Prof. Dr. Michael Herrmann
Technische Universität Braunschweig
Mathematik – Institut iPDE
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

Skript der Vorlesung

Funktionalanalysis

im Wintersemester 2023/24

Version vom 13. Februar 2024

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

Griechisches Alphabet

klein	*groß*	*Name*	*Laut*
α	A	alpha	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε, ϵ	E	epsilon	ĕ
ζ	Z	zeta	z
η	H	eta	ē
θ, ϑ	Θ	theta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	my	m

klein	*groß*	*Name*	*Laut*
ν	N	ny	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omikron	ŏ
π	Π	pi	p
ϱ, ρ	P	rho	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	y
φ, ϕ	Φ	phi	ph, f
χ	X	chi	ch
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	omega	ō

Literatur

Es gibt viele sehr gute Lehrbücher zur Funktionalanalysis, zum Beispiel:

[Alt] Hans Wilhelm Alt: *Lineare Funktionalanalysis*
6. Auflage, Springer 2012

[Bre] Haim Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*
1. Auflage, Springer 2011

[Hir] Friedrich Hirzebruch: *Einführung in die Funktionalanalysis*
Spektrum 1991 (Nachdruck)

[Kab] Winfried Kaballo: *Grundkurs Funktionalanalysis*
2. Auflage, Springer 2018

[Lax] Peter D. Lax: *Functional Analysis*
1. Auflage, Wiley 2002

[Wer] Dirk Werner: *Funktionalanalysis*
5. Auflage, Springer 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Normierte Räume

Vorlesung 01 : 24. Oktober

1.1 Grundbegriffe

Vorbemerkung In diesem Abschnitt beginnen wir mit dem Studium der normierten Räume, wobei viele der diskutierten Konzepte und Resultate schon in *Analysis 1+2* behandelt wurden. In der Funktionalanalysis betrachten wir nur reelle oder komplexe Vektorräume[1], wobei wir den zugrunde liegenden Körper oftmals mit $\mathbb{K}$ bezeichnen. Es gilt also stets

$$\text{entweder} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \text{oder} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Definition Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ besteht aus einem Vektorraum X (über dem Körper $\mathbb{K}$) sowie einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, die den folgenden Bedingungen genügt.

1. *Positivität*: Es gilt
$$\|0\| = 0\,, \qquad \|x\| > 0$$
für alle $x \in X$ mit $x \neq 0$.

2. *Homogenität*: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in X$ gilt
$$\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|\ ,$$
wobei $|\lambda|$ der Betrag von λ ist.

3. *Subadditivität*: Die Abschätzung
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
gilt für alle $x,\, y \in X$.

Die Funktion $\|\cdot\|$ wird dabei Norm (auf X) genannt.

[1] Die Vektorräume über $\mathbb{Q}$ oder anderen nichtvollständigen Körpern schließen wir explizit aus.

Bemerkungen

1. Wichtige Standardbeispiele sind $X = \mathbb{K}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$, wobei dann jedes $x \in X$ aus d reellen oder komplexen Komponenten besteht. Wir werden weiter unten auch Funktionenräume kennenlernen, bei denen die Vektoren Funktionen sind und deren Dimension nicht mehr endlich, sondern unendlich ist. Das Studium der unendlich-dimensionalen Räume ist das eigentliche Ziel dieser Vorlesung, obwohl wir immer wieder zu den endlich-dimensionalen zurückkehren werden.

2. Die Größe $\|x\|$ kann als *Betrag* oder *Länge* des (abstrakten) Vektors x betrachtet werden. Mit diesem Konzept können wir (siehe weiter unten) Begriffe wie die *Offenheit* und *Kompaktkeit* von Mengen, die *Konvergenz* von Folgen oder Reihen sowie die *Stetigkeit* von Abbildungen einführen, die die analogen Konzepte aus *Analysis 1+2* verallgemeinern. Dabei ist es nicht wichtig, ob die Elemente von X Zahlen, Tupel von Zahlen, Funktionen in einer Variablen t oder etwas ganz anderes darstellen.

3. Die Subadditivität ist äquivalent zur <u>Dreiecksungleichung</u>

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$$

   und wird oftmals auch als diese bezeichnet.

4. Auf einem gegebenen Vektorraum können viele verschiedene Normen definiert werden, wobei wir dann die Norm $\|\cdot\|$ oftmals mit Indizes ausstatten. Siehe etwa die p-Normen im $\mathbb{K}^n$.

5. Jeder normierte Raum ist sowohl metrischer Raum als auch topologischer Raum. Siehe dazu weiter unten. Insbesondere wird durch

$$\mathrm{dist}(x,\, \tilde{x}) := \|x - \tilde{x}\|$$

   in natürlicher Weise ein Abstandsbegriff bzw. eine Metrik auf X eingeführt.

6. Auch im komplexen Fall (also für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist $\|x\|$ für $x \neq 0$ immer eine positive reelle Zahl. In der Differentialgeometrie können Normen manchmal auch negative Werte annehmen, aber in der Funktionalanalysis ist dies nicht zugelassen.

7. Die Positivität kann auch wie folgt formuliert werden: Für alle $x \in X$ gilt $\|x\| \geq 0$ sowie die Implikation $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

8. Es gibt auch den Begriff einer <u>Seminorm</u>. Diese erfüllt die Homogenität sowie die Subadditivität, aber anstelle der Positivität gilt nur $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$. Inbesondere kann dann aus $\|x\| = 0$ **nicht** $x = 0$ geschlossen werden.

Definition Zwei Normen $\|\cdot\|_{\mathrm{a}}$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{b}}$ auf demselben Vektorraum X werden <u>äquivalent</u> genannt, falls es zwei positive Konstanten C_{ab}, C_{ba} gibt, sodass die beiden Abschätzungen

$$\|x\|_{\mathrm{a}} \leq C_{\mathrm{ab}} \|x\|_{\mathrm{b}} \,, \qquad \|x\|_{\mathrm{b}} \leq C_{\mathrm{ba}} \|x\|_{\mathrm{a}}$$

für alle $x \in X$ erfüllt sind.

Bemerkungen

1. Der Äquivalenzbegriff für Normen ist reflexiv (d.h. jede Norm ist zu sich selbst äquivalent) und symmetrisch (d.h. eine Norm ist genau dann äquivalent zu einer anderen, wenn die andere äquivalent zu der einen ist). Darüber hinaus gilt auch die Transitivität: Wenn $\|\cdot\|_\mathrm{a}$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\mathrm{b}$ und $\|\cdot\|_\mathrm{b}$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\mathrm{c}$ ist, so ist $\|\cdot\|_\mathrm{a}$ auch äquivalent zu $\|\cdot\|_\mathrm{c}$.

2. Wir werden weiter unten sehen, dass äquivalente Normen denselben Konvergenzbegriff implizieren, d.h. eine Folge konvergiert bzgl. der ersten Norm dann und nur dann, wenn dies auch bzgl. der zweiten gilt.

3. Um die Äquivalenz zweier Normen zu beweisen, müssen wir die Existenz von zwei positiven Konstanten nachweisen. Dabei ist es nicht notwendig (und oftmals auch nicht möglich), die optimalen Werte dieser Konstanten anzugeben.

Theorem (**Hauptsatz zur Äquivalenz von Normen**) Ist die Dimension des Vektorraumes X endlich, so sind je zwei Normen auf X äquivalent.

Beweis *Vorbemerkung*: Wir fixieren eine Basis $e_1, \ldots, e_d$ im Vektorraum X (es gilt also $d = \dim X$) und können jedes $x \in X$ via

$$x = \xi_1 \, e_1 + \ldots + \xi_d \, e_d$$

in bijektiver Weise mit einem Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ identifizieren. Wir betrachten nun die spezielle Norm[2]

$$\|x\|_\# := \|\xi\|_\infty = \max_j \left|\xi_j\right|$$

sowie irgendeine andere Norm $\|\cdot\|$ auf X und zeigen, dass diese äquivalent sind. Die Behauptung ergibt sich dann aus der Transitivität des Äquivalenzbegriffes.

erste Abschätzung: Aus der Subadditivität und der Homogenität von $\|\cdot\|$ folgt

$$\begin{aligned} \|x\| = \|\xi_1 \, e_1 + \ldots + \xi_d \, e_d\| &\leq \|\xi_1 \, e_1\| + \ldots + \|\xi_d \, e_d\| \\ &= |\xi_1| \, \|e_1\| + \ldots + |\xi_d| \, \|e_d\| \\ &\leq \|\xi\|_\infty \, \|e_1\| + \ldots + \|\xi\|_\infty \, \|e_d\| \end{aligned}$$

und damit

$$\|x\| \leq C_1 \, \|x\|_\# \qquad \text{mit} \qquad C_1 := \|e_1\| + \ldots + \|e_d\| \, ,$$

wobei die Konstante C_1 von der Wahl der Basis abhängt und im Allgemeinen nicht optimal sein wird.

zweite Abschätzung: Wir wollen indirekt die Existenz einer reellen Konstanten C_2 zeigen, sodass

$$\|x\|_\# \leq C_2 \, \|x\|$$

für alle $x \in X$ gilt. Als Antithese postulieren wir die Existenz einer Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, sodass

$$\left\|x_n\right\|_\# \geq n \left\|x_n\right\|$$

[2] Siehe auch die allgemeine Definition der p-Normen im $\mathbb{K}^d$.

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Beachte, dass jeder Vektor $x_n \in X$ einem Komponentenvektor $\xi_n = (\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,d}) \in \mathbb{K}^d$ entspricht. Aufgrund der Homogenität können wir dabei annehmen, dass

$$\|x_n\|_\# = 1 \quad \text{und damit} \qquad 0 \leq \|x_n\| \leq 1/n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, denn andernfalls betrachten wir $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|_\infty$ anstelle von x_n. Durch Wahl einer geeigneten Teilfolge (die wir nicht neu bezeichnen) sowie einer Umindizerung der Basis können wir außerdem garantieren, dass

$$\xi_{n,1} = 1$$

erfüllt ist. Nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge können wir mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel sogar die Konvergenz der Folge $\big(\xi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ im Raum $\mathbb{K}^d$ sicherstellen. Insbesondere existieren die Zahlen

$$\xi_{\infty,j} = \lim_{n\to\infty} \xi_{n,j}$$

für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$ im Körper $\mathbb{K}$ sowie ein entsprechender Komponentenvektor $\xi_\infty \in \mathbb{K}^d$, der zu einen Vektor $x_\infty \in X$ gehört, wobei

$$\|x_\infty - x_n\|_\# = \max_{j\in\{1,\ldots,d\}} |\xi_{\infty,j} - \xi_{n,j}| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

nach Konstruktion und aufgrund der Resultate aus *Analysis 2* über die Konvergenz im $\mathbb{K}^d$ gilt. Insgesamt erhalten wir

$$0 \leq \|x_\infty\| \leq \|x_\infty - x_n\| + \|x_n\| \leq C_1\|x_\infty - x_n\|_\# + 1/n \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,.$$

Die Positivität von $\|\cdot\|$ liefert $x_\infty = 0$ und damit $\|\xi_\infty\|_\infty = 0$ bzw.

$$\xi_{\infty,j} = 0$$

für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$, aber das ist ein Widerspruch zu $\xi_{\infty,1} = \lim_{n\to\infty} \xi_{n,1} = 1$. Unsere Annahme muss daher falsch gewesen sein und wir haben die Existenz der Konstanten $C_2 \in \mathbb{R}$ bewiesen. $\square$

Achtung Auf einem unendlich-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$ sind nicht mehr alle Normen paarweise äquivalent. Siehe dazu die nachfolgenden Beispiele. Im Beweis des Theorems ist die Endlichkeit der Dimension an zwei Stellen eingeflossen: Zum einen bei der Wahl der Basis[3] bzw. bei der Darstellung eines Vektors $x \in X$ durch endlich viele Komponenten $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ und zum anderen bei der Verwendung des Satzes von Heine-Borel. Wir werden weiter unten noch genauer verstehen, dass es in einem unendlich-dimensionalen Raum keine Analogon zu diesem Kompakheitsresultat aus *Analysis 2* gibt.

Bemerkung Wir werden später sehen, dass die Bijektion $x \in X \leftrightsquigarrow \xi \in \mathbb{K}^d$ aus dem Beweis des Theorems eine *Isomorphie* zwischen dem normierten Räumen $\big(X, \|\cdot\|_\#\big)$ und $\big(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty\big)$ vermittelt, wobei diese von der Wahl der Basis abhängt.

[3] Wir werden später genauer diskutieren, ob bzw. in welchem Sinne Basen in einem unendlich-dimensionalen Raum existieren.

p-Normen im kartesischen Raum Im Fall von $X = \mathbb{K}^d$ definieren wir für jeden Parameter $p \in [1, \infty)$ die entsprechende p-Norm durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right)^{1/p} ,$$

und im Grenzfall $p = \infty$ setzen wir

$$\|x\|_\infty := \max_{j \in \{1, \dots, d\}} |x_j| \,.$$

Bemerkungen

1. Für $p = 2$ ergibt sich gerade die euklidische Standardnorm, für die es auch ein entsprechendes Skalarprodukt gibt (siehe dazu weiter unten).

2. Die Positivität sowie die Homogenität von $\|\cdot\|_p$ können direkt nachgerechnet werden und die Subadditivität ist gerade die Minkowski-Ungleichung. Siehe *Analysis 2* für einen Beweis im Reellen, der aber analog auch im Komplexen geführt werden kann. Insbesondere ist hier die Bedingung $p \geq 1$ wichtig und die obige Formel liefert für $0 < p < 1$ eben keine Norm.

3. Für jedes $x \in \mathbb{K}^d$ gilt (vgl. wieder *Analysis 2*)

   $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{1/p} \, \|x\|_\infty$$

   und in Kombination mit den analogen Abschätzungen für die q-Norm ergibt sich

   $$\|x\|_p \leq d^{1/p} \, \|x\|_\infty \leq d^{1/p} \, \|x\|_q \,, \qquad \|x\|_q \leq d^{1/q} \, \|x\|_\infty \leq d^{1/q} \, \|x\|_p \,.$$

   Insgesamt erhalten wir explizite Konstanten für die Äquivalenz der p-Norm und der q-Norm, die aber im Fall von $q \neq \infty$ nicht optimal sind.[4]

4. Nach *Analysis 2* gilt auch stets die Hölder-Ungleichung

   $$\sum_{j=1}^{m} |x_j| |y_j| \leq \|x\|_p \, \|y\|_{p'}$$

   für alle $x, y \in \mathbb{K}^d$, wobei $p' \in [1, \infty]$ der konjugierte Exponent zu $p \in [1, \infty]$ ist.[5] Dieser ist durch

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad p' = \frac{p}{p-1}$$

[4] Durch Lösen eines Optimierungsproblems mit Nebenbedingung, also mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel, können wir die scharfe Ungleichung

$$\|x\|_p \leq C_{pq} \|x\|_q \qquad \text{mit} \qquad C_{pq} := \max\left\{1, \, d^{1/p - 1/q}\right\}$$

für alle Exponenten $1 \leq p, q \leq \infty$ herleiten, die analog dann auch mit vertauschtem p und q gilt. Die Gleichheit wird dabei bei entweder bei einem Vielfachen der kartesischen Basisvektoren oder bei einem Vektor mit konstanten Einträgen realisiert.

[5] Das Symbol $'$ hat hier nichts mit Ableitungen zu tun, sondern macht aus einem Exponenten einen anderen.

gegeben, wobei die Sonderregeln

$$1/0 = \infty\,, \qquad 1/\infty = 0$$

vereinbart seien. Insbesondere berechnen wir

$$1' = \infty\,, \qquad (3/2)' = 3\,, \qquad 2' = 2\,, \qquad 3' = 3/2\,, \qquad \infty' = 1$$

sowie ganz allgemein $p = (p')'$.

5. Die Hölder-Ungleichung impliziert die Interpolationsungleichung

$$\|x\|_p \leq \|x\|_1^{1/p}\,\|x\|_\infty^{1/p'}$$

für alle $x \in \mathbb{K}^d$ und alle $p \in [0,\,1]$.

6. In *Analysis 2* hatten wir auch

$$\|x\|_p \quad \xrightarrow{p\to\infty} \quad \|x\|_\infty$$

für jedes feste $x \in \mathbb{K}^d$ gezeigt, d.h. die ∞-Norm ist der Grenzfall der p-Normen. Insbesondere $\|\cdot\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\cdot\|_p$ im Sinne der punktweisen Konvergenz von Funktionen auf X.

***p*-Normen im Raum der stetigen Funktionen** Sei I ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$. Die Menge

$$\mathsf{C}(I;\,\mathbb{K}) := \big\{x : I \to \mathbb{K} \text{ stetig}\big\}$$

ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{K}$-Vektorraum[6] und wir können via

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_I \big|x(t)\big|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

bzw.

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in I}\big|x(t)\big|$$

analoge Normen einführen, wobei $\|\cdot\|_\infty$ auch Maximums- oder Supremumsnorm genannt wird.

[6] Es gilt

$$\big(x + y\big)(t) := x(t) + y(t)\,, \qquad \big(\lambda\,x\big)(t) := \lambda\,x(t)$$

d.h. für Funktionen auf I werden sowohl die Addition als auch die Multiplikation punktweise definiert. Die Ergebnisse aus *Analysis 1* stellen dabei sicher, dass die Funktionen $x+y : I \to \mathbb{K}$ und $\lambda\,x : I \to \mathbb{K}$ beide stetig sind, sofern x und y diese Eigenschaft besitzen. Wir können sogar durch $\big(x\,y\big)(t) - x(t)\,y(t)$ ein Produkt iam Raum der stetigen Funktionen definieren, d.h. $\mathsf{C}(I)$ ist nicht nur Vektorraum, sondern sogar Modul über dem Körper $\mathbb{K}$.

Bemerkungen

1. Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall I ist unser erstes Beispiel für einen Funktionenraum. Wir werden später weitere kennenlernen, wobei wir dann oftmals eine andere Notation für die abhängigen und die unabhängigen Größen verwenden.

2. Die p-Normen sind für stetige Funktionen auf dem Intervall I nicht mehr alle paarweise äquivalent. Die Eigenschaften des Riemann-Integrals implizieren zwar[7]

$$\|x\|_p \leq |I|^{1/p} \, \|x\|_\infty \, ,$$

aber für jedes $p < \infty$ kann es **keine** Konstante C_p geben, sodass

$$\|x\|_\infty \leq C_p \, \|x\|_p$$

für alle stetigen Funktionen $x : I \to \mathbb{K}$ gilt.

Beweis: Wir betrachten das Intervall $I = [-1, +1]$ sowie die Funktionenfolge

$$x_n(t) = \max\{0, \, 1 - n\,|t|\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ im Raum $\mathsf{C}(I)$, wobei der Graph der n-ten Funktion x_n gerade ein „Zelt“ mit Höhe 1 und Basislänge $2/n$ darstellt (siehe das Bild). Durch direkte Rechnungen zeigen wir

$$\|x_n\|_\infty = 1 \, , \qquad \|x_n\|_p = \left(2 \int_0^{1/n} (n\,t)^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} = \left(\frac{2}{(p+1)\,n} \right)^{1/p}$$

und schließen mit $n \to \infty$, dass für stetige Funktionen auf dem Intervall I das Verhältnis $\|x\|_\infty \, / \, \|x\|_p$ beliebig groß werden kann. $\square$

3. Die Hölder-Ungleichung und die Interpolationsungleichung gelten sinngemäß auch im Raum der stetigen Funktionen.

4. Der kartesische Raum $\mathbb{K}^d$ kann mittels der Identifikation

$$x_j = x(j)$$

in naheliegender Weise als Funktionenraum interpretiert werden, wobei der Definitionsbereich der Funktionen nicht mehr ein reelles Intervall, sondern die diskrete Menge $I = \{1, \ldots, d\}$ ist.

Merkregel: Viele normierte Räume können als Funktionenräume betrachtet werden, wobei verschiedene Definitionsbereiche zugrunde liegen und mehr oder weniger starke Forderungen an die Funktionen gemacht werden (etwa Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit).

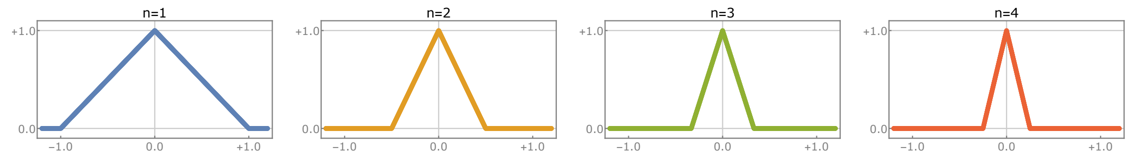


Abbildung Eine Folge von skalierten Zeltfunktionen zeigt, dass die p-Normen im Raum der stetigen Funktionen nicht mehr paarweise äquivalent sind.

[7] Wir bezeichnen mit $|I|$ die Länge des Intervalles I.

Vorlesung 02 : 27. Oktober

Definition Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X über dem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\langle\cdot,\,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$, die den folgenden Bedingungen genügt.

1. *Positive Definitheit*: Es gilt $\langle 0,\,0\rangle = 0$ sowie
$$\langle x,\,x\rangle > 0$$
für jedes $x \in X$ mit $x \neq 0$.

2. *Sesquilinearität*: Die Formeln
$$\big\langle \lambda\,x + \tilde{\lambda}\,\tilde{x},\,y\big\rangle = \overline{\lambda}\,\big\langle x,\,y\big\rangle + \overline{\tilde{\lambda}}\,\big\langle \tilde{x},\,y\big\rangle\,, \qquad \big\langle x,\,\mu\,y + \tilde{\mu}\,\tilde{y}\big\rangle = \mu\,\big\langle x,\,y\big\rangle + \tilde{\mu}\,\big\langle x,\,\tilde{y}\big\rangle$$
sind für alle $x,\,\tilde{x},\,y,\,\tilde{y}$ aus X und alle $\lambda,\,\tilde{\lambda},\,\mu,\,\tilde{\mu} \in \mathbb{K}$ erfüllt.

3. *Hermitizität*: Es gilt
$$\big\langle x,\,y\big\rangle = \overline{\big\langle y,\,x\big\rangle}$$
für alle $x,\,y \in X$.

Bemerkungen

1. Die Sesquilinearität kann alternativ auch wie folgt formuliert bzw. bewiesen werden: Es gelten stets die beiden Additivitätsformeln
$$\langle x + \tilde{x},\,y\rangle = \langle x,\,y\rangle + \langle \tilde{x},\,y\rangle\,, \qquad \langle x,\,y + \tilde{y}\rangle = \langle x,\,y\rangle + \langle x,\,\tilde{y}\rangle$$
sowie die skalaren Faktorgesetze
$$\langle \lambda\,x,\,y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x,\,y\rangle\,, \qquad \langle x,\,\lambda\,y\rangle = \lambda\,\langle x,\,y\rangle\,.$$

2. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spielt die komplexe Konjugation keine Rollle. Insbesondere meint Sesquilinearität gerade Bilinearität und Hermitität gerade Symmetrie.

3. Im Komplexen ist $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ bei uns *linear* im zweiten Argument, aber *semilinear* im ersten Argument, da dort jeder Skalarfaktor im Inneren der Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl von Außen entspricht. Insbesondere gilt zwar
$$\langle 2\,x,\,y\rangle = 2\,\langle x,\,y\rangle \qquad \langle x,\,2\,y\rangle = 2\,\langle x,\,y\rangle$$
aber
$$\langle \mathtt{i}\,x,\,y\rangle = -\mathtt{i}\,\langle x,\,y\rangle \qquad \langle x,\,\mathtt{i}\,y\rangle = +\mathtt{i}\,\langle x,\,\mathtt{i}\,y\rangle$$
wegen $\overline{2} = 2$ und $\overline{\mathtt{i}} = -\mathtt{i}$.

   Achtung: Manche Autoren fordern die Linearität im ersten und die Semilinearität im zweiten Argument. Dadurch ändern sich dann die Details in vielen Formeln.

4. In der Literatur wird oftmals
$$(x,\, y) \qquad \text{oder} \qquad \langle x|y\rangle$$
anstelle von $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ geschrieben. Die zweite Notation geht auf Dirac zurück und spielt besonders in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Sie beruht auf den Konzepten *Bra* $\langle x|$ und *Ket* $|y\rangle$, die den linken bzw. rechten Teil der *Bracket* $\langle x|y\rangle$ bezeichnen.

5. Wir werden weiter unten dieselbe Bezeichnung für die *Dualpaarung* verwenden, die das Konzept eines Skalarproduktes verallgemeinert. Insbesondere sind dann x und y nicht mehr aus demselben, sondern aus zueinander dualen Räumen zu wählen.

Beispiele

1. Im $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$ wird durch
$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j\, y_j \qquad \text{bzw.} \qquad \langle x,\, y\rangle = \sum_{j=1}^{d} \overline{x_j}\, y_j$$
das Standardskalarprodukt definiert, das jeweils via
$$\langle x,\, x\rangle = \|x\|_2^2$$
die euklidische Standardnorm (also die 2-Norm) erzeugt.

2. Die entsprechenden Formeln im Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall I mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ lauten
$$\langle x,\, y\rangle = \int_I x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{bzw.} \qquad \langle x,\, y\rangle = \int_I \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t\,,$$
wobei die Existenz der Integrale durch die Stetigkeit der Funktionen x und y sichergestellt ist.

Lemma (**Normen und Skalarprodukte**) Jedes Skalarprodukt erzeugt via
$$\|x\| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$$
eine entsprechende Norm auf X, wobei dann die Cauchy-Schwarz-Ungleichung
$$\big|\langle x,\, y\rangle\big| \le \|x\|\,\|y\|$$
sowie die Parallelogramm-Identität
$$\tfrac{1}{2}\,\|x+y\|^2 + \tfrac{1}{2}\,\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
für alle $x\,, y \in X$ erfüllt sind. Umgekehrt gilt: Erfüllt eine Norm die Parallelogramm-Identität für alle $x\,, y \in X$, so existiert ein erzeugendes Skalarprodukt.

Beweis *Eigenschaften der erzeugten Norm*: Die Positivität und die Homogenität der von $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ erzeugten Norm $\|\cdot\|$ ergeben sich unmittelbar aus den abtrakten Eigenschaften eines Skalarproduktes. Wir zeigen nun die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Im Fall von $y=0$ ist diese trivial, denn $\langle x,\,0\rangle = \langle x,\,2\cdot 0\rangle = 2\,\langle x,\,0\rangle$ impliziert $\langle x,\,0\rangle = 0$ für jedes $x\in X$. Andernfalls gilt $\|y\|^2 = \langle y,\,y\rangle > 0$ sowie

$$\begin{aligned} 0 \le \langle x-\lambda\,y,\,x-\lambda\,y\rangle &= \langle x,\,x\rangle + \langle\lambda\,y,\,\lambda\,y\rangle - \langle x,\,\lambda\,y\rangle - \langle\lambda\,y,\,x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \lambda\,\overline{\lambda}\,\|y\|^2 - \lambda\langle x,\,y\rangle - \overline{\lambda}\,\overline{\langle x,\,y\rangle} \end{aligned}$$

für alle $x\in X$ und $\lambda\in\mathbb{K}$. Mit der speziellen Wahl

$$\lambda = \frac{\overline{\langle x,\,y\rangle}}{\langle y,\,y\rangle}$$

ergibt sich

$$\lambda\,\overline{\lambda}\,\|y\|^2 = \lambda\,\langle x,\,y\rangle = \overline{\lambda}\,\overline{\langle x,\,y\rangle} = \frac{\langle x,\,y\rangle\,\overline{\langle x,\,y\rangle}}{\langle y,\,y\rangle} = \frac{\big|\langle x,\,y\rangle\big|^2}{\|y\|^2}$$

und die gewünschte Abschätzung folgt nach Einsetzen mittels elementarer Rechnungen. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung impliziert insbesondere die Subadditivität von $\|\cdot\|$ via

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y,\,x+y\rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,\,y\rangle + \langle y,\,x\rangle \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|\,\|y\| + \|y\|\,\|x\| = \big(\,\|x\| + \|y\|\,\big)^2 \end{aligned}$$

und die Rechnung

$$\begin{aligned} \|x{+}y\|^2 + \|x{-}y\|^2 &= \langle x+y,\,x+y\rangle + \langle x-y,\,x-y\rangle \\ &= \Big(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,\,y\rangle + \langle y,\,x\rangle\Big) - \Big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,\,y\rangle - \langle y,\,x\rangle\Big) \\ &= 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \end{aligned}$$

liefert schließlich die Parallelogramm-Identität.

erzeugendes Skalarproduktes für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, Teil 1: Wir definieren $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ mittels der reellen Polarisationsformel

$$\langle x,\,y\rangle := \tfrac14\,\|x+y\|^2 - \tfrac14\,\|x-y\|^2$$

und zeigen mit einfachen Rechnungen die positive Definitheit sowie die Symmetrie. Außerdem ergibt sich das Hilfsresultat

$$\begin{aligned} \langle x+\tilde{x},\,y\rangle &= \tfrac14\,\|x+\tilde{x}+y\|^2 - \tfrac14\,\|x+\tilde{x}-y\|^2 \\ &= \tfrac14\,\big\|(x+\tfrac12\,y) + (\tilde{x}+\tfrac12\,y)\big\|^2 - \tfrac14\,\big\|(x-\tfrac12\,y) + (\tilde{x}-\tfrac12\,y)\big\|^2 \\ &= \Big(\tfrac12\,\big\|x+\tfrac12\,y\big\|^2 + \tfrac12\,\big\|\tilde{x}+\tfrac12\,y\big\|^2 - \tfrac14\,\|x-\tilde{x}\|^2\Big) \\ &\quad - \Big(\tfrac12\,\big\|x-\tfrac12\,y\big\|^2 + \tfrac12\,\big\|\tilde{x}-\tfrac12\,y\big\|^2 - \tfrac14\,\|x-\tilde{x}\|^2\Big) \\ &= \tfrac12\,\Big(\,\big\|x+\tfrac12\,y\big\|^2 - \big\|x-\tfrac12\,y\big\|^2\,\Big) + \tfrac12\,\Big(\,\big\|\tilde{x}+\tfrac12\,y\big\|^2 - \big\|\tilde{x}-\tfrac12\,y\big\|^2\,\Big) \\ &= 2\,\big\langle x,\,\tfrac12\,y\big\rangle + 2\,\big\langle\tilde{x},\,\tfrac12\,y\big\rangle \end{aligned}$$

für alle $x, \tilde{x}, y \in X$ aus der Parallelogramm-Identität. Die Spezialfälle $\tilde{x} = 0$ bzw. $x = 0$ liefern

$$\langle x,\, y\rangle = 2\left\langle x,\, \tfrac{1}{2}\,y\right\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \langle \tilde{x},\, y\rangle = 2\left\langle \tilde{x},\, \tfrac{1}{2}\,y\right\rangle,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\langle 0,\, y\rangle = 0$ direkt aus Polarisationsformel folgt. Wir erhalten schließlich

$$\langle x + \tilde{x},\, y\rangle = \langle x,\, y\rangle + \langle \tilde{x},\, y\rangle$$

nach Einsetzen der Spezialfälle in den allgemeinen Fall der Hilfsformel.

erzeugendes Skalarproduktes für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Teil 2: Die Additivität bzgl. des ersten Arguments impliziert

$$\langle m\,x,\, y\rangle = \Big\langle \underbrace{x + \ldots + x}_{m \text{ mal}},\, y\Big\rangle = \underbrace{\langle x,\, y\rangle + \ldots + \langle x,\, y\rangle}_{m \text{ mal}} = m\,\langle x,\, y\rangle$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und analog zeigen wir[8]

$$\langle x,\, y\rangle = \Big\langle \underbrace{\frac{x}{n} + \ldots + \frac{x}{n}}_{n \text{ mal}},\, y\Big\rangle = \underbrace{\Big\langle \frac{x}{n},\, y\Big\rangle + \ldots + \Big\langle \frac{x}{n},\, y\Big\rangle}_{n \text{ mal}} = n\,\Big\langle \frac{x}{n},\, y\Big\rangle$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei jede dieser beiden Formeln für beliebige $x,\, y \in X$ gilt. Insbesondere ergibt sich

$$\Big\langle \frac{m}{n}\,x,\, y\Big\rangle = \Big\langle m\,\frac{x}{n},\, y\Big\rangle = m\,\Big\langle \frac{x}{n},\, y\Big\rangle = \frac{m}{n}\,\langle x,\, y\rangle$$

und wir haben bewiesen, dass das skalare Faktorgesetz

$$\langle \lambda\,x,\, y\rangle = \lambda\,\langle x,\, y\rangle$$

für alle $x,\, y \in X$ und jeden rationalen Faktor $\lambda \in \mathbb{Q}$ erfüllt ist. Ist nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger irrationaler Faktor, so existiert eine approximierende Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$, und unter Verwendung einer nahrhaften Null leiten wir

$$\begin{aligned} \langle \lambda\,x,\, y\rangle - \lambda\,\langle x,\, y\rangle &= \langle \lambda\,x - \lambda_k\,x,\, y\rangle + \lambda_k\,\langle x,\, y\rangle - \lambda\,\langle x,\, y\rangle \\ &= \big\langle (\lambda - \lambda_k)\,x,\, y\big\rangle + (\lambda_k - \lambda)\,\langle x,\, y\rangle \end{aligned}$$

aus der Additivität sowie dem rationalen Faktorgesetz her. Mit der reellen Dreiecksungleichung sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \le \big|\langle \lambda\,x,\, y\rangle - \lambda\,\langle x,\, y\rangle\big| &\le \big\|(\lambda - \lambda_k)\,x\big\|\,\big\|y\big\| + \big|\lambda - \lambda_k\big|\,\big\|x\big\|\,\|y\| \\ &\le 2\,\big|\lambda - \lambda_k\big|\big\|x\big\|\big\|y\big\| \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0\,, \end{aligned}$$

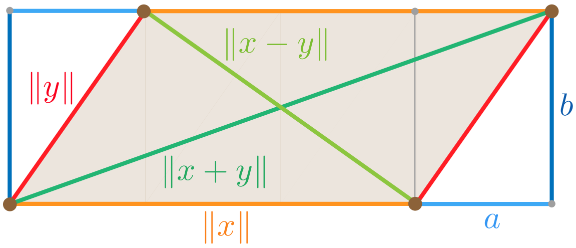
d.h. das skalare Faktorgesetz gilt sogar für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Insgesamt haben wir die Linearität von $\langle\cdot,\, \cdot\rangle$ bzgl. des ersten Arguments gezeigt und die Linearität bzgl. des zweiten Arguments folgt aus der Symmetrie von $\langle\cdot,\, \cdot\rangle$.

erzeugendes Skalarproduktes für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wir definieren $\langle\cdot,\, \cdot\rangle$ diesmal durch die komplexe Polarisationsformel

$$\langle x,\, y\rangle := \tfrac{1}{4}\,\|x + y\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\|x - y\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\mathtt{i}\,\|x + \mathtt{i}\,y\|^2 + \tfrac{1}{4}\,\mathtt{i}\,\|x - \mathtt{i}\,y\|^2$$

und verwenden analoge Argumente. □

[8] Die Division von zwei Elementen aus X ist zwar im Allgemeinen nicht definiert, aber da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, ist x/n für jedes $x \in X$ als $n^{-1}x$ wohldefiniert.



$$
\begin{array}{rcccl}
a^2 & + & b^2 & = & \|y\|^2 \\
(\|x\|+a)^2 & + & b^2 & = & \|x+y\|^2 \\
(\|x\|-a)^2 & + & b^2 & = & \|x-y\|^2
\end{array}
$$

Abbildung In der euklidischen Ebene kann die Parallelogramm-Identität leicht mit einer dreifachen Anwendung des Satzes von Pythagoras (die Gleichungen rechts) sowie elementaren Umformungen (Addition der zweiten und dritten sowie Einsetzen der ersten Gleichung) hergeleitet werden.

Bemerkungen

1. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung werden wir sehr häufig verwenden.

2. Für viele Normen gibt es kein erzeugendes Skalarprodukt, da die entsprechende Parallelogramm-Identität nicht für alle $x, y \in X$ erfüllt ist. Siehe dazu die Übungen.

3. Es gilt die nützliche Formel
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\langle x,\, y\rangle\right),$$
die sich aus der Nebenrechnung
$$\langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,\, x\rangle + \langle y,\, y\rangle + \langle x,\, y\rangle + \overline{\langle x,\, y\rangle}$$
ergibt.

4. Es kann sein, dass von zwei äquivalenten Normen auf X die eine, aber nicht die andere von einem Skalarprodukt erzeugt wird. So sind alle p-Normen im $\mathbb{K}^d$ paarweise äquivalent, aber nur für die 2-Norm gibt es ein entsprechendes Skalarprodukt.

Konvergenz in normierten Räumen

Definition (**Konvergenz von Folgen in normierten Räumen**) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) gegen einen Grenzwert $x_\infty \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass
$$\|x_n - x_\infty\| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n > N$$
gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ und nennen x_∞ den Grenzwert.

Bemerkungen

1. *Äquivalente Charakterisierung*: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert genau dann für $n \to \infty$ gegen x_∞, wenn
$$\|x_n - x_\infty\| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$
im Sinne der Konvergenz reeller Zahlen gilt (Übungsaufgabe). □

2. Wie schon in *Analysis 1+2* gilt: Nicht jede Folge besitzt einen Grenzwert, aber wenn sie konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig (Übungsaufgabe).

3. Analog zu *Analysis 1* können wir die Konvergenz von Reihen bzw. unendlichen Summen über die Konvergenz von Partialsummen definieren. Wir werden dies sowie einen entsprechenden absoluten Konvergenzbegriff später noch genauer diskutieren.

4. Es gibt alternative, nicht äquivalente Konvergenzbegriffe, die nicht auf der Norm, sondern auf anderen Konzepten beruhen. Ein wichtiges Beispiel ist die *schwache Konvergenz*, die wir später genauer studieren werden. Die Konvergenz im Sinne der obigen Definition wird oftmals auch starke Konvergenz oder Normkonvergenz genannt. In Funktionenräumen gibt es darüber hinaus die *punktweise Konvergenz*, die wieder ein anderes Konzept widerspiegelt (siehe *Analysis 1+2*).

5. *Achtung*: Der Konvergenzbegriff hängt von der Norm ab.

   Beispiel: Wir betrachten das Einheitsintervall $I = [0,\,1]$ sowie die durch

   $$x_n(t) = t^n$$

   definierte Folge $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger und reellwertiger Funktionen auf I. Es gilt also $x_n \in \mathsf{C}(I;\,\mathbb{R})$. Für jeden festen Exponenten $1 \le p < \infty$ berechnen wir

   $$\|x_n - 0\|_p = \left(\int_0^1 t^{n\,p}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{n\,p+1}\right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   d.h. x_n konvergiert für $n \to \infty$ gegen die Nullfunktion $x_\infty = 0$ bzgl. der p-Norm. Für $p = \infty$ gilt jedoch

   $$\|x_n - 0\|_\infty = 1$$

   wegen

   $$\big|x_n(1)\big| = 1 \ge \big|x_n(t)\big|\,,$$

   d.h. es gibt keine Konvergenz gegen x_∞ bzgl. der ∞-Norm.[9]

   Lemma: Sind $\|\cdot\|_{\mathrm{a}}$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{b}}$ zwei äquivalente Normen, so gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\|_{\mathrm{a}} = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\|_{\mathrm{b}} = 0\,.$$

   Insbesondere sind die Konvergenzen bzgl. $\|\cdot\|_{\mathrm{a}}$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{b}}$ zueinander äquivalent.

6. Die Resultate aus *Analysis 1+2* sowie der obige Hauptsatz über äquivalente Normen implizieren die folgenden Aussage im $\mathbb{K}^d$, die bzgl. jeder Norm gilt: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $x_n = (x_{n,1},\,\ldots,\,x_{n,d})$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|$ genau dann gegen einen Grenzvektor $x_\infty = (x_{\infty,1},\,\ldots,\,x_{\infty,d}) \in \mathbb{K}^d$, wenn sie *komponentenweise konvergiert*, d.h. wenn für jedes $j \in \{1,\,\ldots,\,d\}$ die Zahlenfolge $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_{\infty,j}$ konvergiert.

[9] Da die Funktionenfolge x_n punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergiert, kann es keine Teilfolge gegeben, die bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert. Wir werden das später noch genauer verstehen.

Beispiel: Die vektorielle Konvergenz

$$x_n = \begin{pmatrix} \sin(1/n) \\ \dfrac{(1+n)^2}{-1+3\,n^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

gilt bzgl. jeder Norm im $\mathbb{R}^2$, eben weil die ersten und die zweiten Komponenten im Sinne reeller Zahlen konvergieren.

Achtung: In einem unendlich-dimensionalen Vektorraum gibt es kein analoges Resultat.

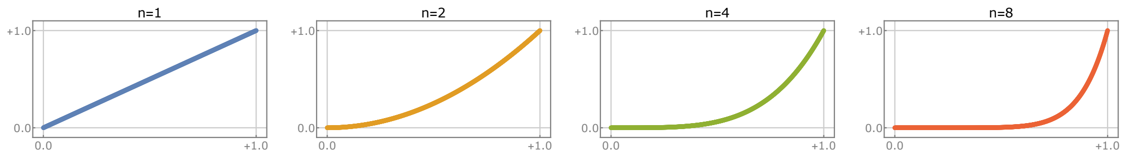


Abbildung Die Monome $x_n(t) = t^n$ konvergieren auf dem Einheitsintervall bzgl. jeder p-Norm mit $p \in [1, \infty)$ gegen die Nullfunktion, aber nicht bzgl. der ∞-Norm.

Lemma (**Konvergenz in Norm impliziert Konvergenz der Norm**) In jedem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gilt die Implikation

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x_\infty\|\,,$$

wobei links eine Konvergenz bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ und rechts eine Konvergenz reeller Zahlen steht.

Beweis Aus der Subadditivität der Norm ergibt sich

$$\|x_n\| - \|x_\infty\| \le \|x_n - x_\infty\| \qquad \text{sowie} \qquad \|x_\infty\| - \|x_n\| \le \|x_\infty - x_n\| = \|x_n - x_\infty\|$$

und insgesamt

$$\big|\|x_n\| - \|x_\infty\|\big| \le \|x_n - x_\infty\|\,.$$

Die Behauptung folgt nun mithilfe der ersten der vorangegangenen Bemerkungen. □

Achtung Die umgekehrte Aussage ist falsch, wobei dies leicht mit Gegenbeispielen aus dem $\mathbb{R}^2$ begründet werden kann (Übungsaufgabe).

Definition Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchy-Folge (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad m,\, n > N$$

gilt. Der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.[10]

Sprechweise Jeder vollständige normierte Raum wird Banach-Raum genannt. Ist die Norm $\|\cdot\|$ sogar von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ erzeugt, so sprechen wir von einem Hilbert-Raum.

[10] Alternativ können wir die strikten Ungleichungen durch nicht-strikte ersetzen.

Beispiele

1. Der $\mathbb{K}^d$ ist bgl. jeder Norm ein Banach-Raum und bzgl. des euklidischen Norm sogar ein Hilbert-Raum.

2. Jeder endlich-dimensionale normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig, wobei sich dies aus dem Theorem zur Äquivalenz von Normen sowie der Insomorphie zum $\mathbb{K}^d$ mit $d = \dim X < \infty$ ergibt.

3. Der Raum der stetigen Funktionen auf einem kompakten Interval I ist genau dann vollständig bzgl. der p-Norm, wenn $p = \infty$ gilt. Die Vollständigkeit bzgl. der ∞-Norm werden wir weiter unten beweisen. Die Nichtvollständigkeit bzgl. jeder anderen p-Norm kann mit konkreten Funktionenfolgen begründet werden.

   Beispiel Auf dem Intervall $I = [-1, +1]$ betrachten wir die die Funktionen

   $$x_n(t) := \tanh(n\,t)\,.$$

   Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}(I;\,\mathbb{K})$ konvergiert punktweise[11] gegen die Signumsfunktion

   $$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{for} \quad t < 0, \\ 0 & \text{for} \quad t = 0, \\ +1 & \text{for} \quad t > 0, \end{cases}$$

   aber diese Grenzfunktion ist nicht stetig auf I. Außerdem gilt

   $$\begin{aligned} \|x_n - \operatorname{sgn}\|_p &= \left(\int_{-1}^{+1} \big|x_n(t) - \operatorname{sgn}(t)\big|\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = \left(2\int_0^1 \big(1 - \tanh(n\,t)\big)\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{2}{n}\int_0^n \big(1 - \tanh(s)\big)\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \leq C\,n^{-1/p} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0 \end{aligned}$$

   mit $C^p := \left(2\int_0^\infty \big(1 - \tanh(s)\big)\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}$, wobei wir die Monotonie- und Symmetrieeigenschaften des Tangens hyperbolicus sowie die Transformationsformel für eindimensionale Riemann-Integrale mit der Substitution $s = n\,t$ verwendet haben. Insbesondere konvergiert x_n für $n \to \infty$ gegen sgn in der p-Norm und ist wegen

   $$\|x_n - x_m\|_p \leq \|x_n - \operatorname{sgn}\|_p + \|x_m - \operatorname{sgn}\|_p \leq C\left(n^{-1/p} + m^{-1/p}\right)$$

   eine entsprechende Cauchy-Folge. Die Grenzfunktion liegt aber eben nicht in $\mathsf{C}(I)$, sondern in einem größeren Raum, den wir später als den Lebesgue-Raum $\mathsf{L}^p(I)$ identifizieren werden.[12]

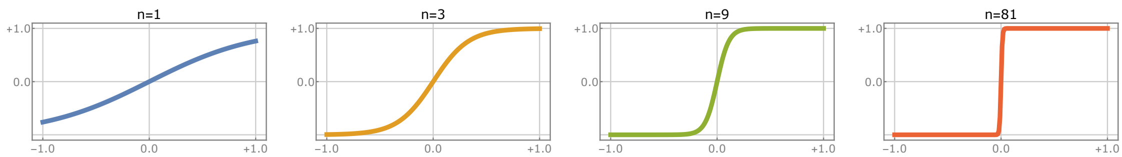


Abbildung Die Skalierung des Tangens hyperbolicaus zeigt, dass der Raum der stetigen Funktionen für $1 \leq p < p$ nicht vollständig bzgl. der p-Norm ist. Er ist jedoch vollständig bzgl. der ∞-Norm.

[11] Es gilt also $\operatorname{sgn}(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ für jedes feste t.

[12] Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist übrigens keine Cauchy-Folge bzgl. der ∞-Norm und wir können mit nur wenig Aufwand für jedes $m \in \mathbb{N}$ zeigen, dass

$$\|x_n - x_m\|_\infty \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 1$$

im Sinne der Konvergenz reeler Zahlen gilt.

Bemerkungen

1. Ganz analog zu *Analysis 1* können wir zeigen, dass jede konvergente Folge auch Cauchy-Folge ist.

2. Wir werden sehen, dass die Theorie der Hilbert-Räume deutlich einfacher als die der Banach-Räume ist.

3. Es gibt auch den Begriff *Prähilbertraum*, bei dem die Norm zwar von einem Skalarprodukt erzeugt wird, aber nicht unbedingt vollständig ist. In diesem Sinn ist jeder normierte Raum ein *Präbanachraum*. Jeder nichtvollständige normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ kann durch eine abstrakte Universalkonstruktion zu einem Banachraum $\tilde{X}$ erweitert werden, wobei wir diesen als die *Abschließung von* X bezeichnen. Die Konstruktion verallgemeinert die Ideen, mit denen in der die reellen Zahlen aus den rationalen gewonnen (oder „konstruiert“) werden können, d.h. die Elemente des erweiterten Raumes sind eigentlich Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in X, wobei jedes $x \in X$ der Klasse aller Folgen aus X entspricht, die gegen x konvergieren. Die Gestalt des erweiterten Raumes $\tilde{X}$ wird dabei von der Norm $\|\cdot\|$ abhängen.

Vorlesung 03 : 02. November

1.2 Topologie normierter Räume

Vorbemerkung Wir stellen in diesem Abschnitt wichtige Aussagen über offene und abgeschlossene Mengen in einem normierten Raum zusammen, wobei die meisten Definitionen und Resultate schon in *Analysis 2* im Kontext metrischer Räume formuliert und bewiesen wurden. Im Folgenden ist — sofern nicht anderes explizit vereinbart wird — X immer ein beliebiger Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ist eine gegebene Norm.

Kugeln und Sphären Wir bezeichnen mit

$$\overline{B}_\varrho(x_\#) := \big\{x \in X \,:\, \|x - x_\#\| \le \varrho\big\} \qquad \text{bzw.} \qquad B_\varrho(x_\#) := \big\{x \in X \,:\, \|x - x_\#\| < \varrho\big\}$$

die abgeschlossene bzw. offene Kugel mit Radius $\varrho > 0$ und Mittelpunkt $x_\#$. Die Menge

$$S_\varrho(x_\#) = \overline{B}_\varrho(x_\#) \setminus B_\varrho(x_\#) = \big\{x \in X \,:\, \|x - x_\#\| = \varrho\big\}$$

bezeichnet die entsprechende Sphäre.[13]

Bemerkung: Wenn wir mit mehreren Normen parallel arbeiten, so müssen wir abgewandelte Bezeichnungen verwenden, in denen zusätzlich die Abhängigkeit von der Norm kenntlich gemacht wird.

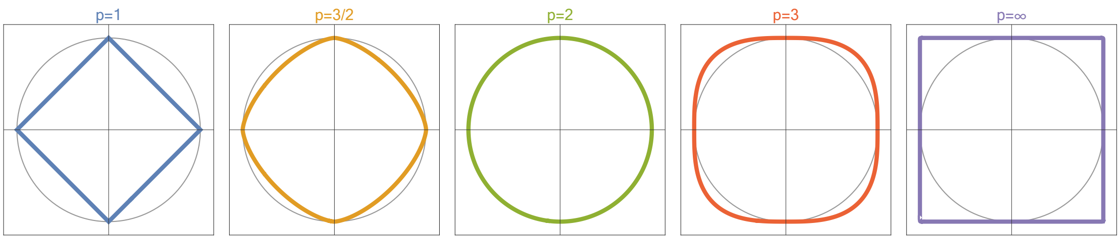


Abbildung Die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^2$ für verschiedene p-Normen, wobei der euklidische Kreis mit $p = 2$ jeweils grau dargestellt ist. Die Äquivalenz der p-Norm und der q-Norm folgt letztlich aus der Beobachtung, dass jeder offene p-Ball um einen Punkt $x_\#$ einen offenen q-Ball um $x_\#$ enthält und umgekehrt.

Definition Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt

1. offen in X, falls für jedes $x \in U$ ein Radius $\varepsilon > 0$ existiert, sodass die Kugel $B_\varepsilon(x)$ ganz in U liegt,
2. abgeschlossen in X, falls die Komplementmenge $X \setminus U$ offen ist.

Bemerkungen

1. Ist U offen und $x \in U$ ein Punkt in U, so nennen wir U eine offene Umgebung von x.
2. *Mengen sind keine Türen*: Viele Mengen sind weder abgeschlossen noch offen.

[13] B und S beziehen sich auf '*ball*' und '*sphere*'. Deutschsprachige Mathematiker nennen daher Kugeln manchmal auch *Bälle*.

3. Die Mengen $\emptyset$ und X sind (in einem normierten Raum) die einzigen beiden Mengen, die sowohl offen und als abgeschlossen sind.

4. Die Konzepte *offene* und *abgeschlossene* Mengen sind von zentraler Bedeutung in der modernen Mathematik. Sie bilden die Grundlage der *Topologie*.

5. Die Hausdorffsche Trennungseigenschaft besagt, dass es zu je zwei verschiedenen Punkten x, $y \in X$ immer zwei offene Mengen U, $V \subset X$ gibt, sodass
$$x \in U\,, \qquad y \in V\,, \qquad U \cap V = \emptyset$$
gilt. In der Tat, wir können zum Beispiel immer $U = B_\varrho(x)$ und $V = B_\varrho(y)$ mit $\varrho = \frac{1}{3}\,\|x-y\|$ wählen.

Beispiele

1. Jede offene Kugel $B_\varrho(x_\#)$ ist offen.[14]

   Beweis: Sei $x \in B_\varrho(x_\#)$ beliebig und sei ε ein Radius mit $0 < \varepsilon < \varrho - \|x - x_\#\|$. Für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ gilt dann $\|y - x_\#\| \leq \|y - x\| + \|x - x_\#\| < \varepsilon + \|x - x_\#\| < \varrho$ und damit $y \in B_\varrho(x_\#)$. Damit haben wir $B_\varepsilon(x) \subset B_\varrho(x_\#)$ gezeigt. $\square$

2. Jede abgeschlossene Kugel $\overline{B}_\varrho(x_\#)$ ist abgeschlossen.

   Beweis: Für beliebiges $x \in X \setminus \overline{B}_\varrho(x_\#)$ wählen wir ε mit $0 < \varepsilon < \|x - x_\#\| - \varrho$. Jeder Punkt $y \in B_\varepsilon(x)$ erfüllt $\|y - x_\#\| > \|x - x_\#\| - \|x - y\| > (\varepsilon + \varrho) - \varepsilon > \varrho$ und gehört damit auch zu $X \setminus \overline{B}_\varrho(x_\#)$. Insbesondere ist das Komplement von $\overline{B}_\varrho(x_\#)$ offen in X. $\square$

3. Jede Sphäre $S_\varrho(x_\#)$ ist abgeschlossen, aber nicht offen. Das Gleiche gilt für die Einpunktmenge $\{x_\#\}$, die wir auch als (entartete) Sphäre vom Radius 0 ansehen können.

4. *Ausblick*: Ist die (lineare oder nichtlineare) skalare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so sind für jeden fixierten Wert $c \in \mathbb{R}$ die Mengen
$$\big\{x \in X \,:\, f(x) < c\big\}\,, \qquad \big\{x \in X \,:\, f(x) > c\big\}$$
beide offen, wohingegen jede der drei Mengen
$$\big\{x \in X \,:\, f(x) \leq c\big\}\,, \qquad \big\{x \in X \,:\, f(x) = c\big\}\,, \qquad \big\{x \in X \,:\, f(x) \geq c\big\}$$
abgeschlossen ist. Für eine unstetige Funktion f sind diese Aussagen jedoch im Allgemeinen falsch.

5. Sind $\|\cdot\|_{\mathrm{a}}$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{b}}$ zwei äquivalente Normen auf X, so ist eine Menge $U \subseteq X$ genau dann offen bzw. abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_{\mathrm{a}}$, wenn sie dieselbe Eigenschaft bzgl. $\|\cdot\|_{\mathrm{b}}$ besitzt (Übungsaufgabe). Bei nicht-äquivalenten Normen ist dies jedoch im Allgemeinen nicht mehr richtig.

[14] Diese Aussage klingt tautologisch, aber wir müssen erst zeigen, dass die Formel für eine offene Kugel wirklich eine offene Menge im Sinne der Definition beschreibt bzw. dass unsere Bezeichnungen „offene Kugel“ sowie „offene Menge“ konsistent sind.

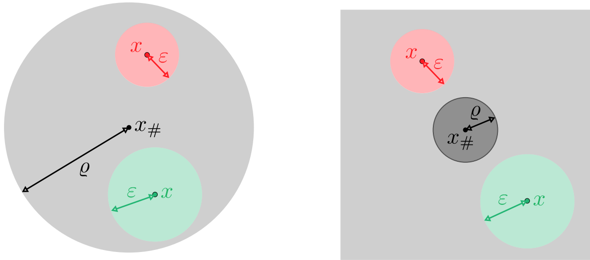


Abbildung *Links*: Die offene Kugel $B_\varrho(x_\#)$ (grau, hier dargestellt im $\mathbb{R}^2$ und bzgl. der euklidischen Standardnorm) ist offen, denn mit jedem ihrer Punkte x (rot oder grün) enthält sie auch eine kleine Kugel um diesen Punkt. Eine analoge Aussage gilt in jedem normierten Raum. *Rechts*: Das Komplement (hellgrau) der abgeschlossenenen Kugel $\overline{B}_\varrho(x_\#)$ (dunkelgrau) ist auch offen.

Lemma (**Offenheit/Abgeschlossenheit und Mengenoperationen**) Es gelten die folgenden Aussagen:

1a. Die Vereinigung *beliebig* vieler offener Mengen ist offen.

1b. Der Durchschnitt *endlich* vieler offener Mengen ist offen.

2a. Die Vereinigung *endlich* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

2b. Der Durchschnitt *beliebig* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Über den Durchschnitt unendlich vieler offener oder die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen kann im Allgemeinen keine Aussage getroffen werden.

Beweis *Teil 1a*: Seien L irgendeine Indexmenge[15] und U_l für jedes $l \in L$ eine offene Menge in X. Außerdem sei ein Punkt $x_\# \in \bigcup_{l\in L} U_l$ beliebig fixiert. Dann existiert mindestens ein $l_\# \in L$ mit $x \in U_{l_\#}$ und — da $U_{l_\#}$ offen ist — ein Radius $\varepsilon_\#$, sodass die Kugel $B_{\varepsilon_\#}(x_\#)$ zu $U_{l_\#}$ und damit auch zu $\bigcup_{l\in L} U_l$ gehört.

Teil 1b: Sei $L = \{1, \ldots, k\}$ eine endliche Indexmenge und seien $U_1, \ldots, U_k$ offene Mengen in X. Ist $x_\# \in \bigcap_{l\in L} U_l = U_1 \cap \ldots \cap U_k$ beliebig fixiert, so existiert für jedes l ein Radius ε_l mit $B_{\varepsilon_l}(x_\#) \subset U_l$. Für $\varepsilon_\# := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} > 0$ liegt die Kugel $B_{\varepsilon_\#}(x_\#)$ in allen U_l und damit auch in $\bigcap_{l\in L} U_l$.[16]

Teil 2: Beide Behauptungen ergeben sich mit den mengentheoretischen Formeln

$$X \setminus \left(\bigcup_{l\in L} U_l\right) = \bigcap_{l\in L} (X \setminus U_l)\,, \qquad X \setminus \left(\bigcap_{l\in L} U_l\right) = \bigcup_{l\in L} (X \setminus U_l)$$

direkt aus dem ersten Teil. □

Gegenbeispiel Die Formeln

$$\bigcap_{l\in\mathbb{N}} B_{1+1/l}(x_\#) = \overline{B}_1(x_\#)\,, \qquad \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \overline{B}_{1-1/l}(x_\#) = B_1(x_\#)$$

können leicht verifiziert werden und zeigen, dass der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen abgeschlossen sein kann und dass die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen offen sein kann.

[15] L kann endlich viele, abzählbar unendlich viele oder sogar überabzählbar unendlich viele Elemente enthalten.

[16] Beachte, dass das Minimum endlich vieler positiver Zahlen selbst positiv ist.

Ausblick: Definition topologischer Raum Eine Topologie auf einer Menge X (die kein Vektorraum zu sein braucht) ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset$ und X gehören zu $\mathcal{O}$.
2. $\mathcal{O}$ ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten sowie unter beliebigen Vereinigungen.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum und jedes Element von $\mathcal{O}$ wird offen genannt. In einem topologischen Raum können viele metrische Konzepte durch geeignete Definitionen eingeführt bzw. verallgemeinert werden, wie zum Beispiel die Konvergenz von Folgen, die Stetigkeit von Funktionen oder die Kompaktheit von Teilmengen. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass wir in einem topologischen Raum nicht mehr vom Abstand zweier Punkte reden können und dass es daher weder Kugeln noch Sphären gibt.

Achtung Jeder normierte (oder metrische) Raum ist auch topologischer Raum, aber die Umkehrung ist falsch. Außerdem können topologische Räume unerwartete Eigenschaften aufweisen. Zum Beispiel müssen Grenzwerte von Folgen nicht unbedingt eindeutig sein und man muss klar zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit unterscheiden. Ein Studium der *mengentheoretischen* oder der *algebraischen* Topologie ist im Rahmen dieser Vorlesung leider nicht möglich.

Lemma (**äquivalente Charakterisierung von Konvergenz bzgl. der Norm**) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. x_∞ eine Folge bzw. ein Punkt in normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$. Dann gilt $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ genau dann, wenn für jede offene Umgebung U von x_∞ höchstens endlich viele Folgenglieder x_n nicht zu U gehören, d.h. im Komplement $X \setminus U$ liegen.

Beweis *Hinrichtung*: Sei x_∞ Grenzwert der Folge und sei U eine beliebige offene Menge in X mit $x_\infty \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_\infty) \subseteq U$ sowie ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_\infty\| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Für jedes dieser n gilt dann $x \in B_\varepsilon(x_\infty)$ und damit $x_n \in U$, d.h. es können höchstens die Folgenglieder $x_1, \ldots, x_N$ im Komplement von U liegen.

Rückrichtung: Für jedes $\varepsilon > 0$ können höchstens endliche viele Folgenglieder x_n außerhalb der offenen Umgebung $U := B_\varepsilon(x_\infty)$ liegen. Insbesondere existiert $n \in N$, sodass $x_n \in U$ und damit $\|x_n - x_\infty\| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Also konvergiert x_n für $n \to \infty$ gegen x_∞. □

Lemma (**äquivalente Charakterisierung für abgeschlossene Mengen**) Eine Menge $U \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder alle zu U gehören und die bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ gegen einen Grenzwert $x_\infty \in X$ konvergiert, gehört dieser Grenzwert auch zu U.

Beweis *Hinrichtung*: Ist U abgeschlossen und gilt $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, so zeigen wir $x_\infty \in U$ durch folgenden indirekten Beweis: Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gehört x_∞ zur offenen Menge $X \setminus U$ und es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x_\infty)$ ganz in $X \setminus U$ liegt. Andererseits muss es wegen der Konvergenz einen Index $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $\|x_n - x_\infty\| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Das bedeutet aber, dass jedes dieser x_n in $B_\varepsilon(x_\infty)$ und damit in $X \setminus U$ liegt und nicht zu U gehören kann. Das ist der gesuchte Widerspruch.

Kontraposition der Rückrichtung: Wir nehmen an, U sei nicht abgeschlossen. Dann gibt es mindestens einen Punkt $x_\infty \in X \setminus U$ mit der Eigenschaft, dass keine Kugel um x_∞ ganz in $X \setminus U$ liegt, sondern immer mindestens einen Punkt aus U enthält. Insbesondere können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in X$ wählen, der sowohl in $B_{1/n}(x_\infty)$ als auch in U liegt. Dadurch erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus U, die wegen $\|x_n - x_*\| < 1/n$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert x_∞ konvergiert. Insbesondere ist die Folgeneigenschaft für diese Folge verletzt.. □

Beispiel Wir betrachten $X = \mathbb{R}^1$ mit dem euklidischen Abstand sowie die durch

$$x_n := 1 - 1/n$$

definierte Folge, die offensichtlich gegen $x_\infty = 1$ konvergiert. Alle Folgenglieder sind Elemente der offenen Menge $B_1(0)$, aber der Grenzwert nicht. Andererseits liegen alle x_n auch in der abgeschlossenen Menge $\overline{B}_1(0)$ und daher muss dies auch für x_∞ gelten.

Rand einer Menge

Definition Sei $U \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Ein Punkt $x \in X$ heißt innerer bzw. äußerer Punkt von U, falls es einen Radius $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(x)$ ganz in U bzw. ganz in $X \setminus U$ liegt. Andernfalls wird x Randpunkt von U genannt.

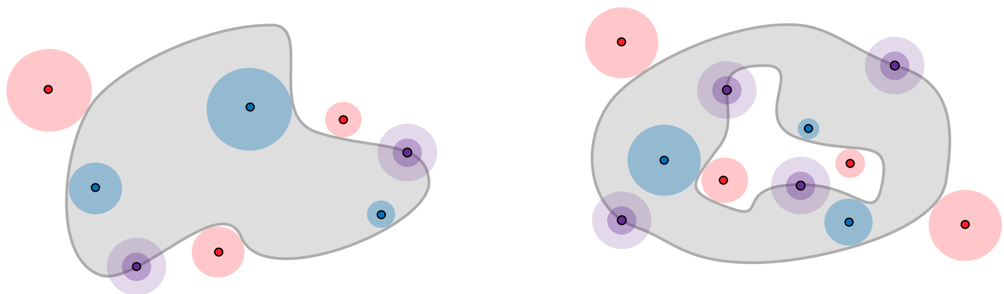


Abbildung Innere Punkte (blau) bzw. äußere Punkte (rot) einer gegebenen Menge U (grau; links ohne, rechts mit Loch) haben die Eigenschaft, dass jede hinreichend kleine Kugel um diesen Punkt auch zu U bzw. zur Komplementmenge $X \setminus U$ (weiß) gehört (im Bild ist immer der jeweils maximale Radius dargestellt). Randpunkte (lila) haben die Eigenschaft, dass jede noch so kleine Kugel um diesen Punkt sowohl Punkte aus U als auch Punkte aus $X \setminus U$ enthält.

Bemerkungen

1. Ist x ein innerer oder äußerer Punkt von U, so liegen alle Kugeln mit Mittelpunkt x und hinreichend kleinem Radius ganz in U bzw. in $X \setminus U$. Dies folgt, da mit $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ auch $B_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ gilt. Analoges gilt für jeden äußeren Punkt.

2. Ist x ein Randpunkt von U, so enthält jede noch so kleine Kugel um x immer Punkte aus U und Punkte aus $X \setminus U$.

3. Innere bzw. äußere Punkte von U gehören zu U bzw. zu $X \setminus U$. Randpunkte von U können im Allgemeinen zu U oder zu $X \setminus U$ gehören.

4. Ein innerer bzw. äußerer Punkt von U ist äußerer bzw. innerer Punkt von $X \setminus U$. Jeder Randpunkt von U ist auch Randpunkt von $X \setminus U$.

Bezeichnungen Ausgehend von einer Teilmenge $U \subseteq X$ führen wir die folgenden anderen Teilmengen ein:[17]

$$\begin{array}{llll} \partial U := \operatorname{bnd}(U) & := \big\{x \in X \,:\, x \text{ ist Randpunkt von } U\big\} & & \underline{\text{Rand von } U} \\ U^\circ := \operatorname{int}(U) & := \big\{x \in X \,:\, x \text{ ist innerer Punkt von } U\big\} & & \underline{\text{Inneres von } U} \\ \overline{U} := \operatorname{cls}(U) & := X \setminus \big\{x \in X \,:\, x \text{ ist äußerer Punkt von } U\big\} & & \underline{\text{Abschluss von } U} \end{array}$$

Lemma **(wichtige Eigenschaften)** Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ ist $\operatorname{int}(U)$ offen und $\operatorname{cls}(U)$ abgeschlossen. Außerdem gilt

$$\operatorname{int}(U) = U \setminus \operatorname{bnd}(U)\,, \qquad \operatorname{cls}(U) = U \cup \operatorname{bnd}(U)\,,$$

d.h. U genau dann offen bzw. abgeschlossen, wenn der Rand $\operatorname{bnd}(U)$ zu $X \setminus U$ bzw. zu U gehört.

Beweis Übungsaufgabe. Siehe auch das Bild. □

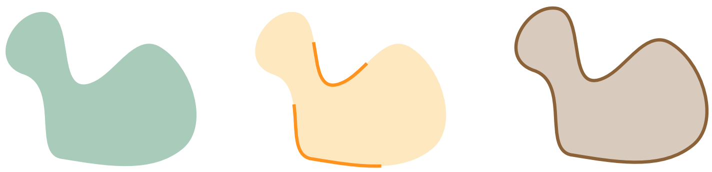


Abbildung Schematische Darstellung zum Rand von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$: Bei einer offenen (grün) bzw. einer abgeschlossenen (braun) Menge U gehören alle Randpunkte zu $X \setminus U$ bzw. zu U. Bei allen anderen Mengen (gelb) gehören einige Randpunkte zu U, andere aber zu $X \setminus U$.

Bemerkungen

1. Weitere wichtige Eigenschaften von $\operatorname{int}(U)$, $\operatorname{bnd}(U)$ und $\operatorname{cls}(U)$ werden wir in den Hausaufgaben diskutieren.

2. Es gilt

$$\operatorname{bnd}\big(B_\varrho(x)\big) = S_\varrho(x)\,, \qquad \operatorname{int}\big(B_\varrho(x)\big) = B_\varrho(x)\,, \qquad \operatorname{cls}\big(B_\varrho(x)\big) = \overline{B}_\varrho(x)$$

sowie

$$\operatorname{bnd}\big(\overline{B}_\varrho(x)\big) = S_\varrho(x)\,, \qquad \operatorname{int}\big(\overline{B}_\varrho(x)\big) = B_\varrho(x)\,, \qquad \operatorname{cls}\big(\overline{B}_\varrho(x)\big) = \overline{B}_\varrho(x)\,.$$

Für jede offene oder abgeschlossene Kugel gilt also: Der Rand / das Innere / der Abschluss ist immer die entsprechende Sphäre / offene Kugel / abgeschlossene Kugel.

3. Die Mengen $\operatorname{int}(U)$, $\operatorname{bnd}(U)$ und $\operatorname{cls}(U)$ hängen natürlich nicht nur von der Teilmenge U, sondern auch von der zugrunde liegenden Norm $\|\cdot\|$ ab. Äquivalente Normen werden aber für jede Menge U zumselben Ergebnis führen.

4. Viele praktisch relevante Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ haben die Eigenschaft, dass ihr Rand eine (im Allgemeinen gekrümmte) Kurve bzw. Fläche ist und direkt mithilfe der geometrischen Anschauung bestimmt werden kann.

<u>*Achtung*</u>: Es gibt auch Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, deren Rand nicht *eindimensional*, sondern zweidimensional oder gar gebrochen-dimensional ist. Siehe das folgende Beispiel bzw. die *Kochsche Schneeflocke* für eine Menge mit *fraktalem* Rand.

[17] Im Englischen spricht man von '*boundary*'', '*interior*' und '*closure*'.

5. Für eine Teilmenge eines Funktionen- oder Folgenraumes ist die Bestimmung des Randes im Allgemeinen alles andere als einfach.

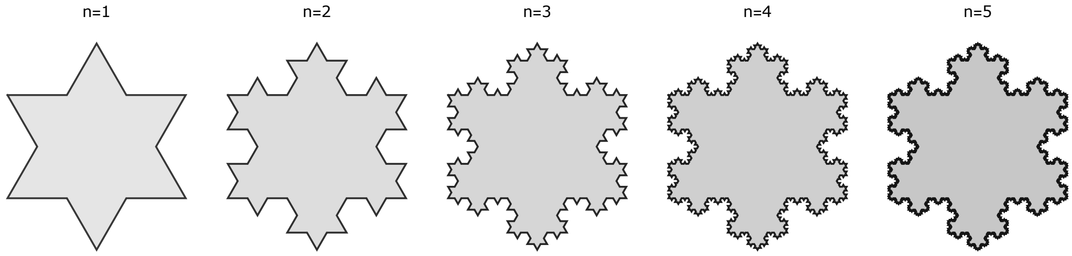


Abbildung Die Kochsche Schneeflocke entsteht durch einen Grenzprozess $n \to \infty$ aus einer rekursiv definierten Folge von polygonal berandeten Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (dargestellt sind nur die ersten fünf Folgenglieder). Der Rand der Schneeflocke ist eine fraktale Kurve und besitzt die Dimension $\ln(4)/\ln(3) \approx 1.26$.

Beispiel Wir betrachten $X = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit einer beliebigen p-Norm sowie die Teilmenge

$$U = \mathbb{Q}^2 = \left\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{Q}\right\},$$

die aus allen Punkten der Zahlenebene besteht, die zwei rationale Koordinaten besitzen. Da jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert werden kann, ergibt sich

$$\operatorname{bnd}(U) = \mathbb{R}^2\,, \qquad \operatorname{int}(U) = \emptyset\,, \qquad \operatorname{cls}(U) = \mathbb{R}^2\,.$$

Insbesondere besitzt diese Menge überhaupt keine inneren oder äußeren Punkte, sondern jeder Punkt der Ebene ist Randpunkt von U.

Lemma (**äquivalente Charakterisierung des Randes**) Ein Punkt $x_\# \in X$ ist genau dann ein Randpunkt von $U \subseteq X$, wenn er als Grenzwert einer Folge aus U *und* als Grenzwert einer Folge aus $X \setminus U$ dargestellt werden kann.

Beweis *Hinrichtung*: Sei $x_\# \in \operatorname{bnd}(U)$ ein beliebiger Randpunkt von U. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt die Kugel $B_1/n(x_\#)$ weder in $X \setminus U$ noch in U und daher können wir $x_n \in B_1/n(x_\#) \cap U$ und $y_n \in B_1/n(x_\#) \cap (X \setminus U)$ wählen. Insgesamt ergibt sich eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U sowie eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ id $X \setminus U$, die wegen $\|x_n - x_\#\| < 1/n$ und $\|y_n - x_\#\| < 1/n$ beide gegen $x_\#$ konvergieren.

Rückrichtung: Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus U$ zwei Folgen, die gegen denselben Grenzwert $x_\# \in X$ konvergieren. Für jedes $\varepsilon > 0$ enhält $B_\varepsilon(x_\#)$ sowohl Punkte aus U als auch Punkte aus $X \setminus U$ (siehe die äquivalente Charakterisierung von Konvergenz) und kann daher weder in $X \setminus U$ noch in U liegen. Also ist $x_\#$ weder äußerer noch innerer Punkt von U, sondern muss im Rand von U liegen. □

Bemerkung

1. Ein innerer Punkt von U kann niemals Grenzwert einer Folge aus $X \setminus U$ sein, aber kann auf viele Arten als Grenzwert eine Folge von U dargestellt werden. Analoge Aussagen gelten für jeden äußeren Punkt von U.

2. Ist U eine endliche Punktmenge, so ist jeder dieser Punkte auch Randpunkt von U. Das Lemma gilt auch in diesem Fall, allerdings ist jede konvergente Folge in U fast konstant.

Dichtheit von Mengen

Definition Eine Teilmenge U von X heißt <u>dicht</u>, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist, d.h. wenn $\mathrm{cls}\,(U) = X$ gilt.[18]

Beispiele

1. $\mathbb{Q}^d$ liegt dicht in $\mathbb{R}^d$.
2. Das Komplement jeder endlichen Teilmenge von X liegt dicht in X.
3. Wir werden später sehen, dass die Menge aller unendlich-oft differenzierbaren Funktionen in vielen — aber nicht in allen — Funktionenräumen dicht liegt. Analoges gilt für die Menge aller Polynome.

Lemma (**äquivalente Charakterisierung von Dichtheit**) Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

1. U liegt dicht.
2. U besitzt keine äußeren Punkt.
3. $X \setminus U$ besitzt keinen inneren Punkt.
4. Für jede offene und nichtleere Menge $O \subseteq X$ gilt $O \cap U \neq \emptyset$.
5. Für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$ gilt $B_\varepsilon(x) \cap U \neq \emptyset$.
6. Für jedes $x \in X$ existiert eine approximierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Elementen von U mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Beweis Übungsaufgabe. □

Bemerkungen

1. Eine dichte Teilmenge muss nicht unbedingt offen sein und in einem unendlich-dimensionalen Raum können auch echte Unterräume dicht liegen.
2. Ganz allgemein definieren wir: $U \subseteq X$ liegt *dicht in* $V \subseteq U$, falls $V \subseteq \mathrm{cls}\,(U)$.[19] Insbesondere bedeutet dies, dass jedes Element aus V als Grenzwert einer Folge aus U dargestellt werden kann.

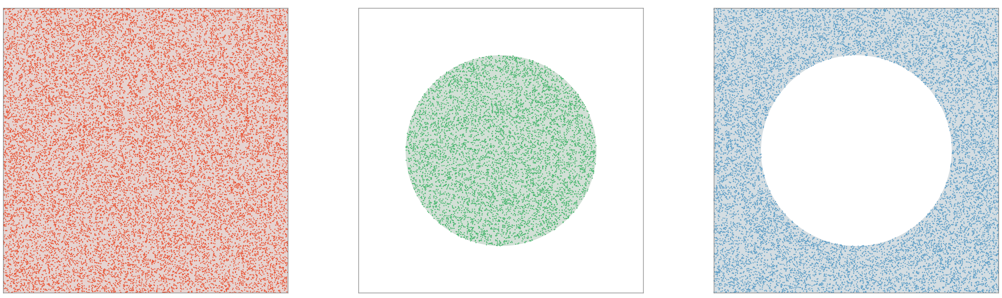


Abbildung Schematische Darstellung zweidimensionaler Punktwolken, die in ganz $\mathbb{R}^2$ (rot), in einer Kugel (grün) oder im Komplement einer Kugel (blau) dichtliegen. Beachte, dass dichte Menge nur unvollständig dargestellt werden können und dass wir hier zur besseren Illustrierung die Punkte der Wolke als Zufallsgrößen erzeugt haben.

[18] Wir sagen auch, die Teilmenge *liegt dicht in* X.
[19] Es ist hier nicht ausgeschlossen, dass $\mathrm{cls}\,(U)$ größer als V ist.

Vorlesung 04 : 03. November

Kompaktheit von Mengen

Vorbemerkung Ein wichtiges und immer wiederkehrendes Konzept in der gesamten Mathematik ist die Kompaktheit von Teilmengen eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$, wobei es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, diesen Begriff einzuführen.

Definition Wir nennen eine Teilmenge $K \subseteq X$

1. überdeckungskompakt, falls jede offene Überdeckung von K in X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, und

2. folgenkompakt, wenn jede Folge in K mindestens einen Häufungspunkt *in* K besitzt.

Theorem (**Äquivalenz der beiden Kompaktheitsdefinitionen**) Eine Menge $K \subseteq X$ ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

Beweis Wir hatten diese Aussage in *Analysis 2* im Kontext allgemeiner metrischer Räume bewiesen.

Bemerkungen

1. Der erste Teil der Definition ist wie folgt zu verstehen: Ist I eine beliebige Indexmenge und $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie[20] offener Mengen $O_i \subseteq X$ mit $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, dann existieren *endlich* viele Indizes $i_1, \ldots, i_N$, sodass schon $K \subseteq O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_N}$ gilt. Im Fall einer endlichen Menge I ist diese Aussage trivialerweise richtig, aber die endliche Teilüberdeckung muss bei einer kompakten Menge K auch dann existieren, wenn die Indexmenge I abzählbar oder überabzählbar unendlich viele Elemente enthält.

2. Ein Häufungspunkt ist — ganz analog zur Begriffsbildung in *Analysis 1* — immer Grenzwert einer Teilfolge. Der zweite Teil der Definition meint also zum einen, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder x_n alle in K liegen, mindestens eine strikt monotone Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ sowie ein $x_* \in X$ existieren, sodass $d(x_{n_k}, x_*)$ für $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Der zweite Teil der Definition fordert außerdem, dass der Häufungspunkt x_* auch in der Menge K (und nicht im Komplement $X \setminus K$) liegt.

3. Aufgrund des Theorems sprechen wir im Folgenden von kompakten Mengen. Wir meinen dabei natürlich immer kompakt bzgl. der Norm $\|\cdot\|$.

   *Ausblick**: In jedem topologischen Raum folgt aus der Überdeckungskompaktheit die Folgenkompaktheit, aber die umgekehrte Aussage ist nicht mehr unbedingt richtig.

[20] *Familie* ist ein anderes Wort für *Menge*.

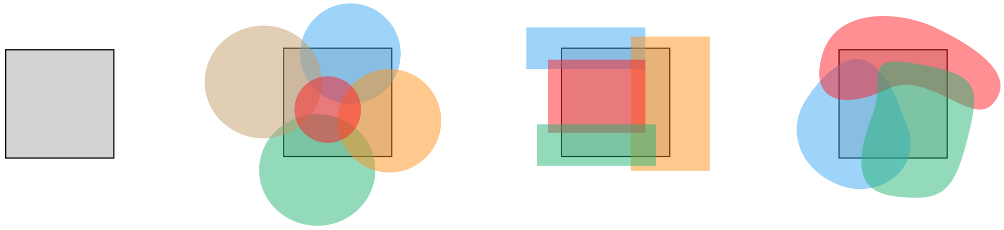


Abbildung Drei verschiedene offene Überdeckungen eines abgeschlossenen Quadrats in $\mathbb{R}^2$ (grau) mit endlich vielen offenen Mengen (farbig). Bei einer kompakten Menge kann aus einer Überdeckung mit unendlich vielen offenen Mengen immer eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden.

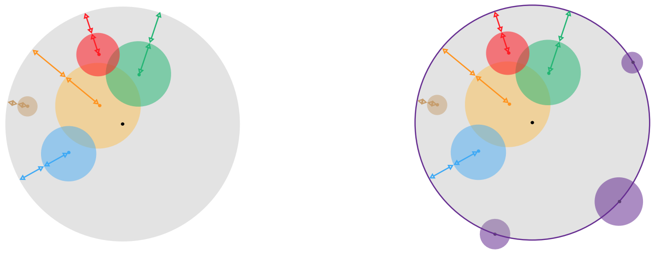


Abbildung *Links*: Konstruktionsidee für eine offene Überdeckung einer offenen Menge im $\mathbb{R}^2$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt: Für *jeden* Punkt y in einer gegebenen offenen Kreisscheibe B (grau) wählen wir eine offene Kreisscheibe O_y um y, wobei der Radius gerade der halbe Abstand von y zum Rand ∂B ist (hier dargestellt für 5 farbige Punkte und bzgl. der euklidischen Standardnorm). Die Familie $(O_y)_{y\in U}$ stellt eine überabzählbare offene Überdeckung von B dar, besitzt aber keine endliche Teilüberdeckung. In der Tat, für jede Wahl $y_1, \ldots, y_N$ kann B nicht vollständig in $O_{y_1} \cup \ldots \cup O_{y_N}$ enthalten sein, da eine solche Menge einen positiven Abstand zum Rand ∂B aufweist. *Rechts*: Bei einer analogen Konstruktion für eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B}$ im $\mathbb{R}^2$ muss auch für jeden Randpunkt $y \in \partial B$ (lila) eine offene Menge O_y gewählt werden (zum Beispiel irgendeine offene Kreisscheibe um y). Dies ändert die Diskussion dramatisch, denn nun wird $(O_y)_{y\in\overline{B}}$ immer eine endliche Teilüberdeckung von $\overline{B}$ besitzen, da $\overline{B}$ kompakt ist.

Lemma (**Eigenschaften kompakter Mengen**) Jede kompakte Menge $K \subseteq X$ ist abgeschlossen und beschränkt. Letzteres meint, dass $K \subseteq \overline{B}_\varrho(x)$ für ein $x \in X$ und einen Radius $0 < \varrho < \infty$ gilt.

Beweis Im folgenden sei K eine beliebige, aber feste kompakte Teilmenge von X.

Teil 1: Angenommen, K sei nicht abgeschlossen. Dann gibt es mindestens einen Randpunkt $x_\# \in \operatorname{bnd}(K)$ der nicht zu K gehört sowie (siehe die äquivalente Charakterisierung von Randpunkten) eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus K mit $x_\# = \lim_{n\to\infty} x_n$. Jede Teilfolge konvergiert aber auch gegen $x_\#$, d.h. diese Folge besitzt keinen Häufungspunkt in K. Dies ist ein Widerspruch und unsere Annahme war falsch.

Teil 2: Wir nehmen an, K sei nicht beschränkt und wählen $x_\# \in X$ beliebig. Da für jedes $n \in \mathbb{R}$ die Menge K nicht in $\overline{B}_n(x_\#)$ enthalten ist, können wir einen Punkt $x_n \in K$ so wählen, dass $\|x_n - x_\#\| > n$ gilt. Wir erhalten insgesamt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die aufgrund der Kompaktheit von K eine konvergente Teilfolge besitzt. Insbesondere existiert eine Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie ein Häufungspunkt x_∞ mit

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty\,, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\infty\,,$$

wobei die zweite dieser Konvergenzaussagen auch als

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_\infty\| = 0$$

geschrieben werden kann. Die Dreiecksungleichung impliziert

$$\|x_\infty - x_\#\| \geq \|x_{n_k} - x_\#\| - \|x_{n_k} - x_\infty\| \geq n_k - \|x_{n_k} - x_\infty\|$$

für alle k und der Limes $k \to \infty$ liefert einen Widerspruch, da die rechte Seite gegen $\infty - 0 = \infty$ konvergiert. Also ist K beschränkt. □

Lemma (**Hilfssatz von Riesz**) Sei Y ein abgeschlossener Unterraum von X mit $X \neq Y$. Dann existiert für jede Wahl von $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = \varrho_2$, sodass die Abschätzung $\|x - y\| > \varrho_1$ für alle $y \in Y$ gilt.

Beweis Wir wählen $x_\# \in X \setminus Y$ beliebig und bemerken, dass

$$m := \inf\left\{ \|x_\# - y\| \,:\, y \in Y \right\} > 0$$

gilt. In der Tat, unter der Annahme $m = 0$ existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $\|x_\# - y_n\| \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert dann gegen $x_\#$ und wir erhalten mit $x_\# \in \mathrm{cls}\,(Y) = Y$ einen Widerspruch. Wegen $m > 0$ und unter Ausnutzung der Eigenschaften des Infimums wählen wir $y_\# \in Y$ mit

$$m < \|x_\# - y_\#\| < \frac{m\,\varrho_2}{\varrho_1}$$

und setzen

$$x := \frac{\varrho_2\,(x_\# - y_\#)}{\|x_\# - y_\#\|}\,.$$

Für jedes $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \frac{\varrho_2\, x_\#}{\|x_\# - y_\#\|} - \frac{\varrho_2\, y_\#}{\|x - y_\#\|} - y \right\| \\ &= \frac{\varrho_2}{\|x_\# - y_\#\|} \left\| x - \left(y_\# + \frac{\|x_\# - y_\#\|}{\varrho_2}\, y \right) \right\| \\ &\geq \frac{\varrho_2}{\|x_\# - y_\#\|}\, m > \varrho_1 \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $y_\# + \|x - y_\#\|\, y/\varrho_2$ auch im Unterraum Y liegt. □

Korollar Ist X unendlich-dimensional, so existiert in jeder abgeschlossenen Kugel $B_\varrho(x_\#)$ eine Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis Wir können o.B.d.A. $x_\# = 0$ annehmen. Mithilfe des Rieschen Lemmas — angewendet mit $\varrho_1 = \varrho/2$ und $\varrho_2 = \varrho$ — konstruieren wir induktiv x_n wie folgt: Im Induktionsanfang wählen wir x_1 mit $\|x_1\| = \varrho$ beliebig. Im Induktionschritt $n \rightsquigarrow n{+}1$ betrachten wir den abgeschlossenen Unterraum $V_n = \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$ der Dimension n und wählen x_{n+1} mit

$$\|x_{n+1}\| = \varrho\,, \qquad \inf\left\{ \|x_{n+1} - y\| \,:\, y \in V_n \right\} > \varrho/2$$

Die x_n sind per Konstruktion uniform beschränkt und es gilt $\|x_n - x_m\| \geq \varrho/2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Insbesondere kann die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzen, da wir andernfalls via

$$0 < \varrho/2 \leq \left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| \leq \left\| x_{n_{k+1}} - x_\infty \right\| + \|x_{n_k} - x_\infty\| \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0$$

eine Widerspruch herleiten könnten. □

Beispiele

1. Die Funktionenfolge

$$x_n(t) = \tanh(n\,t) \qquad \text{mit} \qquad t \in I = [-1,\,+1]$$

hatten wir schon weiter oben im Kontext der Vollständigkeit studiert. Diese Folge ist wegen $\|x_n\|_\infty = 1$ beschränkt im normierten Raum $\big(\mathsf{C}(I;\,\mathbb{R}),\,\|\cdot\|_\infty\big)$, aber sie besitzt keine konvergente Teilfolge, da sie punktweise gegen die unstetige Signums-Funktion konvergiert.

2. Die komplexwertige Funktionenfolge

$$x_n(t) = \exp(\mathtt{i}\,n\,t) \qquad \text{mit} \qquad I = [-\pi,\,+\pi]$$

beschreibt die *harmonischen Basisfunktionen* für die *Fourier-Reihen* (siehe etwa *Analysis 1*). Auch sie besitzt keine konvergente Teilfolge bzgl. der ∞-Norm (und auch nicht bzgl. jeder anderen p-Norm), wobei wir dies leicht durch Plots plausibilisieren können.[21]

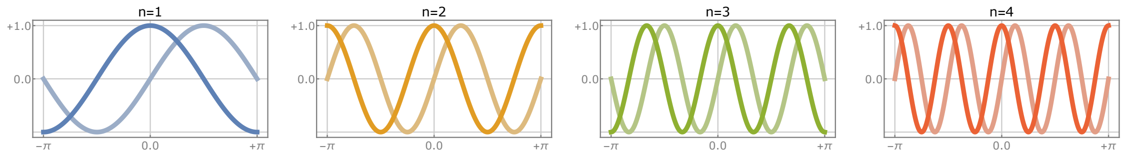


Abbildung Die Real- bzw. Imaginärteile der harmonischen Basisfunktionen auf dem Intervall $[-\pi,\,+\pi]$.

Theorem (**Kompaktheit von Kugeln und ähnlichen Mengen**) X ist genau dann endlich-dimensional, wenn *jede* abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist.[22]

Beweisskizze Im Fall $\dim X < \infty$ ist X isometrisch isomorph zum $\mathbb{K}^d$ (siehe weiter unten) und die Behauptung ergibt sich aus dem Satz von Heine-Borel. Im Fall $X = \infty$ zeigt das voherige Korollar, dass abgeschlossene Kugeln nicht kompakt sind, obwohl sie natürlich beschränkt und abgeschlossenen sind. $\square$

Ausblick Wir werden im Fortgang der Vorlesung sehen, dass jede abgeschlossene Kugel in einem *reflexiven* Banach-Raum *schwach kompakt* ist.

Lemma (**Präkompaktheit und Netze**) Für eine vollständige Norm $\|\cdot\|$ sind die folgenden vier Aussagen für jedes $U \subseteq X$ paarweise äquivalent:

1. U ist präkompakt, d.h. $\operatorname{cls}(U)$ ist kompakt.
2. Jede Folge in U besitzt eine konvergente Teilfolge, wobei der Grenzwert nicht unbedingt zu U gehören muss.
3. Jede Folge in U besitzt eine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist.

[21] Wir können dies natürlich auch rigoros beweisen, aber dies ist gar nicht so einfach.
[22] Auch im Fall von $\dim X = \infty$ gibt es viele beschränkte und abgeschlossene Teilmengen von X, die kompakt sind. Es kann sich dabei aber nicht um Kugel handeln.

4. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein ε-Netz für U, d.h. es gilt
$$U \subseteq B_\varepsilon(y_1) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_l)$$
für endlich viele Punkte $y_1, \ldots, y_l \in X$.[23]

Beweis 4. ⇒ 3: Wir beginnen mit einer beliebigen Folge in U, die wir mit $\big(x_n^{(0)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, und wählen $\varepsilon^{(0)} > 0$ beliebig. Dann existiert ein entsprechendes $\varepsilon^{(0)}$-Netz von U, bestehend aus den $l^{(0)}$ vielen Punkten $y_1^{(0)}, \ldots, y_{l^{(0)}}^{(0)}$ sowie ein Index $j^{(0)}$, sodass unendlich viele Folgenglieder $x_n^{(0)}$ in der Kugel vom Radius $\varepsilon^{(0)}$ um den Mittelpunkt $y_{j^{(0)}}^{(0)}$ liegen. Wir sortieren diese Folgenglieder in eine Teilfolge $\big(x_n^{(1)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein und setzen $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(0)}/2$. Durch Iteration unserer Argumente erzeugen wir schrittweise Folgen $\big(x_n^{(2)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(x_n^{(3)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ usw., wobei die $(k+1)$-te Folge eine Teilfolge der (k)-ten und damit auch der (0)-ten Folge ist und alle Glieder der (k)-ten Folge in einer Kugel vom Radius $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon^{(0)}/2^k$ enthalten sind. Insbesondere gilt
$$\big\|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\big\| \leq 2\,\varepsilon^{(k)} = 2^{1-k}\,\varepsilon^{(0)}$$
nach Dreiecksungleichung für alle k, n, $m \in \mathbb{N}$. Die Diagonalfolge $\big(x_n^{(\#)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_n^{(\#)} := x_n^{(n)}$$
erfüllt damit
$$\big\|x_n^{(\#)} - x_m^{(\#)}\big\| \leq 2^{1-\min\{n,\,m\}}\,\varepsilon^{(0)}$$
für alle n, $m \in \mathbb{N}$ und ist insbesondere sowohl Cauchy-Folge als auch Teilfolge der am Anfang gewählten Folge.

3. ⇒ 2.: Die Behauptung ergibt sich direkt aus der vorausgesetzten Vollständigkeit.

2. ⇒ 1.: Zu einer gegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{cls}\,(U)$ wählen wir eine modifizierte Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Elementen von U, sodass $\|x_n - \tilde{x}_n\| \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (siehe die äquivalente Charakterisierung von $\mathrm{cls}\,(U)$ aus den Hausaufgaben). Nach Voraussetzung existiert mindestens eine Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_\infty}$ sowie ein entsprechender Häufungspunkt $\tilde{x}_\infty = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_{n_k}$ und mit
$$\|\tilde{x}_\infty - x_{n_k}\| \leq \|\tilde{x}_\infty - \tilde{x}_{n_k}\| + \|\tilde{x}_{n_k} - x_{n_k}\|$$
ergibt sich $\tilde{x}_\infty = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Damit haben wir gezeigt,, dass die Ursprungsfolge mindestens eine konvergente Teilfolge besitzt.

1. ⇒ 4.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Für jedes $x \in \mathrm{cls}\,(U)$ setzen wir $O_x := B_\varepsilon(x)$ und bemerken, dass die kompakte Menge $\mathrm{cls}\,(U)$ trivialerweise durch die überabzählbare Familie $(O_x)_{x\in\mathrm{cls}\,U}$ überdeckt ist und dass es eine endliche Teilüberdeckung gibt. Diese liefert ein ε-Netz für $\mathrm{cls}\,(U)$ und damit auch für U. □

[23] Beachte, dass die Anzahl l sowie die Punkte $y_1, \ldots, y_l$ sowohl von U als auch von ε abhängen dürfen. Außerdem müssen die Punkte y_j weder zu U noch zu $\mathrm{cls}\,(U)$ gehören, obwohl das in vielen Anwendungen des Lemmas so sein wird.

Vorlesung 05 : 07. November

1.3 Stetigkeit von Abbildungen

Vorbemerkung In diesem Unterabschnitt bezeichnen $(X, \|\cdot\|_X)$ sowie $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Räume und $f : X \to Y$ ist eine Abbildung von X nach Y.

Erinnerung Die Mengen

$$f^{-1}\big(y\big) := \big\{x \in X \,:\, f(x) = y\big\} \qquad \text{bzw.} \qquad f^{-1}\big(V\big) := \big\{x \in X \,:\, f(x) \in V\big\}$$

bezeichnen wir als die Urbildmenge des Punktes $y \in Y$ bzw. der Menge $V \subseteq Y$ unter der Abbildung f. Insbesondere sind diese Mengen selbst dann wohldefiniert, wenn f keine Umkehrabbildung besitzt. [24]

Definition Die Abbildung$f$ wird stetig im Punkt $x_\# \in X$ genannt, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass die Implikation

$$\|x - x_\#\|_X < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(x_\#)\|_Y < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ gilt.

Bemerkungen

1. Wir nennen f stetig, falls f in jedem Punkt $x_\# \in X$ stetig ist.

2. Statt *Abbildung* können wir *Funktion* sagen. In dieser Vorlesung sprechen wir von einer *skalaren Funktion*, wenn $Y = \mathbb{R}$ gilt, d.h. wenn f jeden Punkt aus X auf eine reelle Zahl abbildet, wobei wir dann immer stillschweigend voraussetzen, dass $\|\cdot\|_Y$ der euklidische Betrag ist.

3. Wir nennen f Lipschitz-stetig, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass

$$\big\|f(x) - f(\tilde{x})\big\| \le L\,\big\|x - \tilde{x}\big\|$$

für alle $x, \tilde{x} \in X$ gilt. Wie schon in *Analysis 1+2* können wir leicht zeigen, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig sein muss, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Theorem (**äquivalente Charakterisierung von Stetigkeit**) Die folgenden vier Aussagen sind paarweise äquivalent:

1. Die Abbildung f ist stetig.

2. Jede konvergente Folge aus X wird unter f auf eine konvergente Folge in Y abgebildet.

3. Das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y ist offen in X.

4. Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y ist abgeschlossen in X.

[24] Beachte, dass f genau dann invertierbar ist, wenn die Urbildmenge $f^{-1}(\tilde{x})$ für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ aus genau einem Element besteht.

Beweis 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus X mit Grenzwert x_∞ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen zunächst $\delta > 0$ wie in der Definition von Stetigkeit im Punkt x_∞. Anschließend benutzen wir die Definition von Konvergenz und wählen $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|x_n - x_\infty\|_X < \delta$ für alle $n > N$ erfüllt ist. Für diese Indizes n gilt wegen der Stetigkeit von f auch $\|f(x_n) - f(x_\infty)\|_Y < \varepsilon$. Da ε beliebig war haben wir gezeigt, dass $f(x_n)$ für $n \to \infty$ gegen $f(x_\infty)$ bzgl. der Norm in Y konvergiert.

2. $\Rightarrow$ 1.: Wir wählen $x_\# \in X$ beliebig und nehmen an, es gäbe ein $\varepsilon > 0$, für dass in der obigen Definition kein entsprechendes $\delta > 0$ existiert. Dann finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$, sodass $\|x_n - x_\#\|_X < 1/n$ und $\|f(x_n) - f(x_\#)\|_Y \geq \varepsilon$ gilt (denn sonst wäre $\delta = 1/n$ ja eine zulässige Wahl). Nach Konstruktion konvergiert x_n für $n \to \infty$ gegen $x_\infty = x_\#$ in X und die Voraussetzung garantiert die Konvergenzaussage $f(x_\#) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ in Y und damit $\lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - f(x_\#)\|_Y = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\|f(x_n) - f(x_\#)\|_X \geq \varepsilon > 0$ für alle n. Insbesondere muss f stetig in $x_\#$ sein.

1. $\Rightarrow$ 3.: Sei $V \subseteq Y$ offen und sei $x_\# \in U := f^{-1}\big(V\big)$ beliebig fixiert. Wir wählen zunächst $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(f(x_\#))$ ganz in V liegt, und anschließend $\delta > 0$ wie in der Definition von Stetigkeit. Für alle Punkte $x \in B_\delta(x_\#)$ ergibt sich $\|f(x) - f(x_\#)\| < \varepsilon$ und damit $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_\#)) \subset V$ aus der Stetigkeit von f in $x_\#$. Insbesondere liegt die Kugel $B_\delta(x_\#)$ ganz in U, dem Urbild von V unter f. Da $x_\#$ beliebig war, folgt insgesamt die Offenheit von U.

3. $\Rightarrow$ 1.: Seien $x_\# \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung ist das Urbild von $B_\varepsilon(f(x_\#))$ offen in X und muss daher eine Kugel von Radius δ um $x_\#$ enthalten. Für jedes $x \in B_\delta(x_\#)$ gilt dann $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_\#))$ nach Konstruktion und wir schließen, dass f in $x_\#$ stetig ist.

3. $\Leftrightarrow$ 4.: Beide Implikationen ergeben sich unmittelbar aus der Formel

$$f^{-1}\big(Y \setminus V\big) = X \setminus f^{-1}\big(V\big)\,,$$

die ganz allgemein für die Urbilder jeder Abbildung gilt. □

Bemerkungen

1. Das Theorem ist sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht sehr nützlich. Insbesondere können wir analog zu den Argumenten aus *Analysis 1* wieder Rechenregeln für stetige Funktionen herleiten. Zum Beispiel ist für zwei stetige Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ihre Komposition $g \circ f : X \to Z$ wieder stetig. Außerdem ist die Summe zweier stetiger Funktionen $f_1,\ f_2 : X \to Y$ stetig.

2. *Achtung*: Im Allgemeinen hat eine stetige Abbildung **nicht** die Eigenschaft, dass das Bild einer offenen Menge offen ist. Zum Beispiel bildet die reelle Sinusfunktion das offene Intervall $(0,\ \pi)$ auf das nicht-offene Intervall $(0,\ 1]$ ab. Wir werden aber unten sehen, dass das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung immer kompakt ist.

3. Ein wichtiger Spezialfall sind skalare Funktionen, die $(X,\ \|\cdot\|_X)$ in den normierten Raum $(\mathbb{R},\ |\cdot|)$ abbilden. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige skalare Funktion und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, so sind die Mengen

$$\big\{x \in X\ :\ f(x) < c\big\} \qquad \text{bzw.} \qquad \big\{x \in X\ :\ f(x) > c\big\}$$

als Urbilder der offenen Intervalle $(-\infty, c)$ bzw. $(c, +\infty)$ beide offen. Jede der drei Mengen

$$\left\{x \in X \,:\, f(x) \leq c\right\}, \qquad \left\{x \in X \,:\, f(x) = c\right\}, \qquad \left\{x \in X \,:\, f(x) \geq c\right\}$$

ist hingegen als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen.[25]

4. Die Norm $\|\cdot\|_X$ ist als skalare Funktion auf X Lipschitz-stetig (und damit auch stetig), denn die Dreiecksungleichung impliziert

$$0 \leq \big|\|x_n\|_X - \|x_\infty\|_X\big| \leq \big\|x_n - x_\infty\big\|_X \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x_∞.

Lemma (**Bild kompakter Mengen**) Für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ ist die Bildmenge

$$f(K) := \left\{f(x) \,:\, x \in K\right\}$$

kompakt in Y.

Beweis Sei $(P_i)_{i\in I}$ mit $P_i \subseteq Y$ eine beliebige offene Überdeckung von $L := f(K)$. Die Stetigkeit von f garantiert, dass jede Menge $O_i := f^{-1}(P_i)$ offen in X ist und mit elementarer Mengenlehre zeigen wir, dass $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ gilt. Nach Voraussetzung existieren endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_N$ mit $K \subseteq O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_N}$ und per Konstruktion gilt außerdem $P_i = f(O_i)$. Dies impliziert $L = f(K) \subseteq P_{i_1} \cup \ldots \cup P_{i_N}$ und wir haben eine endliche Teilüberdeckung von L gefunden. □

Theorem (**Satz vom Minimum und Maximum**) Seien $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann nimmt f auf K sein Minimum und sein Maximum an, d.h. es existieren Punkte $x_{\min}, x_{\max} \in K$, sodass

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

für alle $x \in K$ gilt.

Beweis Wir beweisen nur die Existenz von $x_{\max}$ in K, denn die Existenz von $x_{\min}$ ergibt sich aus analogen Argumenten. Nach dem vorherigen Lemma ist die Bildmenge von f kompakt in $\mathbb{R}$ und damit auch beschränkt, d.h.

$$y_{\max} := \sup\{f(x) \,:\, x \in K\}$$

ist eine wohldefinierte reelle Zahl. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n \in K$ mit

$$y_{\max} - 1/n \leq f(x_n) \leq y_{\max}$$

und erhalten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit $y_{\max} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Die Folgenkompaktheit von K garantiert die Existenz einer Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\infty$, wobei der Grenzwert x_∞ zu K gehört (siehe die äquivalente Charakterisierung abgeschlossener Mengen und beachte, dass K als kompakte Menge abgeschlossen ist). Die Stetigkeit von f sowie die Wahl der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implizieren

$$f(x_\infty) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y_{\max}\,,$$

und wir können $x_{\max} = x_\infty$ setzen. □

[25] Beachte, dass die halbunendlichen Intervalle $(-\infty, c]$ und $[c, +\infty)$ beide abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind.

Bemerkungen

1. Die gleichen Grundideen — also die Kompaktheit einer *maximierenden Folge* sowie die Stetigkeit von f — hatten wir schon in *Analysis 1+2* beim Beweis der entsprechenden Sätze im $\mathbb{R}^d$ verwendet.

2. Wie schon in *Analysis 1+2* nennen wir $x_{\max}$ bzw. $x_{\min}$ einen Maximierer bzw. einen Minimierer von f in K, wohingegen $y_{\max} = f(x_{\max})$ bzw. $y_{\min} = f(x_{\min})$ das entsprechende Maximum bzw. Minimum ist.

3. Das Theorem liefert nur ein Existenz-, aber kein Eindeutigkeitsresultat. Es bezieht sich außerdem nur auf globale Extremstellen von f in K und macht keine Aussagen über das Verhalten von f auf der Komplementmenge $X \setminus K$ oder über die Existenz lokaler Extremstellen innerhalb von K.

4. Im Theorem ist es wichtig, dass f den Raum X nach $\mathbb{R}$ abbildet. In einem anderen metrischen Bildraum (zum Beispiel $Y = \mathbb{R}^m$) gibt es nämlich in der Regel keine Ordnungsrelation und die Begriffe *Maximum* und *Minimum* können dann nicht sinnvoll definiert werden.

Lemma **(gleichmäßige Stetigkeit)** Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass die Implikation

$$\|x - \tilde{x}\|_X < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(\tilde{x})\|_Y < \varepsilon$$

für alle x, $\tilde{x} \in K$ gilt.

Beweis Als Antithese nehmen wir an, dass für ein festes $\varepsilon > 0$ kein entsprechendes $\delta > 0$ existiert. Insbesondere finden wir daher für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte x_n, $\tilde{x}_n \in K$ mit

$$\|x_n - \tilde{x}_n\|_X < 1/n\,, \qquad \|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)\|_Y \geq \varepsilon\,,$$

denn andernfalls wäre ja $\delta = 1/n$ eine zulässige Wahl. Durch Wahl einer Teilfolge können wir erreichen, dass

$$x_{n_k} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad x_\infty$$

für ein $x_\infty \in X$ sowie eine Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ erfüllt ist, wobei sich anschließend

$$\tilde{x}_{n_k} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad x_\infty$$

aus der Abschätzung

$$0 \leq \|\tilde{x}_{n_k} - x_\infty\|_X \leq \|\tilde{x}_{n_k} - x_{n_k}\|_X + \|x_{n_k} - x_\infty\|_X \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0$$

ergibt. Andererseits folgt

$$f(x_{n_k}) \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad f(x_\infty) \qquad \text{sowie} \qquad f(\tilde{x}_{n_k}) \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad f(x_\infty)$$

aus der Stetigkeit von f und wir erhalten via

$$0 < \varepsilon \leq \|f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})\|_Y \leq \|f(x_{n_k}) - f(x_\infty)\|_Y + \|f(x_\infty) - f(\tilde{x}_{n_k})\|_Y \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0$$

den gewünschten Widerspruch. $\square$

Bemerkungen

1. Beachte, dass δ im Lemma von ε, aber nicht von x oder $\tilde{x}$ abhängen darf. Insofern ist die gleichmäßige Stetigkeit mehr als Stetigkeit in jedem Punkt $x \in K$, da dort ε auch von x abhängen darf. Lipschitz-Stetigkeit ist wiederum schärfer, denn dort kann δ in linearer Abhängigkeit von ε gewählt werden.

2. Die Kompaktheit von K spielt nicht nur im Beweis eine wichtige Rolle, sondern ist auch eine notwendige Voraussetzung.

   Gegenbeispiel: Die reelle Funktion $f(x) = 1/x$ ist stetig auf dem offenen Einheitsintervall $(0,\,1)$, aber wegen der Singularität nicht gleichmäßig stetig. Für alle $0 < \tilde{x} < x < 1$ ergibt sich

   $$\frac{|f(x) - f(\tilde{x})|}{|x - \tilde{x}|} \geq \left|f'(x)\right| = \frac{1}{x^2}$$

   aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung sowie der Monotonie von f' und mit dieser Abschätzung können wir leicht zeigen, dass es für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ kein $\delta > 0$ geben kann.

   Beispiel: Wenn wir die Wurzelfunktion auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0,\,1]$ betrachten, so können wir stets $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ wählen. In der Tat: Sind $\tilde{x}$ und x zwei reelle Zahlen mit $0 \leq \tilde{x} < x \leq 1$ und $x - \tilde{x} < \varepsilon$, so gilt immer $x \geq \varepsilon$ oder $x < \varepsilon$, woraus sich dann im ersten bzw. zweiten Fall die Abschätzung

   $$\left|\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}\right| = \left|\frac{\tilde{x} - x}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\varepsilon}{0 + \sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}$$

   bzw. $\left|\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}\right| \leq \sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon}$ ergibt.

Vorlesung 06 : 09. November

Stetigkeit linearer Abbildungen

Vorbemerkung Von besonderer Bedeutung in der Funktionalanalysis sind lineare Abbildungen, wobei diese auch als lineare Operatoren oder im Fall von $Y = \mathbb{K}$ als lineare Funktionale bezeichnet werden. Dabei ist die Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen über demselben Körper $\mathbb{K}$ genau dann linear, wenn

$$f\big(\lambda\, x + \tilde{\lambda}\, \tilde{x}\big) = \lambda\, f\big(x\big) + \tilde{\lambda}\, f\big(\tilde{x}\big)$$

für alle $x,\, \tilde{x} \in X$ und alle $\lambda,\, \tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$ gilt. Analog zur *Linearen Algebra* können wir leicht zeigen, dass der Bildraum $f(X)$ einer linearen Abbildung ein Unterraum von Y ist und dass stets $f(0) = 0$ gilt.

Notation Lineare Operatoren werden in der Funktionalanalysis in der Regel mit Großbuchstaben bezeichnet, wobei auf die Klammerung der Argumente verzichtet wird. Wir schreiben also $L\,x$ statt $L(x)$.[26]

[26] Diese Schreibweise ist dadurch motiviert, dass ein linearer Operator als eine Art verallgemeinerte Matrix interpretiert werden kann.

Definition Ein linearer Operator $L : X \to Y$ heißt beschränkt, falls eine reelle Konstante C existiert, sodass die Abschätzung

$$\big\|L\,x\big\|_Y \le C\,\|x\|_X$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Bemerkungen

1. *Achtung*: Dieser Beschränktheitsbegriff für lineare Funktionen weicht von dem für allgemeine (bzw. nichtlineare) Funktionen verwendeten Konzept ab. Er impliziert nämlich nicht, dass die gesamte Bildmenge $\{L\,x \,:\, x \in X\}$ eine beschränkte Teilmenge von Y ist, sondern dass die Bildmenge jeder beschränkten Teilmenge von X beschränkt in Y ist.[27]

2. Die optimale Konstante kann abstrakt durch

$$C = \sup_{x\neq 0} \frac{\big\|L\,x\big\|_Y}{\big\|x\big\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \big\|L\,x\big\|_Y = \sup_{\|x\|_X\le 1} \big\|L\,x\big\|_Y$$

charakterisiert werden, wobei sich die letzten beiden Gleichheitszeichen aus einfachen Rechnungen mit der Linearität von L ergeben (Übungsaufgabe). Es ist in der Regel schwierig, den Wert der optimalen Konstante exakt zu berechnen oder auch nur näherungsweise anzugeben, denn dazu muss oftmals erst ein entsprechendes *Eigenwertproblem* gelöst werden.

Lemma (**Stetigkeitskriterium**) Die lineare Abbildung $L : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

Beweis *Hinrichtung*: Sei $L : X \to Y$ linear und stetig. Dann ist L stetig im Punkt 0 und die Definition von Stetigkeit liefert eine Konstante $c > 0$, sodass die Implikation

$$\|\tilde{x}\|_X \le c \quad\Longrightarrow\quad \|L\,\tilde{x}\|_Y \le 1$$

für alle $\tilde{x} \in X$ gilt. Wir fixieren $x \in X$ mit $x \neq 0$ beliebig und setzen

$$\lambda := \frac{\|x\|_X}{c}\,, \qquad \tilde{x} := \lambda^{-1}\,x = \frac{c\,x}{\|x\|_X}\,, \qquad C := \frac{1}{c}\,.$$

Dann gilt $\|\tilde{x}\|_X \le c$ und mithilfe der Linearität von L sowie der Homogenität von $\|\cdot\|_Y$ erhalten wir via

$$\big\|L\,x\big\|_Y = \big\|\lambda\,L\,\tilde{x}\big\|_Y = \lambda\,\big\|L\,\tilde{x}\big\|_Y \le \lambda \le C\,\|x\|_X$$

die Beschränkheit von L.

Rückrichtung: Sei L eine beschränkte und lineare Abbildung. Dann gilt

$$\|L\,x - L\,\tilde{x}\|_Y = \|L\,(x-\tilde{x})\|_Y \le C\,\|x-\tilde{x}\|_X$$

für alle x, $\tilde{x} \in X$, d.h. L ist Lipschitz-stetig und damit auch stetig. □

[27] Die gesamte Bildmenge ist bei einer linearen Abbildung ein linearer Raum und damit immer unbeschränkt (sofern es sich nicht um die triviale Nullabbildung handelt).

Bemerkungen

1. Ist X endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung $L : X \to Y$ stetig.

   Bemerkung: Dies gilt sogar, wenn Y unendlich-dimensional ist.

   Beweis: Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie im Beweis des Haupsatzes zur Äquivalenz von Normen, d.h. wir wählen Basisvektoren e_j in X, beschreiben jeden Vektor $x \in X$ via $x = \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, e_j$ durch den entsprechenden Komponentenvektor $\xi \in \mathbb{K}^d$ und wählen eine Konstante C_2, sodass

   $$\|\xi\|_\infty = \|x\|_\# \leq C_2\, \|x\|_X\ .$$

   Andererseits gilt

   $$\big\|L\,x\big\|_Y = \left\|\sum_{j=1}^{d} \xi_j\, L\,e_j\right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{d} |\xi_j|\, \big\|L\,e_j\big\|_Y \leq C_1\ \|\xi\|_\infty$$

   mit $C_1 := \sum_{j=1}^{d} \|L\,e_j\|_Y$ und in Kombination der Teilabschätzungen erhalten wir $\|L\,x\|_Y \leq C\ \|x\|_X$ mit $C = C_1\, C_2$. □

2. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass lineare Differentialoperatoren in vielen Funktionenräumen „von Haus aus“ unstetig sind, aber bei geeigneter Wahl der Normen im Bild bzw. Urbildraum stetig werden. Wir werden diesen Aspekt beim Studium der Sobolev-Räume vertiefen.

Beispiel Der Funktionenraum

$$X := \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ \text{alle Ableitungen von } f \text{ existieren und sind beschränkt}\big\}$$

ist in Kombination mit $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum (allerdings kein vollständiger). Für die Funktionenfolge mit

$$x_n(t) = \sin(n\,t)\,, \qquad x_n'(t) = n\cos(n\,t)$$

berechnen wir

$$\|x_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|x_n(t)\big| = 1\,, \qquad \|x_n'\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|x_n'(t)\big| = n\,,$$

und sehen, dass die Ableitung als linearer Operator $L : X \to X$ mit $L\,x = x'$ nicht beschränkt ist. Es gilt jedoch

$$\|x'\|_\infty \leq \|x\|_{1,\infty} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty\ ,$$

für alle $x \in X$, d.h. L ist stetig, sofern wir die Urbildkopie von X nicht mit $\|\cdot\|_\infty$, sondern mit der modifizierten Norm $\|\cdot\|_{1,\infty}$ ausstatten.

Raum linearer Operatoren Die Menge

$$\mathsf{Lin}(X;\,Y) := \big\{L : X \to Y\ :\ L \text{ ist linear und stetig}\big\}$$

ist in natürlicher Weise ein Vektorraum (auch über $\mathbb{K}$) und wir bezeichnen

$$\|L\|_{X;\,Y} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|L\,x\|_Y}{\|x\|_X}$$

als die entsprechende Operatornorm von L.

Beispiele

1. Wir statten $X = \mathbb{K}^n$ und $Y = \mathbb{K}^m$ jeweils mit der euklidischen Norm aus und betrachten eine beliebige $m{\times}n$-Matrix M. Dann wurde durch
$$L_M\,x := M \cdot x$$
eine lineare und stetige Funktion definiert. Insbesondere gilt
$$\|L_M\|_{\mathbb{K}^n;\,\mathbb{K}^m} \leq \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^2}\,,$$
wobei $M_{ij} \in \mathbb{K}$ die Einträge von M sind.[28] Diese Abschätzung ist im Allgemeinen aber nicht optimal (siehe die Übungen).

2. Wir betrachten $X = \mathsf{C}([0,\,3];\,\mathbb{R})$ ausgestattet mit der ∞-Norm, $Y = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der 1-Norm sowie den durch
$$L\,x := \left(\int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t,\ \int\limits_1^3 x(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
definierten linearen Operator $X \to Y$. Dieser ist stetig mit $\|L\|_{X;\,Y} = 3$.

   <u>*Beweis*</u>: Die Theorie der Riemann-Integrale impliziert
$$\left|\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\sup_{t\in[a,\,b]}\bigl|x(t)\bigr| \leq (b-a)\,\|x\|_X\ ,$$
für alle $0 \leq a < b \leq 3$ und jede stetige Funktion x auf dem Intervall $[0,\,3]$. Wir erhalten daher via
$$\|L\,x\|_Y \leq (1-0)\ \|x\|_X + (3-1)\ \|x\|_X = 3\ \|x\|_X$$
die Abschätzung $\|L\|_{X;\,Y} \leq 3$ nach Supremumsbildung über x mit $\|x\|_X = 1$. Betrachten wir nun die konstante Funktion $x_\#$ mit $x_\#(t) = 1$ für alle $t \in [0,\,3]$, so erhalten wir $L\,x_\# = (1,\,2)$ und damit $\|L\,x_\#\|_Y = 3\,\|x_\#\|_X$. Insbesondere gilt also auch $\|L\|_{X;\,Y} \geq 3$. □

Theorem (**Eigenschaften der Operatornorm**) Der Raum $\mathsf{Lin}(X;\,Y)$ bildet mit $\|\cdot\|_{X;\,Y}$ einen normierten Raum. Dieser ist vollständig, sofern $(Y,\,\|\cdot\|_Y)$ vollständig ist.

Beweis <u>*Normeigenschaften*</u>: Übungsaufgabe.

<u>*Vollständigkeit, Teil 1*</u>: Wir setzen voraus, dass die Norm in Y vollständig ist und betrachten eine Cauchy-Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ sowie beliebige $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ mit $x \neq 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit
$$\bigl\|L_n - L_m\bigr\|_{X;\,Y} \leq \varepsilon/\,\|x\| \qquad \text{für alle} \quad n,\,m \geq N$$

[28] Wir haben hier benutzt, dass $\|A\cdot B\|_2 \leq \|A\|_2\ \|B\|_2$ für zwei beliebige Matrizen gilt, sofern für diese die Multiplikation definiert ist. Siehe dazu *Analysis 2* oder *Einführung in die Numerik*.

und dies impliziert

$$\|L_n\,x - L_m\,x\|_X \le \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n,\, m \ge N\,.$$

Insbesondere ist $(L_n\,x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y und daher existiert ein Grenzwert in Abhängigkeit von X, den wir als $f(x)$ bezeichnen.

Vollständigkeit, Teil 2: Wir setzen $f(0) := 0$ und haben insgesamt eine Abbildung $f : X \to Y$ definiert. Aus den Rechenregeln der Konvergenz sowie der Linearität der Abbildungen L_n ergibt sich

$$f\big(\lambda\,x + \tilde\lambda\,\tilde x\big) = \lim_{n\to\infty} L_n\,\big(\lambda\,x + \tilde\lambda\,\tilde x\big) = \lambda \lim_{n\to\infty}(L_n\,x) + \tilde\lambda \lim_{n\to\infty}(L_n\,\tilde x) = \lambda\,f(x) + \tilde\lambda\,f(\tilde x)$$

und wir schließen, dass f linear ist. Wir nennen diese Abbildung von nun an L_∞. Da jede Cauchy-Folge beschränkt ist, existiert eine Konstante C mit

$$\big\|L_n\big\|_{X;\,Y} \le C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

und für jedes $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ gilt

$$\big\|L_\infty\,x\big\|_Y = \lim_{n\to\infty}\big\|L_n\,x\big\|_Y \le \limsup_{n\to\infty}\Big(\big\|L_n\big\|_{X;\,Y}\;\|x\|\Big) \le C\,.$$

Wir haben damit $\|L_\infty\|_{X;Y} \le C$ gezeigt, d.h. L_∞ ist auch stetig und gehört zu $\mathsf{Lin}(X;\,Y)$.

Vollständigkeit, Teil 3: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert und sei N so gewählt, dass

$$\big\|L_n - L_m\big\|_{X;\,Y} \le \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n,\, m \ge N\,.$$

Für jedes x mit $\|x\|_X = 1$ gilt

$$\big\|L_n\,x - L_m\,x\big\|_Y \le \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n,\, m \ge N$$

und im Limes $m \to \infty$ ergibt sich

$$\big\|L_n\,x - L_\infty\,x\big\|_Y \le \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n \ge N\,.$$

Durch Supremumsbildung über alle x mit $\|x\|_X = 1$ erhalten wir schließlich

$$\big\|L_n - L_\infty\big\|_{X;\,Y} \le \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad n \ge N$$

und weil ε beliebig war, besitzt die Cauchy-Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der Operatornorm einen Grenzwert, nämlich L_∞. □

Bemerkungen

1. Beachte, dass unsere Notation — wie aber auch alle anderen in der Literatur – etwas salopp ist: Der Raum $\mathsf{Lin}(X;\,Y)$ sowie die Norm $\|\cdot\|_{X;Y}$ hängen natürlich von den gewählten Normen in X und Y ab, aber dies wird nicht explizit kenntlich gemacht.

2. Wir können durch Betrachtung der konstanten Funktionen sogar zeigen, dass die Operatornorm nur dann vollständig sein kann, wenn die Norm im Bildraum Y vollständig ist. Die Vollständigkeit von $\|\cdot\|_X$ ist in diesem Zusammenhang aber nicht relevant.

3. Sind X und Y jeweils endlich-dimensional, so kann — siehe *Lineare Algebra* — jede lineare Abbildung als Matrix mit $\dim(Y)$ Zeilen und $\dim(X)$ Spalten dargestellt werden, sofern in X und Y jeweils eine Basis gewählt wurde. In der Funktionalanalysis wird dieses Konzept aber nicht weiterverfolgt und wir werden keine Matrizen mit unendlich vielen Zeilen oder Spalten betrachten. Basen werden darüber hinaus nur in Hilbert-Räumen verwendet.

Dualraum Der lineare Vektorraum

$$X^* := \mathsf{Lin}(X;\, \mathbb{K})$$

heiß Dualraum von X und wir schreiben oft $\|\cdot\|_*$ für die entsprechende Operatornorm. Die Elemente von X^* werden lineare Funktionale auf X genannt und abstrakt mit x^* bezeichnet, wobei dann

$$\langle x^*,\, x\rangle = x_*(x) \in \mathbb{K}$$

die sogenannte *Dualpaarung ist.* Insbesondere gilt

$$\|x^*\|_* = \sup_{x\neq 0} \frac{\big|\langle x^*,\, x\rangle\big|}{\|x\|}\,.$$

Bemerkungen

1. Dualräume sind ganz wesentlich für die Funktionalanalysis und wir werden sie noch sehr viel genauer studieren.

2. Die Definitionen von X^* sowie von $\|\cdot\|_*$ hängen natürlich von der gewählten Norm in X ab, wobei sich dies aber wieder nicht in unserer Notation widerspiegelt.

3. Im Fall von $X = \mathbb{K}^d$ (ausgestattet mit der euklidischen Standardnorm) kann X^* sehr einfach verstanden werden: Wenn wir die Elemente von X als *Spaltenvektoren* schreiben, so besteht X^* gerade aus den *Zeilenvektoren* und die Dualpaarung ist gerade die Matrizenmultiplikation. Es gilt also

$$\langle x^*,\, x\rangle = \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{d} x_j^*\, x_j\,.$$

   und mit kleineren Rechnungen zeigen wir

$$\|x^*\|_* = \sqrt{|x_1^*|^2 + \ldots + |x_d^*|^2}\,.$$

   Insbesondere sind in diesem Fall die beiden Räume X und X^* in natürlicher Weise isometrisch isomorph zueinander, wobei die entsprechende lineare Bijektion jeden Spaltenvektor auf den entsprechenden Zeilenvektor abbildet.

4. Wir werden später verstehen, dass jeder Hilbert-Raum isometrisch isomorph zu seinem Dualraum ist, wobei dies eine ganz zentrale Erkenntniss sein wird. Dies ist auch der Grund, warum wir für die Dualpaarung dasselbe Symbol wie für Skalarprodukt verwenden.

5. Wir werden auch erkennen, dass jeder Banach-Raum X, sofern er nicht schon Hilbert-Raum ist, nicht isometrisch isomorph zu seinem Dualraum ist (jedenfalls nicht in einem linearen Sinne). Viele Banach-Räume (aber nicht alle) haben aber die Eigenschaft, dass sie isometrisch isomorph zu ihrem Bidualraum $X^{**} = (X^*)^*$ sind, also zum Dualraum des Dualraumes. Diese Räume nennen wir *reflexiv.*

Definition Eine lineare Abbildung $L : X \to Y$ heißt Einbettung, sofern sie injektiv und stetig ist. Gilt darüber hinaus

$$\big\|L\,x\big\|_Y = \big\|x\big\|_X\,,$$

für alle $x \in X$, so sprechen wir von einer isometrischen Einbettung falls L nicht surjetiv ist und andernfalls von einer isometrischen Isomorphie.[29]

Lemma (**Isometrien für endlich-dimensionale Räume**) Gilt $d = \dim X < \infty$, so existiert für jede Norm auf dem $\mathbb{K}^d$ eine Norm auf X, sodass eine isometrische Isomorphie $L : X \to \mathbb{K}^d$ existiert.

Beweis Für eine fixierte Basis $e_1, \ldots, e_d$ in X kann jeder Vektor $x \in X$ via

$$x = \xi_1\, e_1 + \ldots + \xi_d\, e_d$$

in eindeutiger Weise mit einem Komponentenvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{K}^d$ identifiziert werden, wobei die Zuordnung $x \rightsquigarrow \xi =: L\,x$ in natürlicher Weise einen Vektorraum-Isomorphismus $L : X \to \mathbb{K}^d$ liefert (siehe *Lineare Algebra*). Ist außerdem eine Norm im $\mathbb{K}^d$ fixiert, so wird durch

$$\big\|x\big\|_X := \|L\,x\|_{\mathbb{K}^d} = \|\xi\|_{\mathbb{K}^d}$$

eine entsprechende Norm auf X definiert, wobei der Isomorphismus L per Konstruktion isometrisch ist. □

Bemerkungen

1. Salopp gesprochen besagt das Lemma, dass jeder d-dimensionale Raum X wie der $\mathbb{K}^d$ aussieht, sofern wir eine Basis in X fixieren und die Normen in $\mathbb{R}^d$ und X in konsistenter Weise wählen. Mit ganz analogen Argumenten hatten wir weiter oben schon gezeigt, dass alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum äquivalent sind.

2. In unendlich-dimensionalen Räumen können wir jedoch im Allgemeinen nicht so argumentieren. Wir bräuchten unendlich viele Basisvektoren sowie unendlich viele Komponenten und müssten jedes $x \in X$ nicht durch eine endliche, sondern durch eine unendliche Summe darstellen. Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Reihendarstellung benötigt aber bereits Konvergenzbegriffe in X und ist im Allgemeinen alles andere als trivial. Wir werden jedoch weiter unten sehen, dass es zumindest für Hilbert-Räume mit abzählbarer Basis ein analoges Resultat gibt.

[29] Beachte, dass die die isometrische Gleichung in Kombination mit der Linearität und der positiven Definitheit jeder Norm via

$$\|L\,x - L\,\tilde{x}\|_Y = \|L\,(x - \tilde{x})\|_Y = \|x - \tilde{x}\|_X$$

die Injektivität von L nach sich zieht. Insbesondere gilt $L(x) = L(\tilde{x})$ dann und nur dann, wenn x und $\tilde{x}$ gleich sind.

Vorlesung 07 : 14. November

1.4 Folgenräume

Vorbemerkung Wir diskutieren in diesem Abschnitt die Folgenräume über einer *abzählbaren* Indexmenge. In unserer Darstellung wählen wir diese immer als $\mathbb{Z}$, aber alle Argumente können mühelos auf $\mathbb{N}$ oder andere Indexmengen übertragen werden.

Schreibweise Eine reelle oder komplexe Zahlenfolge über der Indexmenge $\mathbb{Z}$ ist eine Abbildung $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, wobei wir oftmals

$$(x_j)_{j\in\mathbb{Z}} = \big(\dots\,,\ x_{-3}\,,\ x_{-2}\,,\ x_{-1}\,,\ x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ \dots\big)$$

anstelle von x schreiben. Die Menge aller Folgen wird mit $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ bezeichnet und ist via

$$(x+y)_j = x_j + y_j\,, \qquad (\lambda\, x)_j = \lambda x_j$$

in natürlicher Weise ein Vektorraum. Für jedes $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ sind die p-Normen

$$\|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{Z}} \big|x_j\big|$$

und

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} = \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=-k}^{+k} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

mit Parameter $p \in [1,\,\infty)$ wohldefiniert, sofern wir den Wert $+\infty$ zulassen.[30]

Beispiele

1. Für die konstante Folge mit $x_j = 1$ gilt offensichtlich

   $$\|x\|_\infty = 1\,, \qquad \|x\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=-k}^{+k} 1 = \lim_{k\to\infty} (2\,k+1) = \infty\,,$$

   wobei die Konvergenz im Sinne der uneigentlichen Konvergenz aus *Analysis 1* zu verstehen ist.

[30] Die letzte Formel stellt klar, dass auch jede doppelt-unendliche Summe via

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=-k}^{+k} \xi_j$$

als Grenzwert einer Folge endlicher Summen zu verstehen ist. Wenn alle Summanden ξ_j nichtnegativ sind, ist der Grenzwert immer entweder im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinne wohldefiniert. Insbesondere meinen dann Konvergenz und absolute Konvergenz dasselbe. Bei nicht-reellen oder nicht-negativen Summanden können jedoch wieder viele Entartungen bei nicht-absolut konvergenten Reihen auftreten.

2. Mit $x_j = 1/(1+j^2)$ ergibt sich

$$\|x\|_\infty = x_0 = 1\,, \qquad \|x\|_p^p = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\big(1+j^2\big)^p} = \frac{\Gamma\big(p-\frac{1}{2}\big)}{\Gamma(p)} < \infty\,,$$

wobei Γ Gamma-Funktion aus *Analysis 1* ist.

3. Für jeden reellen Parameter $\mu > 0$ betrachten wir

$$x_j = \exp\big(-\mu\,|j|\,\big)$$

und berechnen $\|x\|_\infty = x_0 = 1$. Wegen $x_j = x_{-j}$ erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned}\|x\|_p^p &= \left(\sum_{j=-\infty}^{-1} x_j^p\right) + x_0^p + \left(\sum_{j=+1}^{+\infty} x_j^p\right) = x_0^p + 2\sum_{j=+1}^{+\infty} x_j^p \\ &= 1 + 2\sum_{j=+1}^{+\infty} \exp\left(-\mu\, j\, p\right) = 1 + 2\sum_{j=+1}^{+\infty} \big(\exp\left(-\mu\, p\right)\big)^j \\ &= 1 + 2\,\frac{\exp\left(-\mu\, p\right)}{1-\exp\left(-\mu\, p\right)} = \frac{1+\exp\left(-\mu\, p\right)}{1-\exp\left(-\mu\, p\right)}\end{aligned}$$

und damit

$$\|x\|_p = \left(\frac{1+\exp\left(-\mu\, p\right)}{1-\exp\left(-\mu\, p\right)}\right)^{1/p},$$

wobei wir unter anderem die Summenformel für geometrische Reihen ausgewertet haben.

Lemma (**fundamentale Ungleichungen**) Für je zwei Folgen $x,\, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ und alle Exponenten $p \in [1,\,\infty]$ gilt die Minkowski-Ungleichung

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

sowie die Hölder-Ungleichung

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|\; |y_j| \leq \|x\|_p\; \|y\|_{p'}\;,$$

wobei p' wieder der konjugierte Exponent zu p ist und jede Norm auch den Wert $+\infty$ annehmen darf. Außerdem gilt die Einbettungsungleichung

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

für jedes $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ und alle $1 \leq p < q \leq \infty$.

Beweis Die Hölder- und die Minkowski-Ungleichung können jeweils analog zu den entsprechenden Ungleichungen im $\mathbb{R}^n$ hergeleitet werden (siehe etwa *Analysis 2*). Die Einbettungsungleichung kann dann im Anschluss mithilfe der Hölder-Ungleichung bewiesen werden (siehe die Übungen). $\square$

Definition-Lemma (**wichtige Folgenräume**) Für jedes $p \in [1, \infty]$ ist die Menge

$$\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K}) := \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \,:\, \|x\|_p < \infty\right\},$$

ein normierter Raum bzgl. der p-Norm. Dabei gilt

$$\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K}) \subset \ell^q(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$$

für alle $1 \leq p < q \leq \infty$.

Beweis Mit der Minkowski-Ungleichung können wir leicht nachrechnen, dass $\ell^p(\mathbb{Z})$ reeller Vektorraum — genauer gesagt, ein linearer Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ — ist und dass $\|\cdot\|_p$ alle Norm-Eigenschaften erfüllt. Aus der Einbettungsungleichung ergibt sich außerdem die letzte Behauptung. □

Bemerkungen

1. Für $1 \leq p < q \leq \infty$ gilt zwar $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ (siehe das Lemma oben), aber es gibt *keine* Konstante C, sodass $\|x\|_p \leq C\, \|x\|_q$ für alle $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{K}}$ gelten würde. Insbesondere ist der Raum $\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ immer eine *echte Teilmenge* von $\ell^q(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$.

   In der Funktionalanalysis schreiben wir oftmals

   $$\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K}) \hookrightarrow \ell^q(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$$

   und sagen, $\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ bettet stetig in den $\ell^q(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ ein. Diese Einbettung ist für $p < q < \infty$ sogar dicht, aber nicht für $p < q = \infty$ (Übungsaufgabe).

2. Die Interpolationsungleichung

   $$\|x\|_p \leq \|x\|_1^{1/p}\, \|x\|_\infty^{1/p'}$$

   kann relativ einfach hergeleitet werden (Übungsaufgabe) und ist oftmals sehr nützlich.

3. Für jedes $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ können wir

   $$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p\,,$$

   zeigen (Übungsaufgabe), wobei die Limes auf der rechten Seite eine Konvergenz in $\mathbb{R}$ ist.

4. Für $p = 2$ (aber nicht für $p \neq 2$) gibt es ein Skalarprodukt auf $\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$, nämlich

   $$\left\langle x,\, y\right\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{x}_j\, y_j\,,$$

   wobei die Hölder-Ungleichung sicherstellt, dass die unendliche Summe auf der rechten Seite für $x,\, y \in \ell^2(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ immer im Sinne einer absolut konvergenten Reihe definiert ist.

5. Der Raum aller im Unendlichen abklingenden Folgen ist

$$\ell_0^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}) := \Big\{x \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}) \;:\; \lim_{j\to\pm\infty} x_j = 0\Big\}$$

und als abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$ ebenfalls vollständig bzgl. der ∞-Norm (Übungsaufgabe).

6. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ können wir $e_k \in \mathbb{K}^\mathbb{Z}$ durch

$$e_k = \big(e_{k,j}\big)_{j\in\mathbb{Z}}\,, \qquad e_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

als natürliche Verallgemeinerungeines kartesischen Einheitsvektors definieren und mit einfachen Rechnung (Übungsaufgabe) zeigen wir, dass die Basisdarstellung

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} x_j\, e_j$$

für jedes $1 \le p < \infty$ und alle $x \in \ell^p(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$ erfüllt ist.

Achtung : Dieses Konvergenzresultat gilt auch bzgl. der ∞-Normkonvergenz **für jedes** $x \in \ell_0^\infty\big(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}\big)$, aber **nicht für alle** $x \in \ell^\infty\big(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}\big)$ (Übungsaufgabe). Insbesondere ist $\ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$ ein unendlich-dimensionaler Banach-Raum, in dem keine sinnvolle Basisdarstellung existiert.

7. Wir bezeichnen mit

$$\ell_{\text{fin}}(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}) = \Big\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{Z} \;:\; \text{es existiert ein } n \text{ mit } x_j = 0 \text{ für } |j| > n\Big\}$$

den Raum aller Folgen auf $\mathbb{Z}$, die nur endlich viele nichtverschwindende Glieder besitzen. Dieser Raum ist für jedes $1 \le p \le \infty$ immer ein echter Unterraum von $\ell^p(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$, der darüber hinaus für $p < \infty$ (aber nicht für $p = \infty$) auch dicht liegt (Übungsaufgabe).

8. Im Fall von $0 < p < 1$ ist die Minkowski-Ungleichung im Allgemeinen falsch und die Ausdrücke in der Definition von $\|\cdot\|_p$ liefern keine Norm mehr.

9. Weitere wichtige Ungleichungen werden in den Übungen besprochen.

Folgen im Folgenraum Bei Folgen aus $\mathbb{K}^\mathbb{Z}$ müssen wir zwei Indizes verwenden. Zum Beispiel wird durch

$$x_{n,j} := \exp\left(-\frac{n+2}{1+n\,j^2}\right)$$

eine Folge $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^\mathbb{Z}$ definiert, wobei das n-te Element

$$x_n = \big(x_{n,j}\big)_{j\in\mathbb{Z}}$$

selbst eine Folge auf $\mathbb{Z}$ ist, deren Glieder durch j indiziert sind.

Definition Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ konvergiert für $n \to \infty$ punktweise gegen $x_\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, falls

$$x_{\infty,\,j} = \lim_{n\to\infty} x_{n,\,j}$$

für jeden Index $j \in \mathbb{Z}$ im Sinne der Konvergenz in $\mathbb{K}$ gilt.

Bemerkungen

1. Für Folgen in $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ haben wir unterschiedliche Konvergenzbegriffe: Die soeben eingeführte punktweise Konvergenz sowie die weiter oben abstrakt definierte Konvergenz bzgl. einer p-Norm, wobei letztere gerade meint, dass $\|x_n - x_\infty\|_p$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Diese Konvergenzbegriffe sind verschieden und wir müssen bei jeder Grenzwertaussage immer deutlich machen, in welchem Sinn diese zu verstehen ist. Wir schreiben zum Beispiel oftmals

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \quad \text{punktweise} \qquad \text{bzw.} \qquad x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \quad \text{in der } p\text{-Norm}\,,$$

   aber es gibt auch andere Möglichkeiten, die Art der Konvergenz festzuhalten bzw. anzugeben.

2. Die Konvergenz in einer p-Norm impliziert stets die punktweise Konvergenz, denn für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt

$$0 \leq |x_{n,\,j} - x_{\infty,\,j}| \leq \|x_n - x_\infty\|_p \,.$$

   Die Umkehrung der Aussage ist im Allgemeinen falsch, d.h. aus der punktweisen Konvergenz folgt im Allgemeinen nicht die Konvergenz in einer der p-Normen.

Beispiele

1. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n,\,j} = \frac{1}{1+\ln(n)+j^2}$$

   konvergiert für $n \to \infty$ in jeder p-Norm gegen das triviale Element x_∞ mit $x_{\infty,\,j} = 0$ und damit insbesondere auch punktweise. Für $p = \infty$ ergibt sich die Normkonvergenz aus

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \leq \frac{1}{1+\ln(n)} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,.$$

   und im Fall von $p = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_\infty\|_1 = \left|x_{n,\,0}\right| + 2\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_{n,\,j}\right| &= \frac{1}{1+\ln(n)} + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln(n)+j^2}\\
&\leq \frac{1}{1+\ln(n)} + 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+\ln(n)+t^2}\\
&\leq \frac{1}{1+\ln(n)} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\ln(n)}} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,,
\end{aligned}$$

wobei wir das Integralkriterium für unendliche Summen aus *Analysis 1* verwendet haben. Für $1 < p < \infty$ folgt

$$\|x_n - x_\infty\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

aus der Interpolationsungleichung.

2. Die Formel

$$x_{n,j} = \exp\left(-\frac{|j|}{n}\right)$$

definiert eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, wobei x_n wegen

$$\|x_n\|_p = \left(\frac{1+\exp(-p/n)}{1-\exp(-p/n)}\right)^{1/p}, \qquad \|x_n\|_\infty = 1$$

für jedes $p \in [1, \infty]$ zu $\ell^p(\mathbb{Z})$ gehört (die Formeln können mit $\mu = 1/n$ aus einem der obigen Beispiele abgelesen werden). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $n \to \infty$ offensichtlich punktweise gegen x_∞ mit

$$x_{\infty,j} = 1 \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}\,,$$

aber diese Konvergenz gilt nicht bzgl. der p-Norm. Für $p < \infty$ folgt dies zum Beispiel aus der Tatsache, dass x_∞ gar nicht zu $\ell^p(\mathbb{Z})$ gehört. Für $p = \infty$ können wir hingegen leicht zeigen, dass $\|x_n - x_\infty\|_\infty = 1$ gilt und daher für $n \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert.

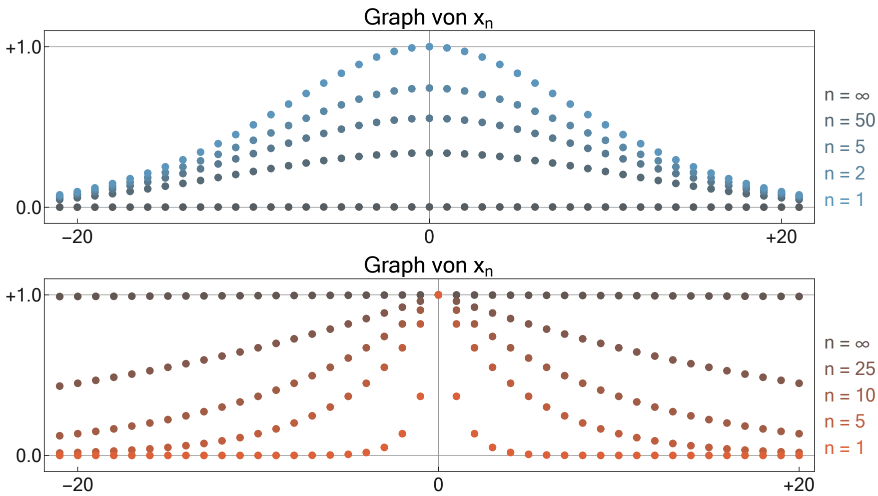


Abbildung Die Funktionenfolgen aus dem ersten (oben) und dem zweiten (unten) Beispiel.

Theorem (**Vollständigkeit**) Für jeden Exponenten $p \in [1, \infty]$ ist der normierte Raum $\left(\ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K}), \|\cdot\|_p\right)$ vollständig.

Beweis Teil 1: Wir betrachten eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^p(\mathbb{Z})$ und wollen zeigen, dass diese bzgl. der p-Norm konvergiert. Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ gilt $|x_{n,j} - x_{k,j}| \leq \|x_n - x_k\|_p$ und wir schließen, dass die Zahlenfolge $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge ist und deshalb nach *Analysis 1* gegen ein Grenzwert konvergiert, den wir $x_{\infty,j}$ nennen wollen. Insgesamt haben damit gezeigt, dass x_n für $n \to \infty$ punktweise gegen x_∞ konvergiert.

<u>*Teil 2*</u>: Wir wollen nun indirekt $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\|_p = 0$ zeigen und nehmen daher an, dies sei nicht der Fall. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ sowie eine Indexfolge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l\to\infty} n_l = \infty$, sodass

$$\|x_{n_l} - x_\infty\|_p > \varepsilon$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt, und die Cauchy-Eigenschaft liefert einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_n - x_k\|_p < \varepsilon$$

für alle $n,\, k > N$. Im Fall von $p = \infty$ ergibt sich

$$|x_{n,\,j} - x_{k,\,j}| \leq \|x_n - x_k\|_p < \varepsilon$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$. Wenn wir auf der linken Seite den Grenzübergang $k \to \infty$ durchführen und anschließend das Supremum über j bilden, so erhalten wir

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle $n > N$ und damit auch für $n = n_l$, sofern l hinreichend groß ist. Das ist aber ein Widerspruch und unsere Annahme muss falsch gewesen sein. Im Fall von $1 \leq p < \infty$ bemerken wir, dass die Abschätzung

$$\sum_{j=-M}^{+M} |x_{n,\,j} - x_{k,\,j}|^p \leq \|x_n - x_k\|_p^p < \varepsilon^p$$

für alle $n,\, k > N$ und alle $M \in \mathbb{N}$ gilt. Wir lassen nun zuerst k and anschließend M nach ∞ laufen und erhalten

$$\|x_n - x_\infty\|_p^p \leq \varepsilon^p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, aber dies liefert wieder einen Widerspruch nach dem Ziehen der p-ten Wurzel.

<u>*Teil 3*</u>: Die Dreiecksungleichung impliziert $\|x_\infty\|_p \leq \|x_\infty - x_n\|_p + \|x_n\|_p < \infty$ für jedes n und damit auch $x_\infty \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nur punktweise, sondern auch bzgl. der p-Norm gegen x_∞ konvergiert. □

Theorem (**Darstellung des Dualraumes von ℓ^p**) Für jedes $1 < p < \infty$ existiert ein isometrischer Isomorphismus $E_p : \ell^{p'}(\mathbb{Z};\, \mathbb{K}) \to \ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})^*$, sodass

$$\langle E_p\, y,\, x\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{y_j}\, x_j$$

für alle $x \in \ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ und alle $y \in \ell^{p'}(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ erfüllt ist.

Beweis Wir schreiben im Beweis ℓ^p statt $\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ und bezeichnen die Operatornorm in $(\ell^p)^* = \mathsf{Lin}(\ell^p;\, \mathbb{K})$ mit $\|\cdot\|_*$.

<u>*Definition von $E_p\, y$*</u>: Die Hölder-Ungleichung garantiert

$$\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{y_j}\, x_j\right| \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left|\overline{y_j}\, x_j\right| \leq \|y\|_{p'}\, \|x\|_p$$

für alle $x,\, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ und wir schließen, dass die angegebene Formel für jedes feste $y \in \ell^{p'}$ ein lineares Funktional auf ℓ^p definiert, dass wir $E_p\, y$ nennen. Insbesondere hängt die rechte Seite in der Formel in linearer Weise von x ab und die Reihe konvergiert (sogar absolut) für jedes $x \in \ell^p$ gegen eine Zahl in $\mathbb{K}$. Außerdem gilt

$$\|E_p\, y\|_* = \sup_{\|x\|_p \le 1} \big|\langle E_p\, y,\, x\rangle\big| \le \|y\|_p\ ,$$

d.h. das lineare Funktional $E_p\, y$ ist auch stetig bzgl. der Variablen x.

Linearität, Stetigkeit und Injektivität von E_p: Die Abbildung E_p bildet $\ell^{p'}$ linear und stetig in den Dualraum von ℓ^p ab, wobei sich nun alles auf die Variable y bezieht und die Stetigkeit ebenfalls aus der letzen Abschätzung abgelesen werden kann. Sei nun $y \in \ell^{p'}$ fixiert mit $E_p\, y = 0$. Dann gilt $0 = \langle E_p\, y,\, x\rangle$ für alle $x \in \ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ und nach Einsetzen der speziellen Wahl $x = y_k\, e_k$ erhalten wir

$$0 = \langle E_p\, y,\, y_k\, e_k\rangle = \overline{y_k}\, y_k = |y_k|^2$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und damit $y = 0$.

Surjektivität von E_p: Sei y^* in $(\ell^p)^*$ beliebig vorgegeben. Mithilfe der kartesischen Basisvektoren (siehe oben) definieren wir nun $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ durch

$$y_j := \overline{\langle y_*,\, e_j\rangle} \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}$$

und wollen zeigen, dass y wirklich im Raum $\ell^{p'}$ liegt und dass außerdem $E_p\, y = y^*$ gilt. Dazu bemerken wir, dass nach Konstruktion und wegen der Linearität von y^* die Hilfsformel

$$\sum_{j=-n}^{+n} \overline{y_j}\, x_j = \sum_{j=-n}^{+n} x_j\, \langle y_*,\, e_j\rangle = \left\langle y_*,\, \sum_{j=-n}^{+n} x_j\, e_j \right\rangle$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \ell^p$ erfüllt ist. Insbesondere gilt

$$\sum_{j=-n}^{+n} \overline{y_j}\, x_j \le \|y^*\|_* \left\| \sum_{j=-n}^{+n} x_j\, e_j \right\|_p = \|y^*\|_* \left(\sum_{j=-n}^{+n} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

aufgrund der Hölder-Ungleichung und für festes $n \in \mathbb{N}$ testen wir diese Abschätzung mit der speziellen Wahl

$$x_j := \begin{cases} y_j\, |y_j|^{p'-2} & \text{für } |j| \le n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die ein Element in ℓ^p definiert.[31] Dies liefert

$$\sum_{j=-n}^{+n} |y_j|^{p'} \le \|y^*\|_* \left(\sum_{j=-n}^{+n} |y_j|^{p\,(p'-1)} \right)_p^{1/p}$$

und anschließend

$$\left(\sum_{j=-n}^{+n} |y_j|^{p'} \right)^{1/p'} \le \|y^*\|_*$$

[31] Beachte, dass die Abbildung $z \mapsto z\, |z|^{p'-2}$ auf ganz $\mathbb{C}$ und insbesondere im Ursprung stetig ist. Auf der reellen Achse kann sie auch als $z \mapsto \operatorname{sgn}(z)\, |z|^{p'-1}$ geschrieben werden.

nach kleineren Rechnungen und unter Ausnutzung von $p\,(p'-1) = p'$. Im Limes $n \to \infty$ erhalten wir

$$\|y\|_{p'} \leq \|y^*\|_*$$

und damit $y \in \ell^{p'}$. Für jedes feste $x \in \ell^p$ ergibt sich außerdem

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{y_j}\, x_j = \langle y^*,\, x\rangle$$

durch Grenzübergang $n \to \infty$ in der Hilfsformel, wobei die Konvergenz auf der rechten Seite sich aus der Stetigkeit von y^* sowie der weiter oben diskutierten kartesischen Basisdarstellung von x ergibt. Es gilt also $y^* = E_p\, y$ und damit auch $\|y^*\|_* \leq \|y\|_{p'}$. □

Bemerkungen

1. Das Theorem garantiert $\ell^{p'}(\mathbb{Z}; \mathbb{K}) \cong \ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K})^*$ und wir werden beide Räume oftmals stillschweigend miteinander identifizieren, d.h. wir geben E_p nicht explizit an, sondern schreiben

   $$\langle y,\, x\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{y_j}\, x_j$$

   mit $y \in \ell^{p'}(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ und $x \in \ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$. Beachte aber, dass es sich für $p \neq 2$ eben nicht um ein Skalarprodukt der Elemente eines Hilbert-Raumes, sondern um eine Paarung von Elementen zweier verschiedener Räume handelt, wobei der für y dual zum Raum für x ist.

2. Wegen $2' = 2$ ist $\ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ isometrisch isomorph zu seinem eigenen Dualraum. Wir werden sehen, dass dies in jedem Hilbert-Raum so ist.

3. Eine zweifache Anwendung des Theorems zeigt, dass $\ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ für $1 < p < \infty$ immer isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum ist (*Reflexivität*), denn es gilt ja $(p')' = p$.

4. Einen analogen Darstellungsatz werden wir weiter unten bei den L^p-Räumen kennenlernen. Der Beweis ist aber deutlich schwieriger und benötigt nichttriviale Resultate aus der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie

5. Mit ganz ähnlichen Argumenten können wir

   $$\ell^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{K}) \cong \big(\ell^1(\mathbb{Z}; \mathbb{K})\big)^*, \qquad \ell^1(\mathbb{Z}; \mathbb{K}) \cong \big(\ell^\infty_0(\mathbb{Z}; \mathbb{K})\big)^*$$

   beweisen, denn sowohl in $\ell^1(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ als auch in $\ell^\infty_0(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ gilt das oben diskutierte Konverenzresultat bzgl. der kartesischen Einheitsbasis.

   Ausblick: Der Dualraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ ist größer als Der Raum $\ell_1(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ ist nicht isomorph zum Dualraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$, sondern nur zu einem echten Unterraum, denn es gibt auch translationsinvariante Funktiionale auf $\ell^\infty(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$, die nicht von einem Element aus $\ell^1(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ erzeugt sind. Siehe dazu die Hausaufgaben.

Ergänzung* Für jedes $1 < p < \infty$ wird durch

$$\big(D_p(x)\big)_j := \|x\|_p^{2-p}\ |x_j|^{p-2}\, x_j$$

eine Abbildung $D_p : \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{K}) \to \ell^{p'}(\mathbb{Z};\mathbb{K})$ definiert und mit kleineren Rechnungen zeigen

$$\big\|D_p(x)\big\|_{p'}^2 = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \big|D_p(x)_j\big|^{p'}\right)^{2/p'} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{\big(D_p(x)\big)_j}\, x_j = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \big|x_j\big|^{p}\right)^{2/p} = \big\|x\big\|_p^2$$

sowie

$$D_{p'}\big(D_p(x)\big) = x$$

für alle $x \in \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{K})$. Aus Sicht des Theorem kann D_p also bijektive Abbildung von $\ell^p(\mathbb{K};\mathbb{Z})$ in seinen Dualraum betrachtet werden und wird daher Dualitätsabbildung genannt. Dabei ist D_p für $p = 2$ linear, für $p \neq 2$ aber *nichtlinear*.

*Ausblick**: Für jeden Banach-Raum X wird durch

$$D_X(x) := \big\{x^* \in X^*\ :\ \|x^*\|_{X_*}^2 = \langle x^*, x\rangle = \|x\|_X^2\ \big\}$$

eine entsprechende Dualitätsabbildung D_X definiert, wobei diese aber im Allgemeinen nichtlinear und *mehrdeutig* ist, d.h. $D_X(x)$ ist für jedes x eine Teilmenge von X^*. Für reflexive Räume ist D_X jedoch eindeutig ($D_X(x)$ enthält dann immer genau ein Funktional) und für Hilbert-Räume sogar linear.

Kapitel 2

Grundprinzipien

Vorlesung 08 : 16. November

2.1 Satz von Baire

Theorem (**Satz von Baire, Version 1**) Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein Banach-Raum und sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen und dichten Teilmengen $O_n \subseteq X$. Dann liegt auch die Menge

$$O_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

dicht in X.[1]

Beweis Wir müssen zeigen, dass jede nichtleere offene Kugel $B_{\varepsilon_0}(x_0)$ in X mindestens einen Punkt enthält, der auch zu O_∞ gehört. Wir fixieren daher $x_0 \in X$ sowie $\varepsilon_0 > 0$ beliebig und konstruieren zunächst zwei Folgen

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X\,, \qquad (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

durch folgende die Rekursionsvorschrift: Im n-ten Schritt bemerken wir, dass es wegen der Dichtheit von O_n mindestens einen Punkt x_n in der Kugel $B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$ gibt, der auch in O_n liegt. Da der Durchschnitt zweier offener Mengen wieder offen ist, finden wir sogar einen Radius $\tilde{\varepsilon}_n > 0$ mit

$$B_{\tilde{\varepsilon}_n}(x_n) \subseteq B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \cap O_n$$

und setzen

$$\varepsilon_n = \tfrac{1}{2}\,\min\{\tilde{\varepsilon}_n\,,\ \varepsilon_{n-1}\}\,.$$

Nach Konstruktion gilt damit

$$\overline{B}_{\varepsilon_n}(x_n) \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \cap O_n\,, \qquad 0 < \varepsilon_n \le \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit einem einfachen Induktionsbeweis zeigen wir

$$\overline{B}_{\varepsilon_0}(x_0) \supset \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \supset \overline{B}_{\varepsilon_2}(x_2) \supset \ldots \supset \overline{B}_{\varepsilon_n}(x_n) \supset \overline{B}_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \supset \ldots$$

[1] Die Menge O_∞ ist als unendlicher Durchschnitt offenener Mengen nicht unbedingt offen.

sowie

$$0 < \varepsilon_n \leq 2^{-n}\,.$$

Das verallgemeinerte Prinzip der Intervallschachtelung (siehe die Hausaufgaben und beachte, dass hier die Vollständigkeit von X einfließt) garantiert die Existenz und Eindeutigkeit eines Punktes $x_\infty \in X$ mit

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n\,, \qquad \{x_\infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{\varepsilon_n}(x_n).$$

Insbesondere gilt

$$x_\infty \in \overline{B}_{\varepsilon_n}(x_n) \subset O_n \qquad \text{und damit} \qquad x_n \in O_n$$

sowohl für $n = 0$ als auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ und wir schließen, dass der Schnitt von $B_{\varepsilon_0}(x_0)$ und O_∞ nicht leer ist. Da ε_0 und x_0 beliebig waren, folgt die Behauptung. □

Theorem (**Satz von Baire, Version 2**) Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein Banach-Raum und sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen $A_n \subseteq X$, sodass

$$A_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

einen inneren Punkt besitzt. Dann besitzt auch mindestens eine der Mengen A_n einen inneren Punkt.

Beweis Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge A_n keinen inneren Punkt und wir schließen, dass

$$O_n := X \setminus A_n$$

sowohl offen als auch dicht ist (jeweils bzgl. $\|\cdot\|$). Die erste Version des Satzes von Baire zeigt, dass die Menge

$$O_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

ebenfalls dicht liegt und ihr Komplement daher keinen inneren Punkt enthält. Die Rechenregeln der Mengenoperationen implizieren aber

$$X \setminus O_\infty = X \setminus \left(\bigcap_{n=1} O_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(X \setminus O_n\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_\infty\,,$$

d.h. das Komplement von O_∞ enthält nach Voraussetzung doch einen inneren Punkt. Das ist der gesuchte Widerspruch. □

Bemerkungen

1. Wir haben die zweite Version des Satzes von Baire mit der ersten bewiesen, aber wir können die erste auch mithilfe der zweiten herleiten (Übungsaufgabe).

2. Beide Versionen des Satzes von Baire gelten auch in jedem vollständigen metrischen Raum, wobei die Beweise ganz analog geführt werden können. Auf die Vollständigkeit kann aber nicht verzichtet werden, wie das nachfolgende Gegenbeispiel zeigt.

3. Der Satz von Baire wird selbst nicht sehr häufig verwendet, aber dafür einige seiner Implikationen. Insbesondere der *Satz von Banach-Steinhaus*, der *Satz von der offenen Abbildung* sowie das *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*

Gegenbeispiel Wir betrachten $X = \ell_{\text{fin}}(\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ mit der ∞-Norm als Beispiel für einen *nicht vollständigen* Raum sowie die Mengen

$$A_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \,:\, x_j = 0 \text{ für alle } j \in \mathbb{Z} \text{ mit } |j| > n \right\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Mit einfachen Argumenten (Übungsaufgabe) zeigen wir, dass jede Menge A_n abgeschlossen ist und keinen inneren Punkt enthält. Andererseits ist $A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ der gesamte Raum X und enthält damit innere Punkte (hier sogar alle $x \in X$). Insgesamt schließen wir, dass die Behauptung des Baireschen Satzes im Raum X nicht richtig ist.

Definition Sei $U \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Wir nennen U nirgends dicht, wenn ihr Abschluss $\operatorname{cls}(U)$ keinen inneren Punkt enthält, d.h. falls $\operatorname{int}\big(\operatorname{cls}(U)\big) = \emptyset$ gilt. Die Menge U heißt hingegen mager (oder Menge der 1. Kategorie), wenn sie als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen dargestellt werden kann. Ist U jedoch nicht mager, so sprechen wir von einer fetten Menge (oder Menge der 2. Kategorie).

Bemerkungen

1. Das Standardbeispiel für eine magere bzw. fette Menge ist $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

2. Die Baireschen Kategorien geben uns die Möglichkeit, die „Größe“ einer Mengen mit topologischen Konzepten zu charakterisieren.

3. Es gibt auch eine Analogie zur allgemeinen Maßtheorie, wobei die mageren Mengen den Nullmengen und die fetten Mengen den Mengen mit positiven Maß entsprechen.[2]

Korollar (**Folgerungen aus dem Satz von Baire**) In jedem Banach-Raum gilt:

1. Das Komplement einer mageren Menge ist dicht.

2. Jede offene und nichtleere Teilmenge von X ist fett.

[2] Die Standardreferenz ist hier: J.C. OXTOBY, *Measure and Category*, Springer 1980.

Beweis <u>*Teil 1*</u>: Wir betrachten eine magere Menge U und schreiben $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, wobei jede Menge N_n nirgends dicht ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ enthält die abgeschlossene Menge $A_n := \overline{N_n} \supseteq N_n$ keinen inneren Punkt und die offene Menge $O_n := X \setminus A_n$ ist dicht. Die erste Fassung des Satzes von Baire garantiert, dass die Menge $O_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ dicht liegt und in Kombination mit

$$X \setminus U = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right) \supseteq X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = O_\infty$$

schließen wir, dass auch $X \setminus U$ dicht ist.

<u>*Teil 2*</u>: Wir betrachten eine beliebige offene Menge $U \neq \emptyset$ und nehmen als Antithese an, dass $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ für nirgends dichte Mengen N_n gilt. Wir setzen $A_n := \overline{N_n}$ und bemerken, dass jeder innere Punkt von U auch innerer Punkt von

$$A_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = U$$

ist. Aus der zweiten Version des Satzes von Baire ergibt sich, dass mindestens eine der Mengen A_n einen inneren Punkt enthält, aber dies ist ein Widerspruch, da N_n nirgends dicht ist. □

Anwendung auf stetige Funktionen Wir betrachten den Raum $X = \mathsf{C}(I; \mathbb{R})$ über dem Intervall $I = [0, 1]$, den wir wir üblich mit der ∞-Norm ausstatten, sowie die Mengen

$$A_{n,k} := \left\{ x \in X \ : \ \left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq n \text{ für alle } t_1,\, t_2 \in \left[\frac{k-1}{n},\, \frac{k}{n} \right] \right\}$$

und

$$O_n := X \setminus A_n\,, \qquad A_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_{n,k}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1,\, \dots,\, n\}$.

Resultat Die Menge $O_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ ist dicht, aber jede Funktion aus dieser Menge ist an keiner Stelle differenzierbar.

<u>*Folgerung*</u>: Jede stetige —und damit auch jede stetig differenzierbare Funktion auf I kann in der ∞-Norm beliebig genau durch eine nirgends differenzierbare Funktion approximiert werden.

<u>*Lemma*</u>: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist O_n ist offen und dicht.

<u>*Beweis*</u>: Jede Menge $A_{n,k}$ ist abgeschlossen, da die Konvergenz in der ∞-Norm auch die punktweise Konvergenz impliziert. Also ist A_n als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen auch abgeschlossen und das Komplement O_n ist offen. Zum Nachweis der Dichtheit von O_n fixieren wir $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig und approximieren x zunächst durch eine stückweise lineare Interpolation $\tilde{x}$. Genauer gesagt, wir setzen

$$\tilde{x}(t) = (j - m\,t)\, x\left(\frac{j-1}{m} \right) + (m\,t - j + 1)\, x\left(\frac{j}{m} \right) \qquad \text{für} \quad t \in \left(\frac{j-1}{m},\, \frac{j}{m} \right)$$

und zeigen mit elementaren Abschätzungen dass für jede hinreichend große Wahl von m die Abschätzung

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}\,\varepsilon$$

gilt. Anschließend betrachten wir

$$\breve{x}(t) := \tilde{x} + \frac{\mathrm{saw}(l^2\,t)}{l}$$

wobei saw eine stetige „Sägezahnfunktion“ ist[3] und bemerken (siehe die nachfolgenden Bilder), dass

$$\|\breve{x} - \tilde{x}\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \qquad \text{sowie} \qquad \breve{x} \in O_n$$

für jede hinreichend große Wahl von $l \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. □

Lemma: Die Menge

$$U_\# := \big\{x \in X \;:\; f'(t_\#) \text{ existiert für ein } t_\# \in I\big\}$$

ist im Komplement von O_∞ enthalten.

Beweis: Wir nehmen als Antithese an, dass eine $x_\# \in U_\#$ in allen O_n enthalten ist und fixieren $t_\#$ als Differentiationsstelle von $x_\#$. Dann existieren Zahlenfolgen $(t_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(2_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\left|\frac{x_\#(t_{2,n}) - x_\#(t_{1,n})}{t_{2,n} - t_{1,n}}\right| > n\,, \qquad \big|t_\# - t_{1,n}\big| + \big|t_\# - t_{2,n}\big| \leq \frac{2}{n}\,,$$

d.h. $x_\#$ besitzt für jedes n in der Nähe von $t_\#$ einen Sekantenanstieg größer als n. Die Differenzierbarkeit von $x_\#$ in $t_\#$ garantiert jedoch

$$x_\#(t) = x_\# + x'(t_\#)\,(t - t_\#) + o\big(\,|t - t_\#|\,\big)\,,$$

und wenn wir dies für $t = t_{2,n}$ und $t = t_{1,n}$ auswerten, ergibt sich ein Widerspruch für alle großen n. □

Bemerkung: Mit mehr Aufwand kann man zeigen, dass $U_\#$ eine magere Menge ist.

Interpretation: Die „meisten“ stetigen Funktionen sind an keiner Stelle differenzierbar.

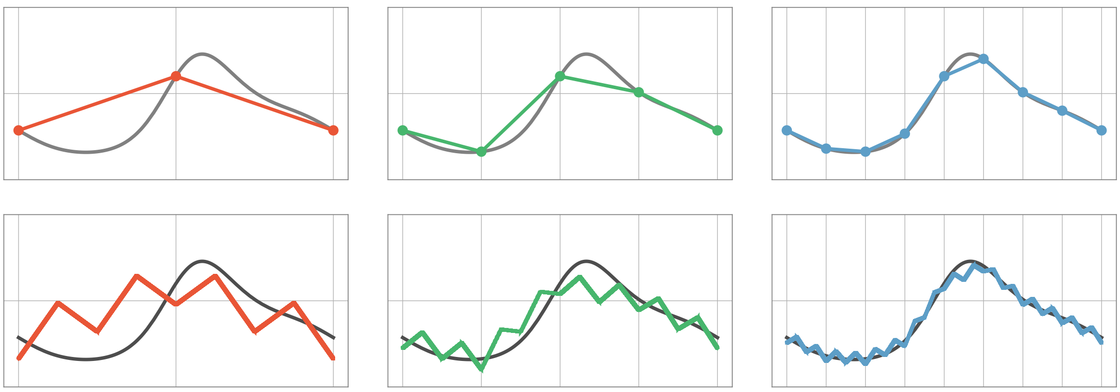


Abbildung Zur Approximation einer stetigen Funktion (schwarzer Graph) auf dem Intervall I durch stückweise lineare Funktionen mit nicht-kleiner Ableitung: Zu einer linearen Interpolation (obere Reihe) addieren wir eine Sägezahnfunktion mit kleiner Amplitude und hoher Frequenz (untere Reihe).

[3] Ein konkretes Beispiel ist $\mathrm{saw}(x) = -4\,\big|t - \lfloor t\rfloor - 1/2\big|$, wobei $\lfloor\cdot\rfloor$ die Gaußsche Klammer des Abrundes ist.

Vorlesung 09 : 21. November

2.2 Satz von Banach und Steinhaus

Annahme In diesem Abschnitt ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum.

Lemma (**Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**) Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie stetiger Funktionen $f_i : X \to Y$, sodass

$$C_x := \sup_{i\in I} \big\|f_i(x)\big\|_Y$$

für jedes $x \in X$ endlich ist. Dann existieren ein $x_\# \in X$, ein Radius $\varepsilon_\# > 0$ sowie eine Konstante $C_\# < \infty$, sodass

$$C_x \le C_\# \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{B}_{\varepsilon_\#}(x_\#)\,.$$

Hierbei ist I eine beliebige Indexmenge.[4]

Beweis Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$A_n := \big\{x \in X \,:\, C_x \le n\big\}$$

und bemerken, dass nach Voraussetzung

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

gilt. Außerdem ist jedes A_n abgeschlossen, denn ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x_\infty \in X$, so gilt

$$0 \le \big\|f_i(x_\infty)\big\|_Y = \lim_{k\to\infty} \big\|f_i(x_k)\big\|_Y \le n$$

aufgrund der Stetigkeit von $\|\cdot\|_Y \circ f_i$ für jeden Index $i \in I$, und wir erhalten $x_\infty \in A_n$. Die zweite Version des Satzes von Baire liefert eine Zahl $n_\# \in \mathbb{N}$, einen Punkt $x_\# \in X$ sowie einen Radius $\varepsilon_\#$, sodass die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_{\varepsilon_\#}(x_\#)$ ganz in $A_{n_\#}$ liegt.[5] Die Behauptung folgt nun mit $C_\# = n_\#$. □

Bemerkungen

1. Ein analoges Resultat gilt (mit demselben Beweis), wenn X nur ein vollständiger metrischer Raum ist.

2. Die Abbildungen f_i müssen hier nur stetig, aber nicht unbedingt linear sein.

[4] Insbesondere kann I überabzählbar sein.

[5] Jede offene Kugel um $x_\#$ enthält jede abgeschlossene Kugel um $x_\#$ mit kleinerem Radius.

Theorem (**Satz von Banach und Steinhaus**) Ist $(L_i)_{i\in I}$ eine Familie aus $\mathsf{Lin}(X;\,Y)$, sodass

$$\sup_{i\in I} \left\|L_i\,x\right\|_Y < \infty$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist, so gilt auch

$$\sup_{i\in I} \left\|L_i\right\|_{X;\,Y} < \infty\,,$$

d.h. die Operatoren L_i sind gleichmäßig beschränkt.

Beweis Wir wählen $x_\#$, $\varepsilon_\#$ und $C_\#$ wie im vorherigen Lemma (angewendet mit $f_i(x) = L_i\,x$). Seien nun $i \in I$ sowie $\tilde{x} \in X$ mit $\|\tilde{x}\|_X = 1$ beliebig fixiert. Der Vektor

$$x = x_\# + \varepsilon_\#\,\tilde{x}$$

liegt dann in der Kugel $\overline{B}_{\varepsilon_\#}(x_\#)$ und wegen

$$\left\|L_i\,x\right\|_Y \le C_\#$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\|L_i\,\tilde{x}\right\|_Y &= \left\|L_i\,\frac{x - x_\#}{\varepsilon_\#}\right\|_Y = \frac{\|L_i\,x - L_i\,x_\#\|_Y}{\varepsilon_\#}\\ &\le \frac{\|L_i\,x\|_Y + \left\|L_i\,x_\#\right\|_Y}{\varepsilon_\#} \le \frac{C_\# + C_\#}{\varepsilon_\#} =: C\,,\end{aligned}$$

wobei die endliche Konstante C weder von $\tilde{x}$ noch von i abhängt. Da $\tilde{x}$ ein beliebiger Vektor aus der Einheitssphäre in X war, ergibt sich $\|L_i\|_{X;\,Y} \le C$ für alle $i \in I$ und damit die Behauptung. □

Gegenbeispiel Auf dem nicht-vollständigen Raum $X = \ell_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ (ausgestattet mit der ∞-Norm) wird durch

$$\langle x_n^*,\,x\rangle := n\,x_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein lineares und stetiges Funktional $x_n^* \in X^* = \mathsf{Lin}(X;\,\mathbb{R})$ definiert (das hier an die Stelle von L_n tritt). Durch einfache Rechnungen zeigen wir

$$\left\|x_n^*\right\|_{X^*} = n \qquad \text{und damit} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|x_n^*\right\|_{X^*} = \infty\,,$$

wobei $\|\cdot\|_{X^*} = \|\cdot\|_{X;\,\mathbb{R}}$ die Operatornorm im Dualraum von X ist. Andererseits gilt aber auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\langle x_n^*,\,x\rangle\right| < \infty$$

für jedes feste $x \in X$, da $\langle x_n^*,\,x\rangle = 0$ wegen des endlichen Trägers von x für alle hinreichend großen n gilt. Insgesamt schließen wir, dass das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit in nicht-vollständigen Räumen X im Allgemeinen nicht richtig ist.

Korollar (**punktweise Grenzwerte linearer und stetiger Abbildungen**) Sei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ eine Folge, sodass

$$L_\infty\, x := \lim_{n\to\infty} L_n\, x \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

wohldefiniert ist. Dann ist auch L_∞ linear und stetig.

Beweis Die Linearität von L_∞ folgt unmittelbaraus der punktweisen Konvergenz in der Voraussetzung, Außerdem ist für jedes $x \in X$ die Zahlenfolge $(\|L_n\, x\|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und damit beschränkt in $\mathbb{R}$. Die Stetigkeit von L_∞ ergibt sich daher aus dem Satz von Banach und Steinhaus. □

Bemerkungen

1. Das Korollar garantiert zwar die Stetigkeit des punktweisen Grenzwertes L_∞, aber im Allgemeinen nicht die Konvergenz in der Operatornorm $\|\cdot\|_{X;\,Y}$. Siehe dazu das nachfolgende Gegenbeispiel.

2. Wir werden unten mit dem Korollar den Weierstraßschen Approximationssatz und verwandte Resultate herleiten.

Gegenbeispiel Mit $X := \ell^p(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$ und $Y := \mathbb{R}$ betrachten wir für jedes n das Funktional $x_n^* \in X^*$ mit

$$\langle x_n^*,\, x\rangle = \tfrac{1}{2}\left(x_{-n} + x_{+n}\right).$$

Da jedes $x \in X$ als summierbare Folge auf $\mathbb{Z}$ im Unendlichen abklingt, konvergiert x_n^* für $n \to \infty$ punktweise in X gegen das Nullfunktional x_∞^* mit $\langle x_\infty^*,\, x\rangle = 0$. Es gilt aber offensichtlich[6]

$$\|x_n^* - x_\infty^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X = 1} \tfrac{1}{2}\left|x_{-n} + x_{+n}\right| \geq \tfrac{1}{2}\,,$$

d.h. x_n^* konvergiert für $n \to \infty$ zwar punktweise gegen x_∞^*, aber eben nicht in der Operatornorm in X^*.

Bemerkung: Im konkreten Fall liefert der Satz von Banach-Steinhaus überhaupt keine interessanten Informationen, denn Stetigkeit des Nullfunktionals ist offensichtlich und muss nicht begründet werden.

Ergänzung: Wir hatten oben gesehen, dass $\ell^{p'}(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ isometrisch isomorph zu X^*, dem Dualraum von $\ell^p(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ ist. Im konkreten Beispiel gilt $e_n^* = E_p\big(e_{-n} + e_{+n}\big)$, d.h. jedes Funktional x_n^* entspricht einer Konvexkombination zweier kartesischer Einheitsvektoren im Folgenraum.

2.3 Satz von der offenen Abbildung

Definition Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen X und Y heißt offen, wenn für jede offene Teilmenge O aus X ihre Bildmenge $f(O)$ offen in Y ist.

[6] Mit $x = e_n$ gilt $\|x\|_X = 1$ und $\langle x_n^*,\, x\rangle = \frac{1}{2}$.

Bemerkungen

1. Stetige Funktionen sind in der Regel nicht offen. Die einfachsten Gegenbeispiele sind konstante Funktionen oder lineare, aber nicht surjektive Funktionen auf endlich-dimensionalen Räumen.[7]

2. Bei einer bijektiven Funktion $f : X \to Y$ ist Offenheit äquivalent zur Stetigkeit der Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$, aber es gibt auch offene Abbildungen, die nicht invertierbar sind,

3. Die Bildmenge eines Komplements ist in der Regel nicht das Komplement der Bildmenge[8], d.h. im Allgemeinen gilt $f(X \setminus U) \neq Y \setminus f(U)$ für Teilmengen $U \subseteq X$. Insbesondere können wir selbst bei einer offenen Abbildung ohne weitere Informationen nichts über das Bild abgeschlossener Mengen sagen.

4. Wir werden unten auch die *Abgeschlossenheit* linearer Abbildungen definieren, wobei aber ein anderes Konzept verwendet wird.

Lemma (**äquivalente Charakterisierung linearer offener Abbildungen**) Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ vollständig, so sind für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X; Y)$ die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:

1. L ist offen.

2. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{\varepsilon, Y}(0) \subseteq L\big(B_{1, X}(0)\big)$.

3. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}_{\varepsilon, Y}(0) \subseteq \mathrm{cls}\,\Big(L\big(B_{1, X}(0)\big)\Big)$.

Hierbei meint $B_{\varrho, X}(0)$ bzw. $B_{\varrho, Y}(0)$ die Kugel von Radius ϱ um 0 im Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ bzw. $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Beweis <u>1. ⇒ 2. </u>: Nach Voraussetzung ist $L\big(B_{1, X}(0)\big)$ und $0 = L0 \in Y$ ist daher ein innerer Punkt.

<u>2. ⇒ 1.</u>: Sei U eine beliebige offene Teilmenge von X und sei $y \in L(U)$ beliebig fixiert. Wir wählen $x \in U$ mit $L\,x = y$ und anschließend $\delta > 0$ mit $B_{\delta, X}(x) \subseteq U$. Für jedes $\tilde{y} \in B_{\varepsilon\,\delta, Y}(y)$ liegt $\delta^{-1}(\tilde{y} - y)$ in $B_{\varepsilon, Y}(0)$ und kann daher als $L\,\tilde{x}$ mit $\tilde{x} \in B_{1, X}(0)$ geschrieben werden. Damit erhalten wir

$$\tilde{y} = y + \delta\,\delta^{-1}(\tilde{y} - y) = L\,x + \delta\,L\,\tilde{x} = L\,(x + \delta\,\tilde{x})\,, \qquad x + \delta\,\tilde{x} \in B_{\delta, X}(x) \subset U\,.$$

Da $\tilde{y}$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die ganze Y-Kugel mit Radius $\varepsilon\,\delta$ um y in der Bildmenge von U liegt. Und weil y beliebig war, folgt die Offenheit von $L(U)$ in Y.

<u>2. ⇒ 3.</u>: Die Voraussetzung kombiniert mit elementaren Argumenten impliziert

$$\overline{B}_{\varepsilon/2, Y}(0) \subseteq B_{\varepsilon, Y}(0) \subseteq L\big(B_{1, X}(0)\big) \subseteq \mathrm{cls}\,\Big(L\big(B_{1, X}(0)\big)\Big)$$

und damit das gewünschte Resultat mit $\varepsilon/2$ anstelle von ε.

<u>3. ⇒ 2.</u>: Sei $y \in \overline{B}_{\varepsilon, Y}(0)$ beliebig fixiert. Wie setzen $y_0 := y$ und definieren zwei Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset B_{1, X}(0)$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \overline{B}_{\varepsilon, Y}(0)$ durch Iteration der folgenden zwei Vorschriften:

[7] Beachte auch, dass das Bild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss. Ein nichtlineares Gegenbeispiel ist die skalare Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die abgeschlossene Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf das offene Intervall $(-\pi/2, +\pi/2)$ abbildet.

[8] Dies ist ein Beispiel, dass die Bild- und die Urbildoperation sehr unterschiedliche Eigenschaften haben.

(i) Zu jedem y_k wählen wir x_k mit

$$\|x_k\|_X < 1\,, \qquad \|y_k - L\,x_k\|_Y \leq \varepsilon/2\,.$$

(ii) Ausgehend von x_k und y_k setzen wir $y_{k+1} := 2\,(y_k - L\,x_k)$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$L\,x_k = y_k - 2^{-1}\,y_{k+1}$$

und nach Division durch 2^k zeigen wir

$$L\sum_{k=0}^{m} 2^{-k}x_k = \sum_{k=0}^{m}\big(2^{-k}\,y_k - 2^{-k-1}\,y_{k+1}\big) = y_0 - 2^{-m-1}y_{m+1}$$

durch Summation, wobei

$$\sum_{k=0}^{m}\big\|2^{-k}x_k\big\|_X \leq \sum_{k=0}^{m}2^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty}2^{-k} = 2\,, \qquad \|y_m\|_Y \leq \varepsilon$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Aufgrund der Vollständigkeit von X (siehe die Hausaufgaben zur absoluten Konvergenz von Reihen in Banach-Räumen) sowie der Stetigkeit von L erhalten wir

$$y = y_0 = L\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}x_k\right), \qquad \left\|\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}x_k\right\|_X \leq 2$$

im Limes $m \to \infty$. Da y beliebig war, ergibt sich

$$\overline{B}_{\varepsilon,\,Y}(0) \subseteq L\big(\overline{B}_{2,\,X}(0)\big)$$

und damit auch

$$B_{\varepsilon,\,Y}(0) \subseteq L(B_{3,\,X}(0))\,.$$

Die Homogenität von L impliziert schließlich

$$B_{\varepsilon/3,\,Y}(0) \subseteq L(B_{1,\,X}(0))$$

und damit das gewünschte Resultat mit $\varepsilon/3$ anstelle von ε. $\square$

Bemerkungen

1. Die Äquivalenz 1. $\Leftrightarrow$ 2. wird relativ häufig verwenden und ist glücklicherweise nicht allzu schwer zu zeigen. Die Implikation 3. $\Leftrightarrow$ 2. erfordert jedoch einen sehr technischen Beweis und wir bei uns im Beweis des Satzes über die offene Abbildung Verwendung finden.

2. Bei einer stetigen Abbildung L die Menge $L\big(\operatorname{cls}(U)\big)$ immer in der Menge $\operatorname{cls}\big(L(U)\big)$ enthalten,[9] es handelt im Allgemeinen um eine echte Teilmenge. Insbesondere ist die zweite Menge keine Teilmenge der ersten (andernfalls könnte der Beweis des Lemmas wesentlich vereinfacht werden).

[9] Für $y = L\,x$ mit $x \in \operatorname{cls}(U)$ gilt immer $y = \lim_{n\to\infty} L\,x_n$ für eine geeinete Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$.

Vorlesung 10 : 23. November

Theorem (**Satz von der offenen Abbildung**) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume, so gilt: Eine Abbildung $L \in \mathsf{Lin}(X; Y)$ ist genau dann offen, wenn sie surjektiv ist.

Beweis *Hinrichtung*: Ist L offen, so liefert das vorherige Lemma einen Radius $\varepsilon > 0$, sodass $B_{\varepsilon, Y}(0)$ ganz im Bildraum $L(X)$ enthalten ist. Insbesondere existiert für jedes $0 \neq y \in Y$ ein $x \in X$ mit $\varepsilon \, \|y\|_Y^{-1} y = L\,x$ und dies impliziert, dass y das Bild von $\varepsilon^{-1} \, \|y\|_Y \, x$ unter L ist. Da außerdem $0 = L\,0$ gilt, haben wir insgesamt gezeigt, dass L surjektiv ist.

Rückrichtung: Ist L surjektiv, so betrachten wir die abgeschlossenen Mengen

$$A_n = \mathrm{cls}\Big(L\big(B_n(0)\big)\Big) \subseteq Y\,.$$

Nach der zweiten Version des Satzes von Baire (angewendet auf den vollständigen Raum Y) gilt

$$B_{\varepsilon_\#, Y}(y_\#) \subset A_{n_\#}$$

für geeignete Wahlen des Index $n_\#$, des Punktes $y_\#$ und des Radius $\varepsilon_\#$. Da L surjektiv ist, wählen wir $x_\#$ mit $y_\# = L\,x_\#$ und setzen

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon_\#}{n_\# + \|x_\#\|_X}$$

Sei nun $y \in B_{\varepsilon, Y}(0)$ beliebig fixiert. Dann können wir für den Punkt

$$\tilde{y} := y_\# + \varepsilon^{-1}\,\varepsilon_\#\, y \in B_{\varepsilon_\#}(y_\#) \subseteq A_{n_\#}$$

nach Definition von $A_{n_\#}$ eine Folge $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $B_{n_\#, X}(0)$ wählen, sodass

$$L\,\tilde{x}_k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \tilde{y}\,,$$

und mit

$$x_k := \varepsilon\,\varepsilon_\#^{-1}\,\big(\tilde{x}_k - x_\#\big)$$

erhalten wir die strikte Ungleichung

$$\big\|x_k\big\|_X \leq \varepsilon\,\varepsilon_\#^{-1}\,\big(\big\|\tilde{x}_k\big\|_X + \big\|x_\#\big\|_X\big) < \varepsilon\,\varepsilon_\#^{-1}\,\big(n_\# + \big\|x_\#\big\|_X\big) = 1 \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

sowie

$$L\,x_k = \varepsilon\,\varepsilon_\#^{-1}\,\big(L\,\tilde{x}_k - L\,x_\#\big) \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \varepsilon\,\varepsilon_\#^{-1}\,\big(\tilde{y} - y_\#\big) = y\,.$$

Da y beliebig war, haben wir gezeigt, dass die offene Y-Kugel vom Radius ε im Abschluss der Menge $L(B_{1,X}(0))$ enthalten ist und dies impliziert auch

$$\overline{B}_{\varepsilon, Y}(0) = \mathrm{cls}\,\big(B_{\varepsilon, Y}(0)\big) \subseteq \mathrm{cls}\,\big(L(B_{1,X}(0))\big)\,.$$

Die Offenheit von L ergibt sich aus dem vorherigen Lemma. □

Gegenbeispiel Wir definieren durch

$$(L\,x)_j := \frac{x_j}{1+|j|}$$

einen linearen Operator $L : X \to Y$ zwischen den Banach-Räumen $X := \ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$ und $Y := \ell_0^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$, wobei wir beide jeweils mit der ∞-Norm ausstatten. Die Abbildung L ist stetig, aber weder offen noch surjektiv.

Beweis: Es gilt offensichtlich $\|L\,x\|_\infty \le \|x\|_\infty$ sowie

$$L\big(B_{1,X}(0)\big) = \big\{y \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}) \;:\; \sup_{j\in\mathbb{Z}}\,(1+|j|)\,|y_j| < 1\big\}\,.$$

Diese Menge enthält aber keine kleine Kugel um 0, denn für jedes $\varepsilon > 0$ liegt y_ε mit

$$y_{\varepsilon,\,j} := \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{|j|}}$$

zwar in Y, aber nicht im Bild von L. □

Korollar (**Stetigkeit inverser linearer Abbildungen**) Die Umkehrabbildung einer linearen, stetigen und bijektiven Abbildung zwischen zwei Banach-Räumen ist ebenfalls linear und stetig.

Beweis Die Existenz bzw. Linearität der Umkehrabbildung $L^{-1} : Y \to X$ ergibt sich unmittelbar aus der Bijektivität bzw. der Linearität von $L : X \to Y$. Die Stetigkeit von L^{-1} ist eine Konsequenz des Satzes von der offenen Abbildung. □

Bemerkungen

1. Die Vollständigkeit des Bild- sowie des Urbildraumes ist wieder sehr wichtig.

   Gegenbeispiel Mit $X = Y = \ell_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$ und irgendeiner p-Norm betrachten wir den linearen und bijektiven Operator L mit

   $$(L\,x)_j = x_j/\big(1+j^2\big) \qquad \text{und} \qquad \big(L^{-1}\,y\big)_j = \big(1+j^2\big)\,y_j\,.$$

   Dann ist L, aber nicht L^{-1} stetig.[10]

2. Dieses Korollar ist von zentraler Bedeutung in der Funktionalanalysis und stellt eine der wichtigsten Folgerungen des Satzes von Baire dar.

3. Es existiert kein Analogon für nichtlineare Abbildungen zwischen vollständigen metrischen Räumen, obwohl es dort einen Satz von Baire gibt.

4. Jede invertierbare Abbildung $L \in \mathsf{Lin}(Y;\,X)$ ist also Quasi-Isometrie, d.h. es existieren zwei Konstanten $0 < c < C < \infty$, sodass

   $$c\,\|x\|_X \le \|L\,x\|_Y \le C\,\|x\|_X \qquad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

[10] Beachte, dass L, aber nicht L^{-1} auf $\ell^p(\mathbb{Z}\ \mathbb{R})$ definiert werden kann.

Umgekehrt ist jede Abbildung mit dieser Eigenschaft offensichtlich injektiv, aber nicht unbedingt surjektiv.[11] Sie vermittelt aber eine lineare und stetig invertierbare Abbildung zwischen X und dem Bildraum $L(X)$.

5. Sind X und Y zwei Banach-Räume, so ist die Menge aller bijektiven Abbildungen aus $\mathsf{Lin}(X;\,Y)$ offen bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|_{X;Y}$ (Übungsaufgabe). Oder anders gesagt: Invertierbarkeit ist robust unter kleinen Störungen im Raum der linearen und stetigen Abbildungen.

Korollar (**zur Äquivalenz von Normen in Banach-Räumen**) Seien $\|\cdot\|_{\mathrm{a}}$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{b}}$ zwei jeweils vollständige Normen auf demselben Vektorraum X, sodass

$$\|x\|_{\mathrm{a}} \leq C_{\mathrm{ab}}\,\|x\|_{\mathrm{b}}$$

für eine geeignete Konstante C_{ab} sowie alle $x \in X$ gilt. Dann existiert auch eine Konstante C_{ba} mit

$$\|x\|_{\mathrm{b}} \leq C_{\mathrm{ba}}\,\|x\|_{\mathrm{a}}$$

für alle $x \in X$.

Beweis Übungsaufgabe. □

Bemerkungen

1. Es ist im Korollar sehr wichtig, dass X bzgl. beider Normen vollständig ist.

   Gegenbeispiel: Der Vektorraum $X = \mathsf{C}\big(I;\mathbb{R}\big)$ mit $I = [a,\,b]$ ist vollständig bzgl. der ∞-Norm, aber nicht bzgl. der 1-Norm. Wir hatten auch schon gesehen, dass zwar $\|x\|_1 \leq (b-a)\,\|x\|_\infty$ für alle $x \in X$ gilt, aber dass es andererseits keine Möglichkeit gibt, $\|\cdot\|_\infty$ nach oben durch ein Vielfaches von $\|\cdot\|_1$ abzuschätzen. Denn es gibt Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\infty = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = 0$.

2. Mit dem Auswahlaxiom kann gezeigt werden, dass es für $\dim X = \infty$ viele Paare nicht äquivalenter, aber jeweils vollständiger Normen gibt.

Korollar (**zur Abgeschlossenheit des Bildes**) Seien $(X,\,\|\cdot\|_X)$ und $(Y,\,\|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume und sei $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ ein injektiver Operator. Dann ist die lineare Umkehrabbildung $L^{-1} : L(X) \to X$ genau dann stetig, wenn $L(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von Y ist.

[11] Ein einfaches Beispiel für eine nicht invertierbare Quasi-Isometrie ist $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt sogar $\|L\,x\|_{\mathbb{R}^3} = \|x\|_{\mathbb{R}^2}$, aber L ist nicht surjektiv.

Beweis *Vorbemerkung*: $\tilde{Y} := L(X)$ ist offensichtlich ein linearer Unterraum von Y. Außerdem ist $\left(\tilde{Y},\, \|\cdot\|_Y\right)$ genau dann ein Banach-Raum, wenn $\tilde{Y}$ abgeschlossen in Y ist (Übungsaufgabe).

Hinrichtung: Sei $L^{-1} : \tilde{Y} \to X$ stetig und sei $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\tilde{Y}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := L^{-1}\,\tilde{y}_n$ wegen

$$\left\|x_n - x_m\right\|_X \leq C\left\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\right\|, \qquad C := \left\|L^{-1}\right\|_{\tilde{Y};\,X}$$

eine Cauchy-Folge in X und konvergiert daher gegen ein $x_\infty \in X$. Die Stetigkeit von L impliziert dann aber, dass $\tilde{y}_n = L\,x_n$ für $n \to \infty$ gegen $y_\infty := L\,x_\infty$ in Y konvergiert. Inbesondere gilt also $y_\infty \in \tilde{Y}$ und wir haben gezeigt, dass $\tilde{Y}$ vollständig bzgl $\|\cdot\|_Y$ ist.

Rückrichtung: Ist $\tilde{Y}$ abgeschlossen, so ist $L : X \to \tilde{Y}$ sowohl bijektiv als auch stetig und die Behauptung folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung, sofern dieser mit den Banach-Räumen $\left(X,\, \|\cdot\|_X\right)$ und $\left(\tilde{Y},\, \|\cdot\|_Y\right)$ verwendet wird . □

Vorlesung 11 : 28. November

2.4 weitere Resultate

Theorem (**Neumann-Reihe für inverse Abbildungen**) Sei $K : X \to X$ eine lineare Kontraktion des Banach-Raumes X, d.h.

$$\kappa := \|K\|_{X;\,X} < 1\,.$$

Dann ist $\mathrm{Id} - K$ bijektiv und der inverse Operator kann via

$$\big(\mathrm{Id} - K\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} K^k = \mathrm{Id} + K + K^2 + K^3 + \dots$$

als absolut konvergente Reihe im Banach-Raum $\mathsf{Lin}(X;\,X)$ dargestellt werden.

Beweis Wir betrachten die durch

$$L_n := \sum_{k=0}^{n} K^k$$

definierte Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linearen und stetigen Operatoren $L_n : X \to X$. Nach Voraussetzung gilt[12]

$$0 \le \big\|K^k\big\|_{X;\,X} \le \|K\|_{X;\,X}^k \le \kappa^k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0$$

sowie

$$\big\|L_n\big\|_{X;\,X} \le \sum_{k=0}^{n} \big\|K^k\big\|_{X;\,X} \le \sum_{k=0}^{n} \|K\|_{X;\,X}^k = \sum_{k=0}^{n} \kappa^k \le \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k = \frac{1}{1-\kappa}$$

und wir schließen (siehe die Hausaufgabe zu absolut konvergenten Reihe und beachte, dass $\mathsf{Lin}(X;\,X)$ mit der Operatornorm ein Banach-Raum ist), dass die Konvergenz

$$L_n \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad L_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} K^k$$

bzgl. $\|\cdot\|_{X;\,X}$ erfüllt ist. Andererseits ergibt sich

$$(\mathrm{Id} - K)\, L^n = L^n\, (\mathrm{Id} - K) = \sum_{k=0}^{n} K^k - \sum_{k=1}^{n+1} K^k = \mathrm{Id} - K^{n+1}$$

aus direkten Rechnungen und impliziert im Limes $n \to \infty$, dass L_∞ der inverse Operator zu $\mathrm{Id} - K$ ist.[13] □

[12] Wir benutzen hier, dass

$$\big\|K^2\big\|_{X;\,X} \le \|K\|_{X;\,X}^2\,, \qquad \big\|K^3\big\|_{X;\,X} \le \|K\|_{X;\,X}^3\,, \qquad \dots$$

durch die Definition der Operatornorm sichergestellt ist (Übungsaufgabe).

[13] Beachte, dass wegen

$$\|(\mathrm{Id} - K)\,(L^n - L_\infty)\|_{X;\,X} \le \|\mathrm{Id} - K\|_{X;\,X}\, \|L^n - L_\infty\|_{X;\,X} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

der Operator $(\mathrm{Id} - K)\, L^n$ für $n \to \infty$ gegen $(\mathrm{Id} - K)\, L^\infty$ konvergiert. Analoges gilt für $L^n\,(\mathrm{Id} - K)$.

Bemerkungen

1. Die Neumann-Formel liefert das operatorwertige Analogon zur *geometrischen Summenformel*
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| < 1\,.$$
Für ihre Gültigkeit ist es sehr wichtig, dass X ein Banach-Raum und K eine Kontraktion ist, denn andernfalls kann die Existenz der Reihe nicht garantiert werden.

   Achtung: Bei Operatoren schreiben wir $(\mathrm{Id} - K)^{-1}$ und **niemals** $\mathrm{Id}/(\mathrm{Id} - K)$.

2. Die Abschätzungen
$$\left\|(\mathrm{Id} - K)^{-1}\right\|_{X;\,X} \leq (1-\kappa)^{-1}$$
und
$$\left\|\big(\mathrm{Id} - K\big)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} K^k\right\|_{X;\,X} \leq \frac{\kappa^{n+1}}{1-\kappa}$$
ergeben sich via
$$\left\|\sum_{k=m}^{\infty} K^k\right\|_X \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left\|K^k\right\|_{X;\,X} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|K\|_{X;\,X}^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} \kappa^k \leq \frac{\kappa^m}{1-\kappa}$$
unmittelbar aus der Reihendarstellung.

3. Die Existenz und Stetigkeit von $\mathrm{Id} - K$ kann auch anders begründet werden. Da
$$\|x - K\,x\|_X \geq \|x\|_X - \|K\,x\|_X \geq \|x\|_X - \kappa\,\|x\|_X = (1-\kappa)\,\|x\|_X$$
für alle $x \in X$ gilt, ist $\mathrm{Id} - K$ offen und injektiv und nach dem Satz über die offene Abbildung auch surjektiv und damit stetig invertierbar. Der obige Beweis liefert jedoch mit der Reihendarstellung wesentlich mehr Informationen.

4. Wir können die Aussage des Theorems auch wie folgt verstehen: Für jedes $y \in X$ existiert genau eine Lösung $x \in X$ der Operatorgleichung
$$y = x - K\,x\,,$$
die außerdem als
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} K^k\,y = y + K\,y + K^2\,y + K^3\,y^3 + \ldots$$
geschrieben werden kann. Darüberhinaus gibt es auch immer eine eindeutige Lösung der Gleichung
$$y = x + K\,x\,,$$
wobei
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K^k\,y = y - K\,y + K^2\,y - K^3\,y^3 + \ldots$$
die entsprechende Reihendarstellung ist.

   Zusatz: Das ist das erste Beispiel für ein sehr viel allgemeineres Prinzip: Mit funktionalanalytischen Methoden können wir komplizierte *Gleichungen lösen*.

5. Für jede (meist nichtlineare) Kontraktion f eines vollständigen Raumes $(X, \|\cdot\|)$ garantiert der *Banachsche Fixpunktsatz*, dass die Gleichung $x = f(x)$ genau eine Lösung besitzt (siehe *Analysis 2*). Für eine lineare Kontraktion ist diese Aussage jedoch trivial, denn der einzige Fixpunkt ist offensichtlich $0 \in X$.[14]

Quotientenräume Ist A ein linearer Unterraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$, so wird durch

$$x \sim \tilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad x - \tilde{x} \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.[15] Für jedes $x \in X$ ist

$$[x] := \big\{\tilde{x} \in X \,:\, x \sim \tilde{x}\big\} = \big\{x + a \,:\, a \in A\big\} = x + A$$

eine Teilmenge von X. Wir nennen diese die (Äquivalenz-)Klasse von x und jedes ihrer Elemente $\tilde{x} \in [x]$ einen Repräsentanten. Die Menge aller Klassen

$$X/A := \big\{[x] \,:\, x \in X\big\}$$

heißt Quotientenraum und ist via

$$[x + y] := [x] + [y]\,, \qquad \lambda\,[x] := [\lambda\,x]$$

in natürlicher Weise ein Vektorraum.[16] Desweiteren wird durch

$$\big\|[x]\big\|_{X/A} := \inf\big\{\|\tilde{x}\|_X \,:\, \tilde{x} \in [x]\big\}$$

eine Seminorm auf X/A definiert, wobei diese alternativ auch als

$$\big\|[x]\big\|_{X/A} = \inf\big\{\|x + a\|_X \,:\, a \in A\big\} = \mathrm{dist}(x + A,\, 0)$$

geschrieben werden kann.

Bemerkungen

1. Die logischen Äquivalenzen

$$x \sim \tilde{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad [x] = [\tilde{x}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{x} \in [x] \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in [\tilde{x}]$$

ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen.

2. Es gilt $[0] = A$, d.h. der Unterraum A entspricht der Null in X/A.

[14] Die Null ist Fixpunkt und da $\|K\,x\| \le \kappa\,\|x\| < \|x\|$ für jedes $x \neq 0$ gilt, kann es keinen weiteren geben.

[15] Es gilt $x \sim x$ (Reflexivität), $x \sim \tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{x} \sim x$ (Symmetrie) sowie $x \sim \tilde{x}, \tilde{x} \sim \breve{x} \Rightarrow x \sim \breve{x}$ (Transitivität).

[16] Die Addition und die skalare Multiplikation sind in der Tat wohldefiniert: Da A linearer Unterraum ist, gelten (Nachrechnen!) die Implikationen

$$x \sim \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad x + y \sim \tilde{x} + \tilde{y}\,, \qquad x \sim \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \lambda\,x \sim \lambda\,\tilde{x}$$

d.h. die auf den Klassen definierten Operationen hängen nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

3. Ist X endlich-dimensional, so ist der Vektorraum X/A immer isomorph zu einem endlich-dimensionalen Unterraum $\breve{A}$ (siehe das Bild und die Hausaufgaben) und es gilt[17]

$$X = A \oplus \breve{A}\,, \qquad A \cap \breve{A} = \{0\}\,, \qquad \dim(X) = \dim(A) + \dim(\breve{A})\,.$$

Für $\dim X = \infty$ können wir aber im Allgemeinen nicht so argumentieren und müssen die abstrakte Formulierung verwenden.

Beispiel: Der Quotientenraum

$$\ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{R}) \,/\, \ell^\infty_0(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$$

ist recht kompliziert sowie unendlich-dimensional und kann nicht — zumindest nicht auf offensichtliche Weise — als abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ interpretiert werden.

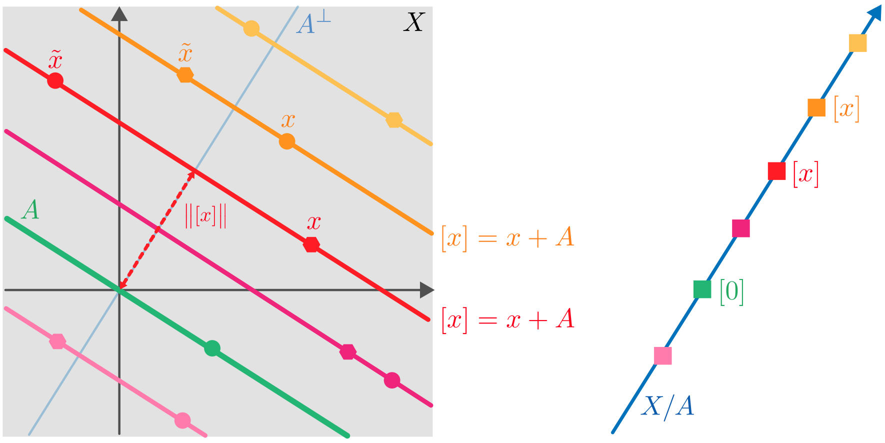


Abbildung Im Fall $X = \mathbb{K}^d$ (ausgestattet mit der euklidischen Standardnorm) kann der abstrakte Raum X/A sehr leicht verstanden werden. Jedes Element $[x] = x + A$ des Quotientenraumes ist ein affiner Unterraum von X, der parallel zum linearen Unterraum A liegt und $\big\|[x]\big\|_{X/A}$ liefert gerade den Abstand dieser beiden Unteräume. Insbesondere ist X/A in diesem Fall in natürlicher Weise isometrisch isomorph zum Unterraum $A^\perp$, der senkrecht auf A steht.

Lemma **(Eigenschaften des Quotientenraumes)** Seien $(X,\,\|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum und A abgeschlossener Unterraum. Dann ist $\|\cdot\|_{X/A}$ eine vollständige Norm auf X/A. Außerdem ist die Projektion $P_A : X \to X/A$ mit $P_A\,x := [x]$ eine lineare, stetige sowie offene Abbildung.[18]

Beweis *Normeigenschaften*: Mit einfachen Rechnungen (Übungsaufgabe) zeigen wir, dass $\|\cdot\|_{X/A}$ eine Seminorm auf X/A ist . Sei nun $[x]$ eine Klasse mit $\big\|[x]\big\|_{X/A} = 0$. Dann existiert eine Folge von Repräsentanten $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[x]$ sowie eine entsprechende Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit

$$x = a_n + \tilde{x}_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{sowie} \qquad \|\tilde{x}_n\|_X \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

[17]Wenn X ein endlich-dimensionaler Hilbert-Raum ist, können wir sogar $\breve{A} = A^\perp$ mit

$$A^\perp := \big\{x \in X \,:\, \langle x,\,a\rangle = 0 \text{ für alle } a \in A\,\big\}$$

wählen.

[18]Sofern A nicht der triviale Unterraum $\{0\}$ ist, wird P_A nicht injektiv sein.

Insbesondere gilt

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} x$$

und weil A abgeschlossen ist, erhalten wir $x \in A$ und damit $[x] = [0]$.

Vollständigkeit: Wir fixieren eine beliebige Cauchy-Folge $\big([x_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in X/A und wählen sukzessive die Glieder einer Indexfolge $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\big\|[x_n] - [x_m]\big\|_{X/A} \le 2^{-k} \qquad \text{für} \qquad n,\, m \ge N_k\,,$$

wobei wir durch die schrittweise Wahl zusätzlich $N_{k+1} > N_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sicherstellen können. Insbesondere gilt

$$\big\|[x_{N_{k+1}}] - [x_{N_k}]\big\|_{X/A} \le 2^{-k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \qquad \text{sowie} \qquad N_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty.$$

Wir setzen $N_0 := 0$, $x_0 := 0$ und wählen für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $\tilde{y}_k \in X$ mit

$$\tilde{y}_k \in [x_{N_k} - x_{N_{k-1}}]\,, \qquad 0 \le \big\|\tilde{y}_k\big\|_X - \big\|[x_{N_k} - x_{N_{k-1}}]\big\|_{X/A} \le 2^{-k}\,,$$

und wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big\|\tilde{y}_k\big\|_X \le \sum_{k=1}^{\infty} \Big(2^{-k} + \big\|[x_{N_k} - x_{N_{k-1}}]\big\|_{X/A}\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} 2\,2^{-k} = 2$$

konvergiert die Reihe der $\tilde{y}_k$ absolut (siehe die entsprechende Hausaufgabe), d.h.

$$\tilde{x}_k := \tilde{y}_1 + \ldots + \tilde{y}_k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \tilde{x}_\infty := \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{y}_l$$

ist im Sinne der Normkonvergenz in X erfüllt. Nach Konstruktion gilt aber auch

$$\tilde{x}_k \in \Big[(x_{N_1} - x_{N_0}) + (x_{N_2} - x_{N_1}) + \ldots + \big(x_{N_k} - x_{N_{k-1}}\big)\Big] = [x_{N_k}]$$

und damit

$$0 \le \big\|[x_{N_k}] - [\tilde{x}_\infty]\big\|_{X/A} = \big\|[x_{N_k} - \tilde{x}_\infty]\big\|_{X/A} \le \big\|x_k - \tilde{x}_\infty\big\|_X \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0$$

und wir haben insgesamt eine konvergente Teilfolge der Cauchy-Folge in X/A gefunden. Dies impliziert aber schon die Konvergenz der gesamten Cauchy-Folge, wie ein kleines Hilfsargument mit der Dreiecksungleichung zeigt.[19]

Eigenschaften der Projektion: Die Abbildung P_A ist offensichtlich linear und wegen

$$\big\|[x]\big\|_{X/A} \le \|x\|_X$$

auch stetig. Da sie außerdem surjektiv ist, kann ihre Offenheit mit dem Satz über die offene Abbildung begründet werden. Wir wollen hier aber auch einen direkten Beweis vorstellen um zu zeigen, dass bzw. wie wir geschickt mit Klassen und ihren Repräsentanten argumentieren können. Sei dazu U eine beliebige offene Teilmenge in X und sei die Klasse $[x] \in P_A\,U$ beliebig fixiert. Wir wählen einen Repräsentanten[20]

[19] Ganz allgemein gilt: Jede Cauchy-Folge in einem normierten Raum besitzt höchstens einen Häufungspunkt. In einen Banach-Raum jedoch genau einen Häufungspunkt.

[20] Wir könnten hier o.B.d.A. $x = \tilde{x}$ annehmen.

$\tilde{x} \in [x]$ mit $\tilde{x} \in U$ sowie $\varepsilon > 0$ mit $B_{\varepsilon, X}(\tilde{x}) \subseteq U$ und betrachten eine beliebige Klasse $[y] \in B_{\varepsilon, X/A}\big([x]\big)$. Mit $z := y - x \in X$ gilt

$$[z] = [y - x] = [y] - [x]\,, \qquad \big\|[z]\big\|_{X/A} \le \big\|[y] - [x]\big\|_{X/A} < \varepsilon$$

nach Konstruktion und wir können $\tilde{z} \in X$ mit

$$\tilde{z} \in [z]\,, \qquad \big\|[z]\big\|_{X/A} < \|\tilde{z}\|_X < \varepsilon$$

wählen. Für $\tilde{y} := \tilde{x} + \tilde{z}$ erhalten wir

$$\tilde{y} \in B_{\varepsilon, X}(\tilde{x}) \subseteq U\,, \qquad [\tilde{y}] = [\tilde{x} + \tilde{z}] = [\tilde{x}] + [\tilde{z}] = [x] + [z] = [x + z] = [y]\,,$$

d.h. die Klasse $[y]$ besitzt einen Repräsentanten aus U und liegt damit in $P_A U$. Wir haben insgesamt gezeigt, dass mit jeder Klasse $[x]$ auch eine kleine X/A-Kugel um $[x]$ ganz in U liegt und schließen, dass $P_A U$ offen in X/A ist. □

Bemerkungen

1. Einige Aussagen des Theorems gelten auch dann, wenn A nicht-abgeschlossener Unterraum von X ist oder wenn $\|\cdot\|_X$ nicht vollständig ist.

2. Ist A ein endlich-dimensionaler Unterraum, so existiert in jeder Klasse $[x] \in X/A$ ein <u>normoptimaler</u> Repräsentant, d.h. ein $\tilde{x} \in [x]$ mit $\big\|[x]\big\|_{X/A} = \|\tilde{x}\|_X$.

   <u>*Beweis*</u>: Jede Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [x] = x + A$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}_n\|_X = \big\|[x]\big\|_{X/A}$ ist beschränkt und besitzt nach dem Satz von Heine-Borel mindestens einen Häufungspunkt, der als Grenzwert einer konvergenten Teilfolge auch in $x + A$ liegt und die gewünschte Eigenschaft aufweist (da die Konvergenz in Norm die Konvergenz der Norm nach sich zieht). □

   <u>*Ausblick*</u>: Ein analoges Resultat gilt für jeden abgeschlossenen Unterraum eines *reflexiven* Raumes X, wobei wir im Beweis dann mit schwacher Kompaktheit argumentieren.

3. Für eine stetige Seminorm $|\!|\!|\cdot|\!|\!| : X \to \mathbb{R}$ ist

   $$A := \big\{x \in X \;:\; |\!|\!|x|\!|\!| = 0\big\}$$

   ein abgeschlossener Unterraum von X (Übungsaufgabe) und der entsprechende Quotientenraum X/A bildet mit

   $$\big\|[x]\big\|_{X/A} = \inf\big\{\, \|\tilde{x}\|_X \;:\; |\!|\!|x - \tilde{x}|\!|\!| = 0\big\}$$

   einen Banach-Raum.

Vorlesung 12 : 30. November

2.5 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Vorbemerkung Im Folgenden sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Räume und $L : D \subset X \to Y$ bezeichnet einen linearen Operator, der auf einem Unterraum D von X definiert ist und nach Y abbildet.

Erinnerung Sind X und Y zwei normierte Räume, so wird durch

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$$

eine Norm auf $X \times Y$ definiert.

Bemerkungen

1. Die Norm $\|\cdot\|_{X\times Y}$ ist genau dann vollständig, wenn sowohl $\|\cdot\|_X$ als auch $\|\cdot\|_Y$ vollständig sind (Übungsaufgabe).
2. Da im $\mathbb{R}^2$ alle Normen äquivalent sind, können wir alternativ auch jeden der Ausdrücke

$$\|x\|_X + \|y\|_Y\,, \qquad \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}, \qquad \max\{\|x\|_X\,, \|y\|_Y\}$$

mit $1 < p < \infty$ als äquivalente Norm auf dem Produktraum $X \times Y$ verwenden.

Definition Ein linearer Operator $L : D \subset X \to Y$ heißt abgeschlossen, falls sein Graph

$$\operatorname{graph}(L) := \big\{(x, y) \;:\; x \in D\,,\; y = L\,x\big\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ ist.

Bemerkungen

1. Die Implikation

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \text{ in } X\,,\;\; y_n := L\,x_n \xrightarrow{n\to\infty} y_\infty \text{ in } Y \quad\Rightarrow\quad x_\infty \in D\,,\;\; y_\infty = L\,x_\infty\,,$$

ist äquivalent zur Abgeschlossenheit von L (Übungsaufgabe) und wird oftmals benutzt, um letztere nachzuweisen.

2. Wie wir im Fortgang der Vorlesung sehen werden, ist der Fall, dass D ein dichter Unterraum von X ist, besonders interessant und wichtig.
3. Abgeschlossenheit ist eine Verallgemeinerung von Stetigkeit.
4. Im Fall $D = X$ ist jeder stetige Operator auch abgeschlossen, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. In der Tat, für die drei Aussagen

$$\text{(i)}\quad x_n \to x_\infty\,, \qquad \text{(ii)}\quad L\,x_n \to y_\infty\,, \qquad \text{(iii)}\quad y_\infty = L\,x_\infty$$

garantiert Stetigkeit die Gültigkeit der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) + (iii), wohingegen Abgeschlossenheit nur (i) + (ii) $\Rightarrow$ (iii) sicherstellt.

5. Selbst im Fall $D = X$ stellt Abgeschlossenheit nicht sicher, dass L abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet, denn dies meint (ii) $\Rightarrow$ (iiii).[21]

6. Ist $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$ injektiv, so ist $L^{-1} : D \to X$ auf $D := L(X)$ wohldefiniert und abgeschlossen.[22]

   <u>*Beweis*</u>: Sei (y_n) eine Folge in D, sodass

   $$y_n \quad \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} \quad y_\infty\,, \qquad x_n := L^{-1}\, y_n \quad \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} \quad x_\infty$$

   für geeignete $x_\infty \in X$ und $y_\infty \in Y$ erfüllt ist. Die Stetigkeit von L impliziert

   $$y_n = L\, x_n \quad \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} \quad L_\infty$$

   und damit $y_\infty = L\, x_\infty$. Insbesondere gilt $y_\infty \in D$ und $y_\infty = L^{-1}\, x_\infty$.

7. Die Hintereinanderausführung einer abgeschlossenen und einer stetigen linearen Abbildung ist abgeschlossen (Übungsaufgabe).

Beispiele und Gegenbeispiele

1. Der durch

   $$(L\, x)_j = j\, x_j \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}$$

   definierte lineare Operator L ist mit der Wahl $D = X = Y = \ell_{\text{fin}}(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ nicht stetig, aber abgeschlossen.

   <u>*Beweis*</u>: Zum einen gilt

   $$\|L\, e_k\|_\infty = |k|\ , \qquad \|e_k\|_\infty = 1$$

   für jeden Einheitsvektor e_k. Andererseits folgt aus $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\|_\infty = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|L\, x_n - y_\infty\|_\infty = 0$ mit $x_\infty \in X$ und $y_\infty \in Y$ die punktweise Aussage

   $$y_{\infty,\,j} = \lim_{n\to\infty} j\, x_{n,\,j} = j \lim_{n\to\infty} x_{n,\,j} = j\, x_{\infty,\,j}\,.$$

   für alle $j \in \mathbb{Z}$ und damit $y_\infty = L\, x_\infty$. □

2. Wenn wir jedoch $D = \ell_{\text{fin}}(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$, aber $X = Y = \ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ mit $p \in [1,\, p)$ setzen, so ist L weder stetig noch abgeschlossen.

   <u>*Beweis*</u>: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$x_{n,\,j} := \begin{cases} \exp\left(-\,|j|\right) & \text{falls } |j| \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}$$

   liegt ganz in D und x_n bzw. $y_n = L\, x_n$ konvergiert für $n \to \infty$ bzgl. der ∞-Norm gegen x_∞ bzw. y_∞ mit

   $$x_{\infty,\,j} = \exp\left(-\,|j|\right), \quad y_{\infty,\,j} = j\, \exp\left(-\,|j|\right) \qquad \text{für alle} \qquad j \in \mathbb{Z}\,.$$

   Der Grenzwert x_∞ liegt aber nicht in D. □

   <u>*Bemerkung*</u>: Wenn wir allerdings L via

   $$D := \big\{x \in X \ :\ L\, x \in Y\big\}$$

   auf einem größeren Definitionsbereich betrachten, ist er abgeschlossen.

[21] In diesem Sinn beruhen die Begriffe *offene Abbildung* und *abgeschlossene Abbildung* auf zwei unterschiedlichen Konzepten.

[22] Der Operator $L^{-1} : D \to X$ ist im Allgemeinen aber nicht stetig.

3. Auf dem Intervall $I = [0,\, 1]$ betrachten wir den Ableitungsoperator $L : D \to Y$ mit $X = Y = \mathsf{C}(I;\mathbb{R})$ und

$$D := \big\{x : I \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\big\}\,, \qquad Lx := x'\,.$$

Dann ist L zwar nicht stetig, aber abgeschlossen.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, sodass

$$\|x_n - x_\infty\|_\infty \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,, \qquad \|y_n - y_\infty\|_\infty \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

mit $y_n = x_n'$ für zwei stetige Funktionen x_∞ und y_∞ erfüllt ist. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$x_n(t_2) - x_n(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} y_n(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $0 \le t_1 < t_2 \le 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir

$$x_\infty(t_2) - x_\infty(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} y_\infty(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

wobei wir die Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen aus *Analysis 1+2* verwendet haben. Hieraus schließen wir, dass x_∞ in der Tat differenzierbar mit Ableitung y_∞ ist. Die Unstetigkeit von L folgt zum Beispiel durch Betrachtung der Funktionenfolge mit

$$x_n(t) := \sin\left(2\,\pi\,n\,t\right),$$

da dann $\|x_n\|_\infty = 1$ und $\|L\,x_n\|_\infty = \|x_n'\|_\infty = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Theorem (**Satz vom abgeschlossenenen Graphen**) Eine lineare Abbildung L zwischen zwei Banach-Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn sie abgeschlossen ist.

Beweis Die der Hinrichtung ist eine Übungsaufgabe und für die Rückrichtung betrachten wir $Z := \operatorname{graph}(L)$ als Unterraum von $X \times Y$. Die Abgeschlossenheit von L impliziert die Abgeschlossenheit von Z und $\big(Z,\, \|\cdot\|_{X\times Y}\big)$ ist daher ein Banach-Raum. Außerdem sind die Abbildungen $P : Z \to X$ und $Q : Z \to Y$ mit

$$P(x,\, y) := x\,, \qquad Q(x,\, y) := y$$

beide linear und stetig, wobei P sogar bijektiv ist. Die Umkehrabbildung $P^{-1} : X \to Z$ ist nach dem Satz über die offene Abbildung stetig, wobei

$$P^{-1}\,x = (x,\, L\,x)$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist. Insbesondere ist L gerade die Abbildung $Q \circ P^{-1}$ und damit als Komposition stetiger Abbildungen selbst steig. $\square$

Definition Die Graphennorm des linearen Operators $L : D \subset X \to Y$ ist durch

$$\|x\|_L := \|x\|_X + \|L\,x\|_Y$$

auf D, dem Definitionsbereich von L, definiert.[23]

Lemma (**Eigenschaften der Graphennorm**) Seien X und Y Banach-Räume und sei L abgeschlossen. Dann ist $\|\cdot\|_L$ vollständig auf D und L ist stetig als Abbildung von $(D, \|\cdot\|_L)$ nach $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Beweis Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine beliebige Cauchy-Folge bzgl. der Graphennorm. Dann ist sie auch Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_X$ und die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $y_n = L\,x_n$ ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_Y$. Insbesondere sind

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n\,, \qquad y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n$$

wohldefiniert und die Abgeschlossenheit von L liefert $x_\infty \in D$ sowie $y_\infty = L\,x_\infty$ und damit auch

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\|_L\ .$$

Die zweite Behauptung ergibt sich direkt aus der Abschätzung $\|L\,x\|_Y \le \|x\|_L$.

Theorem (**Variante des Satzes von der offenen Abbildung**) Seien X und Y Banachräume und sei $L : D \subset X \to Y$ abgeschlossen und surjektiv. Dann ist L offen als Abbildung von $(D, \|\cdot\|_X)$ nach $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Ist darüber hinaus L injektiv, so ist die Umkehrabbildung L^{-1} stetig von $(Y, \|\cdot\|_Y)$ nach $(D, \|\cdot\|_X)$.

Beweis Der Satz von der offenen Abbildung garantiert in Kombination mit dem vorherigen Lemma, dass L als Abbildung zwischen den Banach-Räumen $(D, \|\cdot\|_L)$ nach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ offen. Sei nun U eine Teilmenge von D, die offen im Raum $(D, \|\cdot\|_X)$ ist.[24] Da $\|x\|_X \le \|x\|_L$ für alle $x \in U$ gilt, ist jede $\|\cdot\|_L$-Kugel aus U in der entsprechenden $\|\cdot\|_X$-Kugel aus U enthalten, und wir schließen, dass U auch offen im Raum $(D, \|\cdot\|_L)$ ist. Die Bildmenge $L(U)$ ist daher offen in $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Sei nun L zusätzlich injektiv und damit bijektiv. Dann gilt

$$\left\|L^{-1}\,y\right\|_X \le \left\|L^{-1}\,y\right\|_L \le C\ \|y\|_Y$$

für alle $y \in Y$, wobei C hier die Stetigkeitskonstante von L^{-1} als Abbildung von $(Y, \|\cdot\|_Y)$ nach $(D, \|\cdot\|_L)$ ist.

Bemerkungen

1. Das Theorem verallgemeinert den Satz über die offene Abbildung und deckt auch unstetige Operatoren ab. Insbesondere erlaubt es uns unter gewissen Umständen, die Gleichungen der Bauart $L\,x = y$ nach x aufzulösen.

2. Das Konzept der Graphennorm werden wir bei den *Sobolov*-Räumen wieder benutzen.

---

[23] Der Nachweis der Normeigenschaften ist trivial.

[24] Beachte, dass $(D, \|\cdot\|)_X$ im Allgemeinen kein Banach-Raum ist (es sei denn, D ist abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_X$) und dass in diesem Raum jede Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um $x \in U$ nur Elemente aus U enthält.

Vorlesung 13 : 05. Dezember

2.6 Satz von Hahn-Banach

Lemma von Zorn Sei M eine beliebige Menge und $\preceq$ eine Halbordnung auf M, sodass jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M besitzt. Dann besitzt M mindestens ein maximales Element bzgl. $\preceq$.

Bemerkungen

1. Eine Halbordnung auf M ist eine binäre Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, d.h. es gilt

   $$m \preceq m\,, \qquad m \preceq \tilde{m} \,\wedge\, \tilde{m} \preceq m \;\Rightarrow\; m = \tilde{m}\,, \qquad m \preceq \tilde{m} \,\wedge\, \tilde{m} \preceq \breve{m} \;\Rightarrow\; m \preceq \breve{m}$$

   für alle m, $\tilde{m}$, $\breve{m} \in M$.

2. $\tilde{M} \subset M$ heißt total geordnet, wenn $m \preceq \tilde{m}$ oder $\tilde{m} \preceq m$ für je zwei Elemente m, $\tilde{m} \in \tilde{M}$ gilt.

3. Ein Element $m \in M$ heißt obere Schranke für $\tilde{M} \subseteq M$, wenn $\tilde{m} \preceq m$ für alle $\tilde{m} \in \tilde{M}$ gilt. Die obere Schrank muss dabei nicht zu $\tilde{M}$ gehören.

4. Ein Element $m \in M$ heißt maximal, wenn $\tilde{m} \preceq m$ für alle $\tilde{m} \in M$ gilt.

5. Das Zornsche Lemma ist eine fundamentale Aussage der allgemeinen Mengenlehre und äquivalent zum *Auswahlaxiom*. Für eine genauere Diskussion seiner Rolle in der Mathematik sowie die Äquivalenzbeweise sei auf die Literatur verwiesen.

6. Maximale Elemente sind im Allgemeinen nicht eindeutig, d.h. es kann (und wird bei unseren Anwendungen) viele geben. Nur unter der sehr restriktiven Annahme, dass M selbst total geordnet bzgl. $\preceq$ ist, stellt die Antisymmetrie sicher, dass es nur ein maximales Element in M geben kann.[25]

7. Der Fall $M = \emptyset$ ist indirekt ausgeschlossen: Die leere Menge ist zwar immer total geordnet, besitzt aber keine obere Schranke.

Definition Eine Funktion $p : X \to \mathbb{R}$ auf einen Vektorraum X heißt sublinear, falls

$$p(x + \tilde{x}) \leq p(x) + p(\tilde{x})\,, \qquad p(\mu\, x) = \mu\, p(x)$$

für alle $x \in X$ und alle $\mu \geq 0$ gilt.

Bemerkungen

1. X ist hier wieder ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aber der Bildbereich von p ist immer $\mathbb{R}$.

[25] $\mathbb{R}$ ist bzgl. der Standardrelation $\leq$ wohlgeordnet, besitzt aber kein maximales Element. Dies ist kein Widerspruch zum Lemma von Zorn, da nicht jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine obere Schranke besitzt.

2. Jede Seminorm auf X ist eine sublineare Funktion, aber die Umkehrung ist falsch.

   Gegenbeispiel: Die skalare Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) := \begin{cases} +c_+ \, x & \text{für } x \geq 0 \\ -c_- \, x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

   ist für jede Wahl der Parameter c_-, $c_+ \geq 0$ sublinear, aber nur für $c_- = c_+$ eine Seminorm.[26]

3. Im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist auch jedes lineare Funktional auf X sublinear. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt das nur für lineare Funktionale, die zusätzlich reellwertig sind, denn p muss immer reellwertig sein.

Theorem (**Satz von Hahn-Banach, allgemeine Version im Reellen**) Seien X ein reeller Vektorraum, U ein Unterraum von X, $p : X \to \mathbb{R}$ eine sublineare Funktion auf X und $g : U \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional[27] auf U mit

$$g(u) \leq p(u) \qquad \text{für alle} \quad u \in U\,.$$

Dann existiert eine lineare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(u) = g(u) \quad \text{für alle} \quad x \in U \qquad \text{sowie} \qquad f(x) \leq p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Insbesondere ist f eine Fortsetzung von g, die unterhalb von p liegt.

Beweis Konstruktion einer Halbordnung: Wir betrachten die Menge M aller Paare $(Z,\, f)$, wobei Z einen Unterraum von X bezeichnet, der U enthält, und $f : Z \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion auf Z ist, die den Bedingungen

$$f(u) = g(u) \quad \text{für alle} \quad u \in U \qquad \text{sowie} \qquad f(z) \leq p(z) \quad \text{für alle} \quad z \in Z$$

genügt. Außerdem führen wir eine Halbordnung auf M ein: Es gilt $(Z,\, f) \preceq (\tilde{Z},\, \tilde{f})$ genau dann, wenn Z ein Unterraum von $\tilde{Z}$ und $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von f ist. Letzteres meint, dass $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \in Z$ erfüllt ist. Mit einfachen Argumenten zeigen wir, dass die Relation $\preceq$ wirklich reflexiv, antisymmetrisch und transitiv auf M ist. Außerdem gilt trivialerweise $(U,\, g) \in M$.

Konstruktion oberer Schranken: Ist $(Z_i,\, f_i)_{i \in I}$ eine gegebene und total geordnete Familie in M,[28] so setzen wir

$$Z := \bigcup_{i \in I} Z_i$$

und bemerken, dass Z ein Unterraum von X ist, der alle Z_i und damit auch U enthält. Wir definieren desweiteren die Abbildung $f : Z \to \mathbb{R}$ durch

$$f(z) = f_i(z) \qquad \text{falls} \quad z \in Z_i\,,$$

[26] Wir können alle Behauptungen mittels geeigneter Fallunterscheidungen einfach nachrechnen.

[27] Da X hier keine Norm tragen muss, können wir lineare Funktionen nicht auf Stetigkeit untersuchen und schreiben daher $g(x)$ statt $\langle g,\, x \rangle$ für den Wert, den g in x annimmt.

[28] Jede Teilmenge von M kann als Familie von Elementen aus M verstanden werden und umgekehrt. Die entsprechende Indexmenge I kann dabei endlich, abzählbar oder überabzählbar unendlich sein.

wobei die totale Ordnung der Familie sicherstellt, dass f wohldefiniert ist. In der Tat, wenn $z \in X$ sowohl zu Z_i als auch zu Z_j gehört, so gilt o.B.d.A. $(Z_i,\, f_i) \preceq (Z_j,\, f_j)$ und damit $Z_i \subseteq Z_j$ sowie $f_i(z) = f_j(z)$. Insbesondere hängt der Wert von $f(z)$ nicht davon ab, ob wir in der Definition den Index i oder den Index j verwenden. Zusätzlich bemerken wir, dass $(Z,\, f)$ in M liegt und unsere Konstruktion $(Z_i,\, f_i) \preceq (Z,\, f)$ für alle $i \in I$ sicherstellt. Insbesondere ist $(Z,\, f)$ eine obere Schranke für die Familie und insgesamt haben wir die Voraussetzungen im Zornschen Lemma verifiziert.

Eigenschaften eines maximalen Elements, Teil 1: Wir bezeichnen von nun an mit $(Z,\, f)$ ein maximales Element in M bzgl. $\preceq$ und wollen $Z = X$ zeigen, da dies unmittelbar die Behauptung impliziert. Dazu nehmen wir als Antithese die Existenz von $x_\# \in X$ mit $x_\# \notin Z$ an. Nach Voraussetzung gilt

$$f(z) + f(\tilde{z}) = f(z + \tilde{z}) \leq p(z + \tilde{z}) = p\big((z - x_\#) + (\tilde{z} + z_\#)\big) \leq p(z - x_\#) + p(\tilde{z} + x_\#)$$

und damit auch

$$f(z) - p(z - x_\#) \leq p(\tilde{z} + p_\#) - f(\tilde{z})$$

für beliebige $z,\, \tilde{z} \in Z$ und wir können $c_\# \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{z \in Z} \big(f(z) - p(z - x_\#)\big) \leq c_\# \leq \inf_{\tilde{z} \in Z} \big(p(\tilde{z} + x_\#) - f(\tilde{z})\big)$$

wählen, wobei $c_\#$ positiv sein kann oder nicht. Wir betrachten schließlich den Raum

$$Z_\# := Z \oplus \operatorname{span}\{x_\#\} = \big\{z + \lambda\, x_\# \;:\; z \in Z\,,\; \lambda \in \mathbb{R}\big\}$$

und definieren $f_\# : Z_\# \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\#\big(z + \lambda\, x_\#\big) := f(z) + \lambda\, c_\#\,.$$

Die Funktion $f_\#$ ist ebenfalls linear und nach Konstruktion gilt $f_\#(z) = f(z)$ für alle $z \in Z$ und damit auch $f_\#(u) = g(u)$ für alle $u \in U$.

Eigenschaften eines maximalen Elements, Teil 2: Seien $z \in Z$ und $\mu > 0$ beliebig fixiert. Die obere Schranke für $c_\#$ garantiert

$$c_\# \leq p\big(\mu^{-1}\, z + x_\#\big) - f\big(\mu^{-1}\, z\big)$$

und in Kombination mit der Linearität von f sowie der Sublinearität von p erhalten wir

$$\begin{aligned} f_\#\big(z + \mu\, x_\#\big) &\leq f(z) + \mu\,\Big(p\big(\mu^{-1} z + x_\#\big) - f\big(\mu^{-1}\, z\big)\Big) \\ &= \Big(f(z) - \mu\, f\big(\mu^{-1}\, z\big)\Big) + \mu\, p\Big(\mu^{-1}\, z + x_\#\Big) \\ &\leq 0 + p\big(z + \mu\, x_\#\big)\,. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich aus

$$c_\# \geq f\big(\mu^{-1}\, z\big) - p\big(\mu^{-1}\, z + x_\#\big)$$

nach Multiplikation mit $-\mu$ die Abschätzung

$$f_\#\big(z - \mu\, x_\#\big) \leq f(z) - \mu\Big(f\big(\mu^{-1}\, z\big) - p\big(\mu^{-1}\, z - x_\#\big)\Big) \leq p\big(z - \mu\, x_\#\big)$$

und mit $f_\#\big(z + 0\, x_\#\big) = f(z) \leq p(z) \leq p(z + 0\, x_\#)$ schließen wir, dass

$$f_\#\big(z + \lambda\, x_\#\big) \leq p\big(z + \lambda\, x_\#\big)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Da $z \in Z$ beliebig war, haben wir insgesamnt gezeigt, dass $(Z_\#,\, f_\#)$ zu M gehört und bzgl. der Halbordnung $\preceq$ größer als $(Z,\, f)$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von $(Z,\, f)$ und daher muss $Z = X$ gelten. $\square$

Bemerkungen

1. Der Satz von Hahn-Banach garantiert die Existenz gewisser Fortsetzungen f des linearen Funktionals g, aber im Allgemeinen nicht die Eindeutigkeit. Siehe dazu das nachfolgende Beispiel.

2. Durch eine endliche Rekursion der Argumente aus dem letzten Beweisschritt können wir g in recht konstruktiver Weise immer zu einem Funktional f auf dem Raum $Z = U \oplus \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$ fortsetzen, sofern die Vektoren $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig in X sind und nicht zu Y gehören. Die wesentliche Aussage des Theorems besteht jedoch salopp gesprochen darin, dass die Existenz gewisser Fortsetzungen auch dann gesichert ist, wenn der Quotientenraum X/U unendlich-dimensional ist. Das Existenzresultat ist dann allerdings nicht mehr konstruktiv.

3. Im Beweis des Theorems ist es sehr wichtig, dass X ein reeller Vektorraum ist und dass g diesen Raum in die reellen Zahlen abbildet. Das nächste Resultat impliziert jedoch, dass es auch eine komplexe Version gibt.

Beispiel Es gelte $X = \mathbb{R}^2$ und $U = \big\{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\big\}$ sowie

$$g(x_1, 0) = c_1 x_1 \qquad \text{und} \qquad p(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

für einen festen Parameter $c_1 \in [-1, +1]$. Dann liefert

$$f(x_1, x_2) := c_1 x_1 + c_2 x_2$$

genau dann eine zulässige Fortsetzung f von g, wenn $c_1^2 + c_2^2 \leq 1$ gilt. Insbesondere gibt es für $c_1 = \pm 1$ jeweils nur die triviale Fortsetzung mit $c_2 = 0$, aber andernfalls kann c_2 beliebig im Intervall $[-\sqrt{1-c_1^2}, +\sqrt{1-c_1^2}]$ gewählt werden.

<u>Beweis</u>: Die Cauchy-Schwarz Ungleichung im $\mathbb{R}^2$ zeigt, dass die Bedingung an (c_1, c_2) hinreichend für die Zulässigkeit ist. Die Notwendigkeit folgt mit der speziellen Wahl $(x_1, x_2) = (c_1, c_2)$. □

Lemma (**über komplexe Vektorräume**) Jeder Vektorraum X über $\mathbb{C}$ ist auch Vektorraum über $\mathbb{R}$ und es gelten die folgenden Aussagen:

1. Ist $h : X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf X, d.h. gilt

$$h(x + \tilde{x}) = h(x) + h(\tilde{x}), \qquad h(\alpha x) = \alpha h(x)$$

für alle $x, \tilde{x} \in X$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $g : X \to \mathbb{C}$ mit

$$g(x) := h(x) - \mathtt{i}\, h(\mathtt{i}\, x)$$

ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf X, d.h. es gilt

$$g(x + \tilde{x}) := g(x) + g(\tilde{x}), \qquad g\big((\alpha + \mathtt{i}\,\beta)\, x\big) = (\alpha + \mathtt{i}\,\beta)\, g(x)$$

für alle $x, \tilde{x} \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Jedes $\mathbb{C}$-lineare Funktional $g : X \to \mathbb{C}$ ist von dieser Bauart, wobei dann

$$h(x) = \operatorname{Re}\big(g(x)\big)$$

für alle $x \in X$ gilt.

3. Die logische Äquivalenz

$$\big|h(x)\big| \leq p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \qquad \Leftrightarrow \qquad \big|g(x)\big| \leq p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt mit $h = \mathrm{Re}\,(g)$ für jede Seminorm $p : X \to \mathbb{R}$.

Insbesondere können wir jedes $\mathbb{C}$-lineare Funktional auf X in eindeutiger, linearer und seminormtreuer Weise aus seinem $\mathbb{R}$-linearen Realteil rekonstruieren.

Beweis *Teil 1*: Für jedes $\mathbb{R}$-lineare Funktional h auf X berechnen wir

$$\begin{aligned} g(x+\tilde{x}) &= h(x+\tilde{x}) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,x + \mathtt{i}\,\tilde{x}) = h(x) + h(\tilde{x}) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,\tilde{x}) \\ &= \big(h(x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,x)\big) + \big(h(\tilde{x}) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,\tilde{x})\big) = g(x) + g(\tilde{x}) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} g\big((\alpha + \mathtt{i}\,\beta)\,x\big) &= h(\alpha\,x + \mathtt{i}\,\beta\,x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,\alpha\,x - \beta\,x) \\ &= h(\alpha\,x) + h(\mathtt{i}\,\beta\,x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,\alpha\,x) + \mathtt{i}\,h(\beta\,x) \\ &= \alpha\,h(x) + \beta\,h(\mathtt{i}\,x) - \mathtt{i}\,\alpha\,h(\mathtt{i}\,x) + \mathtt{i}\,\beta\,h(x) \\ &= \alpha\,\big(h(x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,x)\big) + \mathtt{i}\,\beta\,\big(h(x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,x)\big) = \big(\alpha + \mathtt{i}\,\beta\big)\,g(x) \end{aligned}$$

und schließen, dass die angegebene Formel in der Tat ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional g auf X definiert.

Teil 2: Für ein gegebenes $\mathbb{C}$-lineare Funktional g auf X gilt[29]

$$\big(\mathrm{Re}\,g\big)(x) + \mathtt{i}\,\big(\mathrm{Im}\,g\big)(x) = g(x) = -\mathtt{i}\,g(\mathtt{i}\,x) = \big(\mathrm{Im}\,g\big)(\mathtt{i}\,x) - \mathtt{i}\,\big(\mathrm{Re}\,g\big)(\mathtt{i}\,x)$$

und ein Vergleich der Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten liefert

$$\big(\mathrm{Im}\,g\big)(x) = -\big(\mathrm{Re}\,g\big)(\mathtt{i}\,x)\,, \qquad \big(\mathrm{Re}\,g\big)(x) = +\big(\mathrm{Im}\,g\big)(\mathtt{i}\,x)\,,$$

wwobei $x \in X$ beliebig ist. Insbesondere gilt die Darstellungsformel für g und die $\mathbb{R}$-Linearität von $h = \mathrm{Re}\,g$ kann analog zu oben einfach nachgerechnet werden.

Teil 3: Die Rückrichtung ist wegen $\big|h(x)\big| \leq |g(x)|$ trivial. Für die Hinrichtung fixieren wir $x \in X$, schreiben[30]

$$g(x) = h(x) - \mathtt{i}\,h(\mathtt{i}\,x) = \varrho\,\exp\,(\mathtt{i}\,\varphi)$$

und betrachten

$$\tilde{x} = \exp\,(-\mathtt{i}\,\varphi)\,x\,.$$

Dann ist $g(\tilde{x}) = \exp\,(-\mathtt{i}\,\varphi)\,g(x) = \varrho$ reell und wir erhalten $h(\mathtt{i}\,\tilde{x}) = 0$ sowie

$$\big|g(x)\big| = \big|h(\tilde{x})\big| \leq p(\tilde{x}) = \big|\exp\,(-\mathtt{i}\,\varphi)\big|\,p(x) = p(x)$$

unter Ausnutzung der Seminorm-Eigenschaft von p. $\square$

---

[29] Wir benutzen hier eine Standardnotation: Für jede komplexwertige Funktion $\psi : D \to \mathbb{C}$ werden durch

$$\big(\mathrm{Re}\,\psi\big)(d) := \mathrm{Re}\,\big(\psi(d)\big)\,, \qquad \big(\mathrm{Im}\,\psi\big)(x) := \mathrm{Im}\,\big(\psi(d)\big)$$

in natürlicher Weise zwei reellwertige Funktionen $\mathrm{Re}\,\psi$, $\mathrm{Im}\,\psi : D \to \mathbb{R}$ definiert, die wir den Real- und den Imaginärteil von φ nennen. Dabei ist es nicht wichtig, welche Eigenschaften D und ψ aufweisen.

[30] Doe Polarkoordinaten ϱ und φ hängen natürlich von x ab, aber x ist ja fixiert.

Bemerkungen

1. Das Lemma impliziert, dass die allgemeine Version des Satzes von Hahn-Banach auch für komplexe Vektorräume und $\mathbb{C}$-lineare Funktionale f und g gilt, sofern der Term $g(x) \leq p(x)$ durch $\operatorname{Re} g(x) \leq p(x)$ ersetzt wird. Dabei muss $p : X \to \mathbb{R}$ nur sublinear und nicht unbedingt eine Seminorm sein.

   Beweis: Wir setzen im ersten Schritt das $\mathbb{R}$-lineare Funktional $\operatorname{Re} g : U \to \mathbb{R}$ zu einem $\mathbb{R}$-linearen Funktional auf X fort, dass nach dem ersten Teil des Lemmas der Realteil eines $\mathbb{C}$-linearen Funktionals $f : X \to \mathbb{C}$ ist. Der zweite Teil des Lemmas garantiert dann, dass die Einschränkung von f auf U in der Tat g ist, denn auf U stimmen die jeweiligen Realteile überein. □

2. Im dritten Teil des Lemma ist es wichtig, dass p eine Seminorm of X ist. Er impliziert unter anderem, dass ein komplexwertiges lineares Funktional auf X genau dann stetig ist, wenn sein Realteil stetig ist.

3. Als unabhängige Ergänzung zum Lemma halten wir fest, dass jeder Vektorraum X über $\mathbb{R}$ via

   $$z = x + \mathtt{i}\, y \qquad \text{mit} \quad x,\, y \in X$$

   in naheliegender und sehr natürlicher Weise komplexifiziert werden kann. Der entstehende Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist dabei als reeller Vektorraum isomorph zu $X \times X$. Trägt X darüberhinaus die Norm $\|\cdot\|$, so wird durch

   $$\|z\|^2 := \|x\|^2 + \|y\|^2$$

   eine konsistente Norm auf dem komplexifizierten Raum eingeführt.

Vorlesung 14 : 07. Dezember

Theorem (**Satz von Hahn-Banach, spezielle Version**) Seien $(X,\, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, U ein beliebiger Unterraum von X und $u^* \in \mathsf{Lin}(U;\, \mathbb{K})$ ein lineares und stetiges Funktional auf U. Dann existiert ein lineares und stetiges Funktional $x^* \in \mathsf{Lin}(U;\, \mathbb{K})$ mit

$$\|x^*\|_{X;\,\mathbb{K}} = \|u^*\|_{U;\,\mathbb{K}} \qquad \text{sowie} \qquad \langle x^*,\, u\rangle = \langle u^*,\, u\rangle \quad \text{für alle} \quad u \in U\,.$$

Insbesondere ist x^* eine normtreue Fortsetzung von u^*.

Beweis *reeller Fall*: Mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ setzen wir

$$g(u) = \langle u^*,\, u\rangle\,, \qquad p(x) = \|u^*\|_{U;\,\mathbb{R}}\, \|x\|_X$$

und erhalten nach der allgemeinen Version des Satzes von Hahn-Banach ein lineares Funktional f als Fortsetzung von g, wobei

$$f(\pm x) \leq \|u^*\|_{U;\,\mathbb{R}}\, \|\pm x\|_X$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist und außerdem

$$f(-x) = -f(x)\,, \qquad \|\pm x\|_X = \|x\|_X\,, \qquad \big|f(x)\big| = \max\{f(x),\, f(-x)\}$$

gilt. Mit der Schreibweise $\langle x^*, x\rangle := f(x)$ gilt also einerseits $\|x^*\|_{X;\mathbb{R}} \le \|u^*\|_{U;\mathbb{R}}$. Andererseits ergibt sich die umgekehrte Abschätzung aus

$$\|x^*\|_{X;\mathbb{R}}\,\|u\|_X \ge \langle x^*, u\rangle = \langle u^*, u\rangle$$

durch Supremumsbildung über alle $u \in U$ mit $\|u\|_X = 1$.

Komplexer Fall: Im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ setzen wir zunächst $\mathrm{Re}\, g$ zu einem reellen Funktional auf X fort, wobei diese Fortsetzung nach dem ersten Teil des vorherigen Lemmas (angewendet im Raum X) der Realteil eines komplexen Funktionals f auf X darstellt und der zweite Teil des Lemmas (diesmal angewendet auf U) garantiert, dass die Einschränkung von f auf U mit g übereinstimmt. Die Abschätzung

$$\|f\|_{X;\mathbb{C}} = \|\mathrm{Re}\, f\|_{X;\mathbb{R}} = \|\mathrm{Re}\, g\|_{X;\mathbb{R}} = \|g\|_{X;\mathbb{C}}$$

ergibt sich dabei aus einer zweimaligen Anwendung des dritten Teil des Lemma sowie dem ersten Teil dieses Beweises. □

Bemerkungen

1. $X^* = \mathsf{Lin}(X; \mathbb{K})$ bezeichnet den *Dualraum* von X mit Norm $\|\cdot\|_{X^*} = \|\cdot\|_{X;\mathbb{K}}$ und die *Dualpaarung* $\langle x^*, x\rangle$ von $x^* \in X^*$ mit $x \in X$ ist im Allgemeinen *kein* Skalarprodukt.

2. Die Fortsetzung x^* von u^* ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, es sei denn X^* ist ein *strikt konvexer* Raum (siehe dazu die Hausaufgaben).[31]

3. Eine fast triviale, aber doch sehr wichtige Folgerung ist, dass für jedes $x \in X$ mit $x \neq 0$ mindestens ein $x^* \in X^*$ mit

   $$\langle x^*, x\rangle = \|x\|_X\,, \qquad \|x^*\|_{X^*} = 1$$

   existiert.

   Beweis: Wir setzen $U := \mathrm{span}\{x\} = \big\{\lambda\, x \,:\, \lambda \in \mathbb{K}\big\}$ sowie $\langle u^*, \lambda\, x\rangle := \lambda\, \|x\|_X$ und wenden das Theorem an. □

   Korollar: Aus $\langle x^*, x\rangle = 0$ für alle $x^* \in X^*$ folgt $x = 0$.

4. Bemerkenswert ist auch die folgende Trennungseigenschaft: Sind x_1 und x_2 zwei verschiedene Elemente aus X, so gilt

   $$\langle x^*, x_1\rangle \neq \langle x^*, x_2\rangle$$

   für mindestens ein $x^* \in X^*$.

   Beweis: Wir wählen x^* wie in der vorherigen Bemerkung mit $x := x_2 - x_1$. □

[31] Ganz allgemein gilt: Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ wird strikt konvex genannt, wenn die Implikation

$$x_1 \neq x_2\,, \quad \|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2\|_X < 1$$

für alle nicht-trivialen Konvexgewichte mit $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ und $\lambda_1 + \lambda_2$ erfüllt ist. Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ strikt konvex für $1 < p < \infty$, aber nicht strikt konvex für $p = 1$ oder $p = \infty$.

5. Die Formel
$$\|x\|_X = \sup_{x^*\neq 0} \frac{\langle x^*,\, x\rangle}{\|x^*\|_{X^*}} = \sup_{x^*\neq 0} \frac{\big|\langle x^*,\, x\rangle\big|}{\|x^*\|_{X^*}}$$
gilt für jedes $x \in X$ und wird eine wichtige Rolle spielen. Beachte die Symmetrie mit der Formel
$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle x^*,\, x\rangle}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \frac{\big|\langle x^*,\, x\rangle\big|}{\|x\|_X}\,.$$
die sich unmittelbar aus der Definition von X^* ergibt. Hier deutet sich schon an, dass es einen intimen Zusammenhang zwischen X und seinem *Bidualraum* $X^{**} := (X^*)^*$ gibt, den wir weiter unten genauer studieren werden.

   Beweis: Sei $x \in X$ beliebig fixiert. Die Definition der dualen Norm liefert die Doppelabschätzung
$$\langle x^*,\, x\rangle \leq \big|\langle x^*,\, x\rangle\big| \leq \|x^*\|_{X^*}\,\|x\|_X$$
für alle $x^* \in X^*$ und die vorherige Bemerkung garantiert, dass für bestimmte x^* zweimal Gleichheit besteht. Aufgrund dieser beiden Beobachtungen kann die Behauptung mit elementaren Argumenten etabliert werden. □

6. Für jedes $x \in X^*$ gilt
$$\|x^*\|^2_{X^*} = \langle x^*,\, x\rangle = \|x\|^2_X$$
für mindestens ein $x^* \in X^*$.

   Beweis: Dies ergibt sich mit $U := \mathrm{span}\{x\}$ sowie $\langle u^*,\, \lambda\, x\rangle := \lambda\, \|x\|^2_X$. □

   Ausblick: Wenn wir jedem $x \in X$ die Menge aller x^* mit dieser Eigenschaft zuweisen, erhalten wir die sogenannte *Dualitätsabbildung* von X, die allerdings im Allgemeinen mehrdeutig und nichtlinear ist. Siehe dazu auch die Ergänzung zum Darstellungssatz von $\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})^*$.

Trennung konvexer Mengen

Vorbemerkung In diesem Abschnitt ist $(X,\, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$.

konvexe Mengen und Funktionen Ein Ausdruck der Bauart
$$\lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_n\, x_n \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{N}\,, \quad x_1,\, \ldots,\, x_n \in X$$
und
$$0 \leq \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n \leq 1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$$
heißt (endliche) Konvexkombination der $x_1,\, \ldots,\, x_n \in X$, wobei die Zahlen $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n$ die Gewichte sind. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird konvex genannt, wenn sie alle endlichen Konvexkombinationen ihrer Elemente enthält und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wird konvex genannt, wenn die Ungleichung
$$f(\lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_n\, x_n) \leq \lambda_1\, f(x_1) + \ldots + \lambda_n\, f(x_n)$$
für alle Konvexkombinationen von Elementen aus U erfüllt ist. Insbesondere gilt: Eine Funktion ist genau dann konvex, wenn ihr Epigraph
$$\mathrm{epi}(f) := \big\{(x,\, y) \in U{\times}\mathbb{R} \;:\; y \geq f(x)\big\}$$
als Teilmenge des Produktraumes $X{\times}\mathbb{R}$ konvex ist.

Bemerkungen

1. Konvexe Mengen können offen, abgeschlossen oder weder noch sein. Insbesondere ist jeder Unterraum von X konvex.

2. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls $-f$ konvex ist.

3. Konvexe Funktionen sind bei uns immer auf konvexen Mengen definiert. Beachte, dass auch konkave Funktionen üblicherweise nur auf konvexen Menge studiert werden.

4. *Konvexität* ist ein ausgesprochen mächtiges Konzept in der Funktionalanalysis, aber auch in vielen anderen Bereichen der Mathematik.

5. Beachte, dass kein analoger Konvexitätsbegriff für komplexwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ existiert, da es keine sinvolle Ordnung auf $\mathbb{C}$ gibt. Der Vektorraum X kann aber sowohl reell als auch komplex sein.

6. Jede lineare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist sowohl konvex als auch konkav, aber es gibt viele nichtlineare konvexe Funktionen. Zum Beispiel ist jede Norm sowie das Quadrat jeder Norm konvex.

7. Analog zu *Analysis 1+2* können wir zeigen, dass die Konvexitätsbedingungen für Mengen oder Funktionen nur für elementare Konvexkombinationen der Bauart $\frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2$ überprüft werden müssen.

8. Nützlich ist die folgende äquivalente Charakterisierung, die sehr einfach gezeigt werden kann: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für jeden eindimensionalen affinen Unterraum $\tilde{X} \subseteq X$ die Einschränkung von f auf $\tilde{X}$ konvex ist.

9. In Banach-Räumen können wir auch abzählbar unendliche Konvexkombinationen zulassen (also den Fall $n = \infty$), sofern wir zusätzlich $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$ fordern. In nicht-vollständigen Räumen kann jedoch im Allgemeinen die Konvergenz der entsprechenden Reihen nicht sichergestellt werden.

10. Ein schwächeres Konzept ist das folgende: Die Teilmenge $U \subset X$ von X heißt sternfömig bzgl. des Zentrums $x_\# \in U$, falls sie für jedes ihrer Elemente $x \in U$ alle Konvexkominationen der Bauart $\mu\, x + (1-\mu)\, x_\#$ mit $\mu \in [0,\, 1]$ enthält. Wir sagen auch, U ist sternförmig, wenn mindestens ein Zentrum $x_\#$ existiert.

11. Eine konvexe Menge ist sternförmig bzgl. aller ihrer Elemente, aber es gibt viele sternförmige Mengen, die nicht konvex ist.

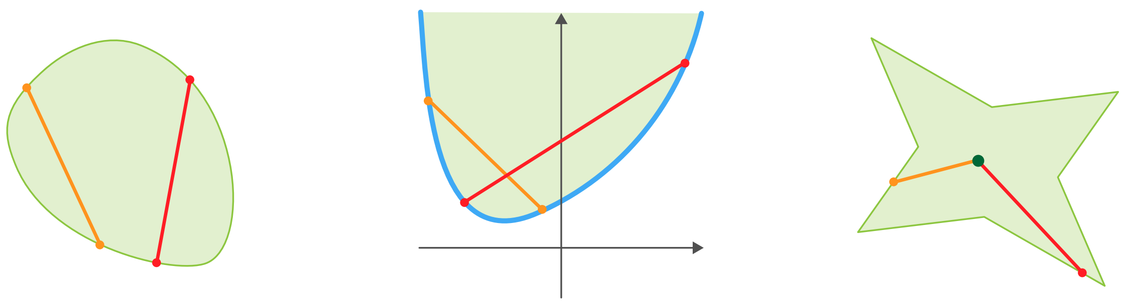


Abbildung Illustration einer konvexen Menge, einer konvexen Funktion (mit ihrem konvexem Epigraphen) sowie einer sternförmigen Menge.

Lemma (**Eigenschaften konvexer Nullumgebungen**) Ist $U \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge von X, die 0 als inneren Punkt enthält, so gelten die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $p_U(x) \leq \varepsilon^{-1} \|x\|_X$ für alle $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U$.

2. Die Funktion p_U ist sublinear.

3. Ist U selbst offen, so gilt $U = p_U^{-1}\big([0,\, 1)\big)$.

Hierbei bezeichnet $p_U : X \to [0,\, \infty]$ mit

$$p_U(x) := \inf\big\{s \;:\; s^{-1}\, x \in U\big\}$$

das (nichtlineare) Minkowski-Funktional von U.[32]

Beweis *Teil 1*: Für jedes $x \in X$ gehört $t\, x$ mit $0 < t < t_\# := \varepsilon\, \|x\|_X^{-1}$ zu $B_\varepsilon(x_\#) \subseteq U$ und dies impliziert $p_U(x) \leq t^{-1}$ sowie $p_U(x) \leq t_\#^{-1}$ nach Grenzübergang.

Teil 2: Seien $x,\, \tilde{x} \in U$ sowie $\delta > 0$ beliebig fixiert. Wir wählen $s > 0$ und $\tilde{s} > 0$ mit

$$s^{-1}\, x \in U\,, \qquad s \leq p_U(x) + \delta\,, \qquad \tilde{s}^{-1}\, \tilde{x} \in U\,, \qquad \tilde{s} \leq p_U(\tilde{x}) + \delta$$

und bemerken, dass

$$\frac{x + \tilde{x}}{s + \tilde{s}} = \frac{s}{s + \tilde{s}}\, \frac{x}{s} + \frac{\tilde{s}}{s + \tilde{s}}\, \frac{\tilde{x}}{\tilde{s}} \in U$$

aus der Definition von p_U sowie der Konvexität von U folgt. Insbesondere gilt

$$p_U(x + \tilde{x}) \leq s + \tilde{s} \leq p_U(x) + p_U(\tilde{x}) + 2\,\delta\,,$$

und die Behauptung ergibt sich im Limes $\delta \to 0$.

Teil 3: Sei $x \in p_U^{-1}\big([0,\, 1)\big)$ fixiert. Dann gilt $p_U(x) < 1$ und es existiert $s \in \mathbb{R}$ mit $p_U(x) < s < 1$ sowie $s^{-1}x \in U$. Mithilfe der Konvextität von U erhalten wir $x = (1 - s)\, 0 + s\, s^{-1}x \in U$ wegen $0 \in U$. Sei umgekehrt $x \in U$ beliebig fixiert. Dann existiert $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$ und wir schließen, dass auch $(1 + \delta/2)\, x$ in U liegt. Insbesondere gilt $p_U(x) \leq 1/(1 + \delta/2) < 1$ und damit $x \in p_U^{-1}\big([0,\, 1)\big)$. $\square$

Lemma (**Hilfssatz**) Sei $U \subseteq X$ eine konvexe und offene Teilmenge von X mit $0 \notin U$. Dann existiert ein $x^* \in X^*$ mit

$$\operatorname{Re}\langle x^*,\, u\rangle > 0$$

für alle $u \in U$.

Beweis *Vorbereitungen*: Aufgrund des Lemmas über komplexe Vektorräume reicht es, den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu betrachten. Wir wählen $u_\# \in U$ beliebig sowie $\varepsilon_\# > 0$ mit $B_{\varepsilon_\#}(u_\#) \subseteq U$, setzen

$$U_\# := U - \{u_\#\} = \big\{u - u_\# \;:\; u \in U\big\}$$

[32] p_U kann ganz allgemein für jede Menge $U \subseteq X$ definiert werden, die sternförmig bzgl. 0 ist.

und bemerken, dass 0, aber nicht $-u_\#$ zu $U_\#$ gehört. Insbesondere ist $p_\# := p_{U_\#}$ nach dem vorherigen Lemma eine sublineare Funktion auf X mit

$$p_\#(-u_\#) \geq 1$$

sowie

$$p_\#(x) \leq \varepsilon_\#^{-1} \|x\|_X$$

für alle $x \in X$, denn es gilt $B_{\varepsilon_\#}(0) \subseteq U_\#$. Außerdem können wir die lineare Funktion

$$g : \mathrm{span}\{-u_\#\} \to \mathbb{R}\,, \qquad g(-\lambda\, u_\#) := \lambda\, p_\#(-u_\#)$$

nach der allgemeinen Version des Satzes von Hahn-Banach zu einer linearer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq p_\#(x)$ für alle $x \in X$ fortsetzen, wobei dann

$$f(-u_\#) = g(-u_\#) = p_\#(-u_\#) \geq 1$$

nach Konstruktion garantiert ist.

<u>*Eigenschaften der Fortsetzung*</u>: Für alle $x \in X$ gilt

$$\big|f(x)\big| = \max\big\{f(x),\, f(-x)\big\} \leq \max\big\{p_\#(x),\, p_\#(-x)\big\} \leq \varepsilon_\#^{-1} \|x\|_X$$

und wir schließen, dass f beschränkt und damit auch stetig ist. Für jedes $u \in U$ erhalten wir darüber hinaus die Abschätzung

$$f(u) = f(u - u_\#) - f(-u_\#) \leq p_\#(u - u_\#) - p_\#(-u_\#) < 1 - 1 = 0\,,$$

wobei wir benutzt haben, dass $p_\#(u - u_\#) < 1$ wegen $u - u_\# \in U_\#$ ebenfalls aus dem dritten Teil des vorherigen Lemmas folgt. Das Funktional x^* mit $\langle x^*, x\rangle := -f(x)$ besitzt nun alle gewünschten Eigenschaften. □

Gegenbeispiel Die Menge

$$U := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1 > 0,\, x_2 = 0\big\} \cup \big\{x \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_2 > 0\big\}$$

ist eine konvexe, aber nicht-offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die nicht den Nullvektor 0 enthält. Wir zeigen durch Widerspruch, dass die Behauptung des Hilfssatzes falsch ist. Denn wenn

$$\big\langle x^*,\, (u_1,\, u_2)\big\rangle = x_1^*\, u_1 + x_2^*\, u_2 > 0$$

für alle $u = (u_1,\, u_2) \in U$ erfüllt ist, so muss insbesondere

$$x_1^* = \big\langle x^*,\, (1,\, 0)\big\rangle > 0\,, \qquad x_2^* = \big\langle x^*,\, (0,\, 1)\big\rangle > 0$$

gelten, da $(1,\, 0)$ und $(0,\, 1)$ beide in U liegen. Da aber auch $(-2\, x_2^*,\, x_1^*)$ zu U gehört, erhalten wir mit

$$\big\langle x^*,\, (-2\, x_2^*,\, x_1^*)\big\rangle = -x_1^*\, x_2^* < 0$$

den gesuchten Widerspruch.

Vorlesung 15 : 12. Dezember, Teil 1

Theorem (**Trennungssatz von Hahn-Banach, Version 1**) Seien V, W zwei disjunkte Teilmengen von X, die jeweils konvex und nichtleer sind, wobei V zusätzlich offen ist. Dann existiert $x^* \in X^*$, sodass

$$\operatorname{Re} \langle x^*, v \rangle > \operatorname{Re} \langle x^*, w \rangle$$

für jedes $v \in V$ und alle $w \in W$ erfüllt ist.

Beweis Wir setzen $U := V - W = \big\{ v - w \, : \, v \in V, \, w \in W \big\}$ und prüfen mit einfachen Rechnungen, dass U konvex ist und nicht die 0 enthält. Aus der Darstellungsformel

$$U = \bigcup_{w \in W} V - \{w\}$$

folgt außerdem, dass U offen ist. Jedes Funktional x^* aus dem vorherigen Hilfssatz besitzt wegen

$$0 < \operatorname{Re} \langle x^*, v - w \rangle = \operatorname{Re} \langle x^*, v \rangle - \operatorname{Re} \langle x^*, w \rangle$$

die gewünschte Eigenschaft. □

Theorem (**Trennungssatz von Hahn-Banach, Version 2**) Seien $W \subseteq X$ eine konvexe, abgeschlossene sowie nichtleere Teilmenge von X und $x \in X$ ein Punkt mit $x \notin W$. Dann existieren $\eta \in \mathbb{R}$ und $x^* \in X^*$, sodass

$$\operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle > \eta > \operatorname{Re} \langle x^*, w \rangle$$

für alle $w \in W$ erfüllt ist. Insbesondere vermittelt x^* eine strikte Trennung von x und W.

Beweis Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $V := B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus W$ sowie x^* wie im vorherigen Theorem. Für jedes beliebig fixierte $w \in W$ gilt

$$\operatorname{Re} \langle x^*, x - \varepsilon \, y \rangle > \operatorname{Re} \langle x^*, w \rangle$$

und damit

$$\operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle > \operatorname{Re} \langle x^*, w \rangle + \varepsilon \operatorname{Re} \langle x^*, y \rangle$$

für alle $y \in X$ mit $\|y\|_X = 1$. Hierbei ist $\operatorname{Re} x^*$ ein reellwertiges Funktional auf X, dass nach Konstruktion nicht das Nullfunktional ist, d.h. es gilt $\delta := \|\operatorname{Re} x^*\|_{X^*} > 0$. Durch Supremumsbildung über alle zugelassenen y erhalten wir

$$\operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle > \operatorname{Re} \langle x^*, w \rangle + \varepsilon \, \delta$$

für alle $w \in W$ und dies liefert die Behauptung mit $\eta := \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle - \frac{1}{2} \varepsilon \, \delta$. □

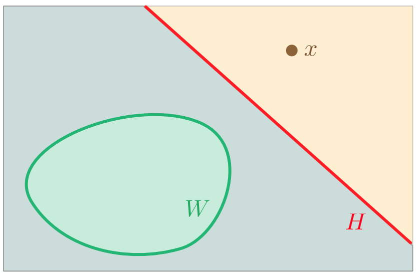


Abbildung Illustration der zweiten Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach. Die affine Hyperebene $H = \big\{ y \in X \, : \langle x^*, y \rangle = \eta \big\}$ liegt zwischen W und x.

Bemerkungen

1. Durch Übergang zu $-x^*$ entstehen Varianten der Trennnungssätze mit $<$ anstelle von $>$.

2. Ist W ein abgeschlossener Unterraum, so gilt $\langle x^*, x\rangle \neq 0$ sowie
$$\langle x^*, w\rangle = 0 \qquad \text{für alle} \qquad w \in W$$
für jedes $x^* \in X^*$ aus dem Theorem.

   Beweis: Für jedes $w \in W$ impliziert die Unterraumeigenschaft von W die Abschätzung
$$\lambda \left\langle \mathrm{Re}\, x^*, w\right\rangle = \left\langle \mathrm{Re}\, x^*, \lambda\, w\right\rangle = \mathrm{Re}\left\langle x^*, \lambda\, w\right\rangle < \mathrm{Re}\,\langle x^*, x\rangle$$
für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und wir schließen zunächst, dass $\langle \mathrm{Re}\, x^*, w\rangle = 0$ gilt. Das Lemma über komplexe Vektorräume garantiert aber auch $\langle x^*, w\rangle = 0$. □

3. Als Folgerung können wir (Übungsaufgabe) konvexe Menge vollständig durch lineare Ungleichungen charakterisieren: Für jede konvexe und abgeschlossene Teilmenge W von x existiert zum Beispiel eine Familie $(x_i^*)_{i\in I}$ in X^* sowie eine Familie $(c_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}$, sodass
$$W := \left\{x \in X \,:\, \langle x_i^*, x\rangle \leq c_i\right\}.$$
Für ein konvexes Polyeder kommen wir dabei mit einer endlichen Familie aus, aber im Allgemeinen ist die Mächtigkeit der Indexmenge I unendlich.

Kapitel 3

Lineare Funktionale und Operatoren

Vorlesung 15 : 12. Dezember 2023, Teil 2

3.1 Schwache und schwache* Konvergenz

Bidualraum und Reflexivität

Vorbemerkung In diesem Abschnitt ist $(X,\, \|\cdot\|_X)$ ein beliebiger Banach-Raum und $(X^*,\, \|\cdot\|_{X^*})$ sein Dualraum (der auch Banach-Raum ist). Mit $(X^{**},\, \|\cdot\|_{X^{**}})$ bezeichnen wir den Bidualraum von X, d.h. es gilt

$$X^{**} = \big(X^*\big)^* = \mathsf{Lin}\big(X^*;\, \mathbb{K}\big) = \mathsf{Lin}\big(\mathsf{Lin}(X;\, \mathbb{K});\, \mathbb{K}\big)$$

sowie

$$\|x^{**}\|_{X^{**}} = \sup_{x^* \neq 0} \langle x^{**},\, x^* \rangle\,,$$

wobei rechts die Dualpaarung von $x^{**} \in X^{**}$ und $x^* \in X^*$ steht.

Klarstellung Wir benutzen $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ sowohl für die Dualpaarung von $x^* \in X^*$ mit $x \in X$ als auch für die Dualpaarung von $x^{**} \in X^{**}$ mit $x^* \in X^*$. Alternativ könnten wir zwei verschiedene Notationen verwenden, zum Beispiel $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_X$ bzw. $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_{X^*}$.

Lemma (X **als Unterraum von** X^{**}) Durch

$$\langle J_X x,\, x^* \rangle := \langle x^*,\, x \rangle$$

wird in natürlicher Weise eine lineare und isometrische Einbettung $J_X : X \to X^{**}$ definiert.

Beweis Für jedes $x \in X$ sowie alle $x^*,\, \tilde{x}^* \in X^*$ und $\lambda,\, \tilde{\lambda} \in \mathbb{K}$ gilt

$$\big\langle \lambda\, x^* + \tilde{\lambda}\, \tilde{x}^*,\, x \big\rangle = \lambda \big\langle x^*,\, x \big\rangle + \tilde{\lambda} \big\langle \tilde{x}^*,\, x \big\rangle$$

sowie

$$\big\langle x^*,\, x \big\rangle \leq \|x\|_X\, \|x^*\|_{X^*}$$

und wie schließen, dass $J_X\,x$ für jedes $x \in X$ in der Tat ein wohldefiniertes, lineares und stetiges Funktional auf X^* ist, wobei außerdem

$$\big\|J_X\,x\big\|_{X^{**}} = \sup_{x^*\neq 0} \frac{\big|\langle J_X\,x,\, x^*\rangle\big|}{\|x^*\|_{X^*}} = \sup_{x^*\neq 0} \frac{\big|\langle x^*,\, x\rangle\big|}{\|x^*\|_{X^*}} \le \|x\|_X$$

gilt. Außerdem impliziert die Formel

$$\begin{aligned}\big\langle J_X\big(\lambda\,x + \tilde\lambda\,\tilde x\big),\, x^*\big\rangle &= \big\langle x^*,\, \lambda\,x + \tilde\lambda\,\tilde x\big\rangle = \lambda\,\big\langle x^*,\, x\big\rangle + \tilde\lambda\,\big\langle x^*,\, \tilde x\big\rangle \\ &= \lambda\,\big\langle J_X\,x,\, x^*\big\rangle + \tilde\lambda\,\big\langle J_X\,\tilde x,\, x^*\big\rangle = \big\langle \lambda\,J_X\,x + \tilde\lambda\,J_X\,\tilde x,\, x^*\big\rangle\,,\end{aligned}$$

dass J_X den Raum X linear und stetig nach X^{**} abbildet. Für jedes $x \in X$ existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein Funktional $x^* \in X^*$ mit

$$\langle x^*,\, x\rangle = \|x\|_X \qquad \|x^*\|_{X*} = 1$$

und mit diesem x^* (das von x abhängt) erhalten wir

$$\|J_X\,x\|_{X^{**}} \ge \big\langle J_X\,x,\, x^*\big\rangle = \langle x^*,\, x\rangle = \|x\|_X\ .$$

Es folgt $\|J_X\,x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$ und wir haben gezeigt, dass J_X wirklich isometrisch ist. □

Definition Wir nennen X reflexiv, falls die Abbildung J_X surjektiv ist.

Bemerkungen

1. J_X wird auch die kanonische Einbettung von X in X^{**} genannt.

2. Wenn X reflexiv ist, so sind X und X^{**} isometrisch isomorph zueinander. Die Umkehrung ist jedoch im Allgemeinen nicht richtig, denn es kann passieren, dass J_X zwar nicht surjektiv ist, aber dass ganz anders gebaute Isomorphismen existieren.

3. Die Isometrie-Eigenschaft von J_X impliziert auch im nicht-reflexiven Fall, dass das Bild von X unter J_X ein abgeschlossener Unterraum von X^{**} ist.

4. Sind X und $\tilde X$ isometrisch isomorph zueinander, so ist X genau dann reflexiv, wenn $\tilde X$ die Eigenschaft besitzt (Übungsaufgabe).

5. Mit $X = \mathbb{K}^d$ gilt $X^* \cong \mathbb{K}^d$ und wir können — siehe die Diskussion weiter oben — in natürlicher Weise jedes $x \in X$ bzw. $x^* \in X^*$ als Spaltenvektor bzw. Zeilenvektor interpretieren, wobei

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_d^* \end{pmatrix},\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{d} x_j^*\,x_j\,.$$

   Umgekehrt kann aber jedes lineare und stetige Funktional auf dem Raum aller Zeilenvektoren durch einen entsprechenden Spaltenvektor realisiert werden und in diesem Sinne gilt $X^{**} \cong \mathbb{R}^d$. Insbesondere ist $\mathbb{K}^d$ für jedes $d \in \mathbb{N}$ reflexiv.

6. Ist X ein endlich-dimensionaler Raum, so implizieren die Resultate aus der *Linearen Algebra*, dass die Räume X^* und X^{**} auch jeweils die Dimension $d = \dim(X)$ besitzen, d.h es gilt

$$X \cong X^* \cong X^{**}$$

im Sinne eines Vektorraum-Isomorphismus. Es gibt allerdings keine kanonische Isomorphie zwischen X und X^* , d.h. ein entsprechender Isomorphimus wird mittels einer Basis in X und/oder einer Basis in X^* konstruiert und hängt von der Wahl dieser Basis ab.[1] Das Lemma besagt im endlich-dimensionalen Fall, dass die Isomorphie zwischen X und X^{**} jedoch kanonisch ist, d.h. ohne jeden Bezug auf eine Basis etabliert werden kann.

7. Der Folgenraum $\ell^p\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)$ ist für jedes p mit $1 < p < \infty$ reflexiv.

<u>*Beweis*</u>: Wir haben weiter oben die Existenz zweier isometrischer Isomorphismen

$$E_p : \ell^{p'} \to \big(\ell^p\big)^*, \qquad E_{p'} : \ell^p \to \big(\ell^{p'}\big)^*$$

bewiesen, wobei

$$\big\langle E_p\, y,\, x\big\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j\, y_j = \big\langle E_{p'}\, x,\, y\big\rangle$$

für jedes $x \in \ell^p$ und alle $y \in \ell^{p'}$ erfüllt ist. Für ein beliebig fixiertes $x^{**} \in \big(\ell^p\big)^{**}$ wird durch

$$y \in \ell^{p'} \quad \rightsquigarrow \quad \big\langle x^{**},\, E_p\, y\big\rangle$$

ein lineares und stetiges Funktional auf $\ell^{p'}$ definiert, dass als $E_{p'}\, x$ für ein $x \in \ell^p$ dargestellt werden kann. Insbesondere gilt

$$\big\langle x^{**},\, E_p\, y\big\rangle = \big\langle E_{p'}\, x,\, y\big\rangle = \big\langle E_p\, y,\, x\big\rangle$$

für alle $y \in \ell^{p'}$ und damit auch

$$\big\langle x^{**},\, x^*\big\rangle = \big\langle x^*,\, x\big\rangle$$

für alle $x^* \in \big(\ell^p\big)^*$. Das meint aber gerade $x^{**} = J_X\, x$ und wir schließen, dass J_X wirklich surjektiv ist. □

8. Wegen

$$\ell_0^\infty\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)^* \cong \ell^1\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)\,, \qquad \ell^1\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)^* \cong \ell^\infty\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)$$

ist $\ell_0^\infty\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)$ nicht reflexiv. Wir werden in den Hausaufgaben außerdem sehen, dass die isometrische Einbettung von $\ell^1\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)$ nach $\ell^\infty\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)^*$ nicht surjetiv ist, dass heißt $\ell^1\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)$ und $\ell^\infty\big(\mathbb{Z};\ \mathbb{K}\big)$ sind auch nicht reflexiv.

[1] Zu jeder Basis $e_1,\, \ldots,\, e_d$ in X existiert genau eine duale Basis $e_1^*,\, \ldots,\, e_d^*$ in X^* mit

$$\langle e_i^*,\, e_j\rangle = \delta_{ij}\,,$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist. Für die biduale Basis gilt dabei immer $e_j^{**} = e_j$, wobei diese universelle Formel als eine Manifestation des Lemmas betrachtet werden kann.

Lemma (**Reflexivität und Unterräume**) Ist X reflexiv, so ist auch jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.

Beweis Sei W ein abgeschlossener Unterraum von X und sei $w^{**} \in W^{**}$ beliebig fixiert.[2]

Teil 1: Die Zuordnung[3]

$$x^* \in X^* \quad \rightsquigarrow \quad \big\langle w^{**},\, x^*|_W \big\rangle \in \mathbb{K}$$

liefert ein lineares stetiges Funktional auf X^* und kann nach Voraussetzung als $J_X x$ dargestellt werden. Dabei ist $x \in X$ eindeutig durch w^{**} festgelegt und die Hilfsformel

$$\big\langle w^{**},\, x^*|_W \big\rangle = \big\langle J_X\, x,\, x^* \big\rangle = \big\langle x^*,\, x \big\rangle$$

gilt nach Konstruktion für alle $x^* \in X^*$. Wir schließen, dass x zu W gehört, denn andernfalls gäbe es nach der zweiten Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach ein Funktional $x^* \in X^*$ mit

$$\big\langle x^*,\, x \big\rangle \neq 0\,, \qquad \big\langle x^*,\, w \big\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in W$$

und wir würden wegen $x^*|_W = 0$ einen Widerspruch zur Hilfsformel erhalten.

Teil 2: Wir bezeichnen das im ersten Teil identifizierte Element x aus W von nun an mit w und fixieren $w^* \in W^*$ beliebig. Nach der speziellen Version des Satzes von Hahn-Banach können wir $x^* \in X^*$ als Fortsetzung von w^* wählen und bemerken, dass sich

$$\big\langle w^{**},\, w^* \big\rangle = \big\langle w^{**},\, x^*|_W \big\rangle = \big\langle x^*|_W,\, w \big\rangle = \big\langle w^*,\, w \big\rangle\,.$$

unmittelbar aus der Hilfsformel ergibt. Insbesondere haben wir damit gezeigt, dass $w^{**} = J_W\, w$ gilt. □

Lemma (**Reflexivität des Dualraumes**) X ist genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.

Beweis *Hinrichtung*: Wir fixieren $x^{***} \in X^{***} := (X^{**})^*$ beliebig und bemerken, dass durch

$$\big\langle x^*,\, x \big\rangle := \big\langle x^{***},\, J_X\, x \big\rangle \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

ein lineares und stetiges Funktional $x^* \in X^*$ definiert wird. Für jedes $x^{**} \in X^{**}$ können wir $x \in X$ mit $x^{**} = J_X\, x$ wählen und berechnen

$$\big\langle x^{***},\, x^{**} \big\rangle = \big\langle x^{***},\, J_X\, x \big\rangle = \big\langle x^*,\, x \big\rangle = \big\langle J_X\, x,\, x^* \big\rangle = \big\langle x^{**},\, x^* \big\rangle\,.$$

Da x^{**} beliebig war, ergibt sich $x^{***} = J_{X^*}\, x^*$, und weil auch x^{***} beliebig war, haben wir insgesamt die Surjektivität von J_{X^*} gezeigt.

Rückrichtung: Ist X^* reflexiv, so folgt aus dem soeben Bewiesenen, dass auch X^{**} reflexiv ist. Nach dem vorherigen Lemma ist auch jeder abgeschlossene Unterraum von X^{**} reflexiv und damit auch das Bild von X unter J_X. Dieser Raum ist aber isometrisch isomorph zu X und X ist daher reflexiv. □

[2]Wir statten W natürlich mit der Norm von X aus und erinnern uns, dass $(W, \|\cdot\|_X)$ wegen der Abgeschlossenheit von W selbst ein Banach-Raum ist.

[3]Mit $x^*|_W$ bezeichnen wir wie üblich die Einschränkung des Funktionals x^* auf W und dies vermittelt eine lineare sowie stetige Abbildung von X^* nach W^*, wobei $\|x^*|_W\|_{W^*} \leq \|x^*\|_{X^*}$ gilt.

Vorlesung 16 : 14. Dezember 2023

Definition der Konvergenzen

Definition Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert schwach gegen $x_\infty \in X$, falls

$$\left\langle x^*, x_n \right\rangle \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \left\langle x^*, x_\infty \right\rangle$$

für alle $x \in X$ im Sinne konvergenter Zahlenfolgen erfüllt ist. Eine Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* konvergiert schwach* gegen $x_\infty^* \in X$, falls

$$\left\langle x_n^*, x \right\rangle \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \left\langle x_\infty^*, x \right\rangle$$

für alle $x \in X$ gilt.

Bemerkungen

1. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, schwache bzw. schwache* Konvergenz zu notieren. In der Literatur finden sich oftmals die Symbole

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \qquad \text{bzw.} \qquad x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x_\infty^*\,,$$

aber wir schreiben meist

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \ \text{schwach} \qquad \text{bzw.} \qquad x_n^* \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty^* \ \text{schwach*}$$

oder $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ (schwach) bzw. $x_\infty^* = \lim_{n\to\infty} x_n^*$ (schwach*).

2. Die Normkonvergenz in X wird auch als starke Konvergenz in X bezeichnet. Die Normkonvergenz in X^* ist dementsprechend die starke Konvergenz in X^* und **nicht** etwa die starke* Konvergenz.

3. Konvergiert x_n für $n \to \infty$ im starken Sinne gegen x_∞, so gilt

$$\left|\langle x^*, x_n - x_\infty\rangle\right| \le \|x^*\|_{X^*} \|x_n - x_\infty\|_X \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

für alle $x^* \in X^*$ und wir schließen, dass dann auch die entsprechende schwache Konvergenz erfüllt ist. Analog folgt mit

$$\left|\langle x_n^* - x_\infty^*, x\rangle\right| \le \|x_n^* - x_\infty^*\|_{X^*} \|x\|_X \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,,$$

dass die starke Konvergenz in X^* die schwach*-Konvergenz nach sich zieht.

Achtung: Die jeweilige Umkehrung ist im Allgemeinen falsch, dass heißt die schwache bzw. die schwache* Konvergenz ist in der Tat *schwächer* als die starke Konvergenz in X bzw. X^*.

4. Schwache bzw. schwache* Grenzwerte sind eindeutig, denn aus

$$\left\langle x^*, x_\infty - \tilde{x}_\infty \right\rangle = 0 \qquad \text{für alle} \qquad x^* \in X^*$$

bzw.

$$\left\langle x_\infty^* - \tilde{x}_\infty^*, x \right\rangle = 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

folgt $x_\infty = \tilde{x}_\infty$ bzw. $x_\infty^* = \tilde{x}_\infty^*$ aus dem Satz von Hahn-Banach bzw. aus der Definition von X^*.

5. Die Implikation

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \text{ schwach in } X \qquad \Rightarrow \qquad L\,x_n \xrightarrow{n\to\infty} L\,x_\infty \text{ schwach in } Y$$

gilt für jeden Operator $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$. Wir werden weiter unten diskutieren, ob es analoge Aussagen für die schwache* Konvergenz gibt.

Beweis: Für jedes $y^* \in Y^*$ wird durch

$$\langle x^*,\, x\rangle := \langle y^*,\, L\,x\rangle$$

in eindeutiger Weise ein $x^* \in X^*$ definiert (dass wir weiter unten als L^*y^* bezeichnen werden). Nach Voraussetzung gilt

$$\langle y^*,\, L\,x_n\rangle = \langle x^*,\, x_n\rangle \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \langle x^*,\, x_\infty\rangle = \langle y^*,\, L\,x_\infty\rangle$$

und die Behauptung folgt, da y^* beliebig war. □

6. Sowohl die schwache als auch die schwache* Konvergenz können topologisiert werden, d.h. es existiert eine entsprechende schwache bzw. schwache* Topologie auf X bzw. X^*. Siehe die Literatur für die Details, etwa [Alt, Kapitel 6] oder [Wer, Kapitel 8].

7. Die schwache Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X meint gerade, dass die Folge $(J_X\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach* im Raum X^{**} konvergiert.

8. Im Dualraum X^* gibt es insgesamt drei unterschiedliche Konvergenzbegriffe.

$$\begin{array}{lll}
\text{starke Konvergenz in } X^*: & \|x_n^* - x_\infty^*\|_{X^*} \xrightarrow{n\to\infty} 0 & \\
\text{schwache* Konvergenz in } X^*: & \langle x_n^* - x_\infty^*,\, x\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0 & \text{für alle } x \in X \\
\text{schwache Konvergenz in } X^*: & \langle x^{**},\, x_n^* - x_\infty^*\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0 & \text{für alle } x^{**} \in X^{**}
\end{array}$$

Ist X reflexiv, so stimmen die beiden letzten überein, andernfalls jedoch nicht.[4]

prototypische Beispiele in Funktionenräumen Wir betrachten den Vektorraum

$$X = \big\{x \in \mathsf{C}(\mathbb{R};\,\mathbb{R}) \;:\; \|x\|_X < \infty\big\}$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|x\|_X := \|x\|_1 + \|x\|_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \big|x(t)\big|\,\mathrm{d}t \;+\; \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|x(t)\big|\,.$$

Mithilfe der Theorie Riemann-integrierbarer Funktionen können wir zeigen, dass $(X,\,\|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum ist.[5] Wir betrachten auch den Funktionenraum

$$Y = \big\{y \in \mathsf{C}(\mathbb{R};\,\mathbb{R}) \;:\; \|x\|_Y < \infty\big\} = \mathsf{BC}(\mathbb{R};\,\mathbb{R})$$

[4] Im nicht-reflexiven Fall ist die schwache Konvergenz in X^* stärker als die schwache* Konvergenz, da X via J_X als echter Unterraum von X^{**} betrachtet werden kann.

[5] Der Raum X ist ein etwas akademisches Beispiel. Wir werden weiter unten besser verstehen, warum Funktionenräume in aller Regel nicht durch Riemann-Integrale, sondern mittels der deutlich robusteren Lebesgue-Integrale definiert werden. Da hier aber jedes $x \in X$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist, unterscheiden sich beide Integrationsbegriffe nicht.

mit der üblichen Supremumsnorm

$$\|y\|_Y := \|y\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|y(t)\big|$$

und bemerken, dass durch

$$\big\langle E\,y,\, x\big\rangle := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t$$

in natürlicher Weise eine Einbettung $E : Y \to X^*$ gegeben ist, wobei das Integral auf der rechten Seite immer im uneigentlichen Riemannschen Sinne wohldefiniert ist und aufgrund der Hölder-Ungleichung einen endlichen Wert annimmt.

Die nachfolgende Tabelle liefert Beispiele für Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, sodass die entsprechende Folge $(E\,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ im schwachen*, aber nicht im starken Sinn gegen ein Grenzfunktional $x^*_\infty \in X^*$ konvergiert. Insbesondere gilt

$$\langle E\,y_n,\, x\rangle \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \langle x^*_\infty,\, x\rangle$$

für alle $x \in X$, aber auch

$$\|E\,y_n - x^*_\infty\|_{X^*} \quad \xrightarrow{n\not\to\infty} \quad 0\,.$$

In den Beispielen bezeichnet ϱ immer eine feste, schnell abklingende Funktion mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(t)\,\mathrm{d}t = 1$, zum Beispiel die Glockenfunktion mit

$$\varrho(t) = \pi^{-1/2}\, \exp\big(-t^2\big)$$

und ψ steht für eine stetig differenzierbare und L-periodische Funktion, wobei

$$\eta := L^{-1} \int\limits_0^L \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

der Integralmittelwert von ψ ist.

Szenario	*Formel für $y_n(t)$*	*Formel für $\langle x^*_\infty,\, x\rangle$*	*schwacher* Limes x^*_∞*
Oszillation	$\psi(n\,t)$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta\, x(t)\,\mathrm{d}t$	konstante Funktion
Lokalisation	$n\,\varrho(n\,t)$	$x(0)$	Dirac-Distribution
Delokalisation	$n^{-1}\varrho(n^{-1}\,t)$	0	Nullfunktional
Transport	$\varrho(t-n)$	0	Nullfunktional

Tabelle Vier Beispiele für durch Funktionen $y_n \in Y$ erzeugte Folgen von Funktionalen $(E\,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X^*, die schwach*, aber nicht stark konvergieren. Siehe auch die nachfolgende Abbildung.

Bemerkungen

1. Jedes der vier Szenarien gibt es nicht nur in dem konkreten Raum X^*, sondern auch in den Dualräumen vieler anderer Funktionenräume. Außerdem können ganz ähnliche Effekte bei der schwachen Konvergenz in Funktionenräumen beobachtet werden, wobei wir dies weiter unten bei den *Lebesgue*- und *Sobolev*-Räumen genauer diskutieren.

2. Die vier prototypischen Effekte können sich natürlich überlagern. Beispiele sind die Funktionenfolge mit
$$y_n(t) := \varrho(t+n)\psi(n\,t)\,,$$
bei der immer höher werdende Oszillationen nach $+\infty$ transportiert werden, sowie die Formel
$$y_n(t) := \varrho(t-n) + \varrho(t+n)\,,$$
bei der sowohl nach $-\infty$ als auch $+\infty$ transportiert wird.

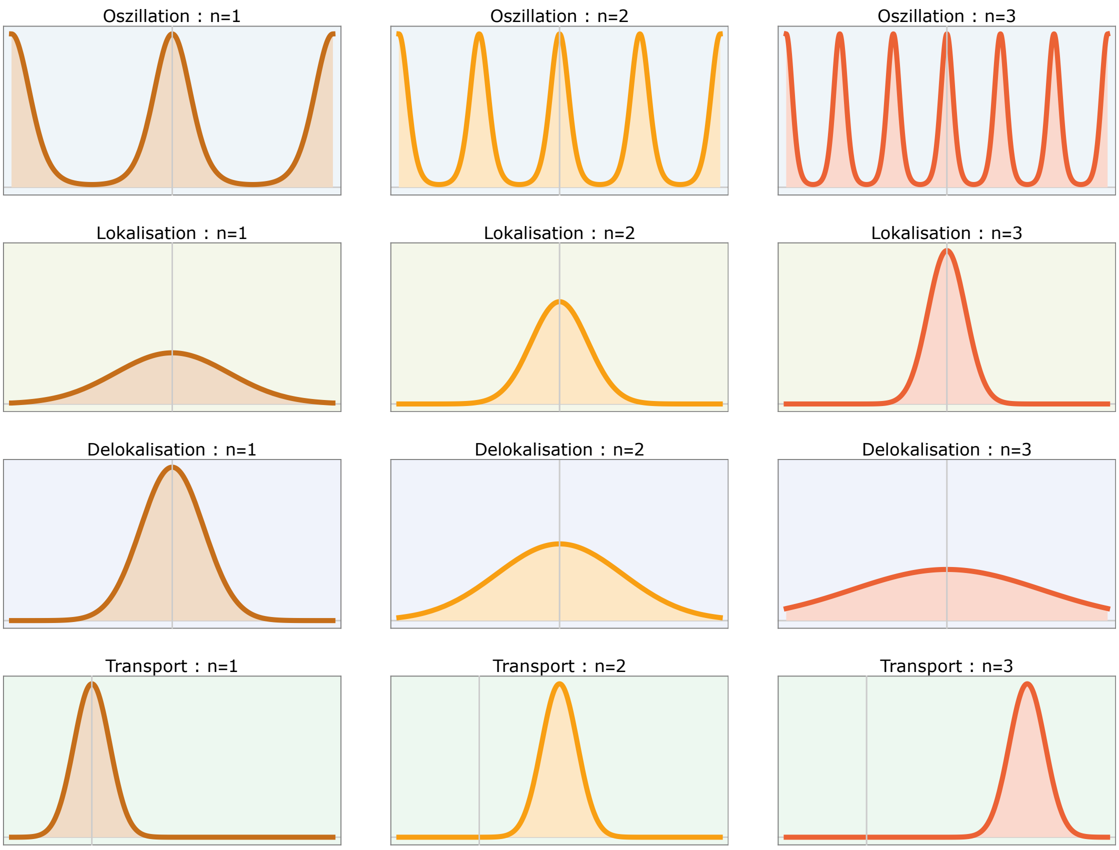


Abbildung Schematische Darstellung der Funktionen y_n für die vier prototypischen Beispiele aus der vorherigen Tabelle.

Lemma **(schwache Unterhalbstetigkeit der Norm)** Jede schwach konvergente bzw. schwach* konvergente Folge in X bzw. X^* ist beschränkt und es gilt
$$\|x_\infty\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X \qquad \text{bzw.} \qquad \|x^*_\infty\|_{X^*} \le \liminf_{n\to\infty} \|x^*_n\|_{X^*}$$
mit den Notationen aus der obigen Definition.

Beweis <u>*Teil 1*</u>: Konvergiert x_n^* für $n \to \infty$ schwach* gegen x_∞^*, so gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\langle x_n^*,\, x\rangle\right| < \infty$$

für alle $x \in X$ (konvergente Zahlenfolgen sind beschränkt) und der Satz von Banach-Steinhaus[6] garantiert via

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|x_n^*\right\|_{X^*} < \infty$$

die Beschränktheit der Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ im Banach-Raum $(X^*,\, \|\cdot\|_{X^*})$. Außerdem gilt

$$\left|\langle x_\infty^*,\, x\rangle\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\langle x_n^*,\, x\rangle\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|_{X^*}$$

für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ und nach Supremumsbildung erhalten wir die obere Abschätzung für $\|x_\infty^*\|_{X^*}$.

<u>*Teil 2*</u>: Konvergiert x_n für $n \to \infty$ schwach gegen x_∞, so konvergiert $J_X\, x_n$ im schwach* Sinne des Raumes X^{**} gegen $J_X\, x_\infty$ und der erste Beweisteil garantiert zum einen, dass die Folge $(J_X\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in X^{**} ist, und zum anderen die Abschätzung

$$\|J_X\, x_\infty\|_{X^{**}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|J_X\, x_\infty\|_{X^{**}}\ .$$

Mit der Isometrie-Eigenschaft von J_X ergeben sich die analogen Aussagen in X. □

schwache* Konvergenz in separablen Räumen

Definition $(X,\, \|\cdot\|_X)$ heißt separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Bemerkungen

1. Der Raum $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ ist separabel, da $\mathbb{Q}^d$ bzw. $\mathbb{Q}^d + \mathtt{i}\, \mathbb{Q}^d$ abzählbar ist und dicht liegt.

2. Jeder endlich-dimensionale Raum X ist isomorph zu $\mathbb{K}^{\dim X}$ und daher separabel.

3. Wir können die Separabilität auch wie folgt charakterisieren: Es existiert eine Teilmenge $\{y_1,\, y_2,\, \ldots\}$ von X, so dass für jedes $x \in X$ eine (in aller Regel nicht-monotone) Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass $x = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ im Sinne der starken Konvergenz in X gilt.

4. Wenn die Menge $\{y_1,\, y_2\,, \ldots\}$ dicht in X liegt, so ist

$$Y := \operatorname{span}\{y_1,\, y_2\,, \ldots\}$$

ein dichter Unterraum von X, der aus allen *endlichen* Linearkombinationen der y_k besteht.[7]

[6] Hier ist es wichtig, dass $(X,\, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum ist.

[7] Der Vektorraum Y ist im Fall von $\dim X = \infty$ aber nicht abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|_X$ und $(Y,\, \|\cdot\|_X)$ ist daher kein Banach-Raum. Beachte auch, dass Y nicht abzählbar, sondern überabzählbar viele Elemente enthält.

5. Ist $\{y_1,\, y_2\, \dots\}$ eine abzählbare Teilmenge von X (dicht oder nicht), so ist

$$\overline{Y} := \operatorname{cls}\big(\operatorname{span}\{y_1,\, y_2\,, \dots\}\big)$$

ein abgeschlossener und separabler Unterraum von X.

<u>*Beweis*</u>: Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist die Menge

$$\widetilde{Y} := \left\{\sum_{k=1}^{n} \mu_k\, y_k \;:\; \mu_k \in \mathbb{Q}\right\}$$

eine abzählbare Teilmenge von $Y \subseteq \overline{Y}$. Sie liegt außerdem dicht in $\overline{Y}$, denn für beliebig gegebene $x \in \overline{Y}$ und $\varepsilon > 0$ können wir nach Konstruktion und der äquivalenten Charakterisierung des Abschlusses ein $n \in \mathbb{N}$ sowie Zahlen $\lambda_1,\, \dots\, \lambda_n \in \mathbb{R}$ wählen, sodass

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, y_l \right\|_X \leq \tfrac{1}{2}\,\varepsilon$$

Anschließend wählen wir für jedes $k \in \{1,\, \dots,\, n\}$ ein $\mu_k \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\mu_k - \lambda_k| \leq \frac{\varepsilon}{2\, n\, \|y_k\|_X}$$

und erhalten

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, y_l \right\|_X \leq \tfrac{1}{2}\,\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \|(\lambda_k - \mu)\, y_k\|_X \leq \varepsilon\,.$$

Da x und ε beliebig waren, haben wir gezeigt, dass $\widetilde{Y}$ dicht in $\overline{Y}$ liegt. Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ argumentieren wir analog mit $\lambda_k \in \mathbb{C}$ und $\mu_k = \mathbb{Q} + \mathtt{i}\,\mathbb{Q}$.

Beispiele und Gegenbeispiele

1. Der *Approximationssatz von Weierstraß* garantiert, dass $\mathsf{BC}(I;\, \mathbb{K})$ separabel ist, wobei zum Beispiel die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten als abzählbare dichte Teilmenge gewählt werden kann.

2. Der Raum $\ell^p(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ ist für $1 \leq p < \infty$ separabel, wobei

$$\left\{\sum_{j=-n}^{+n} \alpha_j\, e_j \;:\; n \in \mathbb{N},\;\; \alpha_1,\, \dots,\, \alpha_n \in \mathbb{Q}\right\}$$

eine naheliegende Wahl für eine abzählbare dichte Teilmenge ist (e_j ist der kartesische Einheitsvektor im Folgenraum). Analog können wir auch zeigen, dass $\ell_0^\infty(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ separabel ist.

3. Der Raum $X = \ell^\infty(\mathbb{Z};\, \mathbb{K})$ ist nicht separabel.

<u>*Beweis*</u>: Für jede Teilmenge $J \subseteq \mathbb{Z}$ definieren wir $e_J \in X$ durch

$$e_{J,\,j} := \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{falls } j \in J, \\ 0 & \text{sonst,} \end{array}\right.$$

wobei $\|e_J - e_{\tilde{J}}\|_X \geq 1$ für alle J, $\tilde{J} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $J \neq \tilde{J}$ gilt. Insbesondere ist die offene Menge

$$O := \bigcup_{J \subseteq \mathbb{Z}} B_{1/2}(e_J)$$

die Vereinigung überabzählbar vieler[8] offener und paarweise disjunkter Kugeln aus X. Wenn die abzählbare Menge $\{y_1, y_2, \ldots\}$ dicht in X liegen würde, so müsste jeder dieser Kugeln mindestens ein Element y_j enthalten, aber dies ist offensichtlich ein Widerspruch. □

[8]Beachte, dass die Potenzmenge von $\mathbb{Z}$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ besitzt.

Vorlesung 17 : 19. Dezember 2023

Theorem (**Kriterium für schwache* Folgenkompaktheit**) Ist X separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in X^* eine schwach* konvergente Teilfolge.

Beweis *Wahl einer Teilfolge*: Wir betrachten eine abzählbare dichte Teilmenge $\{y_1, y_2, \ldots\}$ in X sowie eine beschränkte Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^*, wobei wir o.B.d.A. die Normierung

$$\|x_n^*\|_{X^*} \le 1 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

voraussetzen dürfen. Außerdem bemerken wir, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zahlenfolge $\big(\langle x_n^*,\, y_k\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ beschränkt ist und damit Häufungspunkte besitzt. Wir definieren nun induktiv eine Folge von Teilfolgen dieser Folge: Als Induktionsanfang $k = 0$ setzen wir $x_{0,n}^* := x_n^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Schritt $k \rightsquigarrow k+1$ wählen wir $\big(x_{k+1,n}^*\big)_{n\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $\big(x_{k,n}^*\big)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\big\langle x_{k,n}^*,\, y_k\big\rangle \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \xi_k$$

für ein geeignetes $\xi_k \in \mathbb{K}$ gilt, wobei die obige Normierungsbedingung die Ungleichung $|\xi_k| \le \|y_k\|_X$ impliziert. Unsere Konstruktion stellt für die *Diagonalfolge* (siehe das Bild) sicher, dass

$$\big\langle x_{n,n}^*,\, y_k\big\rangle \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \xi_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Identifikation des schwachen Häufungspunktes*: Durch

$$\big\langle y^*,\, \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_l y_l\big\rangle := \lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_l \xi_l$$

wird ein lineares Funktional $y^* : Y \to \mathbb{K}$ auf dem Raum

$$Y := \operatorname{span}\big\{y_1,\, y_2\,, \ldots\big\}$$

definiert. Unsere Konstruktion liefert

$$\big\langle y^*,\, y\big\rangle = \lim_{k\to\infty} \big\langle x_{n,n}^*,\, y\big\rangle$$

und damit auch

$$\big|\langle y^*,\, y\rangle\big| = \lim_{k\to\infty} \big|\langle x_{n,n}^*,\, y\rangle\big| \le \limsup_{n\to\infty} \big\|x_{n,n}^*\big\|_{X^*} \big\|y\big\|_X \le \big\|y\big\|_X$$

für alle $y \in Y$, d.h. es gilt $y^* \in \mathsf{Lin}\big(Y; \mathbb{K}\big)$ mit $\|y_*\|_{Y;\mathbb{K}} \le 1$. Nach der speziellen Version des Satzes von Hahn-Banach können wir y^* zu einem Funktional $x^* \in X^*$ mit $\|x^*\|_{X^*} \le 1$ fortsetzen, wobei $\langle x^*,\, y\rangle = \langle y^*,\, y\rangle$ für alle $y \in Y$ gilt.

schwache Konvergenz der Teilfolge*: Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Wir wählen $y \in Y$ mit

$$\big\|x - y\big\|_X \le \varepsilon$$

und erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$ unter Verwendung von

$$\big|\langle x^*_{n,\,n} - x^*,\, x - y\rangle\big| \le \|x^*_{n,\,n} - x^*\|_{X^*}\|x - y\|_X \le \big(\|x^*_{n,\,n}\|_{X^*} + \|x^*\|_{X^*}\big)\|x - y\|_X \le 2\,\varepsilon$$

die Abschätzung

$$\big|\langle x^*_{n,\,n} - x^*,\, x\rangle\big| \le \big|\langle x^*_{n,\,n} - x^*,\, x - y\rangle\big| + \big|\langle x^*_{n,\,n} - x^*,\, y\rangle\big| \le 2\,\varepsilon + \big|\langle x^*_{n,\,n},\, y\rangle - \langle y^*,\, y\rangle\big|\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \big|\langle x^*_{n,\,n} - x^*,\, x\rangle\big| \le 2\,\varepsilon$$

und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \big|\langle x^*_{n,\,n} - x^*,\, x\rangle\big| = 0\,.$$

Da auch $x \in X$ beliebig war, haben wir insgesamt gezeigt, dass $x^*_{n,\,n}$ für $n \to \infty$ im schwachen* Sinne gegen x^* konvergiert. $\square$

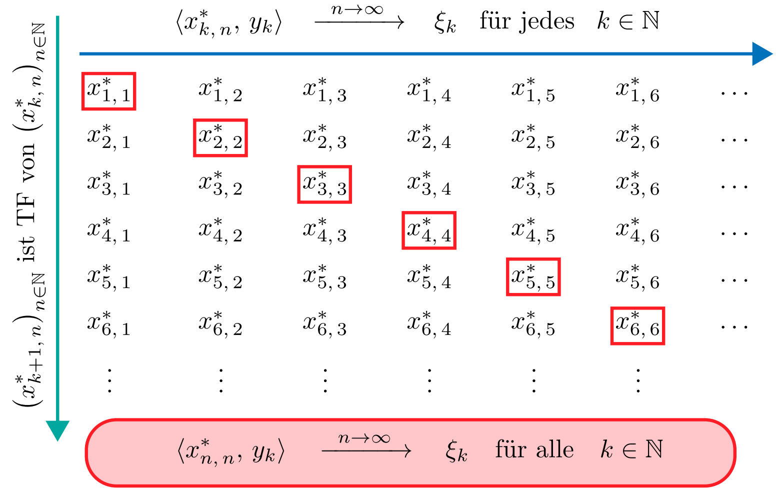


Abbildung Zur Konstruktion der Diagonalfolge im Beweis der schwachen* Folgenkompaktheit.

Lemma (**hinreichendes Kriterium für Separabilität**) Ist X^* separabel, so ist auch X separabel.

Beweis Wir fixieren eine abzählbare dichte Teilmenge $\{y^*_1,\, y^*_2,\, \ldots\}$ in X^*, wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in X$ mit[9]

$$\|y_n\|_X = 1\,, \qquad \langle y^*_n,\, y_n\rangle \ge \tfrac{1}{2}\,\|y^*_n\|_{X^*}\,,$$

und setzen

$$Y := \mathrm{cls}\Big(\mathrm{span}\big\{x_1,\, x_2,\, \ldots\big\}\Big)\,,$$

wobei der Abschluss bzgl. $\|\cdot\|_X$ gebildet wird. Insbesondere ist Y ein abgeschlossener Unterraum von X und wir wollen zeigen, dass $Y = X$ gilt. Sei dazu ein beliebiges

[9] Die Existenz von y_n folgt allein aus der Definition der dualen Norm in X_* und braucht nicht den Satz von Hahn-Banach.

Funktional $x^* \in X^*$, sodass $\langle x^*, y\rangle = 0$ für alle $y \in Y$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich dann via

$$\|y_n^* - x^*\|_{X^*} \geq \big|\langle x_n^* - y^*, y_n\rangle\big| = \big|\langle y_n^*, y_n\rangle\big| = \tfrac{1}{2}\,\|y_n^*\|_{X^*} \geq \tfrac{1}{2}\,\|x^*\|_{X^*} - \tfrac{1}{2}\,\|y_n^* - x_*\|_{X^*}$$

die Abschätzung

$$\|x^*\|_{X^*} \leq 3\,\|y_n^* - x^*\|_{X^*}$$

und der Limes $n \to \infty$ liefert $\|x^*\|_{X^*} = 0$. Wir haben insgesamt gezeigt, dass jedes Funktional, das auf Y verschwindet, auch auf X verschwindet. Dies impliziert $X = Y$, denn andernfalls — siehe die Bemerkungen zur zweiten Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach — gäbe es ein Funktional x^*, dass auf dem echten Unterraum Y, aber nicht auf ganz X verschwindet. □

Bemerkungen

1. Die Separabilität von X ist sehr wichtig für die schwache* Folgenkompaktheit im Dualraum X^*.

   Gegenbeispiel: Mit $X = \ell^\infty\big(\mathbb{Z}; \mathbb{K}\big)$ betrachten wir die durch

   $$\langle x_n^*, x\rangle := x_n$$

   definierte Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^*, wobei $\|x_n^*\|_{X^*} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für eine beliebige, aber strikt monotone Indexfolge $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{m\to\infty} n_m = \infty$ definieren wir ein spezielles $x \in X$ durch

   $$x_j := \begin{cases} (-1)^m & \text{falls } j = n_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   und berechnen

   $$\big\langle x_{n_m}^*, x\big\rangle = (-1)^m\,.$$

   Insbesondere ist die Zahlenfolge $\big(\langle x_{n_m}^*, x\rangle\big)_{m\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent und insgesamt schließen wir, dass es keine schwach* konvergente Teilfolge von $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ geben kann.

2. Die Umkehrung des Lemmas ist falsch.

   Gegenbeispiel: Der Raum $X = \ell^1\big(\mathbb{Z}; \mathbb{K}\big)$ ist separabel (siehe die Hausaufgabe zur Basisdarstellung bzgl. der kartesischen Einheitsvektoren), aber $X^* \cong \ell^\infty\big(\mathbb{Z}; \mathbb{K}\big)$ ist nicht separabel.

   Ergänzung: $X = \ell_0^\infty\big(\mathbb{Z}; \mathbb{K}\big)$ ist separabel, denn $X^* \cong \ell^1\big(\mathbb{Z}; \mathbb{K}\big)$ ist separabel.

3. Das Lemma impliziert, dass ein reflexiver Raum genau dann separabel ist, wenn sein Dualraum separabel ist.

   Beweis: Ist X reflexiv und X^* separabel, so impliziert das Lemma unmittelbar die Separabilität von X. Ist jedoch X sowohl reflexiv als auch separabel, so ist auch X^{**} separabel und das Lemma garantiert, dass auch X^* separabel ist. □

4. Im endlich-dimensionalen Fall ist die Aussage des Theorems fast trivial, da jede beschränkte Folge schon eine Teilfolge besitzt, die stark bzgl. $\|\cdot\|_{X_*}$ konvergiert. Im unendlich-dimensionalen Fall gilt dieses starke Kompaktheitsargument jedoch nicht.

5. Aus diesem Theorem werden wir weiter unten auch Kriterien für die Existenz schwach konvergenter Teilfolgen ableiten, die sich als ausgesprochen nützlich erweisen werden.

6. Der *Satz von Alaoglu* garantiert für jeden Dualraum X^*, dass eine beschränkte Menge überdeckungskompakt bzgl. der schwachen* Topologie ist. Im separablem Fall impliziert dies auch die Folgenkompaktheit bzgl. der schwachen* Topologie.

Vorlesung 18 : 21. Dezember 2023

---

schwache Konvergenz in reflexiven Räumen

Theorem (**Kriterium für schwache Folgenkompaktheit**) Ist X reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis Für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ betrachten wir den abgeschlossenen Unterraum

$$Y := \operatorname{cls}\Big(\operatorname{span}\big\{x_1,\, x_2\; x_3,\, \dots\big\}\Big) \subseteq X$$

und bemerken, dass $(Y,\, \|\cdot\|_X)$ ein separabler und reflexiver Banach-Raum ist.[10] Insbesondere ist $(J_Y\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in Y^{**} und wir können nach dem Theorem über die schwache* Folgenkompaktheit eine strikt monotone Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie ein y^{**}_∞ wählen, sodass

$$\big\langle J_Y\,(x)_{n_k},\, y^*\big\rangle \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \big\langle y^{**}_\infty,\, y^*\big\rangle$$

für alle $y^* \in Y^*$ erfüllt ist. Wir wählen außerdem $x_\infty \in Y$ mit $y^{**}_\infty = J_Y\, x_\infty$ und erhalten mit der Definition der kanonischen Einbettung J_Y die Formel

$$\big\langle y^*,\, x_{n_k}\big\rangle \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \big\langle y^*,\, x_\infty\big\rangle\,.$$

Insbesondere konvergiert x_{n_k} für $k \to \infty$ gegen $x_\infty \in Y$ im Sinne der schwachen Konvergenz im Raum Y. Dies impliziert aber auch die schwache Konvergenz in X, da für jedes Funktional $x^* \in X^*$ seine Einschränkung $x^*|_Y$ in Y^* liegt und außerdem wegen $x_{n_k} \in Y$ trivialerweise $\big\langle x^*,\, x_{n_k}\big\rangle = \langle x^*|_Y,\, x_{n_k}\rangle$ gilt. □

Theorem (**Abgeschlossenheit konvexer Mengen unter Grenzwertbildung**) Eine konvexe Menge $W \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen unter der schwachen Konvergenz, wenn sie abgeschlossen unter der starken Konvergenz ist.

---

[10] In der Tat, die Vollständigkeit bzw. die Reflexivität von Y folgt aus der Abgeschlossenheit von Y (Übungsaufgabe bzw. das Lemma zur Reflexivität von Unterräumen) und die Separabilität ergibt sich aus den Bemerkungen zur Definition von Separabalität.

Beweis Hinrichtung: Sei W abgeschlossenen unter schwacher Konvergenz und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n \in W$, die für $n \to \infty$ stark gegen $x_\infty \in X$ konvergiert. Dann ist x_∞ auch der schwache Grenzwert der Folge und die Voraussetzung garantiert $x_\infty \in W$.

Rückrichtung: Ist W abgeschlossenen unter starker Konvergenz, so impliziert die äquivalente Charakterisierung von Abgeschlossenheit, dass W abgeschlossen ist (im Sinne der Definition, d.h. $X \setminus W$ ist offen in X). Wir betrachten nun eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in W$, die für $n \to \infty$ schwach gegen $x_\infty \in X$ konvergieren, und nehmen als Antithese an, dass x_∞ nicht in W liegt. Nach der zweiten Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach existieren ein Funktional $x^* \in X^*$ sowie ein $\eta \in \mathbb{K}$, sodass die Doppelungleichung

$$\mathrm{Re}\big(\langle x^*,\, x_\infty\rangle\big) > \eta > \mathrm{Re}\big(\langle x^*,\, w\rangle\big)$$

für alle $w \in W$ und damit auch für jedes mit $w = x_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Insbesondere kann die Zahlenfolge $\big(\langle x^*,\, x_n\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $\mathrm{Re}\big(\langle x^*,\, x_\infty\rangle\big)$ konvergieren, aber dies widerspricht der schwachen Konvergenz. □

Korollar (**starke Konvergenz endlicher Konvexkombinationen**) Ist $x_\infty \in X$ schwacher Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so existiert eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bauart

$$v_n = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,\,k}\, x_k$$

die stark in X gegen x_∞ konvergiert, wobei $m_n \in \mathbb{N}$ sowie

$$0 \le \lambda_{n,\,k} \le 1 \quad \text{für alle} \quad k \in \{1,\, \ldots,\, m_n\}\,, \qquad\qquad \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,\,k} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis Die Teilmenge

$$V := \mathrm{conv}\big\{x_1,\, x_2,\, \ldots\big\}$$

enthält alle endlichen Konvexkombinationen der Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und mit einfachen Argumenten zeigen wir, dass ihr Abschluss

$$W := \mathrm{cls}\,(V)$$

auch konvex ist (siehe die Hausaufgaben). Insbesondere ist W abgeschlossen unter starker Konvergenz und das vorherige Lemma garantiert, dass der schwache Grenzwert x_∞ auch in W liegt. Nach Konstruktion kann damit x_∞ durch eine Folge aus V im Sinne der Normkonvergenz approximiert werden. □

Bemerkungen

1. Das Korollar wird auch Lemma von Mazur genannt.
2. Der Beweis ist nicht konstruktiv, d.h. im Allgemeinen ist nicht klar, wie eine stark konvergente Folge von Konvexkombinationen konstruiert werden kann. In konkreten Beispielen ist das natürlich oft anders.

3. Für jede gegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es in aller Regel sehr viele mögliche Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Das Korollar besagt aber nicht, dass jede Folge von Konvexkombinationen stark konvergiert. Wir können aber leicht das folgende Resultat herleiten: Ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Konvexkombinationen der x_n, die stark gegen v_∞ konvergiert, so gilt $v_\infty = x_\infty$.

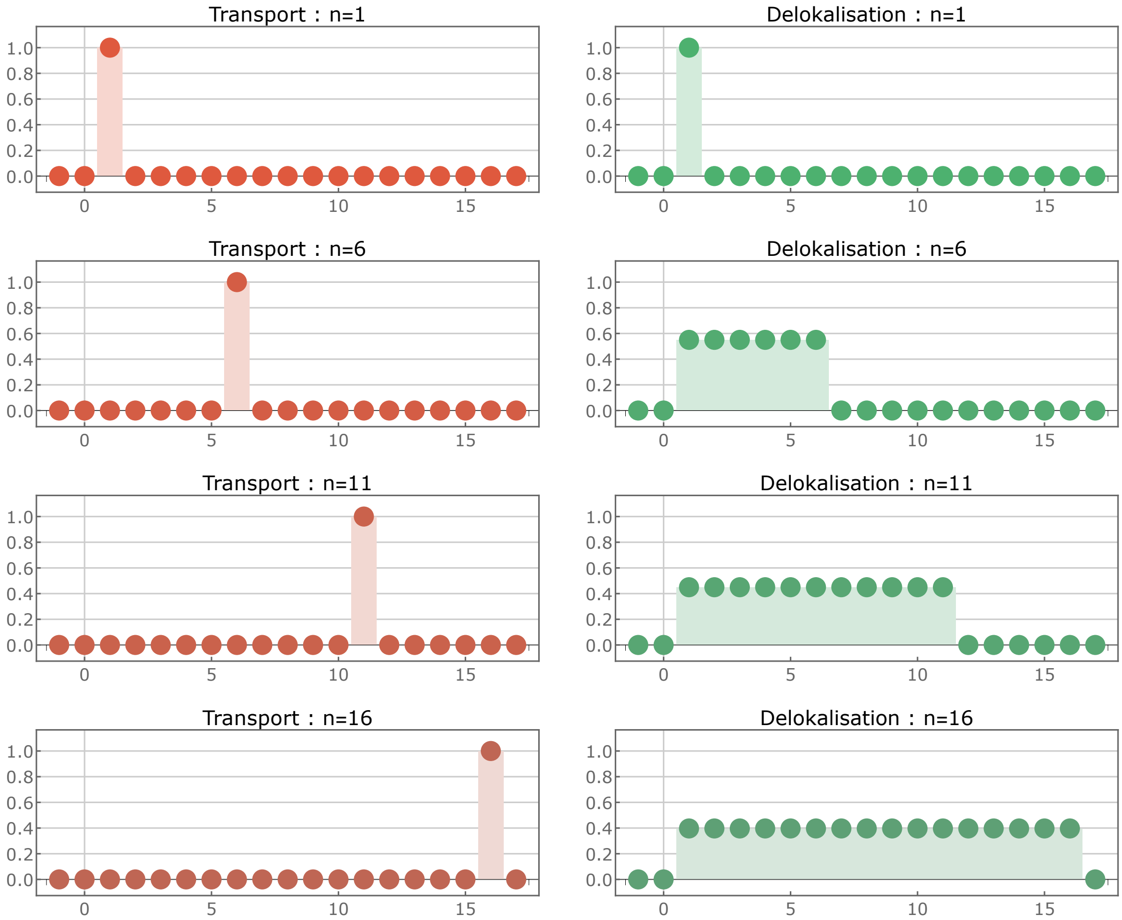


Abbildung Die beiden schwach (aber nicht stark) konvergenten Folgen aus dem ersten bzw. zweiten Beispiel in rot bzw. grün für $p = 3$. Beachte dass die p-Norm aller Folgenglieder nicht von n abhängt und den konstanten Wert 1 annimmt.

Beispiele

1. Im Folgenraum $X = \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{K})$ mit gegebenem Exponenten $1 < p < \infty$ betrachten wir die Folge der kartesischen Einheitsvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bemerken, dass

$$\langle E_p\, y,\, x\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} y_j\, e_{n,j} = y_n \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

für alle y im Raum $\ell^{p'}(\mathbb{Z};\mathbb{K})$ gilt, wobei dieser via des linearen Operators E_p isometrisch isomorph zu X^* ist. Insbesondere konvergiert e_n für $n \to \infty$ schwach gegen 0, aber wegen $\|e_n - 0\|_X = \|e_n\|_p = 1$ gilt diese Konvergenz nicht im starken Sinne. Für die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$v_n := n^{-1}\sum_{k=1}^{n} e_k \qquad \text{bzw.} \qquad v_{n,j} = \begin{cases} n^{-1} & \text{für } j \in \{1,\,\dots,\,n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt jedoch

$$\|v_n\|_X = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left|v_{n,j}\right|^p\right)^{1/p} = \left(n\, n^{-p}\right)^{1/p} = n^{1/p-1} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,,$$

d.h. v_n konvergiert für $n \to \infty$ stark gegen 0.

Bemerkung: Die Formel $\tilde{v}_n := \frac{1}{2}\, n^{-1} \sum_{k=1}^{2\,n} e_k$ liefert ein weiteres Beispiel für eine Folge von Konvexkombinationen der e_n, die stark gegen 0 konvergiert.

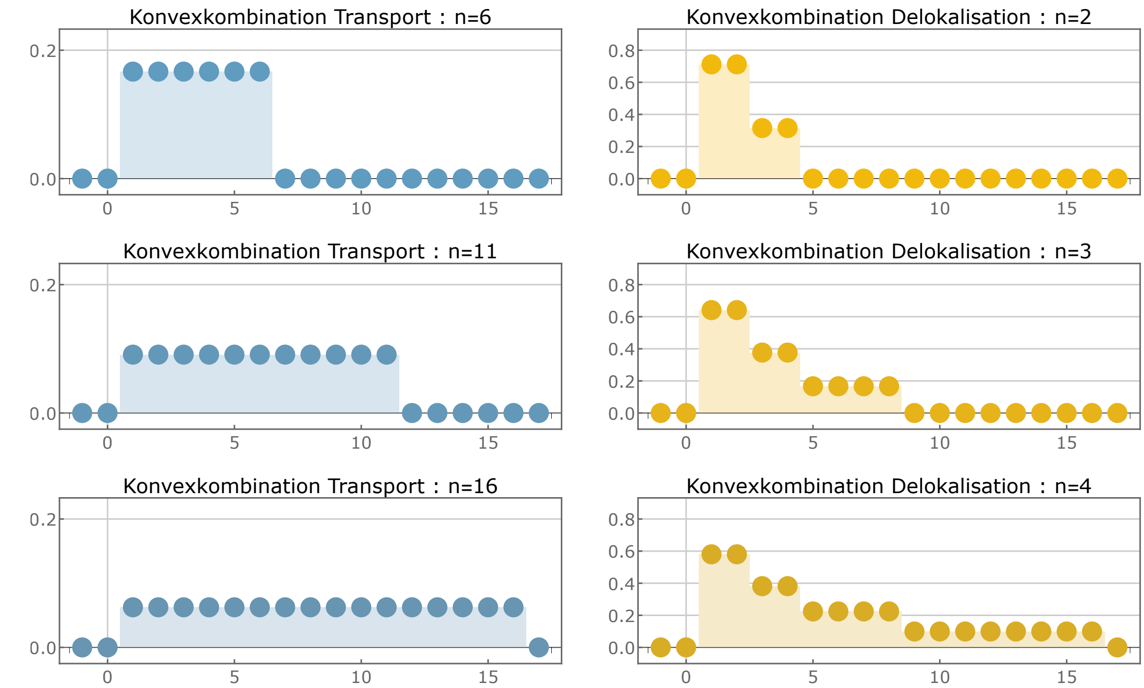


Abbildung Die stark konvergenten Konvexkombinationen der schwach konvergenten Folgen aus dem vorherigen Bild. Beachte, dass die blaue Höhe (n^{-1}) von der grünen ($n^{-1/p}$) abweicht und dass für die blaue und die gelbe Folge jeweils andere Glieder dargestellt sind.

2. Wir betrachten denselben Folgenraum, aber diesmal die Folge

$$x_n := n^{-1/p} \sum_{l=1}^{+n} e_l \qquad \text{bzw.} \qquad x_{n,j} = \begin{cases} n^{-1/p} & \text{für } j \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann konvergiert wieder x_n für $n \to \infty$ schwach, aber nicht stark gegen 0. Die Konvexkombinationen

$$v_1 = x_2\,,\; v_2 = \tfrac{1}{2}\left(x_2 + x_4\right),\; v_2 = \tfrac{1}{3}\left(x_2 + x_4 + x_8\right),\; \ldots\,,\; v_n := n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_{2^k}\,,\; \ldots$$

konvergieren aber stark gegen 0.

Beweis: Um die schwache Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen, fixieren wir $y \in \ell^{p'}(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig und wählen zunächst $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß mit

$$\|y - \tilde{y}\|_{p'} \leq \varepsilon\,, \qquad \tilde{y}_j := \begin{cases} y_j & \text{für } |j| \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und bemerken, dass

$$\langle E_p\,\tilde{y},\,x_n\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_j\,x_{n,j} = n^{-1/p}\sum_{j=1}^{m} y_j \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

gilt. In Kombination mit

$$\big|\langle E_p\,y - E_p\,\tilde{y},\,x_n\rangle\big| \le \|y-\tilde{y}\|_{p'}\,\|x_n\|_p \le \varepsilon$$

ergibt sich

$$0 \le \limsup_{n\to\infty}\big|\langle E_p\,y,\,x_n\rangle\big| \le \varepsilon$$

und da ε beliebig, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\langle E_p\,y,\,x_n\rangle = 0\,.$$

Da auch y beliebig war, haben wir insgesamt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty := 0$ im schwachen Sinne gezeigt. Da aber auch

$$\|x_n - x_\infty\|_X = \|x_n\|_X = \|x_n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(n^{-1/p}\right)^p\right)^{1/p} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, liegt keine starke Konvergenz vor, da andernfalls $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_\infty\| = 0$ gelten müsste. Für die Konvexkombination v_n berechnen wir

$$v_{n,j} = n^{-1}\begin{cases} 0 & \text{für } j \le 0,\\ \sum_{l=1}^{n} 2^{-l/p} & \text{für } j \in \big\{1,\,2\big\},\\ \sum_{l=2}^{n} 2^{-l/p} & \text{für } j \in \big\{2^1+1,\,\dots,\,2^2\big\},\\ \vdots & \\ \sum_{l=k}^{n} 2^{-l/p} & \text{für } j \in \big\{2^{k-1}+1,\,\dots,\,2^k\big\},\\ \vdots & \\ 2^{-n/p} & \text{für } j \in \big\{2^{n-1}+1,\,\dots,\,2^n\big\},\\ 0 & \text{für } j > 2^n, \end{cases}$$

wobei

$$\sum_{l=k}^{n} 2^{-l/p} \le \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l/p} \le 2^{-k/p}\sum_{i=0}^{\infty}\left(2^{-1/p}\right)^i \le 2^{-k/p}\frac{1}{1-2^{-1/p}} = C_p\,2^{-k/p}$$

für jedes $k \in \big\{1,\,\dots,\,n\big\}$ erfüllt ist, wobei die Konstante $0 < C_p < \infty$ nur vom Exponenten p abhängt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 \le \|v_n\|_p^p = \sum_{j=1}^{2^n} v_{n,j}^p &= v_{n,1}^p + v_{n,2}^p + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} v_{n,j}^p \\ &\le n^{-p}\,C_p^p\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n}\left(2^k - 2^{k-1}\right)2^{-k}\right) \\ &\le n^{-p}\,C_p^p\left(1 + \sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{2}\right) = C_p^p\,\frac{n+1}{n^p} \le 2\,C_p^p\,n^{1-p} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0 \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in der Tat stark gegen 0. □

Vorlesung 19 : 09. Januar 2024

3.2 duale Operatoren

Vorbemerkung In diesem Abschnitt sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Räume über $\mathbb{K}$.

Definition Für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X; Y)$ wird durch

$$\big\langle L^* y^*, x\big\rangle := \big\langle y^*, L\,x\big\rangle \qquad \text{für alle} \quad y^* \in Y^*,\ x \in X$$

der duale Operator $L^* \in \mathsf{Lin}(Y^*; X^*)$ definiert.

Bemerkungen

1. *Rechtfertigung*: Für jedes $y^* \in Y^*$ definiert die Zuordnung

   $$x \in X \quad \rightsquigarrow \quad \big\langle y^*, L\,x\big\rangle$$

   ein lineares Funktional auf X, dass wegen

   $$\big|\langle L^* y^*, x\rangle\big| = \big|\langle y^*, L\,x\rangle\big| \le \|y^*\|_{Y^*} \|L\,x\|_Y \le \|y^*\|_{Y^*} \|L\|_{X;Y} \|x\|_X$$

   auch stetig bzgl. x ist. Insbesondere ist $L^*\,y^*$ ein wohldefiniertes Element von X^*. Durch direkte Rechnungen verifizieren wir

   $$L^*\big(\mu\,y^* + \tilde{\mu}\,\tilde{y}^*\big) = \mu\,L^* y^* + \tilde{\mu}\,L^* \tilde{y}^*\,,$$

   für alle μ, $\tilde{\mu} \in \mathbb{K}$ und alle y^*, $\tilde{y}^* \in Y^*$, d.h. L^* bildet den Raum Y^* linear in den Raum X^* ab. Außerdem erhalten wir via

   $$\|L^* y^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X = 1} \big|\langle L^* y^*, x\rangle\big| \le \|L\|_{X;Y} \|y^*\|_{Y^*}$$

   die Stetigkeit von L^* und haben insgesamt gezeigt, dass L^* wirklich zum Raum $\mathsf{Lin}(Y^*; X^*)$ gehört. □

2. L^* wird oftmals auch adjungierter Operator von L genannt, wobei es dann Verwechslungen mit dem Hilbert-Adjungierten geben kann.

3. Im Fall von $Y = X$ gilt $(\mathrm{Id}_X)^* = \mathrm{Id}_{X^*}$, d.h. der duale Operator der Identität in X ist die Identität in X^*.

4. *Ausblick*: Der duale Operator L^* kann auch für lineare Operatoren L eingeführt werden, die nicht stetig und nur auf einer dichten Teilmenge von X definiert sind. In diesem Fall wird auch L^* nicht überall definiert und/oder nicht stetig sein, aber es wird sich immer um einen abgeschlossenen Operator handeln.

Beispiele

1. Wir betrachten die Punkte in $X = \mathbb{K}^n$ bzw. $Y = \mathbb{K}^m$ als n- bzw. $m-$dimensionale Spaltenvektoren, identifizieren die dualen Elemente aus X^* bzw. Y^* mit den entsprechenden Zeilenvektoren und schreiben die entsprechenden Dualpaarungen als Matrizenmultiplikation, d.h. es gilt

$$\langle x^*,\, x\rangle = \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j^*\, x_j$$

und analog $\langle y^*,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i^*\, y_i$. Jeder Operator $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$ kann via

$$L\, x = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m1} & \dots & L_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

in natürlicher Weise als *Links-Multiplikation* einer $\mathbb{K}$-wertigen $m{\times}n$-Matrix betrachtet werden und aus der Nebenrechnung

$$\langle y^*,\, L\, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} y_i^*\, \left(L\, x\right)_i = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \sum_{i=1}^{m} L_{ij}\, y_i^*$$

kann die Formel

$$\left(L^* y^*\right)_j = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\, y_i^*$$

für alle $i \in \{1,\, \dots,\, n\}$ abgelesen werden. Diese Gleichungen können auch als

$$L^* y^* = \begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_m^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m1} & \dots & L_{mn} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, d.h. der Operator L^* entspricht der *Rechts-Multiplikation* mit derselben Matrix.

<u>*Alternatives Setting*</u>: Wenn wir X^* bzw. Y^* mit X bzw. Y identifizieren, so schreiben wir x^* bzw. y^* ebenfalls als $n-$ bzw. $m-$dimensionalen Spaltenvektor und die entsprechende Dualpaarung ist durch

$$\langle x^*,\, x\rangle = \left(x^*\right)^T x \qquad \text{bzw.} \qquad \langle y^*,\, y\rangle = \left(y^*\right)^T y$$

gegeben, wobei M^T die Transposition der Matrix M bezeichnet. In diesem Setting gilt

$$L^*\, y^* = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{pmatrix},$$

d.h. L^* entspricht diesmal der *Links-Multiplikation mit der transponierten Matrix.*

<u>*Bemerkung*</u>: Alle Argumente gelten unabhängig von den gewählten Normen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

<u>*Verallgemeinerung*</u>: Seien X und Y zwei endlich-dimensionale Vektorräume und sei $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$ beliebig fixiert. Dann ist L^* bereits eindeutig festgelegt und kann — zumindest im Prinzip — unabhängig von Normen oder Basen berechnet und untersucht werden.

2. Wir betrachten die nicht-reflexiven Räume

$$X = Y = \ell_0^\infty(\mathbb{Z};\, \mathbb{R})$$

und hatten weiter oben schon gesehen, dass

$$X^* = Y^* \cong \ell^1(\mathbb{Z};\, \mathbb{R})\,, \qquad X^{**} = Y^{**} \cong \ell^\infty(\mathbb{Z};\, \mathbb{R})$$

im Sinne isometrischer Isomorphismen gilt. Insbesondere können wir jedes $x^* \in X^*$ bzw. $x^{**} \in X^{**}$ in natürlicher Weise mit einer reellwertigen ℓ^1- bzw. ℓ^∞- Zahlenfolge auf $\mathbb{Z}$ identifizieren, wobei die entsprechende Dualpaarung durch

$$\langle x^*,\, x\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j^*\, x_j \qquad \text{bzw.} \qquad \langle x^{**},\, x^*\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j^{**}\, x_j^*$$

gegeben ist[11] und $J_X : X \to X^{**}$ gerade die natürliche Einbettung von ℓ_0^∞ in ℓ^∞ beschreibt. Wir definieren einen Operator $S \in \mathsf{Lin}(X^*;\, X^*)$ durch

$$\left(S\, x^*\right)_l = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j^* & \text{falls } l = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und bemerken, dass X jede ℓ^1-Folge x^* auf ein gewisses Vielfaches des kartesischen Basiselements e_0 abbildet. Aus den Nebenrechnung

$$\big\langle S^* x^{**},\, x^*\big\rangle = \big\langle x^{**},\, S\, x^*\big\rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l^{**}\, \big(S\, x^*\big)_l = x_0^{**}\, \big(S\, x^*\big)_0 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_0^{**}\, x_j^*$$

können wir

$$\big(S^* x^{**}\big)_j = x_0^{**} \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}$$

ablesen, d.h. S^* bildet jede ℓ^∞-Folge x^* auf eine konstante Folge als Element von ℓ^∞ ab.

<u>*Lemma*</u>: Es gibt kein $L \in \mathsf{Lin}(X;\, X)$ mit $S = L^*$.

<u>*Beweis*</u>: Unter der Annahme $S = L^*$ gilt $S^* = L^{**}$ und wir erhalten[12]

$$\big\langle S^* x,\, x^*\big\rangle = \big\langle L^{**}\, x,\, x^*\big\rangle = \big\langle x,\, L^* x^*\big\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, \big(L^* x^*\big)_j = \big\langle L^* x^*,\, x\big\rangle = \langle x^*,\, L\, x\rangle$$

[11] Beachte, dass die Hölder-Ungleichung die absolute Konvergenz der Reihe auf der jeweiligen rechten Seite sicherstellt.

[12] Siehe auch die Rechnungen in den nachfolgenden Bemerkungen und beachte, dass X aufgrund unserer Identifikationen ein Unterraum von X^{**} ist.

für jedes $x \in \ell_0^\infty$ und alle $x^* \in \ell^1$. Wählen wir

$$x = e_0\,, \qquad x^* = e_k\,,$$

so ergibt sich via

$$1 = \big\langle S^* e_0,\, e_k\big\rangle = \langle e_k,\, L\,e_0\rangle = \big(L\,e_0\big)_k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0$$

ein Widerspruch wegen $L\,e_0 \in \ell_0^\infty$. Also war unsere Antithese falsch, d.h. S ist nicht der Duale eines Operators L. □

3. Für $X = Y = \ell^p(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ mit Exponent $1 < p < \infty$ und gegebenes $\varrho \in \ell^1(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ betrachten wir den Faltungsoperator $L \in \mathsf{Lin}(X;\,X)$ mit

$$L\,x := \varrho * x \qquad \text{bzw.} \qquad \big(L\,x\big)_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_{j-k}\, x_k$$

für alle $x \in X$. Wir identifizieren X^* mit $\ell^{p'}(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$, schreiben

$$\langle x^*,\, x\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j^*\, x_j$$

für die entsprechende Dualpaarung und berechnen[13]

$$\begin{aligned}
\big\langle x^*,\, \varrho * x\big\rangle &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j^* \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_{j-k}\, x_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_j^*\, \varrho_{j-k}\, x_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_k^*\, \varrho_{k-j}\, x_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^*\, \varrho_{k-j}\, x_j \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_{k-j}\, x_k^* = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varrho}_{j-k}\, x_k^* \\
&= \big\langle \tilde{\varrho} * x^*,\, x\big\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{\varrho} \in \ell^1\big(\mathbb{Z};\,\mathbb{R}\big)$ durch $\tilde{\varrho}_l = \varrho_{-l}$ die Spiegelung von ϱ repräsentiert und wir benutzt haben, dass alle auftretenden Reihen absolut konvergieren. Es folgt

$$L^* x^* = \tilde{\varrho} * x^*\,,$$

d.h. der Duale des Faltungsoperators L ist wiederum ein Faltungsoperator.

Bemerkung: Ist ϱ symmetrisch und $p = 2$, so folgt $L = L^*$, d.h. L ist dual zu sich selbst.

Eigenschaften des dualen Operators

1. Die Abbildung

$$L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y) \quad \rightsquigarrow \quad L^* \in \mathsf{Lin}(Y^*;\,X^*)$$

[13] Der dritte bzw. vierte Umformungsschritt entspricht der Vertauschung der Indizes $j \leftrightsquigarrow k$ bzw. der Vertauschung der Summationsreihenfolge.

ist eine lineare Isometrie. Insbesondere ist sie injektiv, aber im Allgemeinen nicht surjektiv (siehe dazu auch die vorherigen Beispiele).

Beweis: Die Linearität können wir einfach nachrechnen und wir hatten oben bereits die Abschätzung

$$\|L^*\|_{Y^*;\,X^*} = \sup_{\|y^*\|_{Y^*}=1} \|L^* y^*\|_{X^*} \le \|L\|_{X;\,Y}$$

hergeleitet. Sei andererseits $x \in X$ beliebig fixiert. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach existiert $y^* \in Y^*$ mit

$$\big\langle y^*,\, L\,x\big\rangle = \|L\,x\|_Y\;, \qquad \|y^*\|_{Y^*} = 1$$

und wir erhalten

$$\|L\,x\|_Y = \big\langle L^* y^*,\, x\big\rangle \le \|L^* y^*\|_{X^*}\,\|x\|_X \le \|L^*\|_{Y^*;\,X^*}\,\|x\|_X\;.$$

Dies liefert die komplementäre Abschätzung

$$\|L\|_{X;\,Y} \le \|L^*\|_{Y^*;\,X^*}$$

nach Supremumsbildung über alle $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$. □

2. Ist $(Z,\, \|\cdot\|_Z)$ ein weiterer normierter Raum, so gilt die Kompositionsformel

$$(M \circ L)^* = L^* \circ M^*$$

für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$ und alle $M \in \mathsf{Lin}(Y;\, Z)$.

Beweis: Für jedes $z^* \in Z^*$ und alle $x \in X$ folgt

$$\begin{aligned}\big\langle (M\circ L)^*\, z^*,\, x\big\rangle &= \big\langle z^*,\, M\,L\,x\big\rangle = \big\langle M^* z^*,\, L\,x\big\rangle \\ &= \big\langle L^* M^* z^*,\, x\big\rangle = \big\langle (L^*\circ M^*)\, z^*,\, x\big\rangle\end{aligned}$$

unmittelbar aus der Definition von dualen Operatoren. Da x beliebig ist, erhalten wir

$$(M\circ L)^*\, z^* = (L^* \circ M^*)\, z^*$$

und dies impliziert die Behauptung, da auch z^* beliebig ist. □

3. Für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$ bildet L^{**} den Raum X^{**} linear und stetig nach Y^{**} ab und es gilt (siehe auch das Bild) die Fortsetzungsformel

$$L^{**} \circ J_X = J_Y \circ L\,,$$

wobei $J_X : X \to X^{**}$ und $J_Y : Y \to Y^{**}$ die kanonischen Einbettungen sind.

Beweis: Durch direkte Rechnungen verifizieren wir

$$\big\langle L^{**} J_X\, x,\, y^*\big\rangle = \big\langle J_X\, x,\, L^*\, y^*\big\rangle = \big\langle L^* y^*,\, x\big\rangle = \big\langle y^*,\, L\,x\big\rangle = \big\langle J_Y L\,x,\, y^*\big\rangle$$

für jedes $x \in X$ und alle $y^* \in Y^*$. Da y^* beliebig ist, folgt $L^{**} J_X\, x = J_Y L\, x$ für alle $x \in X$ und damit die Behauptung. □

4. *Verallgemeinerung*: $S \in \mathsf{Lin}(Y^*;\, X^*)$ ist genau dann der duale Operator von $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$, wenn der Bildraum von $S^* \circ J_X$ im Bild von Y unter J_Y enthalten ist.

   Beweis: Die Hinrichtung ist die gerade die vorangegangene Bemerkung. Für die Rückrichtung setzen wir

   $$L := J_Y^{-1} \circ S^* \circ J_X$$

   und mit elementaren Argumenten zeigen wir (siehe die Übungen), dass J_Y^{-1} und L jeweils abgeschlossen sind. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen garantiert dann die Stetigkeit von L. $\square$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "L"] \arrow[d, "J_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\
X^{**} \arrow[r, "L^{**}"'] & Y^{**}
\end{tikzcd}$$

Abbildung Die lineare Abbildung L^{**} kann als natürliche Fortsetzung von L betrachtet werden, die zwischen den im Allgemeinen größeren Räumen X^{**} und Y^{**} operiert.

Vorlesung 20 : 11. Januar 2024

---

wichtige Unterräume

Definition Für jeden Unterraum U von X bezeichnet

$$U^\perp := \big\{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*,\, x\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in U\big\}$$

den Annihilator von U in X^* und für jeden Unterraum V von X^* wird

$$V_\perp := \big\{x \in X \;:\; \langle x^*,\, x\rangle = 0 \quad \text{für alle } x^* \in V\big\}$$

der Annihilator von V in X genannt.

Lemma **(Eigenschaften von Annihilatoren in X^*)** Die Aussagen

1. $U^\perp$ ist abgeschlossener Unterraum von X^*.

2. Es gilt $U^\perp = \{0\}$ genau dann, wenn U dicht in X liegt.

3. $U^\perp = X^*$ ist äquivalent zu $U = \{0\}$.

4. Es gilt $\big(U^\perp\big)_\perp = \mathrm{cls}\,(U)$.

gelten für jeden Unterraum $U \subseteq X$.

Beweis <u>*Teil 1*</u>: Die Menge $U^\perp$ ist offensichtlich ein Unterraum von X^* und außerdem abgeschlossen unter starker Konvergenz. Nach der äquivalenten Charakterisierung ist sie daher auch abgeschlossen.

<u>*Teil 2*</u>: Aus $\mathrm{cls}\,(U) = X$ folgt $U^\perp = \{0\}$ mithilfe eines Approximationsarguments. Umgekehrt existiert unter der Annahme $x_\# \in X \setminus \mathrm{cls}\,(U)$ nach der zweiten Version des Trennungssatzes von Hahn-Banach ein $x_\#^* \in X^*$ mit $\big\langle x_\#^*,\, x_\# \big\rangle \neq 0$ sowie $\big\langle x_\#^*,\, x \big\rangle = 0$ für alle $x \in \mathrm{cls}\,(U)$ und wir erhalten $U^\perp \neq \{0\}$.

<u>*Teil 3*</u>: Es gilt $\{0\}^\perp = X^*$. Im Fall von $U \neq \{0\}$ existiert ein $x_\# \in U$ mit $x_\# \neq 0$ und der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach liefert ein $x_\#^* \in X^*$ mit $\big\langle x_\#^*,\, x_\# \big\rangle \neq 0$ und dies impliziert $U^\perp \neq X^*$.

<u>*Teil 4.1*</u>: Sei $x \in \mathrm{cls}\,(U)$ beliebig fixiert und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge aus U, die im starken Sinne gegen x konvergiert. Sei außerdem $x^* \in U^\perp$ beliebig. Dann gilt $\langle x^*,\, x_n \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und im Limes $n \to \infty$ erhalten wir $\langle x^*,\, x \rangle = 0$. Mit der Beliebigkeit von x^* folgt $x \in \big(U^\perp\big)_\perp$ und wir haben gezeigt, dass $\mathrm{cls}\,(U)$ eine Teilmenge von $\big(U^\perp\big)_\perp$ ist.

<u>*Teil 4.2*</u>: Angenommen, es existiert ein $x_\# \in X$, dass zu $\big(U^\perp\big)_\perp$, aber nicht zu $\mathrm{cls}\,(U)$ gehört. Die zweite Version des Trennungssatz von Hahn-Banach liefert $x_\#^* \in X^*$ mit $\big\langle x_\#^*,\, x_\# \big\rangle \neq 0$ und $\big\langle x_\#^*,\, x \big\rangle = 0$ für alle $x \in U$. Die zweite Eigenschaft meint $x_\#^* \in U^\perp$ und impliziert damit $\big\langle x_\#^*,\, x_\# \big\rangle = 0$ wegen $x_\# \in \big(U^\perp\big)_\perp$. Dies widerspricht aber der ersten Hahn-Banach-Eigenschaft von $x_\#^*$ und wir haben gezeigt, dass $\big(U^\perp\big)_\perp$ nicht größer als $\mathrm{cls}\,(U)$ ist. $\square$

Bemerkungen

1. Ist X reflexiv, so gelten analoge Aussagen auch für die Annihilatoren in X.

2. Ist X jedoch nicht reflexiv, so können nur einige der analogen Aussagen bewiesen werden. Zum Beispiel ist für jeden Unterraum V von X^* sein Annihilator $V_\perp$ abgeschlossen in X, aber im Allgemeinen können wir nur

$$(V_\perp)^\perp \supseteq \mathrm{cls}\,(V)\,,$$

zeigen.

3. <u>*Merkregel*</u>: Die Annihilatoren in X^* haben für reflexive bzw. nicht-reflexive Banach-Räume analoge bzw. bessere Eigenschaften als die Annihilatoren in X.

Definition Für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ werden

$$\ker\,(L) := \big\{x \in X \;:\; L\,x = 0\big\} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{im}\,(L) := \big\{L\,x \;:\; x \in X\big\}$$

als der <u>Kern</u> bzw. das <u>Bild von L</u> bezeichnet.

Bemerkungen

1. Der Kern von L ist immer ein abgeschlossener Unterraum von Y. Das Bild von L ist immer ein Unterraum von Y, der im Allgemeinen aber nicht abgeschlossen ist.

2. Das Bild von L wird oftmals auch *Range* genannt und dann als $\operatorname{ran}(L)$ bezeichnet. Die Vektorräum

$$\operatorname{coker}(L) := Y/\operatorname{im}(L) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{coim}(L) := X/\ker(L)$$

heißt Cokern bzw. Coimage von L. Siehe dazu auch die Übungen.

3. Sind X und Y endlich-dimensionale Räume, so gelten (siehe *Lineare Algebra*) die Dimensionsformeln

$$\dim\big(\ker(L)\big) + \dim\big(\operatorname{im}(L)\big) = \dim(X)$$

und

$$\dim\big(\operatorname{coker}(L)\big) + \dim\big(\operatorname{im}(L)\big) = \dim(Y)\,.$$

Bei unendlich-dimensionalen Räumen sind diese Aussagen zwar nicht falsch, aber wegen des Auftretens von ∞ recht nutzlos.

Lemma **(Kerne und Bilder von L und L^*)** Die Formeln

$$\ker(L^*) = \big(\operatorname{im}(L)\big)^{\perp}, \qquad \ker(L) = \big(\operatorname{im}(L^*)\big)_{\perp}$$

sind für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ erfüllt.

Beweis Die Definitionen in diesem Abschnitt implizieren die logischen Äquivalenzen

$$\begin{aligned} y^* \in \ker(L^*) \quad &\Leftrightarrow \quad L^*y^* = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big\langle L^*y^*,\, x\big\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad \big\langle y^*,\, L\,x\big\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad \big\langle y^*,\, y\big\rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in \operatorname{im}(L) \\ &\Leftrightarrow \quad y^* \in \big(\operatorname{im}(L)\big)^{\perp} \end{aligned}$$

und damit die erste Behauptung. Die zweite kann mittels

$$\begin{aligned} x \in \ker(L) \quad &\Leftrightarrow \quad L\,x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big\langle y^*,\, L\,x\big\rangle = 0 \quad \text{für alle } y^* \in Y^* \\ &\Leftrightarrow \quad \big\langle L^*y^*,\, x\big\rangle = 0 \quad \text{für alle } y^* \in Y^* \\ &\Leftrightarrow \quad \big\langle x^*,\, x\big\rangle = 0 \quad \text{für alle } x^* \in \operatorname{im}(L^*) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \big(\operatorname{im}(L^*)\big)_{\perp} \end{aligned}$$

hergeleitet werden.[14] □

[14] Die Rückrichtung der zweiten Äquivalenz benutzt, dass aus $\langle y^*,\, y\rangle = 0$ für alle $y^* \in Y^*$ schon $y = 0$ folgt. In der Tat, für jedes $0 \neq y \in Y$ existiert nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach ein $y^* \in Y^*$ mit $\langle y^*,\, y\rangle = \|y\|_Y \neq 0$.

Bemerkungen

1. Aufgrund der Eigenschaften von Annihilatoren gilt auch

$$\operatorname{cls}\big(\operatorname{im}(L)\big) = \big(\ker(L^*)\big)_\perp\,, \qquad \operatorname{cls}\big(\operatorname{im}(L^*)\big) \subseteq \big(\ker(L)\big)^\perp\,.$$

Im reflexiven Fall gilt sogar Gleichheit in der zweiten Formel, aber im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel: Wir betrachten $X = Y = \ell^1(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ sowie $L \in \mathsf{Lin}(X;\,X)$ mit

$$\big(L\,x\big)_j = \frac{x_j}{1+j^2} \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

und identifizieren wieder $X^* = Y^*$ mit $\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$. Wegen

$$\langle L^* x^*,\, x\rangle = \langle x^*,\, L\,x\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j^*\,\big(L\,x\big)_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{x_j^*\,x_j}{1+j^2}$$

ergibt sich

$$\big(L^*\,x\big)_j = \frac{x_j^*}{1+j^2} \qquad \text{für alle} \quad x^* \in X^*$$

und damit

$$\ker(L) = \{0\}\,, \qquad \operatorname{im}(L^*) = \Big\{x^* \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}\,:\, \sup_{j\in\mathbb{Z}} \big(1+j^2\big)\,|x_j| < \infty\Big\}\,.$$

Insbesondere ergibt sich

$$\operatorname{cls}\big(\operatorname{im}(L^*)\big) = \ell_0^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R}) = \ker(L)^\perp$$

aus der Tatsache, dass $\ell_{\mathrm{fin}}^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ im Bild von L enthalten ist und außerdem dicht in $\ell_0^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ liegt.

2. Die beiden Implikationen

$$L \text{ ist surjektiv} \quad\Rightarrow\quad L^* \text{ ist injektiv}\,, \qquad L^* \text{ ist surjektiv} \quad\Rightarrow\quad L \text{ ist injektiv}$$

ergeben sich unmittelbar aus den Formeln.

Achtung: Die Umkehrungen gelten nur dann, wenn die Dimension von X oder Y endlich ist. Siehe auch das Gegenbeispiel aus der vorherigen Bemerkung, in dem L und L^* beide injektiv, aber nicht surjektiv sind.

3. Das Lemma erlaubt es uns, Lösbarkeitskriterien für Operatorgleichungen zu formulieren.

Beispiel: Besitzt $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ ein abgeschlossenes Bild, so sind die beiden Aussagen

   (a) Es existiert ein $x \in X$ mit $L\,x = y$.
   (b) Es gilt $\langle y^*,\, y\rangle = 0$ für alle y^* mit $L^* y^* = 0$.

für jedes $y \in Y$ zueinander äquivalent.

duale Operatoren in Banach-Räumen

Vorbemerkung Im Folgenden sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jeweils vollständig.

Theorem (**Dualität und Invertierbarkeit**) Der Operator $L \in \mathsf{Lin}(X; Y)$ ist genau dann stetig invertierbar, wenn $L^* \in \mathsf{Lin}(Y^*; X^*)$ diese Eigenschaft besitzt. Außerdem gilt

$$\left(L^{-1}\right)^* = \left(L^*\right)^{-1},$$

d.h. der Duale des Inversen ist der Inverse des Dualen.

Beweis Hinrichtung: Sei L stetig invertierbar. Dann gilt

$$\mathrm{id}_X = L^{-1} \circ L\,, \qquad \mathrm{id}_Y = L \circ L^{-1}$$

und die Kompositionsformel garantiert

$$\mathrm{id}_{X^*} = \left(L^{-1}\right)^* \circ L^*\,, \qquad \mathrm{id}_{Y^*} = L^* \circ \left(L^{-1}\right)^*.$$

Insbesondere ist $\left(L^{-1}\right)^*$ die (lineare) Umkehrabbildung von L^* und das Korollar zum Satz von der offenen Abbildung liefert ihre Stetigkeit.

Rückrichtung: Aufgrund des ersten Beweisteils ist $L^{**} \in \mathsf{Lin}(X^{**}; Y^{**})$ stetig invertierbar und bildet deshalb abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab.[15] In Kombination mit der Fortsetzungsformel sowie den Eigenschaften kanonischer Einbettungen schließen wir, dass

$$\mathrm{im}\left(J_Y \circ L\right) = \mathrm{im}\left(L^{**} \circ J_X\right) = L^{**}\big(\,\mathrm{im}\,(J_X)\big)$$

abgeschlossener Unterraum von Y^{**} ist und dass daher

$$\mathrm{im}\,(L) = \mathrm{im}\left(J_Y^{-1} \circ J_Y \circ L\right) = J_Y^{-1}\big(\,\mathrm{im}\,(J_Y \circ L)\big)$$

abgeschlossen in Y ist. Da wegen der Injektivität von L^* außerdem

$$\mathrm{im}\,(L)^{\perp} = \ker\,(L^*) = \{0\}$$

gilt, erhalten wir $\mathrm{im}\,(L) = \mathrm{cls}\big(\,\mathrm{im}\,(L)\big) = Y$ und damit die Surjektivität von L. Die Surjektivität von L^* garantiert außerdem via

$$\ker\,(L) = \big(\,\mathrm{im}\,(L^*)\big)_{\perp} = (X^*)_{\perp} = \{0\}$$

die Injektivität von L. Insbesondere ist L invertierbar und nach dem Satz über die offene Abbildung auch stetig invertierbar. □

Theorem (**zur Abgeschlossenheit des Bildraumes**) Für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X; Y)$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

1. Der Bildraum $\mathrm{im}\,(L)$ ist abgeschlossen in Y.
2. Der Bildraum $\mathrm{im}\,(L^*)$ ist abgeschlossen in X^*.
3. Es gilt $\mathrm{im}\,(L) = \ker\,(L^*)_{\perp}$.
4. Es gilt $\mathrm{im}\,(L^*) = \ker\,(L)^{\perp}$.

Inbesondere gelten diese Aussagen, wenn die Dimension von $\mathrm{coker}\,(L)$ oder $\mathrm{coker}\,(L^*)$ endlich ist.

[15] Das ergibt sich aus der Stetigkeit von $\left(L^{**}\right)^{-1}$ sowie der äquivalenten Charakterisierung von Stetigkeit.

Beweis *Teil 1*: Zum Beweis der Äquivalenzen 1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Leftrightarrow$ 3. $\Leftrightarrow$ 4. verweisen wir auf die Literatur, zum Beispiel auf [Abschnitt 2.6+2.7, insbesondere Theorem 2.19][Bre], wo alle Teilimplikationen in einer allgemeineren Version etabliert werden.

Teil 2: In den Hausaufgaben wird die Existenz stetiger Vektorraum-Isomorphismen $\hat{L} : \mathrm{coker}\,(L) \to \mathrm{im}\,(L)$ und $\hat{L}^* : \mathrm{coker}\,(L^*) \to \mathrm{im}\,(L^*)$ gezeigt. Gilt also

$$\dim\big(\mathrm{coker}\,(L)\big) = \dim\big(\mathrm{im}\,(L)\big) < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \dim\big(\mathrm{coker}\,(L^*)\big) = \dim\big(\mathrm{im}\,(L^*)\big) < \infty\,,$$

so ist $\mathrm{im}\,(L)$ bzw. $\mathrm{im}\,(L^*)$ als endlich-dimensionaler Unterraum von Y bzw. X^* abgeschlossen. □

Korollar (**äquivalente Charakterisierung der Surjektivität von** L) Für jedes $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$ sind die drei Aussagen

(i) Der Operator L ist surjektiv , d.h. $\mathrm{im}\,(L) = Y$.

(ii) Es gilt $\ker\,(L^*) = \{0\}$ und $\mathrm{im}\,(L^*)$ ist abgeschlossen in X^*.

(iii) Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, sodass

$$\|y^*\|_{Y^*} \le C\,\|L^*\,y^*\|_{X^*}$$

für alle $y^* \in Y^*$ erfüllt ist.

paarweise äquivalent.

Beweis *(iii) $\Rightarrow$ (ii)*: Aus der Voraussetzung folgt unmittelbar, dass $L^*y^* = 0$ nur für $y^* = 0$ gilt. Sei nun $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in Y^*, sodass

$$x_n^* := L^*y_n^* \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad x_\infty^*$$

im Sinne der starken Konvergenz in X^* erfüllt ist. Dann ist $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X^* und die Abschätzung garantiert, dass $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y^* ist. Insbesondere gilt

$$y_n^* \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad y_\infty^*$$

für einen Grenzwert y_∞^* und die Stetigkeit von L^* impliziert via

$$x_n^* \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad L^*\,y_\infty^*\,,$$

dass $x_\infty^* = L^*y_\infty^*$ zu $\mathrm{im}\,(L^*)$ gehört. Insgesamt haben wir gezeigt, dass $\mathrm{im}\,(L^*)$ abgeschlossen unter starker Konvergenz und damit auch abgeschlossen ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Diese Implikation ergibt sich unmittelbar aus dem vorherigen Theorem via $\mathrm{im}\,(L) = \{0\}_\perp = Y$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Aus Homogenitätsgründen reicht es, die gewünschte Ungleichung für jedes Element der Menge

$$M := \big\{y^* \,:\, \|L^*y^*\|_{X^*} = 1\big\} \subset Y^*\,,$$

zu zeigen. Wir fixieren $y \in Y$ beliebig und wählen $x \in X$ mit $y = L\,x$, wobei dies wegen der Surjektivität von L möglich ist. Für jedes $y^* \in M$ ergibt sich die Abschätzung

$$\big|\langle y^*,\, y\rangle\big| = \big|\langle y^*,\, L\,x\rangle\big| = \big|\langle L^*y^*,\, x\rangle\big| \le \|L^*\,y^*\|_{X^*}\,\|x\|_X = \|x\|_X\ ,$$

wobei die rechte Seite indirekt von $y \in Y$, aber nicht von $y^* \in M$ abhängt. Der Satz von Banach-Steinhaus — angewendet auf M als Menge von linearen Abbildungen $Y \to \mathbb{K}$ — liefert eine Konstante C mit

$$\|y^*\|_{Y^*} \le C \qquad \text{für alle} \quad y^* \in M\,,$$

wobei wir per Definition von M auf der rechten Seite C durch den Term $C\,\|L^*\,y^*\|_{X^*}$ ersetzen können. □

Bemerkungen

1. Das Korollar erlaubt es, die Lösbarkeit der Operatorgleichung $L\,x = y$ für jedes $y \in Y$ mittels einer *dualen a-priori Abschätzung* zu beweisen. Genauer gesagt: Es reicht zu zeigen, dass jede Lösung y^* der *dualen Gleichung* $L^*\,y^* = x^*$ der Ungleichung $\|y^*\|_{Y^*} \le C\,\|x^*\|_{X^*}$ genügt, wobei wir nicht entscheiden müssen, ob für gegebenes x^* keine, genau eine oder mehrere Lösungen y^* existieren.

2. Mit analogen Argumenten kann auch die duale Version des Theorems, also die paarweise Äquivalenz der Aussagen

   (i) Der Operator L^* ist surjektiv , d.h. $\mathrm{im}\,(L^*) = X^*$.

   (ii) Es gilt $\ker(L) = \{0\}$ und $\mathrm{im}\,(L)$ ist abgeschlossen in Y.

   (iii) Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, sodass

   $$\|x\|_X \le C\,\|L\,x\|_Y$$

   für alle $x \in X$ erfüllt ist.

   bewiesen werden.

Kapitel 4

Hilbert-Räume

Vorlesung 21 : 15. Januar 2024

Notation In diesem Kapitel ist X ein reeller oder komplexer Hilbert-Raum, wobei wir das entsprechende Skalarprodukt von x, $y \in X$ im Folgenden mit

$$(y \,|\, x)_X$$

bezeichnen. Insbesondere gelten die Formeln

$$\big(\mu_1\, y_1 + \mu_2\, y_2 \,|\, x\big)_X = \overline{\mu_1}\, \big(y_1 \,|\, x\big)_X + \overline{\mu_2}\, \big(y_2 \,|\, x\big)_X$$

sowie

$$\big(y \,|\, \lambda_1\, x_1 + \lambda_1\, x_2\big)_X = \lambda_1\, \big(y \,|\, x_1\big)_X + \lambda_2\, \big(y \,|\, x_2\big)_X$$

und

$$(y \,|\, x)_X = \overline{(x \,|\, y)_X}\,, \qquad \|x\|_X = \sqrt{(x \,|\, x)_X}\,, \qquad \big|(y \,|\, x)_X\big| \le \|y\|_X \|x\|_X\,,$$

wobei für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die komplexe Konjugation weggelassen werden kann. Außerdem gilt immer die Parallelogramm-Identität

$$\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 = \tfrac{1}{2}\, \|x - y\|_X^2 + \tfrac{1}{2}\, \|x + y\|_X^2$$

Sofern keine Verwechselung möglich ist, lassen wir den Index $_X$ im Skalarprodukt und in der Norm weg.

Beispiele

1. $\mathbb{K}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt.
2. Der Folgenraum $\ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ mit

$$\big(y \,|\, x\big) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{y_j}\, x_j$$

oder der Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ mit

$$\big(y \,|\, x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n}\, x_n\,.$$

<u>Achtung</u>: Für $p \neq 2$ ist $\ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ bzw. $\ell^p(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ *kein* Hilbert-Raum.

3. Der $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{K})$ ist auch mit

$$\big(y\,|\,x\big) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_m\,\overline{y_j}\,x_j$$

ein Hilbert-Raum, sofern zwei Konstanten $0 < c < C < \infty$ existieren, sodass $c \le w_j \le C$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt. Die w_m werden auch *Gewichte* genannt.

4. Der Lebesgue-Raum $L^2(\Omega;\mathbb{K})$ (siehe nächstes Kapitel) mit

$$\big(y\,|\,x\big) = \int\limits_\Omega \overline{y(\omega)}\,x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,,$$

wobei Ω eine Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist.

4.1 Fundamentale Aussagen

Theorem (**Darstellungssatz von Riesz, Isomorphie zum Dualraum**) Durch

$$\langle E_X\,y,\,x\rangle := (y\,|\,x)_X$$

wird ein konjugiert linearer Operator $E_X : X \to X^*$ definiert, der isometrisch und bijektiv ist.

Beweis Teil 1: Für jedes $y \in X$ ist die Abbildung

$$x \in X \quad \mapsto \quad (y\,|\,x)_X \in \mathbb{K}$$

linear und wegen $\big|(y\,|\,x)_X\big| \le \|y\|_X\,\|x\|_X$ auch stetig, d.h. $E_X\,y$ ist ein wohldefiniertes Element aus X^* mit

$$\|E_X\,y\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1}\big|\langle E_X\,y,\,x\rangle\big| = \sup_{\|x\|_X=1}\big|(y\,|\,x)_X\big| \le \|y\|_X\ .$$

Für $x = y$ erhalten wir

$$\|E_X\,y\|_{X^*}\,\|y\|_X \ge \langle E\,y,\,y\rangle = (y\,|\,y)_X = \|y\|_X^2$$

und schließen via $\|E_X\,y\|_{X^*} = \|y\|_X$, dass E isometrisch ist. Außerdem ist E konjugiert linear, d.h. es gilt

$$E\,\big(\mu\,y + \tilde{\mu}\,\tilde{y}\big) = \overline{\mu}\,E\,y + \overline{\tilde{\mu}}\,E\,\tilde{y}$$

für alle μ, $\tilde{\mu} \in \mathbb{K}$ und alle y, $\tilde{y} \in X$.

Teil 2: Aus der Isometrie ergibt sich die Injektivität und für die Surjektivität fixieren wir $y^* \in X^*$ beliebig und zeigen, dass y^* im Bild von E_X liegt. Für $y^* = 0$ ist dies trivialerweise richtig, sodass wir $y^* \neq 0$ annehmen können. Wir betrachten die abgeschlossenen Unterräume

$$U := \big\{x \in X\ :\ \langle y^*,\,x\rangle = 0\big\}\,,\qquad V := \big\{x \in X\ : (u\,|\,x)_X = 0 \text{ für alle } u \in U\big\}$$

und weil V größer als $\{0\}$ ist (andernfalls würde $U = X$ und damit $y^* = 0$ gelten), können wir $\tilde{y} \in V$ mit

$$\langle y^*, \tilde{y} \rangle = 1$$

wählen, wobei dies $\tilde{y} \neq 0$ impliziert. Für jedes $x \in X$ berechnen wir

$$\big\langle y^*, x - \langle y^*, x\rangle \tilde{y} \big\rangle = \big\langle y^*, x \big\rangle - \big\langle y^*, \langle y^*, x\rangle \tilde{y} \big\rangle = \big\langle y^*, x \big\rangle - \langle y^*, x\rangle \big\langle y^*, \tilde{y} \big\rangle = 0\,,$$

und schließen, dass $x - \langle y^*, x\rangle \tilde{y}$ zu U gehört und damit nach Konstruktion senkrecht auf $\tilde{y}$ steht. Insbesondere gilt

$$\big(\tilde{y} \,|\, x\big)_X = \big(\tilde{y} \,|\, x - \langle y^*, x\rangle \tilde{y}\big)_X + \big(\tilde{y} \,|\, \langle y^*, x\rangle \tilde{y}\big)_X = 0 + \langle y^*, x\rangle \left(\tilde{y} \,|\, \tilde{y}\right)_X$$

und mit

$$y := \frac{\tilde{y}}{\left(\tilde{y} \,|\, \tilde{y}\right)_X}$$

ergibt sich

$$\big(y \,|\, x\big)_X = \frac{\big(\tilde{y} \,|\, x\big)_X}{\left(\tilde{y} \,|\, \tilde{y}\right)_X} = \langle y^*, x\rangle$$

für alle $x \in X$. Dies meint aber $y^* = E_X\, y$ und wir haben insgesamt die Bijektivität von E_X gezeigt. □

Bemerkungen

1. Das Theorem garantiert dass jeder Hilbert-Raum X mit seinem Dualraum X^* identifiziert werden kann. Umgekehrt können wir in jedem Banach-Raum, der isometrisch isomorph zu seinem Dualraum ist, in sehr natürlicher Weise ein Skalarprodukt einführen.

   Ergänzung: Durch

   $$\big(y^* \,|\, x^*\big)_{X^*} := \big(E_X^{-1}\, x^* \,|\, E_X^{-1}\, y^*\big)_X$$

   wird auf abstrakte Weise ein Skalarprodukt auf X^* definiert, dass via

   $$\big(x^* \,|\, x^*\big)_{X^*} = \big(E_X^{-1}\, x^* \,|\, E_X^{-1}\, x^*\big)_X = \big\|E_X^{-1}\, x^*\big\|_X^2 = \big\|x^*\big\|_{X^*}^2$$

   kompatibel mit der dualen Norm in X^* ist.

2. In reellen Hilbert-Räumen sind die Konzepte *Skalarprodukt* und *Dualpaarung* letztlich dasselbe. In komplexen Hilbert-Räumen gibt es jedoch einen wichtigen Unterschied: Eine Dualpaarung ist linear in beiden Argumenten, wohingegen ein Skalarprodukt linear im zweiten und sesquilinear (oder konjugiert linear) im ersten ist.

3. Jeder Hilbert-Raum X ist reflexiv (da $X \cong X^* \cong X^{**}$ im Sinne isometrischer Isomorphismen gilt) und die Konzepte *schwache Konvergenz* sowie *schwache* Konvergenz* stimmen überein. Insbesondere konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann im schwachen Sinn gegen x_∞, wenn

   $$\big(y \,|\, x_n\big)_X \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \big(y \,|\, x_\infty\big)_X$$

   für alle $y \in X$ erfüllt ist. Außerdem besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.

4. Sei U ein Unterraum von X. Aufgrund der Isomorphie $X \cong X^*$ entspricht der Annihilator von U dem orthogonalen Komplement von U und wir schreiben daher[1]

$$U^\perp = \big\{ x \in X \,:\, (x\,|\,u)_X = 0 \;\text{ für alle } u \in U \big\}\,.$$

Insbesondere ergeben sich die Formeln $\big(U^\perp\big)^\perp = \mathrm{cls}\,(U)$ sowie $X^\perp = \{0\}$ und $\{0\}^\perp = X$ aus den oben bewiesenen Rechenregeln für Annilihatoren.

5. Der Operator E_X wird Dualitätsabbildung von X genannt und sein Inverser E_X^{-1} heißt Rieszscher Operator.

Lemma (**äquivalente Charakterisierung der Normkonvergenz**) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen x_∞ im starken Sinne, wenn sie im schwachen Sinne gegen x_∞ konvergiert und zusätzlich $\|x_\infty\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ gilt.

Beweis Übungsaufgabe. □

Bemerkungen

1. Konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im schwachen Sinne gegen x_∞, so gilt entweder die strikte Ungleichung

$$\|x_\infty\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

oder es existiert eine zumindest eine Teilfolge, die stark gegen x_∞ konvergiert.

Beweis: Die schwache Konvergenz impliziert eine Variante der Ungleichung mit $\leq$ anstelle von $<$ und lim statt lim inf. Die Behauptung ergibt sich, wenn dieses Ungleichung sowie das Lemma für Teilfolgen ausgewertet werden. □

2. Es gilt also: Schwache Konvergenz + Konvergenz *der* Norm = Konvergenz *in* Norm.

3. Ein analoges Resultat gilt in jedem *uniform konvexen* Banach-Räum.

Lemma (**Projektionssatz, nichtlineare Variante**) Sei K eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X. Dann existiert zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$, sodass

$$\|x - y\| \leq \|x - \tilde{y}\|$$

sowie

$$\mathrm{Re}\,\big((x - y\,|\,\tilde{y} - y)\big) \leq 0$$

für alle $\tilde{y} \in K$ erfüllt ist. Insbesondere gilt $\|x - y\|_X = \mathrm{dist}\,(x,\, K)$.

[1] Beachte, dass es in einem Banach-Raum X ohne Skalarprodukt kein Komplement von U gibt und dass $U^\perp$ dann als Unterraum von X^* betrachtet werden muss.

Beweis Im Fall von $x \in K$ folgen alle Behauptungen mit $y = x$ und daher fixieren wir im Folgenden $x \in X \setminus K$.

Existenz: Wir wählen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit

$$\|x - y_n\| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad d := \inf_{\tilde{y}\in K} \|x - \tilde{y}\|$$

und bemerken, dass

$$\left\|\tfrac{1}{2}\, y_n - \tfrac{1}{2}\, y_m\right\|^2 + \left\|x - \left(\tfrac{1}{2}\, y_n + \tfrac{1}{2}\, y_m\right)\right\|^2 = \tfrac{1}{2}\left\|x - y_n\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\left\|x - y_m\right\|^2$$

aus der Parallelogram-Ungleichung folgt.[2] Da $\frac{1}{2}\, y_n + \frac{1}{2}\, y_m$ in K liegt, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\|y_n - y_m\right\|^2 &= 2\left\|x - y_n\right\|^2 + 2\left\|x - y_m\right\|^2 - 4\left\|x - \left(\tfrac{1}{2}\, y_n + \tfrac{1}{2}\, y_m\right)\right\|^2 \\ &\leq 2\left\|x - y_n\right\|^2 + 2\left\|x - y_m\right\|^2 - 4\, d^2 \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0 \end{aligned}$$

und schließen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X ist. Daher existiert ein Grenzwert $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ und die Stetigkeit der Norm (bzgl. der starken Konvergenz) garantiert $\|x - y\| = d$.

Eindeutigkeit: Ist $\tilde{y}$ irgendein Element aus K mit $\|x - \tilde{y}\| = d$, so garantiert die Parallelogramm-Ungleichung

$$0 \leq \|y - \tilde{y}\|^2 = 2\left\|x - y\right\|^2 + 2\left\|x - \tilde{y}\right\|^2 - 4\left\|x - \left(\tfrac{1}{2}\, y + \tfrac{1}{2}\, \tilde{y}\right)\right\|^2 \leq (2 + 2 - 4)\, d^2 = 0$$

und damit $\tilde{y} = y$.

Ungleichung: Mit beliebig fixiertem $\tilde{y} \in K$ betrachten wir die durch

$$f(t) := \left\|x - \big(t\,\tilde{y} + (1 - t)\, y\big)\right\|^2$$

definierte Funktion $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ und berechnen einerseits

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\|(x - y) - t\,(\tilde{y} - y)\right\|^2 = \big((x - y) - t\,(\tilde{y} - y) \,|\, (x - y) + t\,(\tilde{y} - y)\big) \\ &= \big(x - y \,|\, x - y\big) - t\,(x - y \,|\, \tilde{y} - y) + t\,(\tilde{y} - y \,|\, x - y) + t^2\,(\tilde{y} - y \,|\, \tilde{y} - y) \\ &= \|x - y\|^2 - t\, c + t^2\, \|x - \tilde{y}\|^2 \end{aligned}$$

mit[3]

$$c := (x - y \,|\, \tilde{y} - y) + (\tilde{y} - y \,|\, x - y) = 2\ \mathrm{Re}\,\big((x - y \,|\, \tilde{y} - y)\big)\,.$$

Aufgrund der Optimalität von y gilt andererseits $f(t) \geq f(0)$ für alle $t \in [0,\, 1]$ (da der Punkt $t\,\tilde{y} + (1 - t)\, y$ immer zu K gehört) und eine einfachen Kurvendiskussion für quadratische Funktionen liefert $c \leq 0$. □

[2] Es gilt

$$\|z\|^2 + \|\tilde{z}\|^2 = \tfrac{1}{2}\,\|z - \tilde{z}\|^2 + \tfrac{1}{2}\,\|z + \tilde{z}\|^2$$

und mit

$$z := \tfrac{1}{2}\, y_n - \tfrac{1}{2}\, y_m\,, \qquad \tilde{z} := x - \left(\tfrac{1}{2}\, y_n + \tfrac{1}{2}\, y_m\right)$$

ergibt sich die Formel.

[3] Beachte, dass $(\tilde{y} - y \,|\, x - y)$ die konjugiert komplexe Zahl zu $(x - y \,|\, \tilde{y} - y)$ ist.

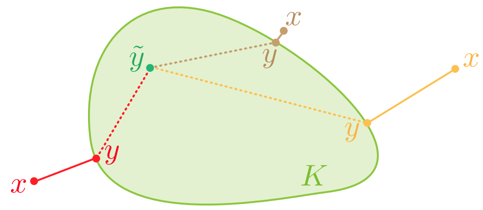


Abbildung Illustration des nichtlinearen Projektionssatzes. Für jedes $x \notin K$ existiert genau ein $y \in K$, dass den Abstand von x und K realisiert (dargestellt für drei verschieden Wahlen von x), und im Fall $x \in K$ gilt $y = x$ (nicht dargestellt). Die zweite Ungleichung im Lemma besagt, dass für jedes $\tilde{y} \in K$ der (nicht-orientierte) Winkel zwischen der gestrichelten und der ungestrichelten Verbindungsgeraden stumpf ist. Ist K glatt berandet, so steht die Verbindungslinie von x und y immer senkrecht auf dem Rand von K.

Vorlesung 22 : 17. Januar 2024

Theorem (**Projektionssatz, lineare Variante**) Sei $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und sei $V := U^\perp$. Dann exsitiert für jedes $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung der Bauart

$$x = u + v \qquad \text{mit} \qquad u \in U \qquad \text{und} \qquad v \in V\,.$$

Außerdem gilt

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2\,, \qquad \|v\| = \operatorname{dist}\big(x,\,U\big)\,, \qquad \|u\| = \operatorname{dist}\big(x,\,V\big)$$

sowie

$$\|x - \tilde{u}\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - \tilde{u}\|^2\,, \qquad \|x - \tilde{v}\|^2 = \|x - v\|^2 + \|v - \tilde{v}\|^2$$

für alle $\tilde{u} \in U$, $\tilde{v} \in V$.

Beweis In diesem Beweis ist $x \in X$ beliebig fixiert.

<u>*Wahl von u und v*</u>: Wir wenden das vorherige Lemma auf die konvexe Menge U an und erhalten $u \in U$ mit

$$\|x - u\| = \operatorname{dist}\big(x,\,U\big)\,,$$

wobei

$$\operatorname{Re}\big((x - u\,|\,\tilde{u} - u)\big) \le 0 \qquad \text{für alle} \quad \tilde{u} \in U$$

erfüllt ist. Da U ein Unterraum ist, gehört $\tilde{u}$ genau dann zu U, wenn $\breve{u} = u - \tilde{u}$ diese Eigenschaft besitzt, und dies impliziert

$$\operatorname{Re}\big((x - u\,|\,\breve{u})\big) \le 0 \qquad \text{für alle} \quad \breve{u} \in U\,.$$

Insbesondere gilt diese Abschätzung auch mit $-\breve{u}$ anstelle von $\breve{u}$, d.h. es gilt sogar

$$\operatorname{Re}\big((x - u\,|\,\breve{u})\big) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \breve{u} \in U\,.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ können wir den Realteil ignorieren und schließen direkt, dass $x - u$ zu V gehört. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bemerken wir, dass auch

$$\operatorname{Re}\big((x - u\,|\,\mathtt{i}\,\breve{u})\big) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \breve{u} \in U$$

gilt und erhalten via[4]

$$\begin{aligned}(x-u\,|\,\breve{u}) &= \mathrm{Re}\big((x-u\,|\,\breve{u})\big) - \mathtt{i}\,\mathrm{Re}\big(\mathtt{i}\,(x-u\,|\,\breve{u})\big)\\ &= \mathrm{Re}\big((x-u\,|\,\breve{u})\big) - \mathtt{i}\,\mathrm{Re}\big((x-u\,|\,\mathtt{i}\,\breve{u})\big)\end{aligned}$$

dasselbe Zwischenergebnis. In beiden Fällen definieren wir

$$v := x - u \in V$$

und haben eine Zerlegung von x gefunden.

Eigenschaften von u und v: Unter Verwendung von

$$\big\|x-\tilde{u}\big\|^2 = \big\|v+(u-\tilde{u})\big\|^2 = (v\,|\,v) + (v\,|\,u-\tilde{u}) + (u-\tilde{u}\,|\,v) + (u-\tilde{u}\,|\,u-\tilde{u})$$

sowie $(v\,|\,u-\tilde{u}) = (u-\tilde{u}\,|\,v) = 0$ ergibt sich

$$\big\|x-\tilde{v}\big\|^2 = \|v\|^2 + \|u-\tilde{u}\|^2 = \|x-u\|^2 + \big\|u-\tilde{u}\big\|^2$$

für jedes $\tilde{u} \in U$. Analog zeigen wir

$$\big\|x-\tilde{v}\big\|^2 = \big\|x-v\big\|^2 + \big\|v-\tilde{v}\big\|^2$$

für alle $\tilde{v} \in V$ und hieraus folgt insbesondere

$$\|x-v\|_X = \mathrm{dist}\,\big(x,\,V\big)$$

wegen $\big\|x-v\big\| \le \big\|x-\tilde{v}\big\|$. Außerdem gilt

$$\|x\|^2 = (x\,|\,x) = (u+v\,|\,u+v) = (u\,|\,u) + (v\,|\,v) = \|u\|^2 + \|u\|^2$$

und wir haben gezeigt, dass u und v alle gewünschten Eigenschaften aufweisen.

Eindeutigkeit: Gilt zusätzlich

$$x = \tilde{u} + \tilde{v} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{u} \in U \qquad \text{und} \qquad \tilde{v} \in V,$$

so gehört

$$u - \tilde{u} = \tilde{v} - v$$

sowohl zu U als auch zu V, aber der Durchschnitt enthält nur die 0. □

Bemerkungen

1. Die Zuordnungen

$$x \quad\mapsto\quad u =: P_U\,x\,, \qquad x \quad\mapsto\quad v =: P_V\,x$$

mit u und v wie im Theorem definiert zwei *lineare* Projektoren $P_U,\,P_V : X \to X$. Für diese gilt

$$U = \mathrm{im}\,(P_U) = \ker\,(P_V)\,, \qquad V = \mathrm{im}\,(P_V) = \ker\,(P_U)$$

sowie

$$P_U^2 = P_U\,, \qquad P_V^2 = P_V\,, \qquad P_U + P_V = \mathrm{id}_X$$

und $\|P_U\|_{X;\,X} = \|P_V\|_{X;\,X} = 1$.

Beweis: Die Linearität von P_U und P_V ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Zerlegung. Die anderen Eigenschaften folgen unmittelbar aus dem Theorem. □

[4]Beachte die Eigenschaften des Skalarproduktes sowie die Formel $\zeta = \mathrm{Re}\,(\zeta) - \mathtt{i}\,\mathrm{Re}\,(\mathtt{i}\,\zeta)$, die für alle komplexen Zahlen $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt.

2. Wegen

$$\operatorname{im}(P_U) = \ker(P_U)^\perp, \qquad \operatorname{im}(P_V) = \ker(P_V)^\perp$$

sprechen wir auch von Orthogonalprojektoren. Siehe dazu auch das Theorem zur äquivalenten Charakterisierung für weitere wichtige Eigenschaften orthogonaler Projektoren.

3. Das Lemma definiert für jedes K via $x \mapsto y =: P_K(x)$ einen im Allgemeinen *nichtlinearen* Projektor $P_K : X \to X$, der allerdings via

$$\big\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\big\| \leq \big\|x_2 - x_1\big\|$$

Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist.

4. Wir schreiben auch $X = U \oplus V$. Insbesondere garantiert das Theorem, dass X und $U \times V$ isometrisch isomorph zueinander sind, sofern wir die Norm

$$\big\|(u,\, v)\big\|_{U\times V} = \sqrt{\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2}$$

wählen.

5. In jedem unendlichen-dimensionalen Hilbert-Raum X gibt es auch Unterräume U, die nicht abgeschlossen sind. In diesem Fall ist aber $\operatorname{cls}(U)$ ein abgeschlossener Unterraum von X und es existiert ein entsprechender orthogonaler Projektor.

Beispiel: Für $x = \ell^2(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ und jeden Parameter $\alpha > 1/2$ besteht der Unterraum

$$U_\alpha := \Big\{x \in X \;:\; \quad x_{+j} = x_{-j} \text{ für alle } j \in \mathbb{Z} \quad \text{sowie} \quad \sup_{j\in\mathbb{Z}} |j|^\alpha\, |x_j| < \infty\Big\}$$

aus allen geraden Folgen in $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$, die für $j \to \pm\infty$ mindestens wie $|j|^{-\alpha}$ abklingen (und daher auch quadratisch summierbar sind). Mithilfe der Dichtheit von $\ell_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$ können wir nun leicht

$$\operatorname{cls}(U_\alpha) := \Big\{x \in X \;:\; x_{+j} = x_{-j} \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}\Big\}$$

zeigen, d.h. U_α ist nicht abgeschlossen.

6. *Achtung*: Ist U abgeschlossener Unterraum eines Banach-Raumes X, so existiert im Allgemeinen kein komplementärer Unterraum V von X mit $X = U \oplus V$.

4.2 Orthonormale Basen in separablen Räumen

Annahme Im Folgenden ist X ein unendlich-dimensionaler, aber separabler Hilbert-Raum.

Lemma (**Gram-Schmidt-Verfahren**) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine linear unabhängige Folge in X. Dann wird durch die Formeln

$$\tilde{e}_1 := b_1\,, \qquad \tilde{e}_{n+1} := b_{n+1} - \sum_{l=1}^{n} (b_{n+1}\,|\,b_l)\, b_l\,, \qquad e_n := \frac{\tilde{b}_n}{\|\tilde{e}_n\|}$$

in eindeutiger Weise eine linear unabhängige Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ definiert, wobei

$$\big(e_n \,|\, e_{\tilde{n}}\big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = \tilde{n} \\ 0 & \text{falls } n \neq \tilde{n} \end{cases}$$

sowie

$$\operatorname{span}\big\{e_1, \ldots, e_n\big\} = \operatorname{span}\big\{b_1, \ldots, b_n\big\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Beweis Übungsaufgabe. □

Bemerkungen

1. Die lineare Unabhängigkeit in der Voraussetzung (und analog in der Behauptung) meint, dass
$$b_n \neq 0\,, \qquad b_{n+1} \notin \operatorname{span}\big\{b_1, \ldots, b_n\big\}$$
für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

2. Das Verfahren ist konstruktiv und verallgemeinert das gleichnamige Verfahren in endlichen Dimensionen.

3. Das Gram-Schmidt-Verfahren kann auch in einem Prähilbertraum verwendet werden.

4. Im $n+1$-ten Schritt können wir zuerst $\tilde{e}_{n+1}$ aus b_{n+1} sowie $e_1, \ldots, e_n$ berechnen und anschließend e_{n+1} durch Normierung gewinnen.

5. Aufgrund der Separabilität von X existiert eine lineare unabhängige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass jedes $x \in X$ als Grenzwert einer geeigneten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bauart
$$x_n = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{n,l}\, b_l$$
dargestellt werden kann, wobei alle Gewichte $\lambda_{n,l}$ in $\mathbb{K}$ liegen. Insbesondere kann jedes $x \in X$ durch eine Folge *endlicher Linearkombinationen* der b_l approximiert werden und wir nennen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher eine Basisfolge.

   Beweis: Da X separabel ist, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge
$$\big\{x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\big\}$$
und wir definieren
$$\tilde{x}_1 := x_1\,, \qquad \tilde{x}_{n+1} := \begin{cases} 0 & \text{falls } x_{n+1} \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \\ x_{n+1} & \text{sonst} \end{cases}\,.$$
Durch Streichung der Nullelemente erhalten wir eine linear unabhängige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die die gewünschten Eigenschaften besitzt. □

6. Wenn wir das Gram-Schmidt-Verfahren auf eine Basisfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden, so erhalten wir eine orthonormale Basisfolge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beachte, dass es in X viele solche Folgen gibt.

Theorem (**Eigenschaften einer ON-Basis**) Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basisfolge. Dann gilt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n \,|\, x)\, e_n\,, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|(e_n \,|\, x)\big|^2$$

für jedes $x \in X$.

Beweis <u>*Teil 1*</u>: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die linearen und stetigen Operatoren $P_n,\, Q_n : X \to X$ mit

$$P_n\, x := \sum_{l=1}^{n} (e_n \,|\, x)\, e_n\,, \qquad Q_n\, x := x - P_n x$$

und zeigen durch direkte Rechnungen, dass

$$P_n\, P_n\, x = P_n\, x\,, \qquad Q_n\, Q_n\, x = x$$

sowie

$$\big(P_n\, x \,|\, Q_n\, x\big) = 0\,, \qquad \|x\|^2 = \|P_n\, x\|^2 + \|Q_n\, x\|^2\,, \qquad \|P_n\, x\|^2 = \sum_{l=1}^{n} \big|(e_n \,|\, x)\big|^2$$

für alle $x \in X$ gilt.[5] Insbesondere ist P_n der lineare Projektor auf den Unterrraum

$$U_n := \operatorname{span}\big\{e_1\,,\ \ldots,\ e_n\big\}$$

und Q_n ist der Projektor auf das orthogonale Komplement $U_n^{\perp}$.

<u>*Teil 2*</u>: Sei nun $x \in X$ beliebig fixiert. Aufgrund der Basiseigenschaft existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

$$u_n \in U_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad u_n \xrightarrow{n\to\infty} x\,.$$

Mit dem ersten Beweisteil ergibt sich

$$\big\|P_n\,(x-u_n)\big\|^2 + \big\|Q_n\,(x-u_n)\big\|^2 = \|x-u_n\|^2 \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

sowie

$$u_n = P_n\, u_n\,, \qquad Q_n\, u_n = 0$$

---

[5] Es gilt

$$\big(e_k \,|\, P_n\, x\big) = \sum_{l=1}^{n} \big(e_l \,|\, (e_k \,|\, x)\, e_l\big) = \sum_{l=1}^{n} (e_k \,|\, x)\big(e_k \,|\, e_l\big) = \big(e_k \,|\, x\big)$$

für alle $k \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ und damit

$$P_n\, P_n\, x = \sum_{k=1}^{n} \big(e_k \,|\, P_n\, x\big)\, e_k = \sum_{k=1}^{n} \big(e_k \,|\, x\big)\, e_k = P_n\, x\,.$$

Außerdem ergibt sich

$$Q_n^2\, x = Q_n\, x - P_n\, Q_n\, x = Q_n\, x\,,$$

wobei wir benutzt haben, dass $P_n\, Q_n\, x = 0$ wegen $\big(e_k \,|\, Q_n\, x\big) = \big(e_k \,|\, x\big) - \big(e_k \,|\, P_n\, x\big) = 0$ gilt.

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\big\|x - P_n\,x\big\| = \big\|Q_n\,x\big\| = \big\|Q_n(x - u_n)\big\| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

sowie

$$\sum_{l=1}^{n} \big|(e_n\,|\,x)\big|^2 = \|P_n\,x\|^2 = \|x\|^2 - \|Q_n\,x\|^2 \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \|x\|^2$$

und haben damit die beiden Behauptungen gezeigt.

Bemerkungen

1. Dier zweite Teil der Behauptung wird Parsevalsche Gleichung genannt und kann als unendlich-dimensionales Analogon zum Satz von Pythagoras betrachtet werden.

2. Im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ müssen wir bei der Reihenfolge der Terme im Skalarprodukt aufpassen und der erste Teil der Behauptung ist äquivalent zu

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(x\,|\,e_n)}\,e_n\,.$$

   Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt natürlich $(x\,|\,e_n) = (e_n\,|\,x)$.

3. Aus dem Behauptungen ergibt sich auch die Darstellungsformel

$$\big(y\,|\,x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\big(e_n\,|\,y\big)}\,(e_n\,|\,x)$$

   für alle x, $y \in X$.

4. Die *Koordinatenabbildung* bzgl. einer orthonormalen Basisfolge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch

$$x \in X \qquad \mapsto \qquad \big((e_n\,|\,x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

   gegeben und liefert einen isometrischen Isomorphismus zwischen X und dem Hilbert-Raum $\ell^2\big(\mathbb{N};\,\mathbb{K}\big)$.

   Beweis: Das Theorem garantiert für jedes $x \in X$, dass die entsprechende Koordinatenfolge $\big((e_n\,|\,x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ quadratisch summierbar ist. Umgekehrt können wir mit denselben Methoden wie im Beweis zeigen, dass für jedes $\lambda \in \ell^2\big(\mathbb{N};\,\mathbb{K}\big)$ der Punkt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\,e_n$$

   im Sinne einer konvergenten Partialsummenfolge wohldefiniert ist und dass $(e_n\,|\,x) = \lambda_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

5. Achtung: Die erste Reihe im Theorem konvergiert im Allgemeinen nicht absolut, denn die absolute Konvergenz ist wegen

$$\big\|(e_n\,|\,x)\,e_n\big\| = \big|(e_n\,|\,x)\big|$$

äquivalent zur Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|(e_n \,|\, x)\big| < \infty \,.$$

Die Koordinatenfolge $\big((e_n \,|\, x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gehört zwar immer zum Folgenraum $\ell^2\big(\mathbb{N};\, \mathbb{K}\big)$, liegt aber im Allgemeinen nicht in dem kleineren Raum $\ell^1\big(\mathbb{N};\, \mathbb{K}\big)$.

Gegenbeispiel: Ist $x \in X$ das Element mit der Koodinatenfolge

$$\lambda_n = (e_n \,|\, x) = 1/n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

so gilt zwar $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$, aber auch $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \infty$.

6. *Ausblick*: Jeder Hilbert-Raum ist isometrisch isomorph zu $\ell^2\big(M;\, \mathbb{K}\big)$, wobei die Menge M die Indexmenge eines vollständigen Orthonormalsystem $(e_m)_{m\in M}$ von X ist. Dabei gelten immer die immer Darstellungsformeln

$$x = \sum_{m\in M} (e_m \,|\, x)\, e_m \,, \qquad \|x\|^2 = \sum_{m\in M} \big|(e_m \,|\, x)\big|^2 \,,$$

sofern die Konvergenz der ersten Reihe im richtigen Sinne interpretiert wird. Für jede Menge M (endlich, abzählbar oder überabzählbar) besteht $\ell^2\big(M;\, \mathbb{K}\big)$ aus allen Funktionen $x : M \to \mathbb{K}$ (bzw. aus allen Familien $(x_m)_{m\in M}$), die an höchstens abzählbar vielen Stellen einen Wert ungleich 0 annehmen und deren Norm via

$$\big(y \,|\, x\big) = \sum_{m\in M} \overline{y_m}\, x_m \,, \qquad \|x\|^2 = \sum_{m\in M} \big|x_m\big|^2$$

endlich ist. Für weitere Details und entsprechende Beweise verweisen wir auf die Literatur, zum Beispiel auf [Wer, Abschnitt V.4].

Vorlesung 23 : 23. Januar 2024

4.3 adjungierte Operatoren

Vorbemerkung In diesem Abschnitt sind X und Y zwei gegebene Hilbert-Räume und $L \in \mathsf{Lin}(X;\, Y)$ ein linearer sowie stetiger Operator.

Definition Der durch

$$\big(L^* y\,|\,x\big)_X := \big(y\,|\,L\,x\big)_Y$$

definierte Operator $L^* \in \mathsf{Lin}(Y;\, X)$ wird adjungierter Operator von L genannt.

Bemerkungen

1. L^* ist das Hilbert-Raum-Analogon zum weiter oben definierten dualen Operator.
2. Die Rechenregeln
$$\big(\lambda\,L + \tilde{\lambda}\,\tilde{L}\big)^* = \lambda\,L^* + \tilde{\lambda}\,\tilde{L}^*\,, \qquad \|L\|_{X;\,Y} = \|L^*\|_{Y;\,X}$$
sowie
$$L = L^{**} := \big(L^*\big)^*\,, \qquad \big(L\,\tilde{L}\big)^* = \tilde{L}^* L^*$$
und
$$\ker(L) = \big(\operatorname{im}(L^*)\big)^\perp\,, \qquad \ker(L^*) = \big(\operatorname{im}(L)\big)^\perp$$
ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für duale Operatoren in reflexiven Banach-Räumen.
3. Die Eigenschaften des Skalarproduktes implizieren auch
$$\big(x\,|\,L^* y\big)_X = \overline{\big(L^* y\,|\,x\big)_X} = \overline{\big(y\,|\,L\,x\big)_Y} = \big(L\,x\,|\,y\big)_Y$$
für alle $x \in X$ und $y \in Y$.
4. Es gilt
$$\|L^* L\|_{X;\,X} = \|L\|^2_{X;\,Y}$$
und damit auch $\|LL^*\|_{Y;\,Y} = \|L^*\|^2_{Y;\,X}$ sowie $\|LL^*\|_{Y;\,Y} = \|L^* L\|_{X;\,X}$.
<u>*Beweis*</u>: Wenn wir auf beiden Seiten der Abschätzung
$$\big\|L\,x\big\|^2_Y = \big(L\,x\,|\,L\,x\big)_Y = \big(L^* L\,x\,|\,x\big)_X \leq \big\|L^*\,L\big\|_{X;\,X}\,\|x\|^2_X$$
das Supremum über alle $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ bilden, erhalten wir
$$\big\|L\big\|^2_{X;Y} \leq \big\|L^*\,L\big\|_{X;\,X}\,.$$
Andererseits gilt aber auch
$$\big\|L^*\,L\big\|_{X;\,X} \leq \big\|L^*\big\|_{Y;\,X}\big\|L\big\|_{X;\,X} = \big\|L\big\|^2_{X;\,X}$$
und die Behauptung folgt nach Kombination beider Teilresultate. □

5. L ist genau dann eine Isometrie, wenn $L^*L = \mathrm{id}_X$ gilt.

   <u>Beweis</u>: Die zweite Bedingung ist äquivalent zu

   $$\big(L\,x\,|\,L\,\tilde{x}\big)_Y = (x\,|\,\tilde{x})_X \qquad \text{für alle} \quad x,\, \tilde{x} \in X$$

   und impliziert damit die erste via

   $$\|L\,x\|_Y^2 = \big(L\,x\,|\,L\,x\big)_Y = (x\,|\,x)_X = \|x\|_X^2 \qquad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

   Für die umgekehrte Implikation bemerken wir, dass die zweite dieser Formeln wegen der Parallelogramm-Identitäten in X und Y die erste nach sich zieht. □

6. L heißt <u>unitär</u>, sofern

   $$L^*L = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad L\,L^* = \mathrm{id}_Y$$

   gilt. Diese Gleichungen beschreiben, dass sowohl L als auch L^* eine Isometrie sind. Im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sagt man manchmal auch, L sei <u>orthogonal</u>.

7. Die beiden vorherigen Bemerkungen zeigen: L ist genau dann unitär, wenn L isometrisch und surjektiv ist.

8. Im Fall von $X = Y$ nennen wir L <u>hermitesch</u> (oder <u>selbstadjungiert</u>) bzw. <u>normal</u>, sofern

   $$L^* = L \qquad \text{bzw.} \qquad L^*L = L\,L^*$$

   gilt. Alternativ können wir diese Bedingung als

   $$\big(L\,y\,|\,x\big)_X = \big(y\,|\,L\,x\big)_X \qquad \text{bzw.} \qquad \big(L\,y\,|\,L\,x\big)_X = \big(L^*y\,|\,L^*x\big)_X$$

   für alle $x,\, Y \in X$ formulieren. Siehe dazu auch den *Satz von Hellinger-Toeplitz* in den Hausaufgaben.

   <u>Beweis</u>: Die erste alternative Formel ergibt sich direkt aus den Definitionen und die zweite kann unter Verwendung von $L^{**} = L$ als

   $$\big((L^*L - L\,L^*)\,y\,|\,x\big)_X = 0$$

   geschrieben werden. □

9. Jeder hermitesche Operator ist normal und im Fall von $X = Y$ ist jeder unitäre Operator ebenfalls normal.

10. Die Operatoren $L^*L \in \mathsf{Lin}(X;\,X)$ und $L\,L^* \in \mathsf{Lin}(Y;\,Y)$ sind beide hermitesch.

11. Für jeden normalen Operator gilt $\ker(L) = \ker(L^*)$.

    <u>Beweis</u>: Für alle $x,\, \tilde{x} \in X$ berechnen wir

    $$\begin{aligned} 0 &= \big(L^*L\,x - L\,L^*x\,|\,x\big) = \big(L^*L\,x\,|\,x\big) - \big(L\,L^*x\,|\,x\big) \\ &= \big(L\,x\,|\,L\,x\big) - \big(L^*x\,|\,L^*x\big) \end{aligned}$$

    und erhalten $\|L\,x\|_X = \|L^*\,x\|_X$, wobei wir $L = L^{**}$ benutzt haben. Insbesondere gilt also $L\,x = 0$ genau dann, wenn $L^*x = 0$. □

Beispiele

1. Die Matrizen

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \mathtt{i} & 1-\mathtt{i} \\ 1+\mathtt{i} & \mathtt{i} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathtt{i} & -1 & -\mathtt{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathtt{i} & -1 & \mathtt{i} \end{pmatrix}$$

sind unitär, wohingegen

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+\mathtt{i} \\ 2-\mathtt{i} & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1+\mathtt{i} & 1+4\,\mathtt{i} & 2 \\ 1-\mathtt{i} & 2 & 1 & -2\,\mathtt{i} \\ 1-4\,\mathtt{i} & 1 & 4 & 1-\mathtt{i} \\ 2 & 2\,\mathtt{i} & 1+\mathtt{i} & -2 \end{pmatrix}$$

hermitesch sind.

<u>*Bemerkung*</u>: Eine komplexe $n{\times}n$-Matrix ist genau dann unitär, wenn ihre Spaltenvektoren (sowie ihre Zeilenvektoren) eine orthonormale Basis bilden.

2. Mit $X = Y = \ell^2\big(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}\big)$ betrachten wir den *Linksshift*-Operator mit

$$\big(L\,x\big)_j = x_{j+1}$$

und mithilfe der Nebenrechnung[6]

$$\big(y\,|\,x\big) = 2w\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\overline{y_j}\,\big(L\,x\big)_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\overline{y_j}\,x_{j+1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\overline{y_{j-1}}\,x_j$$

schließen wir

$$\big(L^* y\big)_j = y_{j-1}\,,$$

d.h. L^* ist der *Rechtsshift*-Operator. Insbesondere gilt $L^*\,L = L\,L^* = \mathrm{id}_X$ und sowohl L als auch L^* sind isometrisch.

3. Der *linksseitige Differenzenoperator* auf $X = Y = \ell^2\big(\mathbb{Z};\,\mathbb{K}\big)$ ist durch

$$\big(L\,x\big)_j = x_j - x_{j-1}$$

geben und adjungiert zum Negativen des *rechtsseitigen Differenzenoperators*, d.h.

$$\big(L^* y\big)_j = -y_j + y_{j+1} = -\big(y_{j+1} - y_j\big)\,.$$

Insbesondere gilt

$$\big(L^* L\,x\big)_j = \big(L\,L^* x\big)_j = -\big(\Delta x\big)_j = -\big(x_{j+1} + x_{j-1} - 2\,x_j\big)\,,$$

wobei Δ des einfachste Beispiel eines *diskreten Laplace-Operators* ist.

4. Wenn wir Linksshift auf dem Raum $X = Y = \ell^2\big(\mathbb{N};\,\mathbb{K}\big)$ betrachten, so gilt

$$\big(L\,x\big)_n = x_{n+1}\,, \qquad \big(L^*\,y\big)_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1, \\ y_{n-1} & \text{für } n > 1, \end{cases}$$

d.h. L^* entspricht weiterhin dem Rechtsshift. Diesmal gilt jedoch

$$L\,L^* = \mathrm{id}_X\,, \qquad L^* L \neq \mathrm{id}_X$$

und wir sehen, dass L^*, aber nicht L eine Isometrie ist. Insbesondere ist L nicht injektiv und L^* nicht surjektiv.

[6] Im letzten Schritt haben wir eine Indexverschiebung durchgeführt.

Lemma (**nützliches Kriterium für Hermitezität**) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $X = Y$ ist L genau dann hermitesch, falls $(x \,|\, L\,x)_X$ für alle $x \in X$ reell ist.

Beweis *Hinrichtung*: Mit $L = L^*$ ergibt sich

$$\big(x \,|\, L\,x\big)_X = \big(L\,x \,|\, x\big)_X = \overline{\big(x \,|\, L\,x\big)_X}$$

für alle $x \in X$.

Rückrichtung: Seien $x,\, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\big(x + \lambda\,y \,|\, L(x + \lambda\,y)\big) = \big(x \,|\, L\,x\big) + \lambda\,\big(x \,|\, L\,y\big) + \overline{\lambda}\,\big(y \,|\, L\,x\big) + \overline{\lambda}\,\lambda\,\big(y \,|\, L\,y\big)$$

und nach komplexer Konjugation beider Seiten erhalten wir

$$\big(x + \lambda\,y \,|\, L(x + \lambda\,y)\big) = \big(x \,|\, L\,x\big) + \overline{\lambda}\,\big(L\,y \,|\, x\big) + \lambda\,\big(L\,x \,|\, y\big) + \overline{\lambda}\,\lambda\,\big(y \,|\, L\,y\big)$$

aufgrund der Voraussetzung. Durch Subtraktion der Gleichungen und Termumstellung erhalten wir

$$\lambda\,\big(x \,|\, L\,y\big) + \overline{\lambda}\,\big(y \,|\, L\,x\big) = \overline{\lambda}\,\big(L\,y \,|\, x\big) + \lambda\,\big(L\,x \,|\, y\big)$$

und für die zwei speziellen Wahlen $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = i$ ergibt sich hieraus

$$\big(x \,|\, L\,y\big) \pm \big(y \,|\, L\,x\big) = \pm\big(L\,y \,|\, x\big) + \big(L\,x \,|\, y\big)\,.$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$\big(x \,|\, L\,y\big) = \big(L\,x \,|\, y\big) = \big(x \,|\, L^* y\big)$$

und weil $x,\, y$ beliebig waren, folgt die Behauptung. □

Lemma (**nützliche Formel für die Norm hermitescher Operatoren**) Es gilt

$$\|L\|_{X;\,X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \big|(x \,|\, L\,x)_X\big|$$

für jeden hermiteschen Operator L.

Beweis Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Definition von Operatornorm schließen wir

$$\big|(x \,|\, L\,x)_X\big| \leq \|x\|_X\,\|L\,x\|_X \leq \|L\|_{X;\,X}\,\|x\|_X^2$$

für alle $x \in X$ und erhalten nach Supremumsbildung die Abschätzung $C \leq \|L\|_{X;\,X}$ mit

$$C := \sup_{\|x\|_X = 1} \big|(x \,|\, L\,x)_X\big| = \sup_{x \neq 0} \frac{\big|(x \,|\, L\,x)_X\big|}{\|x\|_X^2}\,.$$

Seien nun $x,\, y \in X$ beliebig fixiert mit $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$. Aufgrund von $L^* = L$ gilt

$$\begin{aligned} 4\ \mathrm{Re}\,\big((y \,|\, L\,x)\big) &= 2\,(y \,|\, L\,x) + \overline{2\,(y \,|\, L\,x)} = 2\,(y \,|\, L\,x) + \overline{2\,(L^*\,y \,|\, x)} \\ &= 2\,(y \,|\, L\,x) + \overline{2\,(L\,y \,|\, x)} = 2\,(y \,|\, L\,x) + 2\,(x \,|\, L\,y) \\ &= \big(x + y \,|\, L\,(x + y)\big) - \big(x - y \,|\, L\,(x - y)\big) \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{Re}\,\big((y\,|\,L\,x)\big)\big| &\le \tfrac14\,\big|(L\,(x+y)\,|\,x+y)\big| + \tfrac14\,\big|(L\,(x-y)\,|\,x-y)\big| \\ &\le \tfrac14\,C\,\big(\,\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2\,\big) = \tfrac12\,C\,\big(\,\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\,\big) = C\,,\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Parallelogramm-Identität ausgewertet haben. Analog zeigen wir die entsprechende Ungleichung für den Imaginärteil[7] und erhalten insgesamt

$$\big|(y\,|\,L\,x)\big| \le C\,.$$

Durch Supremumsbildung über alle zugelassenen x, y ergibt sich schließlich die komplementäre Abschätzung $\|L\|_{X;\,X} \le C$. □

Theorem (**äquivalente Charakterisierung orthogonaler Projektoren**) Für jeden Projektor $P \in \mathsf{Lin}(X;\,X)$ mit $P \neq 0$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

1. P ist orthogonaler Projektor, d.h. $\mathrm{im}\,(P) = \ker\,(P)^\perp$.
2. Es gilt $\|P\|_{X;\,X} = 1$.
3. P ist hermitesch, d.h. $P = P^*$.
4. P ist normal, d.h. $P^*P = P\,P^*$.
5. Es gilt $(x\,|\,P\,x)_X \ge 0$ für alle $x \in X$.

Hierbei ist P genau dann ein Projektor, wenn $P^2 = P$ gilt.

Beweis Wir diskutieren nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; die reelle Version kann analog bewiesen werden.

Vorbemerkung: Wir definieren

$$Q := \mathrm{id}_X - P$$

und zeigen durch einfache Nebenrechnungen die Gültigkeit von $Q^2 = Q$ sowie

$$U := \mathrm{im}\,(P) = \ker\,(Q)\,, \qquad V := \ker\,(P) = \mathrm{im}\,(Q)\,.$$

Die Unterräume U und V sind daher beide abgeschlossen und die *Zerlegungsformel*

$$x = u + v \qquad \text{mit} \qquad u := P\,x \in U \qquad \text{und} \qquad v := Q\,x \in V\,,$$

gilt für alle $x \in X$ und impliziert

$$P\,u = P^2x = P\,x = u\,, \qquad P\,v = 0$$

sowie $Q\,u = 0$, $Q\,v = v$.

Hilfsresultat: Aus $V \subseteq U^\perp$ folgt

$$P = P_U\,, \qquad V = U^\perp\,, \qquad Q = P_V\,,$$

[7] Es gilt $\mathrm{Im}\,\big((y\,|\,L\,x)\big) = \mathrm{Re}\,\big((\mathtt{i}\,y\,|\,L\,x)\big)$.

wobei die Projektoren P_U und P_V in den Bemerkungen zur linearen Variante des Projektionssatzes eingeführt wurden. In der Tat, wenn V senkrecht auf U steht, so ist die obige Zerlegung von x auch eine Zerlegung im Sinne des Projektionssatzes für den Unterraum U, und wir schließen

$$P\,x = P_U\,x \qquad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Insbesondere stimmt in diesem Fall der gegebene Projektor P mit dem orthogonalen Projektor P_U überein und die Formeln

$$V = \ker\left(P_U\right) = \operatorname{im}\left(P_U\right)^{\perp} = U^{\perp}\,, \qquad U = \operatorname{im}\left(P_U\right) = \ker\left(P_U\right)^{\perp} = V^{\perp}$$

sowie $Q = \mathrm{id}_X - P_U = P_{U^\perp} = P_V$ ergeben sich unmittelbar aus den Bemerkungen zum Projektionssatz.

1.⇒2.: Wegen $V = U^{\perp}$ folgt

$$\|P\|_{X;\,X} = \|P_U\|_{X;\,X} = 1$$

aus dem obigen Hilfsresultat.

2.⇒1.: Seien $u \in U$ und $v \in V$ beliebig fixiert. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt[8]

$$P(\lambda\,u + v) = \lambda\,u$$

und die Voraussetzung garantiert via

$$\begin{aligned}\lambda^2\,\|u\|^2 = \|\lambda\,u\|^2 &= \|P(\lambda\,u+v)\|^2\\ &\le \|P\|_{X;\,X}^2\,\|\lambda\,u+v\|^2 = \|\lambda\,u+v\|^2 = (\lambda\,u+v\,|\,\lambda\,u+v)\\ &= \lambda^2(u\,|\,u)_X + \lambda\,(u\,|\,v) + \lambda\,(v\,|\,u) + (v\,|\,v)\\ &= \lambda^2\,\|u\| + 2\,\lambda\,\operatorname{Re}\big((u\,|\,v)\big) + \|v\|^2\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$-\lambda\,\operatorname{Re}\big((u\,|\,v)\big) \le \|v\|_2\,.$$

Da λ beliebig war, ergibt sich

$$\operatorname{Re}\big((u\,|\,v)\big) = 0$$

und durch analoge Argumente mit $\lambda \in \mathtt{i}\,\mathbb{R}$ zeigen wir

$$\operatorname{Im}\big((u\,|\,v)\big) = 0\,.$$

Insbesondere stehen u und v senkrecht zueinander und aus der Beliebigkeit von u und v folgt $V \subseteq U^{\perp}$. Mit dem Hilfsresultat erhalten wir daher $V = U^{\perp}$.

1.⇒3.: Wir benutzen obige Zerlegungsformel für $x \in X$ und analog für $\tilde{x} \in X$ und berechnen

$$\big(P\,x\,|\,\tilde{x}\big) = \big(P\,u + P\,v\,|\,\tilde{u}+\tilde{v}\big) = \big(u+0\,|\,\tilde{u}+\tilde{v}\big) = \big(u\,|\,\tilde{u}\big) + \big(u\,|\,\tilde{v}\big) = \big(u\,|\,\tilde{u}\big) + 0$$

sowie

$$\big(x\,|\,P\,\tilde{x}\big) = \big(u+v\,|\,P\,\tilde{u} + P\,\tilde{v}\big) = \big(u+v\,|\,\tilde{u}+0\big) = \big(u\,|\,\tilde{u}\big) + \big(v\,|\,\tilde{u}\big) = \big(u\,|\,\tilde{u}\big) + 0\,.$$

[8] Mit $u = P\,\tilde{x}$ folgt wieder $P\,u = P^2\tilde{x} = P\,\tilde{x} = u$.

Wegen der Beliebigkeit von x und $\tilde{x}$ ergibt sich $P = P^*$.

3.⇒4.⇒1.: Die erste Implikation ist trivial und für die zweite benutzen wir die Formel

$$\ker(P) = \ker(P^*)\,,$$

die wir schon in den Bemerkungen weiter oben gezeigt hatten. In Kombination mit den Eigenschaften von adjungierten bzw. dualen Operatoren erhalten wir

$$V = \ker(P) = \ker(P^*) = \operatorname{im}(P)^\perp = U^\perp\,,$$

und damit $V^\perp = \big(U^\perp\big)^\perp = U$ wegen der Abgeschlossenheit von U.

3.⇒5.: Die Umformungen und Abschätzungen in

$$(x\,|\,P\,x)_X = \big(x\,|\,P^2\,x\big)_X = (P^*x\,|\,P\,x)_X = (P\,x\,|\,P\,x)_X = \|P\,x\|_X^2 \geq 0$$

gelten für alle $x \in X$.

5.⇒1.: Für alle $u \in U$, $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $P\,u = u$ sowie $P\,v = 0$. Mit der Voraussetzung erhalten wir daher

$$0 \leq \big(\lambda\,u + v\,|\,P(\lambda\,u + v)\big) = \big(\lambda\,u + v\,|\,\lambda\,u\big) = \lambda^2\,\|u\|^2 + \lambda\,\big(v\,|\,u\big)$$

und wenn wir dies mit $\lambda = +\varepsilon$ und $\lambda = -\varepsilon$ auswerten, ergibt sich

$$-\varepsilon\,\|u\|^2 \leq \big(v\,|\,u\big) \leq +\varepsilon\,\|u\|^2$$

für alle $\varepsilon > 0$ und damit $\big(v\,|\,u\big) = 0$. Insbesondere gilt also $V \subseteq U^\perp$ und das Hilfsresultat liefert $U = V^\perp$. □

Bemerkungen

1. Das Hilfsresultat im Beweis impliziert, dass die erste Aussage auch durch die folgende, etwas schwächere Bedingung ersetzt werden kann:

   1.′ Die Räume $\operatorname{im}(P)$ und $\ker(P)$ stehen senkrecht aufeinander.

2. Die Argumente im Beweis zeigen außerdem, dass ein Projektor P genau dann orthogonal ist, wenn der Projektor $Q = \mathrm{id}_X - P$ diese Eigenschaft besitzt.

Vorlesung 24 : 25. Januar 2024

Beispiele Die beiden Matrizen

$$P = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

liefern jeweils orthogonale Projektoren auf $X = \mathbb{R}^2$ mit

$$\operatorname{im}(P) = \ker(Q) = \left\{\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \ker(P) = \operatorname{im}(Q) = \left\{\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Insbesondere können wir alle äquivalenten Aussagen im Theorem alternativ durch direkte Rechnungen verifizieren.

Gegenbeispiele Nicht jeder Projektor ist orthogonal. Mit $X = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_1 \end{pmatrix}, \qquad Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = P\,x + Q\,x\,, \qquad P^2 x = P\,x\,, \qquad Q^2 x = Q\,x$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist. Insbesondere gilt

$$\mathrm{im}\,(P) = \ker\,(Q) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \ker\,(P) = \mathrm{im}\,(Q) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}\right\},$$

aber wir erhalten

$$\mathrm{im}\,(P) \neq \ker\,(P)^\perp = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{im}\,(Q) \neq \ker\,(Q)^\perp = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

und

$$P \neq P^* = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q \neq Q^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\|P\| = \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \sqrt{2}\,|x_1| = \sqrt{2}\,, \qquad P^*P = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} = P\,P^*$$

und

$$\|Q\| = \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \big|-x_1 + x_2\big| = \sqrt{2}\,, \qquad Q^*Q = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix} = Q\,Q^*\,.$$

Außerdem sind die Ausdrücke

$$\big(x\,|\,P\,x\big) = x_1^2 + x_1\,x_2\,, \qquad \big(x\,|\,Q\,x\big) = -x_1\,x_2 + x_2^2$$

nicht für alle $x \in X$ nichtnegativ (wähle zum Beispiel $x_2 = -2\,x_1$ bzw. $x_1 = +2\,x_2$). Insgesamt können wir auf viele verschiedene Weisen begründen, dass die linearen Projektoren P und Q jeweils nicht orthogonal sind.

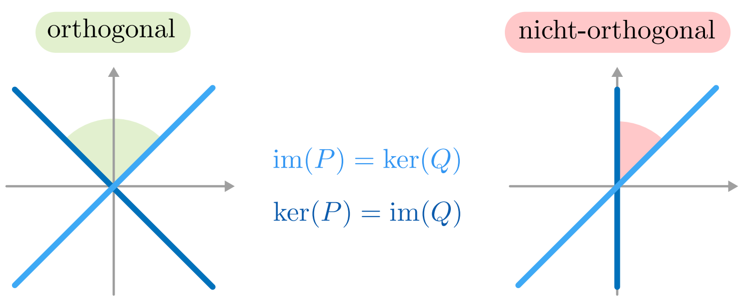


Abbildung Die Kerne und Bilder für die Projektoren aus dem Beispiel und dem Gegenbeispiel.

4.4 Satz von Lax-Milgram

Lemma (**Eigenschaften von Sesquilinearformen**) Für jede Sesquiliniearform $b : X{\times}X \to \mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Es gilt die Implikation
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty\,, \quad y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_\infty \quad \Longrightarrow \quad b(y_n,\, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} b(y_\infty,\, x_\infty)\,,$$
d.h. b ist stetig bzgl. beider Argumente.
2. Für jedes $x \in X$ gilt
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad b(y,\, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} b(y,\, x_\infty)\,,$$
und
$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad b(y_n,\, x) \xrightarrow{n\to\infty} b(y_\infty,\, x_n)\,,$$
ist für jedes $x \in X$ erfüllt. Insbesondere ist b ist stetig bzgl. des 1. Arguments sowie stetig bzgl. des 2. Arguments.
3. Es existiert eine Konstante M, sodass
$$\big|b(y,\, x)\big| \leq M\, \|x\|\, \|y\|$$
für alle $x,\, y \in X$ gilt.

Hierbei ist die Konveregenz in X immer im starken Sinne zu verstehen.

Beweis <u>*1.⇒2.*</u>: Die Behauptung ergibt sich, wenn wir die Voraussetzung mit konstanten Folgen, d.h. mit der speziellen Wahl $y_n = y$ bzw. $x_n = x$ auswerten.

<u>*2.⇒3.*</u>: Nach Voraussetzung existiert für jedes $y \in X$ bzw. jedes $x \in X$ eine Konstante C_y bzw. C_x mit

$$\big|b(y,\, x)\big| \leq C_y\, \|x\| \;\text{ für alle }\; y \in X \qquad \text{bzw.} \qquad \big|b(y,\, x)\big| \leq C_x\, \|y\| \;\text{ für alle }\; y \in X\,.$$

Für jedes y mit $\|y\| = 1$ betrachten wir das durch

$$\big\langle x_y^*,\, x\big\rangle := b(y,\, x)\,,$$

definierte Funktional $x_y^* \in X$, dessen Stetigkeitskonstante durch C_y beschränkt ist. Da außerdem

$$\big|\big\langle x_y^*,\, x\big\rangle\big| \leq C_x$$

für jedes feste $x \in X$ und alle $y \in S_1(0)$ erfüllt ist, garantiert der Satz von Banach-Steinhaus die Abschätzung

$$M := \sup_{y\in S^1(0)} \big\|x_y^*\big\|_{X^*} < \infty\,.$$

Diese impliziert

$$\big|b(y,\, x)\big| \leq M\, \|x\|$$

für jedes $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ sowie alle $x \in X$ und wegen der Homogenität von b ergibt sich schließlich die Behauptung.

3.⇒1.: Wir kombinieren die Voraussetzung mit der Nebenrechnung

$$b(y_n,\, x_n) = b(y_n - y_\infty,\, x_n - \infty) + b(y_\infty,\, x_n - x_\infty) + b(x_y - y_\infty,\, x_\infty) + b(y_\infty,\, x_\infty)$$

und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\big|b(y_n,\, x_n) - b(y_\infty,\, x_\infty)\big| \le M\,\|x_n - x_\infty\|\,\|y_n - y_\infty\| + \\ M\,\|y_\infty\|\,\|x_n - x_\infty\| + M\,\|x_\infty\|\,\|y_n - y_\infty\|\ ,\end{aligned}$$

aus der die Behauptung via $n \to \infty$ folgt. □

Theorem (**Satz von Lax-Milgram**) Ist $b : X \times X \to \mathbb{K}$ eine stetige und koerzitive Sesquilinearform, so existiert ein invertierbarer Operator $B \in \mathsf{Lin}(X;\, X)$, sodass

$$b(y,\, x) = (B\,y\,|\,x)$$

für alle $x,\, y \in X$ erfüllt ist.

Beweis *Definition von B*: Für jedes $y \in X$ betrachten wir das Funktional

$$\big\langle x_y^*,\, x\big\rangle := b(y,\, x)\,,$$

wobei die Stetigkeit von b die Abschätzung

$$\big\|x_y^*\big\|_{X^*} \le \sup_{\|x\|=1} \big\langle x_y^*,\, y\big\rangle = \sup_{\|x\|=1} b(y,\, x) \le M\,\|y\|_X$$

nach sich zieht. Wir definieren

$$B\,y := J_X^{-1}\,x_y^*$$

mithilfe des Operator J_X aus dem Rieszschen Darstellungssatz und bemerken, dass

$$\big\langle x_y^*,\, x\big\rangle = (B\,y\,|\,x)$$

für alle $x,\, y \in X$ erfüllt ist.

Eigenschaften von B, Teil 1: Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar via

$$\big(B\,(y + \tilde{y})\,|\,x\big) = b\big(\lambda\,y + \tilde{y},\, x\big) = b\big(y,\, x\big) + b\big(\tilde{y},\, x\big) = \big(B\,y\,|\,x\big) + \big(B\,\tilde{y}\,|\,x\big)$$

die Additivität von B und in Kombination mit

$$\big(B\,(\lambda\,y)\,|\,x\big) = b\big(\lambda\,y,\, x\big) = \overline{\lambda}\,b\big(y,\, x\big) = \overline{\lambda}\,\big(B\,y\,|\,x\big) = \big(\lambda\,B\,y\,|\,x\big)$$

haben wie die Linearität von B gezeigt.[9] Aus den Abschätzungen

$$\|B\,y\| = \big\|x_y^*\big\|_{X^*}$$

und

$$\|B\,y\|\,\|y\| \ge (B\,y\,|\,y) = b(y,\, y) \ge m\,\|y\|^2$$

[9]Beachte, dass sowohl b als auch das Skalarprodukt konjugiert linear im ersten Argument sind.

folgt außerdem

$$m\,\|y\| \leq \|B\,y\| \leq M\,\|y\|$$

für alle $y \in X$ und wir schließen, dass der Operator B injektiv ist und dass sein Bild ein abgeschlossener Unterraum von X ist.

Eigenschaften von B, Teil 2: Sei $x \in \mathrm{im}\,(B)^{\perp}$ beliebig fixiert. Dann gilt

$$0 = \big(B\,y\,|\,x\big) = b(y,\,x)$$

für alle $y \in X$ und die spezielle Wahl $y = x$ impliziert via

$$0 = b(x,\,x) \geq m\,\|x\|^2 \geq 0$$

$x = 0$. Wir haben damit gezeigt $\mathrm{im}\,(B) = X$ gezeigt und schließen, dass B bijektiv ist. Die Stetigkeit von B^{-1} folgt dann aus dem Satz über die Umkehrfunktion. □

Bemerkungen

1. Die Form b ist genau dann koerzitiv, wenn

$$b(x,\,x) \geq m\,\|x\|^2$$

für eine Konstante $m > 0$ sowie alle $x \in X$ gilt.

2. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist jede Sesquilinearform eine Bilinearform.

3. Der Satz von Lax-Milgram ist sehr nützlich und erlaubt es uns, die schwache Lösungstheorie elliptischer Differentialgleichungen und verwandter Probleme zu etablieren. Siehe dazu das nächste Kapitel.

4. Mit den obigen Notationen gilt

$$\|B\|_{X;\,X} \leq M\,, \quad \big\|B^{-1}\big\|_{X;\,X} \leq m^{-1}\,,$$

wobei dies sich unmittelbar aus den Ungleichungen im Beweis ergibt.

5. Wir haben im Theorem *nicht* die Gültigkeit von

$$b(y,\,x) = \overline{b(x,\,y)}$$

gefordert. Wenn diese Formel erfüllt ist, kann das Theorem sehr viel einfacher bewiesen werden, dann dann definiert b ein äquivalentes Skalarprodukt auf X und B ist gerade die Dualitätsabbildung bzgl. dieses neuen Skalarproduktes.

Beispiel Mit gegebenem Parameter $\alpha > 0$ betrachten wir auf $X = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ die Bilinearform

$$b(y,\,x) := \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (y_{j+1} - y_j)\,(x_{j+1} - x_j) + \alpha\,y_j\,x_j$$

die koerzitiv mit Konstante $m = \alpha$ und stetig mit Konstante $M = 4 + \alpha$ ist. Durch direkte Rechnungen verifizieren wir

$$(B\,y)_j = -y_{j+1} - b_{j-1} + (2+\alpha)\,y_j = -\Delta y_j + \alpha\,y_j\,.$$

Die Bijektivität von B meint gerade, dass die Operatorgleichung

$$B\,x_{\#} = y_{\#}$$

für jedes gegebene $y_{\#} \in X$ genau ein Lösung $y_{\#} \in X$ besitzt. Siehe dazu auch die Hausaufgaben.

Kapitel 5

Spektraltheorie

Vorlesung 25 : 30. Januar 2024

Einschub: kompakte Operatoren

Definition Wir nennen $L \in \mathsf{Lin}(X; Y)$ einen kompakten Operator, sofern er jede beschränkte Menge in X auf eine präkompakte Menge in Y abbildet.

Bemerkungen

1. Äquivalent zur Definition sind die beiden folgenden Forderungen:

   (i) Das Bild jeder beschränkten Folge in X besitzt eine Teilfolge, die stark in Y konvergiert.

   (ii) Das Abschluss des Bildes der Einheitskugel aus X unter L — d.h. die Menge $\operatorname{cls}\big(L(B_1(0))\big)$ — ist kompakt in Y.

2. Ist X reflexiv, so gilt: L ist genau dann kompakt, wenn jede schwach konvergente Folge in X durch L auf eine stark konvergente Folge in Y abgebildet wird (Übungsaufgabe).

3. Die Komposition eines stetigen und eines kompakten (oder eines kompakten und eines stetigen) Operators ist kompakt (Übungsaufgabe).

4. Sind X und Y Banach-Räume, so garantiert der *Satz von Schauder*, dass L genau dann kompakt ist, wenn $L^* \in \mathsf{Lin}(Y^*; X^*)$ kompakt ist.

Beispiele

1. Ist $\operatorname{im}(L)$ endlich-dimensional, so ist L kompakt.

2. Auf $X = \ell^p(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ mit $1 \le p \le \infty$ betrachten wir den Multiplikationsoperator

$$(L\,x)_j = \eta_j\,x_j$$

   mit beschränkter Koeffizientenfolge $\eta \in \ell^\infty(\mathbb{Z};\,\mathbb{K})$, wobei L wegen

$$\|L\,x\|_p \le \|\eta\|_\infty\,\|x\|_p$$

immer stetig ist. Im Fall $\eta \in \ell_0(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$ klingen die Multiplikatoren η_j für $j \to \pm\infty$ ab und L ist kompakt für $p < \infty$.

Beweis: Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ zeigen wir, dass das Bild der Einheitskugel unter L, also die Menge

$$R := \big\{ L\, x \;:\; \|x\| \le 1 \big\}$$

ein endliches ε-Netz besitzt (siehe das Lemma zu Präkompaktheit und Netzen). Dazu wählen wir zunächst einen Index $J \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sup \big\{ \, |\eta_j| \;:\; |j| > J \big\} < \varepsilon/2$$

und anschließend endliche viele $y_1, \ldots, y_N \in X$ mit

$$\tilde{R} := \big\{ y \in R :\; y_j = 0 \quad \text{für alle} \quad |j| > J \big\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_{\varepsilon/2}(y_n)\,,$$

denn die beschränkte Menge liegt in einem endlich-dimensionalen Unterraum von X und besitzt daher ein endliches $\varepsilon/2$-Netz. Für jedes $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ betrachten wir $\tilde{x} \in X$ mit

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{für } |j| \le J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und bemerken, dass $L\,\tilde{x}$ zu $\tilde{R}$ gehört. Wegen

$$\|L\,x - L\,\tilde{x}\|^p \le \sum_{j=-\infty}^{-J-1} \big|\eta_j\, x_j\big|^p + \sum_{j=+J+1}^{+\infty} \big|\eta_j\, x_j\big|^p < (\varepsilon/2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \big|x_j\big|^p = (\varepsilon/2)^p \;\|x\|^p$$

gilt $\|L\,x - L\,\tilde{x}\| < \varepsilon/2$ und damit

$$\|L\,x - y_n\| \le \|L\,x - L\,\tilde{x}\| + \|L\,\tilde{x} - y_n\| < \varepsilon/2 + /\varepsilon/2 = \varepsilon$$

für mindestens ein n. Insgesamt haben wir gezeigt, dass das $\varepsilon/2$-Netz für $\tilde{R}$ auch ein ε-Netz für R ist, wobei neben $p < \infty$ die ε-abhängige Wahl von J entscheidend war. □

3. Verallgemeinerte Multiplikationsoperatoren erhalten wir mit

$$\big(L\,x\big)_j = \mu_j\,(x_{+j} + x_{-j}) + \nu_j\,(x_{+j} + x_{-j})$$

wobei die Mutiplikatoren μ und η nicht nur beschränkt sind, sondern zusätzlich die Paritätsbedingungen

$$\mu_{-j} = +\mu_{+j}\,, \qquad \nu_{-j} = +\nu_{+j}$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$ erfüllen sollen. Analog zu oben zeigen wir die Kompaktheit von L, sofern die μ_j und ν_j hinreichend schnell abklingen.

5.1 Grundbegriffe

Vorbemerkung $\big(X, \|\cdot\|_X\big)$ ist Banach-Raum und $L \in \mathsf{Lin}(X;\, X)$ ist ein gegebener Operator. Wir schreiben im folgenden

$$\lambda \quad \text{bzw.} \quad \lambda - L \qquad\qquad \text{statt} \qquad\qquad \lambda\,\mathrm{id}_X \quad \text{bzw.} \quad \lambda\,\mathrm{id}_X - L\,,$$

da diese Operatoren sehr häufig auftreten. Wir schreiben meist auch $\|x\|$ bzw. $\|L\|$ anstelle von $\|x\|_X$ bzw. $\|L\|_{X;\,X}$

Klarstellung Es gibt auch eine Sprektraltheorie unbeschränkter linearer Operatoren, aber diese ist deutlich anspruchsvoller. Wir werden uns im folgenden außerdem auf *kompakte* Operatoren beschränken.

Definition Die Resolventenmenge von L ist durch

$$\varrho(L) := \big\{\lambda \in \mathbb{K} \;:\; \lambda - L \text{ ist invertierbar}\big\}$$

definiert. Ihr Komplement

$$\sigma(L) := \mathbb{K} \setminus \varrho(L)$$

wird Spektrum von L genannt und zerfällt in das Punktspektrum

$$\sigma_{\mathrm{P}}(L) := \big\{\lambda \in \sigma(L) \;:\; \ker(\lambda - L) \neq \{0\}\big\}\,,$$

das kontinuierlichen Spektrum

$$\sigma_{\mathrm{K}}(L) := \big\{\lambda \in \sigma(L) \;:\; \ker(\lambda - L) = \{0\}\,,\; \mathrm{cls}\big(\mathrm{im}\,(\lambda - L)\big) = X\big\}$$

sowie das Restspektrum

$$\sigma_{\mathrm{R}}(L) := \big\{\lambda \in \sigma(L) \;:\; \ker(\lambda - L) = \{0\}\,,\; \mathrm{cls}\big(\mathrm{im}\,(\lambda - L)\big) \neq X\big\}\,,$$

wobei letzteres auch als residuales Spektrum bezeichnet wird.

Bemerkungen

1. Alternative Bezeichnungen sind $\mathrm{res}(L)$ und $\mathrm{spec}(L)$.
2. Der Satz über die Umkehrabbildung garantiert, dass
$$R_\lambda := \big(\lambda - L\big)^{-1}$$
für jedes $\lambda \in \varrho(L)$ stetig ist und daher zu $\mathsf{Lin}(X;\, X)$ gehört.
3. Die Elemente des Punktspektrums $\sigma_{\mathrm{P}}(L)$ bezeichnen wir als die Eigenwerte von L. Insbesondere gibt es zu jedem Eigenwert λ einen entsprechenden Eigenvektor $x \neq 0$ mit
$$\lambda\, x = L\, x\,,$$
der im Eigenraum $\ker(\lambda - L)$ liegt. Die Elemente des von $\sigma_{\mathrm{C}}(L)$ und $\sigma_{\mathrm{R}}(L)$ sind jedoch *keine* Eigenwerte, da $\lambda - L$ nur den trivialen Kern besitzt.
4. Ist X endlich-dimensional, so besteht das Spektrum nur aus Eigenwerten, d.h. es gilt $\sigma(L) = \sigma_{\mathrm{P}}(L)$.
5. Im Reellen kann der Fall $\sigma(L) = \emptyset$ eintreten. Für $X = \mathbb{R}^n$ gibt es zum Beispiel reellwertige $n\times n$-Matrizen, die nur komplexe Eigenwerte besitzen.
6. Für einen reellen Banach-Raum X ist seine Komplexifizierung
$$X_{\mathbb{C}} := X \oplus \mathtt{i}X = \{x + \mathtt{i}\, y \;:\; x,\, y \in X\}$$
ein komplexer Banach-Raum und wir können L via
$$L_{\mathbb{C}}(x + \mathtt{i}\, y) = L\, x + \mathtt{i}\, L\, y$$
in natürlicher Weise zu einem Operator $L_{\mathbb{C}} \in \mathsf{Lin}(X_{\mathbb{C}};\, X_{\mathbb{C}})$ fortsetzen. Das Spektrum von $L_{\mathbb{C}}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und die Formel
$$\sigma(L) = \mathbb{R} \cap \sigma(L_{\mathbb{C}})$$
kann einfach nachgerechnet werden.

Lemma (**fundamentale Eigenschaften der Resolvente**) Die Resolvente $\varrho(L)$ ist offen in $\mathbb{K}$ und die Abbildung

$$\lambda \quad \mapsto \quad R_\lambda = (\lambda - L)^{-1}$$

bildet $\varrho(\lambda)$ analytisch nach $\mathsf{Lin}(X;\, X)$ ab.

Beweis Sei $\lambda_\# \in \varrho(L)$ beliebig fixiert. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lambda - L = (\lambda_\# - L) \Big(1 - (\lambda_\# - \lambda) \left(\lambda_\# - L\right)^{-1} \Big)$$

und unter der Voraussetzung

$$0 < |\lambda - \lambda_\#| < \varepsilon_\# := \left\| R_\lambda \right\|$$

folgt $\lambda \in \varrho(L)$ sowie

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_\# - \lambda)^k \, R_{\lambda_\#}^{k+1}$$

aus dem Satz über die Neumann-Reihe, wobei die rechte Seite absolut bzgl. der Operatornorm konvergiert. □

Bemerkungen

1. Das Spektrum von L ist also eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}$.

2. Es gilt außerdem

   $$\sigma(L) \subseteq \big\{ \lambda \in \mathbb{K} \,:\, |\lambda| \leq \|L\| \,\big\}$$

   und das Spektrum von L ist sogar kompakt.

   Beweis: Wegen $\lambda - L = \lambda\,(1 - \lambda^{-1}\,L)$ und $\|\lambda^{-1}\,L\| = |\lambda|^{-1}\,\|L\|$ folgt

   $$R_\lambda = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda^{-1}\,L\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} L^k$$

   für alle λ mit $|\lambda| > \|L\|$ aus dem Satz über die Neumann-Reihe. □

3. Mit mehr Aufwand können wir im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Formeln

   $$\sigma(L) \neq \emptyset\,, \qquad \sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda| = \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} \;,$$

   zeigen, wobei das Supremum in der zweiten Formel als Spektralradius von L bezeichnet wird. Der Beweis benutzt jedoch nicht-triviale Aussagen aus der komplexen Analysis, siehe zum Beispiel die Darstellung in [Alt, Kapitel 9] oder in [Wer, Kapitel VI] .

4. Ist X ein Hilbert-Raum und L normal, so gilt

   $$\sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda| = \|L\| \;,$$

   d.h. die Operatornorm von L ist gerade der Spektralradius von L. Für hermitesche Operatoren werden wir dies unten beweisen und für andere normale Matrizen verweisen wir auf [Wer, Satz VI.1.7].

5. Es gilt

$$(\lambda \, \mathrm{id}_X - L)^* = \lambda \, \mathrm{id}_{X^*} - L^*$$

im Sinne dualer Operatoren (wobei L^* den Dualraum X^* in sich abbildet) und die Formeln

$$\varrho(L) = \varrho(L^*)\,, \qquad \sigma(L) = \sigma(L^*)\,,$$

ergeben sich aus dem Satz über Dualität und Invertierbarkeit.

6. Ist X ein Hilbert-Raum, so gilt

$$\sigma(L^*) = \overline{\sigma(L)} = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \overline{\lambda} \in \sigma(L)\big\}\,,$$

sofern L^* den Adjungierten von L bezeichnet (der X in sich abbildet).

Lemma (**Spektralradius für selbstadjungierte Operatoren**) Seien X ein Hilbert-Raum und L ein hermitescher Operator. Dann enthält $\sigma(L)$ den Wert $-\|L\|$ oder den Wert $+\|L\|$.

Beweis Wir hatten im vorherigen Abschnitt die Formel

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \big|\big(x \,|\, L\,x\big)\big|$$

hergeleitet und wählen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{sowie} \qquad \big|\big(x_n \,|\, L\,x_n\big)\big| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \|L\|\;.$$

Nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge (die wir nicht neu bezeichnen) gilt

$$\big(x_n \,|\, L\,x_n\big) \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \lambda$$

mit $\lambda = -\|L\|$ oder $\lambda = +\|L\|$ und unter Verwendung von $\|L\,x_n\| \leq \|L\|\,\|x_n\| = |\lambda|$ erhalten wir das Konvergenzresultat

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda\,x_n - L\,x_n\|^2 &= \lambda^2\,\|x_n\|^2 - 2\,\lambda\big(x_n \,|\, L\,x_n\big) + \|L\,x_n\|^2 \\ &\leq 2\,\lambda^2 - 2\,\lambda\big(x_n \,|\, L\,x_n\big) \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0\,. \end{aligned}$$

Die Annahme $\lambda \in \varrho(L)$ impliziert daher via

$$1 = \|x_n\| = \big\|(\lambda - L)^{-1}(\lambda\,x_n - L\,x_n)\big\| \leq \big\|(\lambda - L)^{-1}\big\|\,\|\lambda\,x_n - L\,x_n\| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

einen Widerspruch und wir schließen, dass λ zu $\sigma(L)$ gehört. □

Bemerkungen

1. Wir hatten oben schon gezeigt, dass $|\lambda| \leq \|L\|$ für alle $\lambda \in \sigma(L)$ gilt. Insbesondere ist $\|L\|$ wirklich der Spektralradius eines hermiteschen Operators.

2. Wir werden unten sehen, dass $\pm\|L\|$ für jeden kompakten hermiteschen Operator sogar Eigenwert ist und dass der entsprechende Eigenraum aus den Lösungen eines Optimierungsproblems besteht.

3. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen bei einem hermiteschen Operator senkrecht aufeinander.

   Beweis: Wie in der *Linearen Algebra* gilt

$$\lambda_1\big(x_1\,|\,x_2\big) = \big(\lambda_1\,x_1\,|\,x_2\big) = \big(L\,x_1\,|\,x_2\big) = \big(x_1\,|\,L\,x_2\big) = \big(x_1\,|\,\lambda_2\,x_2\big) = \lambda_2\,\big(x_1\,|\,x_2\big)$$

   und wir erhalten $\big(x_1\,|\,x_2\big) = 0$ für $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

Vorlesung 26 : 01. Februar 2024

Spektrum von Multiplikationsoperatoren Wir hatten diese Operatoren auf dem Folgenraum $X = \ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ schon oben eingeführt und bemerken, dass $x \in X$ genau dann ein Eigenwert zu λ ist, wenn für alle $j \in \mathbb{Z}$

$$\lambda\,x_j = \eta_j\,x_j \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \eta_j \quad \text{oder} \quad x_j = 0$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt

$$\sigma_{\mathrm{P}}(L) = \big\{\eta_k \,:\, k \in \mathbb{Z}\big\}$$

wobei der k-te Einheitsvektor $x = e_k$ immer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \eta_k$ ist.

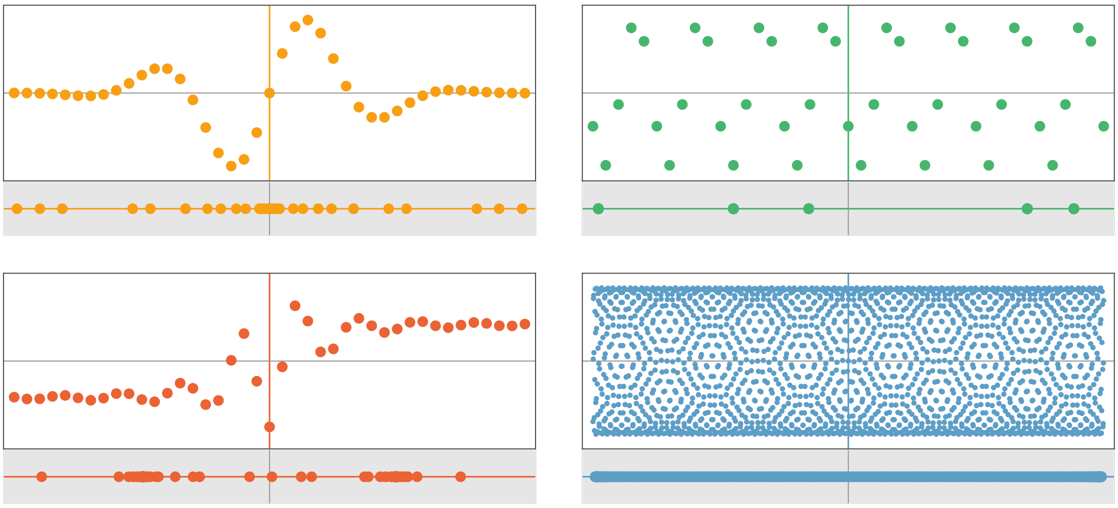


Abbildung Ein abklingendes (gelb), ein periodisches (grün, mit Periode 5), ein konvergentes (rot) sowie ein ergodisches (blau) Beispiel für den Multiplikator η sowie das jeweilige reelle Spektrum (graue Boxen), das aus allen Eigenwerten sowie ihren Häufungspunkten besteht.

abklingender Fall: Für $\eta \in \ell_0(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ gelten die folgenden Aussagen:

1. L ist (wie wir schon gezeigt haben) ein kompakter Operator.[1]

2. Die Zahl 0 liegt immer in $\sigma(L)$, kann aber zu jedem der drei Teile gehören.

   Beweis: Gilt $\eta_k = 0$ für ein k, so folgt $0 \in \sigma_{\mathrm{P}}(L)$. Andernfalls ist 0 ein echter Häufungspunkt von $\sigma_P(L)$ und gehört damit zum Spektrum von L, da dieses abgeschlossen ist. Im Fall $p < \infty$ ergibt sich $0 \in \sigma_{\mathrm{C}}(L)$, denn wir können leicht zeigen, dass $\operatorname{im}(L)$ den Unterraum $\ell_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ enthält und damit insbesondere dicht in X liegt. Für $p = \infty$ ist $\operatorname{im}(L)$ ein Unterraum von $\ell_0(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ und kann damit keine dichte Teilmenge von X sein.[2] Also gilt $0 \in \sigma_R(L)$. □

---

[1] Mit geringfügig mehr Aufwand können wir sogar zeigen, dass der Multiplikationsoperator L dann und nur dann kompakt ist, wenn $\lim_{j\to\pm\infty} \eta_j = 0$ gilt.

[2] Wir hatten weiter oben schon den Abschluss von $\ell_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ bzgl. der p-Norm berechnet: Es ist $\ell^p(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ für $p < \infty$, aber $\ell_0(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ für $p = \infty$. Wir hatten auch schon gezeigt, dass $\ell_0(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ ein echter und abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ ist.

3. Jedes $\lambda \neq 0$, dass nicht zum Punktspektrum gehört, liegt in der Resolvente $\varrho(L)$.

   Beweis: Durch direkte Rechnungen zeigen wir

$$\big((\lambda - L)^{-1}x\big)_j = \frac{x_j}{\lambda - \eta_j}\,, \qquad \big\|(\lambda - L)^{-1}\big\| = \frac{1}{\min\{\lambda - \eta_k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}}\,,$$

   wobei das Minimum auf der rechten Seite aufgrund der Eigenschaften von $\sigma_{\mathrm{P}}(L)$ wohldefiniert und positiv ist. □

Für abklingende η erhalten wir also

$$\sigma(L) = \sigma_{\mathrm{P}}(L) \cup \{0\}\,, \qquad \sigma_{\mathrm{C}}(L) \cup \sigma_{\mathrm{R}}(L) \subseteq \{0\}$$

in jedem der möglichen Unterfälle.

periodischer Fall: Gilt $\eta_j = \eta_{j+J}$ für ein $J \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \mathbb{Z}$, so besteht $\sigma_{\mathrm{P}}(L)$ nur aus endlich vielen Punkten und wir erhalten

$$\#\,\sigma_{\mathrm{P}}(L) < \infty\,, \qquad \sigma_{\mathrm{C}}(L) = \sigma_{\mathrm{R}}(L) = \emptyset$$

mit analogen Argumenten zu oben. Jeder Eigenraum ist aber unendlich-dimensional.

konvergenter Fall: Existieren die beiden Grenzwerte

$$\eta_{-\infty} = \lim_{k\to-\infty} \eta_k \qquad \text{sowie} \qquad \eta_{+\infty} = \lim_{k\to+\infty} \eta_k\,,$$

so ist L nicht kompakt (es sei denn, wir sind im Sonderfall $\eta_{-\infty} = 0 = \eta_{+\infty}$), aber durch Modifikation aller Argumente aus dem abklingenden Fall können wir die Formeln

$$\sigma(L) = \sigma_{\mathrm{P}}(L) \cup \{\eta_-,\, \eta_+\}\,, \qquad \sigma_{\mathrm{C}}(L) \cup \sigma_{\mathrm{R}}(R) \subseteq \{\eta_-,\, \eta_+\}$$

herleiten. Insbesondere kann $\eta_{-\infty}$ zum Punktspektrum, zum kontinuierlichen Spektrum oder zum Restspektrum von L gehören und das Gleiche trifft auf $\eta_{+\infty}$ zu.

ergodischer Fall: Als prototypisches Beispiel betrachten wir

$$\eta_j = \sin(j) \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}\,,$$

und die wesentlichen spektralen Eigenschaften von L können wie folgt zusammengefasst werden:

1. Das Punktspektrum liegt dicht im Intervall $[-1,\,+1]$.

2. Jedes λ mit $|\lambda| > 1$ liegt in $\varrho(L)$.

   Beweis: Die Formeln

$$\big((\lambda - L)^{-1}x\big)_j = \frac{x_j}{\lambda - \eta_j}\,, \qquad \big\|(\lambda - L)^{-1}\big\| = \big(|\lambda| - 1\big)^{-1}\,,$$

   ergeben sich aus direkten Rechnungen. □

3. Jedes λ mit $|\lambda| \leq 1$, dass nicht Eigenwert ist, gehört für $p < \infty$ zu $\sigma_{\mathrm{C}}(L)$, aber für $p = \infty$ zu $\sigma_{\mathrm{R}}(L)$.

   Beweis: Dies folgt wieder aus der vorhandenen bzw. fehlenden Dichtheit von $\ell_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z};\,\mathbb{R})$. □

Insbesondere gilt $\sigma(L) = [-1, +1]$, wobei die Eigenwerte lediglich eine abzählbare und dichte Teilmenge darstellen.

allgemeiner Fall: Es gilt stets

$$\sigma(L) = \mathrm{cls}\big(\sigma_P(L)\big)\,,$$

wobei die echten Häufungspunkte der Eigenwerte für $p < \infty$ zum kontinuierlichen, für $p = \infty$ jedoch zum Restspektrum gehören.

Bemerkungen:

1. Analoge Resultate ergeben sich, wenn wir ein komplexes Setting wählen.

2. Multiplikationsoperatoren gibt es auch in anderen Funktionenräumen und ihre spektralen Eigenschaften können oftmals vergleichsweise einfach charakterisiert werden.

   Beispiel: Wir betrachten den Raum $X = \mathsf{C}(I; \mathbb{R})$ über einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ sowie den Operator

   $$\big(L\,x\big)(t) = \eta(t)\,x(t)\,,$$

   wobei η eine gegebene stetige Funktion auf I ist. Unter der generischen Annahme, dass η keine konstanten Plateaus aufweist,[3] ergibt sich

   $$\sigma_{\mathrm{P}}(L) = \emptyset\,, \qquad \sigma_{\mathrm{C}}(L) = \emptyset\,, \qquad \sigma_{\mathrm{R}}(L) = [\min\eta,\, \max\eta]$$

   aus elementaren Argumenten. Insbesondere gibt es nur das Restspektrum.

   Beweis: Mit $\lambda = \eta(s)$ gilt

   $$\big((\lambda - L)x\big)(t) = \big(\eta(s) - \eta(t)\big)x(t)$$

   für alle $t \in I$ und wir sehen, dass jedes $(\lambda - L)\,x$ als Funktion auf I ein Nullstelle in $s \in I$ besitzt. Mit elementaren Argumenten aus *Analysis 1* zeigen wir nun, dass $\lambda - L$ im Raum X nur den trivialen Kern, aber kein dichtes Bild besitzt. Für $\lambda < \min\eta$ oder $\lambda > \max\eta$ können wir jedoch $(\lambda - L)^{-1}$ explizit angeben. □

   Ausblick: Wenn wir den analogen Multiplikationsoperator in $X = \mathsf{L}^p(I; \mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$ betrachten, ergibt sich

   $$\sigma_{\mathrm{P}}(L) = \emptyset\,, \qquad \sigma_{\mathrm{C}}(L) = [\min\eta,\, \max\eta]\,, \qquad \sigma_{\mathrm{R}}(L) = \emptyset\,,$$

   d.h. es gibt dann nur das kontinuierliche Spektrum.

3. Viele lineare und stetige Operatoren können durch geeignete Transformationen in Multiplikationsoperatoren überführt werden. Ein klassisches Beispiel sind die *Pseudodifferentialoperatoren*, die im Fourier-Raum der Multiplikation mit ihrer *Symbol-Funktion* entsprechen.

[3] Eine hinreichende Bedingung ist, dass $\dot\eta(t) \neq 0$ oder $\ddot\eta(t) \neq 0$ für jedes $t \in I$ gilt.

5.2 Spektraltheorie kompakter Operatoren, Teil 1

Lemma (**Optimierungsproblem für Eigenwerte**) Seien X ein Hilbert-Raum und $K \in \mathsf{Lin}(X;\, X)$ sowohl hermitesch als auch kompakt. Dann ist mindestens eine der folgenden zwei Aussagen erfüllt:

1. $-\left\|K\right\|$ ist Eigenwert von K sowie Minimum von $\mathcal{R}_K$.

2. $+\left\|K\right\|$ ist Eigenwert von K sowie Maximum von $\mathcal{R}_K$.

Hierbei ist $\mathcal{R}_K : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{R}_K(x) := \frac{\big(x \,|\, K\, x\big)}{\left\|x\right\|^2}$$

das Rayleigh-Funktional zu K.

Beweis Wir können $\left\|K\right\| \neq 0$ annehmen, da andernfalls nichts zu zeigen ist. Analog zum Beweis des Lemmas über den Spekralradius hemitescher Operatoren setzen wir $\lambda = -\left\|K\right\|$ oder $\lambda = +\left\|K\right\|$ und betrachten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\|x_n\right\| = 1 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{sowie} \qquad \big(x_n \,|\, K\, x_n\big) \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \lambda\,,$$

wobei dann auch

$$\lambda\, x_n - K\, x_n \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

im Sinne der starken Konvergenz gilt. Nach Wahl einer stark konvergenten Teilfolge gilt außerdem

$$K\, x_{n_j} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad y_\infty$$

für einen Grenzwert y_∞ und damit auch

$$x_{n_j} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad x_\infty := y_\infty/\lambda$$

sowie $\left\|x_\infty\right\| = \lim_{j\to\infty} \left\|x_{n_j}\right\| = 1$. Die Stetigkeit von K garantiert

$$K\, x_\infty = \lambda\, x_\infty\,,$$

d.h. x_∞ ist in der Tat ein Eigenvektor von K zum Eigenwert λ. Desweiteren gilt

$$-\left\|K\right\| \leq \mathcal{R}_K(x) \leq \left\|K\right\|$$

für jedes $x \in X$ und in Kombination mit $\mathcal{R}_K(x_\infty) = \lambda$ schließen wir, dass x_∞ ein Minimierer (für $\lambda < 0$) oder ein Maximierer (für $\lambda > 0$) ist . □

Bemerkungen

1. Es ist möglich, dass beide Fälle oder genau einer der beiden Fälle eintritt. Einfache endlich-dimensionale Beispiele werden durch die Matrizen

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   geliefert, wobei zwar immer $\left\|K\right\| = 1$ gilt, aber -1 bzw. $+1$ nicht immer ein Eigenwert ist.

2. Ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt $\mathcal{R}_K(x) = \lambda$.

3. Insbesondere ist jeder Eigenvektor zum Eigenwert $-\|K\|$ bzw. $+\|K\|$ ein Minimierer bzw. ein Maximierer von $\mathcal{R}_K$.[4] Die umgekehrten Aussagen sind auch richtig, aber nicht so einfach zu zeigen. Sie ergeben sich aber unmittelbar aus dem Spektralsatz weiter unten.

4. Aus dem Spektralsatz wird auch folgen, dass sowohl das Minimum als auch das Maximum von $\mathcal{R}_K$ jeweils im Spektrum von K liegen, sofern sie nicht den Wert 0 annehmen.

Algorithmus Am Anfang setzen wir $X_0 := X$. Im <u>n-ten Schritt</u> betrachten wir den Operator

$$K_n := K|_{X_{n-1}} \in \mathsf{Lin}(X_{n-1};\, X_{n-1})$$

und brechen ab, sofern dieser der Nulloperator ist. Andernfalls wählen wir $\lambda_n \in \mathbb{R}$ sowie $x_n \in X_{n-1}$ mit

$$\lambda_n\, x_n = K_n\, x_n = K\, x_n\,, \qquad \|x_n\| = 1\,, \qquad \lambda_n = \pm\,\|K_n\|\,,$$

setzen

$$X_n := \big(\operatorname{span}\{x_1\,,\ x_2\,,\ \dots\,,\ x_n\}\big)^{\perp}$$

und reiterieren.

Vorlesung 27 : 06. Februar 2024

Theorem (**Spektralsatz für kompakte Operatoren, hermitescher Fall**) Sei K hermitesch und kompakt. Dann ist der obige Algorithmus wohldefiniert und liefert mit $(\lambda_n)_{n=1\dots N}$ und $(x_n)_{n=1\dots N}$ entweder zwei endliche Listen (für $N \in \mathbb{N}$) oder zwei Folgen (für $N = \infty$) mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\lambda_n\, x_n = K\, x_n$ und $x_n \neq 0$ für alle n mit $1 \le n \le N$,

2. $0 < \lambda_{n+1} \le \lambda_n$ und $X_{n+1} \subset X_n$ für alle n mit $1 \le n < N$,

3. $(x_k\,|\,x_l) = 0$ für alle k, l mit $1 \le k < l < N$,

4. $\big|\lambda_n\big| = \big|(x_n\,|\,K\,x_n)\big| \ge \big|(x\,|\,K\,x)\big|$ für alle $x \in X_{n-1}$.

Für $N = \infty$ verschwindet K auf dem Raum

$$X_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \Big(\operatorname{cls}\big(\operatorname{span}\{x_1\,,\ x_2\,,\ \dots\,,\}\big)\Big)^{\perp}$$

und λ_n konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0.

[4] Wie schon in *Analysis1+2* unterscheiden wir zwischen Minimum und Minmierer bzw. Maximum und Maximierer.

Beweis <u>*Teil 1*</u>: Im ersten Schritt wird die Existenz von λ_1 und x_1 durch das vorherige Lemma garantiert, wobei $\|x_1\| = 1$ durch eine einfache Normierung sichergestellt werden kann. Der Raum X_1 ist also wohldefiniert und als abgeschlossener Unterraum von X selbst ein Hilbert-Raum. Die Nebenrechnung

$$\big(x_1 \,|\, K\,x\big) = \big(K\,x_1 \,|\, x\big) = \big(\lambda_1\,x_1 \,|\, x\big) = \lambda_1 \big(x_1 \,|\, x\big) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in X_1$$

zeigt außerdem, dass das Bild von X_1 unter L senkrecht auf x_1 steht und damit in X_1 enthalten ist. Insbesondere ist $K_2 = K|_{X_1}$ ein hermitescher Operator auf X_1 und außerdem auch kompakt. Wir können deshalb das vorherige Lemma auf K_2 anwenden und erhalten λ_2 sowie $x_2 \in X_1$, wobei

$$|\lambda_2| = \|K_2\| \leq \|K_1\| = \lambda_1$$

nach Konstruktion und wegen $X_1 \subset X_0$ erfüllt ist. Analog zu oben erhalten wir

$$\big(x_1 \,|\, K\,x\big) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \big(x_2 \,|\, K\,x\big) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in X_2$$

und schließen, dass K den Raum X_2 in sich abbildet. Da $K_3 = K|_{X_3}$ außerdem auch hermitesch sowie kompakt ist, können wir das vorherige Lemme nochmals, aber nun auf K_3 anwenden. Durch Rekursion dieser Argumente zeigen wir, dass der oben angegebene Algorithmus wohldefiniert ist und entweder eine endliche Liste oder eine abzählbare Folge von Eigenpaaren $(\lambda_n,\, x_n)$ liefert. Nach Konstruktion stehen die x_n paarweise senkrecht aufeinander und jedes x_n optimiert das Rayleigh-Funktional von K_n.

<u>*Teil 2*</u>: Wir betrachten den Fall $N = \infty$ und bemerken, dass $\mu = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n|$ aufgrund der Monotonie wohldefiniert und nicht negativ ist. Wegen der Kompaktheit von K existiert außerdem eine strikt monotone Indexfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie ein $y_\infty \in X$, sodass

$$y_{n_k} := \lambda_{n_k}\, x_{n_k} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad y_\infty$$

im Sinne der starken Konvergenz gilt, und dies impliziert

$$\|y_\infty\| = \lim_{n\to\infty} \|y_{n_k}\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n_k}| = \mu\,.$$

Aufgrund der paarweisen Orthogonalität der x_n gilt außerdem

$$0 = \big(y_{n_k} \,|\, y_{n_l}\big) \qquad \text{für alle} \quad l,\, k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad l \neq k$$

und wenn wir erst l und anschließend k nach ∞ laufen lassen, erhalten wir

$$0 = \big(y_\infty \,|\, y_\infty\big) = \|y_\infty\|^2 = \mu^2\,.$$

Insbesondere gilt $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

<u>*Teil 3*</u>: Mit $N = \infty$ setzen wir $K_\infty := K|_\infty$ und zeigen für jedes $x \in X_\infty$, dass

$$0 = \big(x_n \,|\, K\,x\big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und daher

$$K\,x \in \big(\operatorname{span}\{x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots\}\big)^\perp = X_\infty$$

gilt.[5] Insbesondere ist K_∞ ein kompakter und hermitescher Operator auf dem Hilbert-Raum X_∞ und nach dem vorherigen Lemma existieren λ_∞ sowie $x_\infty \in X_\infty$ mit

$$\lambda_\infty\, x_\infty = K_\infty\, x_\infty = K\, x_\infty\,, \qquad \|x_\infty\| = 1\,, \qquad |\lambda_\infty| = \|K_\infty\|\;.$$

Die Antithese $|\lambda_\infty| > 0$ impliziert in Kombination mit dem zweiten Beweisteil die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|\lambda_\infty| > |\lambda_n| > 0\,.$$

Andererseits gilt auch $x_\infty \in X_{n-1}$ und damit

$$|\lambda_n| = \big|\big(x_n\,|\,K\,x_n\big)\big| \geq \big|\big(x_\infty\,|\,K\,x_\infty\big)\big| = |\lambda_\infty|\;,$$

aber das ist der gesuchte Widerspruch. □

Bemerkungen

1. Die Eigenwerte λ_n müssen nicht paarweise verschieden sein. Die Konvergenz für $n \to \infty$ impliziert aber, dass jeder Eigenwert höchstens endlich oft auftreten kann und dass es genauso viele Eigenvektoren gibt, die den entsprechenden Eigenraum aufspannnen.

2. Mit $N < \infty$ ergibt sich

$$\ker(K) = X_N = \big(\operatorname{span}\{x_1\,,\;\ldots\;,\;x_N\}\big)^\perp$$

und für $N = \infty$ erhalten wir

$$\ker(K) = X_\infty\,.$$

In beiden Fällen kann $\dim\big(\ker(K)\big) = 0$ (und damit $\ker(K) = \{0\}$) oder $\dim\big(\ker(K)\big) > 0$ (und damit $0 \in \sigma_{\mathrm{P}}(K)$) erfüllt sein.

3. Alle Zahlen λ_n sind reell, ungleich 0 und Teil des Punktspektrums. Die Rolle von $\lambda = 0$ diskutieren wir gleich, wollen aber festhalten, dass alle anderen Zahlen zur Resolventenmenge gehören. Bei einem kompakten hermetischen Operator gilt also für jedes $\lambda \neq 0$ entweder $\lambda \in \varrho(K)$ oder $\lambda \in \sigma_{\mathrm{P}}(K)$.

$\underline{N < \infty}$: Die 0 kann in $\sigma_{\mathrm{P}}(K)$ oder in $\varrho(K)$ liegen, und zwar je nachdem, ob $\dim(X_N)$ den Wert 0 annimmt oder nicht. Typische Beispiele sind hermitesche Matrizen, die invertierbar bzw. nicht invertierbar sind.

$\underline{N = \infty}$: Im Fall von $X_\infty \neq \{0\}$ ist 0 Eigenwert und liegt im Punktspektrum. Andernfalls gehört es zum kontinuierlichen, aber nicht zum residualen Sprektrum, denn die Menge $\operatorname{span}\{x_1,\, x_2,\, \ldots\}$ ist Teilmenge des Bildes von $0\,\mathrm{Id}_X - K = -K$ und liegt dicht in X.

4. Für jedes $x \in X$ gilt

$$x = \sum_{n=1}^{N} \big(x\,|\,x^n\big) \quad + \quad P\,x\,,$$

wobei $P = P_{\ker(K)}$ die Projektion auf den Kern von K bezeichnet. In diesem Sinne verallgemeinert das Theorem die *Hauptachsentransformation* aus der *Linearen Algebra*.

[5] Wir benutzen hier, dass $U^\perp = \big(\operatorname{cls}(U)\big)^\perp$ für jeden Unterraum U von X gilt.

5. Für jedes $x \in X$ gilt die Spektralformel

$$K\,x = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \,\big(x \,|\, x_n\big)\, x_n\,,$$

wobei für $N = \infty$ die Reihe im starken Sinne konvergiert, d.h. die entsprechende Partialsummenfolge konvergiert bzgl. der Norm in X. Die absolute Konvergenz gilt jedoch im Allgemeinen nicht bzw. nur dann, wenn die Eigenwerte λ_n für $n \to \infty$ hinreichend schnell abklingen. Insbesondere ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|\lambda_n \,(x \,|\, x_n)\big| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big|(x \,|\, x_n)\big|^2\right)^{1/2}$$

aus der Hölder-Ungleichung für Reihen. Der zweite Faktor auf der rechten Seite ist dabei immer durch $\|x\|$ beschränkt, aber der erste kann durchaus den Wert ∞ annehmen.

Alternative Fassung: Die obige Summenformel für $K\,x$ kann auch operatorwertig verstanden werden. Sie ist nämlich äquivalent zur Spektraldarstellung

$$K = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n\,,$$

wobei P_n den orthogonalen Projektor auf $\mathrm{span}\{x_n\}$ beschreibt und die Reihe für $N = \infty$ in der Operatornorm konvergiert.

6. Mithilfe der Spektralformeln können wir auch gewisse Funktionen von K bilden, denn für alle hinreichend guten $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ konvergiert die rechte Seite in

$$f(K)\,x = \sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n)\,(x \,|\, x_n)\, x_n\,,$$

für alle $x \in X$ und definiert einen Operator $f(K) \in \mathsf{Lin}(X;\, X)$.

Beispiele: Es gilt

$$\exp{(K)} = \sum_{n=1}^{N} \exp{(\lambda_n)}\, P_n\,, \qquad \sin{(K)} = \sum_{n=1}^{N} \sin{(\lambda_n)}\, P_n\,.$$

Sind alle Eigenwerte nichtnegativ, so wird durch

$$(K)^{1/2} = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\, P_n\,,$$

ein Operator $K^{1/2} \in \mathsf{Lin}(X;\, X)$ definiert, wobei dann $K^{1/2}\, K^{1/2} = K$ gilt. Es gibt aber auch andere Wurzeln von K, denn wir könnten für einige den Term $\sqrt{\lambda_n}$ durch $-\sqrt{\lambda_n}$ verwenden.

Beispiele: Die obigen Formeln sind Beispiele für den *Spektralkalkül.*

7. Ein wichtiger Spezialfall sind reelle Operatoren, die kompakt, symmetrisch und positiv definit sind. Letzteres meint
$$\big(x \,|\, K\,x\big) \geq 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$
und impliziert, dass es nur nichtnegative Eigenwert gibt. Diese können via
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max\big\{\big(x \,|\, K\,x\big) \;:\; \|x\| = 1\big\} \\ \lambda_2 &= \max\big\{\big(x \,|\, K\,x\big) \;:\; \|x\|\,,\; \big(x_1 \,|\, x\big) = 0\big\} \\ &\;\vdots \\ \lambda_{n+1} &= \max\big\{\big(x \,|\, K\,x\big) \;:\; \|x\| = 1\,,\; \big(x_1 \,|\, x\big) = 0\,,\; \dots\,,\; \big(x_n \,|\, x\big) = 0\big\} \\ &\;\vdots \end{aligned}$$
durch eine Hierarchie von Maximierungsproblemen charakterisiert werden.

8. Die wesentlichen Aussagen des Theorem gelten auch für kompakte Operatoren, die zwar nicht hermitesch, aber immer noch normal sind, wobei der Beweis mit ähnlichen Methoden geführt werden kann (siehe etwa [Wer, Abschnitt 6.6]). Nur die Aussagen über die Optimalität des Rayleigh-Funktionals gelten dann nicht mehr.

Theorem (**Singulärwerte kompakter Operatoren in Hilbert-Räumen**) Sei $K \in \mathsf{Lin}(X;Y)$ ein kompakter linearer Operator zwischen den beiden Hilbert-Räumen $\big(X,\,(\cdot\,|\,\cdot)\big)$ und $\big(Y,\,(\cdot\,|\,\cdot)\big)$. Dann existieren orthonormale Vektoren $(x_n)_{n=1\dots N}$ in $\ker(K)^\perp \subseteq X$, orthonormale Vektoren $(y_n)_{n=1\dots N}$ in $\operatorname{im}(K) \subseteq Y$ sowie positive reelle Zahlen $(\mu_n)_{n=1\dots N}$, sodass die Formeln
$$\mu_n\,y_n = K\,x_n\,, \qquad \mu_n\,x_n = K^* y_n$$
sowie
$$x = \sum_{n=1}^{N} (x \,|\, x_n)\,y_n + P\,x\,, \qquad K\,x = \sum_{n=1}^{N} (x \,|\, x_n)\,y_n$$
für alle $x \in X$ erfüllt sind, wobei P den orthogonalen Projektor auf $\ker(K)$ bezeichnet. Dabei können wir
$$mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$$
annehmen.

Beweis Der Operator $K^*K \in \mathsf{L}(X;\,X)$ ist kompakt, hermitesch und wegen
$$\big(x \,|\, K^*K\,x\big)_X = (K\,x \,|\, K\,x)_Y = \|K\,x\|_Y$$
auch positiv semidefinit. Wir wählen daher entsprechende Eigenwerte $(x_n)_{n=1\dots N}$ und Eigenvektoren $(x_n)_{n=1\dots N}$ wie im vorherigen Theorem und setzen[6]
$$y_n := K\,x_n\,, \qquad \mu_n := \sqrt{\lambda_n}\,.$$
Alle Behauptungen ergeben sich nun aus direkten Rechnungen.[7] □

[6]Für jedes Eigenpaar $(\lambda,\,x)$ von K^*K gilt $\lambda\,\|x\|^2 = \big(x \,|\, \lambda x\big) = \big(K\,x \,|\, K\,x\big) = \|K\,x\|^2$ und damit auch $\lambda \geq 0$.

[7]Die Rechnung
$$\big\langle x,\,K^*K\,x\big\rangle_X = \big\langle K\,x,\,K\,x\big\rangle_Y = \|K\,x\|_Y$$

Bemerkungen

1. Die Zahlen μ_n heißen Singulärwerte von K.

2. Die μ_n sind eindeutig, aber die x_n im Allgemeinen nicht.

3. Das Theorem kann sinngemäß natürlich auch auf K^* angewendet werden, aber liefert wegen $K^{**} = K$ keine wirklich neuen Informationen. Insbesondere gilt

$$\lambda\, x = K^* K\, x\,, \quad y = \lambda^{-1/2}\, K\, x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \lambda^{-1/2}\, K^*\, y\,, \quad \lambda\, y = K\, K^*\, y$$

für alle $\lambda \neq 0$ und wir schließen, dass die Singulärwerte von K und K^* dieselben sind und jedes Paar $(x_n,\, y_n)$ für K dem Paar $(y_n,\, x_n)$ für K^* entspricht. Die Kerne von K und K^* können jedoch verschieden sein.

Beispiel Für die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad K^* K = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K\, K^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$\mu_1 = 1\,, \qquad x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \qquad y_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mu_2 = 3\,, \qquad x_2 = \tfrac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y_2 = \tfrac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist 0 Eigenwert von K^*, aber nicht von K.

5.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren, Teil 2

Lemma (**Satz von Riesz-Schauder**) Ist K kompakt, so besitzt $L = \lambda - K$ für jedes $\lambda \neq 0$ die folgenden Eigenschaften:

1. Der Kern $\ker(L)$ ist endlich-dimensional.

2. Das Bild $\operatorname{im}(L)$ ist abgeschlossen und von endlicher Kodimension.

3. Es gilt $\dim\big(\ker(L)\big) = \operatorname{codim}\big(\operatorname{im} L\big)$.

4. L ist genau dann injektiv, wenn L surjektiv ist.

---

impliziert $\ker(K^*K) \subseteq \ker(K)$ und mit $\ker(K) \subseteq \ker K^*$ schließen wir, dass die Kerne von K und $K^*\,K$ gleich sind. Außerdem gilt

$$(y_n\,|\,y_n)_Y = \lambda_n^{-1}(K\,x_n\,|\,K\,x_n)_Y = \lambda_n^{-1}(x_n\,|\,K^*\,K\,x_n)_X = \lambda_n^{-1}(x_n\,|\,\lambda_n\,x_n)_X = (x_n\,|\,x_n)_X$$

und damit $\|y_n\|_Y = \|x_n\|_X$.

Bemerkungen

1. Die Kodimension des Bildraumes von L ist
$$\operatorname{codim}\big(\operatorname{im}(L)\big) := \dim\left(X/\operatorname{im}(L)\right) = \dim\big(\operatorname{coker}(L)\big)$$
und damit die Dimension des Cokernes von L.[8]

2. Jeder Operator $L \in \mathsf{Lin}(X;\,Y)$, der die ersten beiden Eigenschaften besitzt, heißt Fredholm-Operator und
$$\operatorname{ind}(L) := \dim\big(\ker(L)\big) - \operatorname{codim}\big(\operatorname{im}(L)\big)$$
wird Fredholm-Index von L genannt.

3. Die dritte Eigenschaft besagt, dass $\lambda - K$ für jedes kompakte $K \in \mathsf{Lin}(X;\,X)$ ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist.

4. Die vierte Eigenschaft ist eine unmittelbare Folgerung der dritten und wird als Fredholm-Alternative bezeichnet.

Theorem (**Spektralsatz für kompakte Operatoren, allgemeiner Fall**) Für einen kompakten Operator K auf dem unendlich-dimensionalen Banach-Raum X gelten die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $0 \in \sigma(K)$.
2. Jeder Punkt $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von L und der entsprechende Eigenraum $\ker(\lambda - K)$ ist endlich-dimensional.
3. Das Spektrum ist entweder eine endliche Menge oder eine beschränkte und abzählbare Menge, die sich nur in 0 häuft.

Für jedes $\lambda \in \sigma(L)$ mit $\lambda \neq 0$ gelten darüber hinaus die folgenden Aussagen:

1. Der Index
$$1 \le n_\lambda := \max\big\{n \in \mathbb{N} \;:\; \ker\big((\lambda - K)^n\big) \supsetneq \ker\big((\lambda - K)^{n-1}\big)\big\}$$
ist wohldefiniert und insbesondere endlich.

2. Es gilt die Riesz-Zerlegung
$$X = N_\lambda \oplus R_\lambda\,,$$
wobei jeder der beiden Unterräume
$$N_\lambda := \ker\big((\lambda - K)^{n_\lambda}\big)\,, \qquad R_\lambda := \operatorname{im}\big((\lambda - K)^{n_\lambda}\big)$$
abgeschlossen und invariant unter K (und damit auch unter $\lambda - K$) ist.

3. L bildet R_λ bijektiv und stetig auf sich ab.

4. Das Spektrum des Operators $K|_{I_\lambda}$ ist $\sigma(L) \setminus \{\lambda\}$.

[8]Ganz allgemein ist die Codimension eines Unterraumes U von X die Dimension des Quotientenraumes X/U.

Beispiel Wir betrachten die nicht-diagonalisierbare Jordan-Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als einfaches Beispiel für einen kompakten Operator, wobei wir $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ annehmen wollen. Dann gilt

$$\sigma(K) = \{0,\, \lambda_1,\, \lambda_2\}$$

und mit den Notationen des Theorem ergibt sich

$$\ker(\lambda_1 - K) = \mathrm{span}\{e_1,\, e_2\}\,, \qquad n_{\lambda_1} = 3$$

und

$$N_{\lambda_1} = \mathrm{span}\big\{e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,\ e_4\big\}\,, \qquad R_{\lambda_1} = \mathrm{span}\big\{e_5\,,\ e_6\,,\ e_7\,,\ e_8\,,\ e_9\big\}$$

sowie

$$\ker(\lambda_2 - K) = \mathrm{span}\big\{e_5,\, e_6\big\}\,, \qquad n_{\lambda_2} = 1$$

und

$$N_{\lambda_2} = \mathrm{span}\{e_5\,,\ e_6\}\,, \qquad R_{\lambda_2} = \mathrm{span}\big\{e_1\,,\ e_2\,,\ e_3\,,\ e_4\,,\ e_7\,,\ e_8\,,\ e_9\big\}\,.$$

Das Theorem beinhaltet allerdings keine Aussage über den Eigenwert 0. Der Grund ist, dass dieser im Allgemeinen im Punktspektrum, im kontinuierlichen Spektrum oder im residualen Spektrum liegen kann.

Bemerkungen

1. Der Spektralsatz kann als Verallgemeinerung des Theorems über die Jordansche Normalform betrachtet werden.

2. Für zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_i \neq \lambda_j$ gilt $N_{\lambda_i} \subseteq R_{\lambda_j}$ sowie $N_{\lambda_j} \subseteq R_{\lambda_i}$.

