildet und jede Kurve  $c$  in  $D$  entspricht dabei einer transformierten Kurve  $\tilde{c} = f \circ c$  in  $\mathbb{C}$  mit

$$\dot{\tilde{c}}(t) = f'(c(t)) \dot{c}(t).$$

Ist  $c : [t_a, t_e]$  nun eine Parametrisierung von  $\partial G$ , so erhalten wir

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{t_a}^{t_e} \frac{f'(c(t)) \dot{c}(t)}{f(c(t))} dt = \int_{t_a}^{t_e} \frac{\dot{\tilde{c}}(t)}{\tilde{c}(t)} dt = \int_{\tilde{c}} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}} = 2\pi i \operatorname{wnd}_{\tilde{c}}(0).$$

Oder anders gesagt: Das Kurvenintegral, das die Null- und Polstellen von  $f$  in  $G$  zählt, ist gerade die Windungszahl von 0 bzgl. der transformierten Kurve  $\tilde{c}$ . Sie gibt an, wie oft sich das Bild von  $\partial G$  unter  $f$  um den Koordinatenursprung windet (siehe das Bild).



**Abbildung** Geometrische Deutung des Argumentprinzips, wobei  $G$  in jedem der sechs Beispiele eine offene Kreisscheibe ist. Die Funktion  $f$  bildet jede ihrer Nullstellen (rot) auf den Ursprung (orange) und jede ihrer Polstellen (blau) auf den unendlich fernen Punkt (nicht dargestellt) ab. Die Randkurve  $c$  von  $G$  (braun) wird von  $f$  in die Bildkurve  $\tilde{c}$  (grün) transformiert, wobei die Anzahl der Null- und Polstellen innerhalb von  $G$  angibt, wie oft und mit welcher Orientierung sich  $\tilde{c}$  um den Ursprung windet. Nicht dargestellt sind Fälle, in denen  $G$  dieselbe Anzahl von Null- und Polstellen enthält, da sich die Bildkurve dann gar nicht um den Ursprung windet. Beachte auch, dass hier nur einfache Null- bzw. Polstellen illustriert sind, die den Beitrag  $+1$  bzw.  $-1$  liefern, und dass Null- oder Polstellen außerhalb von  $G$  keine Rolle spielen.

**Theorem (Satz von Rouché)** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  zwei holomorphe Funktionen und sei  $G$  ein elementares Cauchy-Gebiet in  $D$ . Gilt

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial G,$$

so besitzt  $f$  innerhalb von  $G$  genauso viele Nullstellen wie  $g$ , sofern jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt wird.

**Beweis** Die Voraussetzung impliziert unter anderem

$$f(z) \neq 0 \quad \text{sowie} \quad g(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \partial G$$

und daher existiert eine offene Umgebung  $W$  von  $\partial G$  in  $D$ , in der sowohl  $f$  als auch  $g$  nullstellenfrei sind.<sup>25</sup> Insbesondere wird durch

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

<sup>25</sup>Beachte, dass  $\partial G$  eine kompakte Menge ist und dass sowohl  $f$  als auch  $g$  stetig auf  $D$  sind.



eine holomorphe Funktion  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  definiert, die wegen

$$|h(z) - 1| = \left| \frac{f(z) - g(z)}{g(z)} \right| < 1$$

nur Werte in der Kreisscheibe  $B_1(1)$  annimmt, wobei letztere im Definitionsbereich des Hauptwertes  $\text{Ln} = \text{Ln}_0$  des komplexen Logarithmus liegt. Insbesondere ist die Komposition  $\text{Ln} \circ h$  wohldefiniert und ebenfalls holomorph auf  $W$ , wobei sich

$$\frac{d}{dz} \text{Ln}(h(z)) = \frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

direkt aus den Rechenregeln der komplexen Differentiation ergibt. Andererseits gilt

$$\int_{\partial G} \frac{d}{dz} \text{Ln}(h(z)) dz = 0$$

da der Integrand eine Stammfunktion in  $W$  besitzt.<sup>26</sup> Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus dem vorherigen Theorem.  $\square$

### Bemerkungen

1. Das Theorem ist ein mächtiges Werkzeug und erlaubt es uns oftmals, die Anzahl der Nullstellen einer komplizierten Funktion  $f$  innerhalb einer Menge  $G$  mithilfe einer einfacheren Funktion  $g$  zu ermitteln. Als typisches Beispiel betrachten wir

$$f(z) = -z^{45} - 4z + 2, \quad D = B_1(0), \quad g(z) = 4z + 2$$

und bemerken, dass die Ungleichung

$$|f(z) - g(z)| = 1 < 2 \leq |g(z)|$$

für jedes  $z$  mit  $|z| = 1$  erfüllt ist. Daher besitzt  $f$  in  $B_1(0)$  genauso viele Nullstellen wie  $g$ , nämlich genau eine.

2. Es gibt auch eine Variante des Satzes von Rouché, bei der  $f$  Polstellen innerhalb von  $G$  aufweisen darf. In diesem Fall muss zwar die Aussage des Theorem, aber nicht sein Beweis umformuliert werden.

**Definition** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_* \in D$  beliebig. Dann nennen wir

$$k_* = \text{ord}_{f-f(z_*)}(z_*)$$

die Vielfachheit von  $z_*$  bzgl.  $f$ . Wir sagen auch,  $f$  nimmt in  $z_*$  den Wert  $f(z_*)$  mit Vielfachheit  $k_*$  an.

<sup>26</sup>Es ist hier nicht wichtig, ob  $W$  zusammenhängend oder gar einfach zusammenhängend ist.

**Bemerkungen**

1.  $z_*$  ist also genau dann ein Punkt der Vielfachheit  $k_*$  von  $f$ , wenn  $z_*$  eine  $k_*$ -fache Nullstelle der um eine Konstante im Bildraum verschobenen Funktion  $f - f(z_*)$  ist. In diesem Fall ergibt sich die Taylor-Reihendarstellung

$$f(z) = \alpha_0 + \sum_{k=k_*}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k = \alpha_0 + \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*} + \alpha_{k_*+1} (z - z_*)^{k_*+1} + \dots$$

aus dem lokalen Entwicklungssatz, d.h. es gilt  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k_*-1} = 0$  sowie  $\alpha_{k_*} \neq 0$ .

2. Aus der lokalen Reihendarstellung folgt unmittelbar:  $z_*$  ist genau dann ein Punkt der Vielfachheit  $k_* \in \mathbb{N}$ , wenn  $f'(z_*) = \dots = f^{(k_*-1)}(z_*) = 0$  gilt. Beachte aber, dass im Allgemeinen  $f(z_*) \neq 0$  und damit  $\text{ord}_f(z_*) = 0$  gelten wird.
3. *Standardbeispiel*: Die Funktion  $f(z) = \alpha_0 + \alpha_{k_*} (z - z_*)^{k_*}$  nimmt in  $z_*$  den Wert  $\alpha_0$  mit Vielfachheit  $k_*$  an. Jeder andere Punkt besitzt aber die Vielfachheit 1, denn es gilt  $f'(z) \neq 0$  für jedes  $z \neq z_*$ . Allerdings gibt es hier eine geometrische Entartung, die im Bild zum nachfolgenden Theorem erklärt wird.
4. Jede konstante Funktion nimmt ihren Wert in jedem mit Vielfachheit  $k_* = \infty$  an. Der Identitätssatz impliziert, dass es genau dann einen Punkt in  $D$  mit Vielfachheit  $\infty$  gibt, wenn jeder Punkt in  $D$  die Vielfachheit  $\infty$  besitzt.

**Theorem (lokales Verhalten und Vielfachheit)** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_* \in D$  ein Punkt der Vielfachheit  $k_* \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein Radius  $\varrho > 0$  sowie eine offene Umgebung  $\tilde{W}$  von  $\tilde{z}_* = f(z_*)$ , sodass für jedes  $\tilde{\zeta} \in \tilde{W}$  mit  $\tilde{\zeta} \neq \tilde{z}_*$  gilt: Die Gleichung  $f(\zeta) = \tilde{\zeta}$  besitzt in  $B_\varrho(z_*)$  genau  $k_*$  paarweise verschiedene Lösungen  $\zeta_1, \dots, \zeta_{k_*}$ , wobei jede die Vielfachheit 1 bzgl.  $f$  besitzt.

**Beweis** Wir wählen  $\varrho > 0$  so klein, dass die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{B}_\varrho(z_*)$  zum einen ganz in  $D$  liegt und zum anderen neben  $z_*$  keine Nullstelle von  $f - \tilde{z}_*$  oder  $f'$  enthält. Außerdem bezeichnen wir mit  $c$  die Standardparametrisierung der Kreislinie  $S_\varrho(z_*)$ , setzen  $\tilde{c} := f \circ c$  und wählen  $\tilde{W}$  als die Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{spur}(\tilde{c})$ , in der der Punkt  $\tilde{z}_*$  liegt. Siehe dazu das Bild und beachte, dass  $\tilde{W}$  nach Konstruktion offen ist. Für jedes  $\tilde{\zeta} \in \tilde{W}$  mit  $\tilde{\zeta} \neq \tilde{z}_*$  ergibt sich

$$\text{wnd}_{\tilde{c}}(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{c}} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z} - \tilde{\zeta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z) - \tilde{\zeta}} dz = \sum_{\zeta \in B_\varrho(z_*) : f(\zeta) = \tilde{\zeta}} \text{ord}_{f-\tilde{\zeta}}(\zeta)$$

aus dem Argumentprinzip angewendet auf die Funktion  $f - \tilde{\zeta}$ , wobei wir dieselben Integraltransformationen wie bei der Herleitung der geometrischen Interpretation des Argumentprinzips verwendet haben. Eine analoge Rechnung liefert in Kombination mit der Voraussetzung sowie der Wahl von  $\varrho$  die Formel

$$\text{wnd}_{\tilde{c}}(\tilde{z}_*) = \sum_{\zeta \in B_\varrho(z_*) : f(\zeta) = \tilde{z}_*} \text{ord}_{f-\tilde{z}_*}(\zeta) = k_*$$

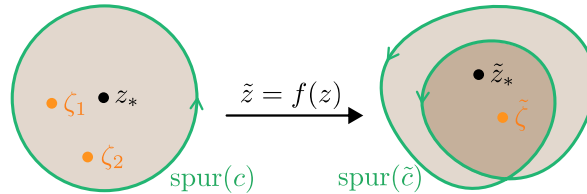
und die Eigenschaften der Windungszahl sowie die Wahl von  $\tilde{W}$  garantieren

$$\text{wnd}_{\tilde{c}}(\tilde{\zeta}) = \text{wnd}_{\tilde{c}}(\tilde{z}_*).$$

Es gilt also

$$\sum_{\zeta \in B_\varrho(z_*) : f(\zeta) = \tilde{\zeta}} \text{ord}_{f-\tilde{\zeta}}(\zeta) = k_*,$$

wobei die Nullstellenfreiheit von  $f'$  in  $\overline{B_\varrho(z_*)}$  garantiert, dass jeder Summand auf der linken Seite den Wert 1 annimmt. Oder anders gesagt: Die Funktion  $f - \tilde{\zeta}$  besitzt für  $\tilde{\zeta} \neq \tilde{z}_*$  nur einfache Nullstellen in  $B_\varrho(z_*)$  und daher muss es genau  $k_*$  viele geben.  $\square$



**Abbildung** Geometrische Bedeutung des Theorems zur Vielfachheit sowie seines Beweises, wobei hier die generische Situation für einen Punkt  $z_*$  mit Vielfachheit  $k_* = 2$  dargestellt ist und  $\tilde{W}$  der dunkelbraunen Menge auf der rechten Seite entspricht. Im Sonderfall  $f(z) = \alpha_0 + \alpha_2(z - z_*)^2$  ist  $\tilde{W}$  die ganze Bildmenge  $f(B_\varrho(z_*))$  und damit die Kreisscheibe vom Radius  $\sqrt{|\alpha_2|}\varrho$  um  $\alpha_0$ . Die Kurve  $\tilde{c}$  beschreibt dann einen zweifachen Durchlauf der Randkreislinie und besitzt unendlich viele Doppelpunkte.

### Bemerkungen

1. Im Fall vom  $\tilde{z}_* = f(z_*) = 0$  charakterisiert das Theorem das lokale Verhalten in der Nähe einer  $k_*$ -fachen Nullstelle von  $f$ .
2. Der Fall  $k_*$  ist im Theorem ausgeschlossen, da  $f$  dann nach dem Identitätssatz eine konstante Funktion wäre.
3. Im Fall von  $k_* = 1$  gilt  $f'(z_*) \neq 0$  bildet  $f$  die Kreisscheibe  $W := B_\varrho(z_*)$  bijektiv auf die Menge  $\tilde{W}$  ab und daher existiert die lokale Umkehrabbildung  $f := f^{-1} : \tilde{W} \rightarrow W$ . Der Umkehrsatz garantiert dann, dass  $\check{f}'(\tilde{z}_*) = 1/\check{f}'(z_*)$ .
4. Gilt  $f'(z_*) = 0$ , so besitzt  $z_*$  mindestens die Vielfachheit 2 und das Theorem zeigt, dass es keine lokale Umkehrfunktion von  $f$  in der Nähe von  $z_*$  geben.
5. Unter den Voraussetzungen des Theorems kann man die folgende, verfeinerte Aussage zeigen: In einer offenen Umgebung von  $z_*$  existiert ein biholomorpher Koordinatenwechsel  $z \mapsto \check{z} = h(z)$ , sodass  $\check{f} := g \circ f \circ g^{-1}$  als

$$\check{f}(\check{z}) = \check{\alpha}_0 + \check{\alpha}_1(\check{z} - \check{z}_*)^{k_*}$$

geschrieben werden kann.

**Korollar (Offenheitsprinzip)** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant. Dann ist die Bildmenge  $f(D) = \{f(z) : z \in D\}$  ebenfalls offen. Ist darüberhinaus  $D$  zusammenhängend, so ist auch  $f(D)$  zusammenhängend.

**Beweis** Für jedes  $\tilde{z}_* \in f(D)$  existiert ein Punkt  $z_* \in D$  mit  $\tilde{z}_* = f(z_*)$ , wobei die Vielfachheit  $k_*$  von  $z_*$  nach Voraussetzung endlich ist und daher die offene Menge  $\tilde{W}$  aus dem vorherigen Theorem ganz in  $f(D)$  enthalten ist. Damit haben wir die Offenheit von  $f(D)$  bewiesen. Außerdem kann leicht gezeigt werden, dass jede stetige (und damit auch jede holomorphe) Funktion zusammenhängende Menge auf zusammenhängende Mengen abbildet (Übungsaufgabe, die mit dem Wissen aus *Analysis 2* gelöst werden kann).  $\square$

**Bemerkungen**

1. Im Reellen gibt es kein Offenheitsprinzip. Die Quadratfunktion bildet zum Beispiel die offene Menge  $\mathbb{R}$  auf das nicht-offene Intervall  $[0, +\infty)$  ab. Im Komplexen bildet sie  $\mathbb{C}$  surjektiv (aber nicht injektiv) auf  $\mathbb{C}$  ab.
2. Aus dem Offenheitsprinzip kann auch das starke Maximumprinzip abgeleitet werden, wobei dieses wie folgt formuliert werden kann: Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph, aber nicht konstant, und die Menge  $W \subseteq D$  sei offen sowie beschränkt. Dann gilt

$$f(z) < \max_{\zeta \in \overline{W}} |f(\zeta)| = \max_{\zeta \in \partial W} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in W,$$

d.h.  $|f|$  nimmt sein Maximum in  $\overline{W}$  auf dem Rand  $\partial W$ , jedoch nicht im Inneren  $W$  an.

*Beweis:* Die Stetigkeit von  $f$  stellt in Kombination mit der Kompaktheit von  $\overline{W}$  sicher, dass  $\max_{\zeta \in \overline{W}} |f(\zeta)|$  eine wohldefinierte reelle Zahl ist. Für jedes  $z \in W$  ist  $f(z)$  ein innerer Punkt der Menge  $\tilde{W} = f(W)$ , d.h. es gilt  $B_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{z}) \subseteq \tilde{W}$  mit  $\tilde{z} = f(z)$  für jeden hinreichend kleinen Radius  $\tilde{\varepsilon}$ . Insbesondere existiert immer ein Punkt  $\tilde{z} \in \tilde{W}$  (der von  $z$  abhängen darf) mit  $|f(z)| < |f(\tilde{z})|$  und dies liefert schließlich die Behauptung.  $\square$

3. Als weitere Folgerung ergibt sich die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
  - (a)  $f$  ist konstant auf  $D$ ,
  - (b)  $\operatorname{Re}(f)$  ist konstant auf  $D$ ,
  - (c)  $\operatorname{Im}(f)$  ist konstant auf  $D$ ,
  - (d)  $|f|$  ist konstant auf  $D$ .
4. Auf zusammenhängenden Mengen  $D$  wird das Offenheitsprinzip oftmals auch als Prinzip der Gebietstreue bezeichnet.<sup>27</sup>

<sup>27</sup>Ein *Gebiet* ist in der Analysis per Definition eine offene und zusammenhängende Menge.