Prof. Dr. Michael Herrmann
Technische Universität Braunschweig
Institut *Computational Mathematics*
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis und PDE

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

Wesentliche Teile dieses Skriptes sind von 2011 bis 2016 an der *Universität des Saarlandes* und der *Westfälischen Wilhelms-Universität Münster* entstanden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen der Funktionalanalysis

[erste Vorlesung]

1.1 Normierte Räume

Es sei X ein reeller Vektorraum, deren Elemente wir mit x bezeichen wollen[1].

Definition 1 (Normierter Raum)**.** *Eine* Norm *auf X ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \|x\|$ die den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *(Positivität)* $\|0\| = 0$ *und* $\|x\| > 0$ *für alle* $0 \neq x \in X$,
2. *(Homogenität)* $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *and* $x \in X$,
3. *(Dreiecksungleichung)* $\|x + \tilde{x}\| \leq \|x\| + \|\tilde{x}\|$ *für alle* $x, \tilde{x} \in X$.

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ nennen wir einen normierten Raum.

Wenn wir mit verschiedenen Räumen arbeiten, schreiben wir oft $\|\cdot\|_X$ statt $\|\cdot\|$.

Beispiel.

1. $\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p\right)$ *ist normierter Raum für alle* $1 \leq p \leq \infty$, *wobei die p-*Norm *eines Vektors* $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *definiert ist durch*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{1/p} \qquad \textit{falls} \quad 1 \leq p < \infty$$

bzw.

$$\|x\|_\infty := \sup_{j=1\ldots n} |x_j| \,.$$

[1] Eine Bemerkung zu Notation: In einigen Teilen der Vorlesung betrachten wir allgemeine Vektorräume, die wir dann – so ist es üblich – X oder Y nennen und deren Elemente wir mit x oder y bezeichnen. In anderen Teilen der Vorlesung betrachten wir Funktionenräume, also Mengen von Funktionen die auf einer Teilmenge I oder Ω des $\mathbb{R}^d$ definiert sind. In diesem Zusammenhang benutzen wir die Symbole x und y, um Punkte in I bzw. Ω zu bezeichnen. Die Elemente des Funktionenraumes – also die Funktionen – werden dann üblicherweise mit u und v bezeichnet.

Sie müssen sich daher immer klar machen, ob das Symbol x gerade einen Punkt aus dem $\mathbb{R}^d$ oder für ein Element eines abstrakten normierten Raumes X steht, wobei letzterer natürlich ein Funktionenraum sein kann (und x dann eine Funktion bezeichnet).

2. *Sei M eine beliebige Menge. Dann ist*

$$X = \mathsf{B}(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \text{ beschränkt}\}$$

ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{m\in M} |f(m)|$$

ein normierter Raum.

3. *Sei $X = \mathsf{C}\big([a,\, b]\big)$ die Menge aller stetigen und reellwertigen Funktionen auf dem Interval $[a,\, b]$. Dann ist X ausgestattet mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup_{\xi\in[a,\, b]} |f(\xi)|$$

ein normierter Raum.

4. *Weitere Beispiele sind Folgenräume, Lebesgue-Räume und Sobolev-Räume, die wir alle später einführen werden.*

1.1.1 Metrische Grundbegriffe

In einem normierten Raum $(X,\, \|\cdot\|)$ können viele Begriffe und Konzepte ganz analog zum R^d eingeführt werden.

Definition 2 (starke Konvergenz)**.** *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X*

1. konvergiert in Norm *(oder* konvergiert stark*) gegen den Grenzwert $x_\infty \in X$, falls $\|x_n - x_\infty\| \to 0$ für $n \to \infty$.*
2. *heißt* Cauchy-*Folge, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass $\|x_n - x_m\| \le \varepsilon$ für alle $n, m \ge N$ gilt.*

Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_∞ konvergiert, so schreiben wir wie üblich $x_n \to x_\infty$ bzw. $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$. Außerdem: Wir sagen die Reihe $\sum_{n=0}^\infty x_n$ *konvergiert* gegen $x \in X$ (oder *hat den Wert* x), falls die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^n x_k$ gegen x konvergiert.

Definition 3 (topologische Eigenschaften von Mengen)**.** *Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt*

1. beschränkt*, falls $\sup_{x\in U} \|x\| < \infty$,*
2. offen*, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$ gilt, wobei*

$$B_\varepsilon(x) := \{\tilde{x} \in X \;:\; \|x - \tilde{x}\| < \varepsilon\}$$

die (offene) ε-Kugel aus X um x ist,

3. abgeschlossen*, falls $X \setminus U$ offen ist,*
4. kompakt*, falls jede Folge aus U eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen einen Grenzwert aus U konvergiert,*
5. präkompakt*, falls U Teilmenge einer kompakten Menge ist,*

6. dicht *in* X, *falls es für jedes* $x \in X$ *eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* U *gibt, so dass* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Satz 4 (Eigenschaften kompakter Mengen)**.** *Jede kompakte Teilmenge eines Banach-Raumes* $(X, \|\cdot\|)$ *ist abgeschlossen und beschränkt.*

Die Umkehrung ist jedoch nur in endlich-dimensionalen und vollständigen Räumen richtig (siehe Übungsaufgabe).

Definition 5 (Äquivalenz von Normen)**.** *Seien* $\|\cdot\|_1$ *und* $\|\cdot\|_2$ *zwei Normen auf dem Raum* X. *Die Normen heißen äquivalent, falls es zwei Konstanten* c_1 *und* c_2 *gibt, so dass*

$$\|x\|_1 \le c_1\|x\|_2 \quad \textit{und} \quad \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$$

für alle $x \in X$ *gilt.*

Satz 6 (Normen in endlich-dimensionalen Räumen)**.** *Sei* X *endlich-dimensional. Dann sind alle Normen zueinander äquivalent.*

1.1.2 Abbildungen zwischen normierten Räumen

Wir betrachten nun Abbildungen zwischen zwei normierten $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Definition 7 (Stetigkeit von Funktionen)**.** *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* stetig bzgl. der Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$, *falls* f *konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet, d.h.* $\|x_n - x\|_X \to 0$ *impliziert* $\|f(x_n) - f(x)\|_Y \to 0$.

Eine alternative Charakterisierung von Stetigkeit wird in den Übungsaufgaben angegeben.

Satz 8 (stetige Funktionen auf kompakten Mengen)**.** *Seien* $U \subset X$ *kompakt und* $f : X \to \mathbb{R}$ *stetig (bzgl.* $\|\cdot\|_x$ *und irgendeiner Norm in* $\mathbb{R}$*). Dann nimmt* f *auf* U *sowohl Minimum als auch Maximum an.*

Eine wichtige Klasse von Abbildungen zwischen metrischen Räumen sind lineare Abbildungen, wobei $A : X \to Y$ genau dann linear ist, wenn

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Lineare Abbildiungen nennt man üblicherweise (lineare) *Operatoren* und schreibt oftmals Ax statt $A(x)$. Diese Schreibweise ist dadurch motiviert, dass lineare Abbildungen zwischen endlichen-dimensionalen Räumen als Matrizen betrachtet werden können.

Alle linearen Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Räumen sind automatisch stetig. In unendlich-dimensionalen Räumen ist dies jedoch nicht mehr richtig.

Satz 9 (Eigenschaften linearer Abbildungen)**.** *Für eine lineare Abbildung* $A : X \to Y$ *sind folgende Aussagen äquivalent*

1. *A ist stetig (bzgl. der Normen),*

2. *A ist beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante* C, *so dass*

$$\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X$$

für alle $x \in X$ *gilt.*

Die optimale Konstante C heißt auch *Lipschitz-Konstante* oder *Stetigkeitskonstante* der linearen Abbildung. Den Raum aller linearen und stetigen Abbildungen zwischen X und Y wollen wir mit $\mathrm{Lin}(X;\,Y)$ bezeichnen.

Satz 10 (Norm von Abbildungen)**.** *Auf* $\mathrm{Lin}(X;\,Y)$ *ist durch*

$$\|A\|_{\mathrm{Lin}(X;\,Y)} := \sup_{0\neq x\in X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

in natürlicher Weise eine Norm definiert.

$\|\cdot\|_{\mathrm{Lin}(X;\,Y)}$ ist die sogenannte *Operatornorm* und ordnet (per Definition) jedem Operator seine Stetigkeitskonstante zu. Aufgrund der Linearität von A gilt außerdem

$$\|A\|_{\mathrm{Lin}(X;\,Y)} = \sup_{x\,:\,\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\in B_1(0)} \|Ax\|_Y.$$

Definition 11 (Typen lineare Abbildungen)**.** $A \in \mathrm{Lin}(X;\,Y)$ *heißt*

1. Isometrie, *falls* $\|Ax\|_Y = \|x\|_X \quad \forall\, x \in X$,
2. Isomorphismus, *falls A stetig invertierbar ist (d.h. die inverse Abbildung* $A^{-1} : Y \to X$ *existiert und ist stetig),*
3. Einbettung, *falls A injektiv ist,*
4. dichte Einbettung, *falls A injektiv ist und AX (das Bild von X unter A) dicht in Y liegt,*
5. offen, *falls A offene Mengen (bzgl. $\|\cdot\|_X$) in offene Mengen (bzgl. $\|\cdot\|_Y$) abbildet,*
6. kompakt, *falls A beschränkte Mengen (bzgl. $\|\cdot\|_X$) in präkompakte Mengen (bzgl. $\|\cdot\|_Y$) abbildet.*

Im Falle einer Einbettung bzw. eines Isomorphismus schreiben wir

$$X \overset{A}{\hookrightarrow} Y \quad \text{bzw.} \quad X \overset{A}{\cong} Y.$$

Bemerkung. *Jede lineare Isometrie ist notwendigerweise injektiv. Für endlich-dimensional Räume X folgt damit, dass jede lineare Isometrie $I : X \to X$ stetig invertierbar ist. In unendlich-dimensional Räumen X gibt es jedoch viele Isometrien die nicht surjektiv sind.*

Bei Arbeiten mit unendlich-dimensionalen Räumen kommt es häufig vor, dass X ein dichter Teilraum von Y ist, die Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ aber nicht äquivalent sind sondern nur $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ erfüllen. In diesem Fall ist $A = \mathrm{Id}$ eine Einbettung und wir schreiben

$$X \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} Y.$$

Beispiel. *Seien* $X = C^1\big([a,\,b]\big)$ *und* $Y = C\big([a,\,b]\big)$ *mit*

$$\|f\|_X = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_Y = \|f\|_\infty.$$

Dann gilt $X \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} Y$.

1.2 Banach-Räume und Hilbert-Räume

Definition 12. *Ein normierter Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *heißt* Banach-Raum*, falls die Norm* vollständig *ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in* X *besitzt.*

Beispiel. *1.* $\big(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p\big)$ *ist Banach-Raum,* $\big(\mathbb{Q}^d, \|\cdot\|_p\big)$ *aber nicht.*

2. $\mathsf{C}\big([0, 1]\big)$ *mit* $\|\cdot\|_\infty$ *ist Banach-Raum.*

3. $\mathrm{Lin}(X; Y)$ *ist Banach-Raum, sofern* Y *Banach-Raum ist.*

Definition 13. *Ein Banach-Raum heißt* separabel*, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.*

Bemerkung. *Jeder endlich-dimensionale Banach-Raum ist separabel.*

Definition 14. *Eine Abbildung* $\langle\cdot, \cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ *mit*

1. *(Positivität)* $\langle 0, 0\rangle = 0$ *und* $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in X$ *,*
2. *(Symmetrie)* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall\, x, y \in X$*,*
3. *(Bilinearität)* $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle \quad \forall\, x, y, z \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*,*

heißt Skalarprodukt *auf* X*.*

Wenn wir mit mehreren Hilbert-Räumen arbeiten, so schreiben wir meist $\langle\cdot, \cdot\rangle_X$ statt $\langle\cdot, \cdot\rangle$.

Bemerkung. *Jedes Skalarprodukt erzeugt eine Norm via* $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$*.*

Definition 15. *Ein Banach-Raum* $(X, \|\cdot\|)$ *heißt* Hilbert-Raum*, falls die* $\|\cdot\|$ *Norm durch ein* Skalarprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *erzeugt wird.*

Beispiel. *Der* $\mathbb{R}^n$ *mit dem euklidischen Skalarprodukt ein Hilbert-Raum.*

In jedem Hilbert-Raum kann man, analog zum $\mathbb{R}^n$, *Orthonormalbasen* einführen. Diese sind natürlich nicht eindeutig, aber sehr hilfreich für analytische und numerische Betrachtungen. Für separable Hilbert-Räume kann die Existenz von Orthonormalbasen wir folgt formuliert werden (für nicht-separable Hilbert Räume wird die Formulierung komplizierter).

Satz 16. *Sei* $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ *ein separabler Hilbert-Raum der Dimension* $D \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. Dann gibt es Systeme von* D *Basisvektoren* $\{e_1, e_2, ...\}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Die* e_i*'s sind normiert und paarweise orthogonal, d.h.*

$$\langle e_k, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. *Jedes* $x \in X$ *besitzt die Basis-Darstellung*

$$x = \sum_{j=1}^{D} \langle x, e_j\rangle e_j,$$

und es gilt der (verallgemeinerte) Satz von Pythagoras, d.h.

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle^2 = \sum_{j=1}^{D} \langle x, e_j\rangle^2.$$

Dabei konvergieren für $D = \infty$ *alle Reihen absolut.*

1.2.1 Dualräume

In diesem Abschnitt ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum.

Ein wichtige Rolle in der Funktionalanalysis spielen die linearen und stetigen Abbildungen von $X \to \mathbb{R}$, d.h. die Elemente des Raumes

$$X^* := \mathrm{Lin}(X; \mathbb{R}).$$

X^* wird *Dualraum von* X genannt, und Elemente aus $x^* \in X^*$ bezeichnet man als *lineare Funktionale auf* X. Wir erinnern daran, dass X^* ausgestattet mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lin}(X;\mathbb{R})}$ in natürlicher Weise ein Banach-Raum ist. Die Operatornorm $\mathrm{Lin}(X; \mathbb{R})$ bezeichnet man auch als *duale Norm* zu $\|\cdot\|_X$.

Für $x^* \in X^*$ und $x \in X$ schreibt man

$$\langle x^*, x\rangle_{X^*,X} \quad \text{statt} \quad x^*(x),$$

wobei $\langle x^*, x\rangle_{X^*,X}$ die *Dualpaarung* von x^* und x genannt wird. Wenn klar ist, was X und X^* sind, schreibt man auch oft $\langle x^*, x\rangle$ statt $\langle x^*, x\rangle_{X^*,X}$.

Das Konzept der Dualpaarung stellt eine Verallgemeinerung der Idee eines Skalarproduktes dar. Insbesondere sind beide Begriffe für Hilbert-Räum in folgendem Sinne äquivalent.

Satz 17 (Riesz–Fréchet Abbildung)**.** *Sei X ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Dann gibt es einen* isometrischen Isomorphismus $R : X^* \to X$*, so dass für jedes $x^* \in X$ die Dualpaarung mit x^* durch das Skalarprodukt mit Rx^* vermittelt wird. Das heißt, es gilt*

$$\langle x^*, x\rangle_{H^*,H} = \langle Rx^*, x\rangle, \qquad \|x^*\|_{H^*} = \|Rx\|,$$

für alle $x^* \in H^*$ und alle $x \in X$ gilt.

Für allgemeine Banach-Räume X können wir jedoch nicht erwarten, das X und X^* isomorph sind und nicht unwesentlicher Teil der funktionalanalytischen Resultate/Forschungen ist dem besserem Verständnis von von konkreten Dualräumen gewidmet.

Viele Banach-Räume haben jedoch die Eigenschaft, das sie isomorph zum ihrem Bidualraum $X^{**} :=:= \mathrm{Lin}(X^*; \mathbb{R})$, d.h. zum Dualraum ihres Dualraumes sind (daher erklärt sich auch der Wortstamm 'dual'). Ganz allgemein gilt, dass X immer in natürlicher Weise in X^{**} einbettet. Um dies zu sehen, betrachten wir den Operator

$$E_X : X \to X^{**} \quad \text{mit} \quad \langle E_X x, x^*\rangle_{X^{**},X^*} := \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass E eine wohldefinierte lineare Einbettung von X nach X^{**} ist, und dass $\|Ex\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$ für alle x (und damit $\|E\|_{\mathrm{Lin}(X;X^{**})} \le 1$) gilt.

Für viele relevante Räume X kann man zeigen, dass E sogar isometrischer Isomorphismus ist (der Beweis ist aber im Allgemeinen alles andere als trivial).

Definition 18. $(X, \|\cdot\|_X)$ *heißt* reflexiv*, falls der obige Operator E ein isometrischer Isomorphismus ist.*

Bemerkung. *Alle Hilbert-Räume sowie alle endlich-dimensionalen Banach-Räume sind reflexiv.*

Bemerkung. *Im Falle einer dichten Einbettung $X \overset{d}{\hookrightarrow} Y$ gilt $Y^* \overset{d}{\hookrightarrow} X^*$.*

1.2.2 Schwache Konvergenz

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein gegebener Banach-Raum.

Ein wesentliches Werkzeug der Funktionalanalysis sind sogenannte *schwache Konvergenzbegriffe* (engl. *weak convergence*). Wir erinnern daran, das die Konvergenz in Norm auch *starke Konvergenz* genannt wird

Definition 19. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert* schwach *in X gegen $x \in X$, falls*

$$\langle x^*,\, x_n\rangle_{X^*,X} \xrightarrow{n\to\infty} \langle x^*,\, x\rangle_{X^*,X} \quad \forall\, x^* \in X^*$$

gilt.

Im Falle schwacher Konvergenz heißt x der schwache Limes/Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir schreiben $x = \mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} x_n$ bzw. $x_n \rightharpoonup x$ bzw. $x_n \to x$ *schwach* bzw. $x_n \overset{\mathrm{w}}{\to} x$.

Wie die Benennungen schon suggerieren, ist starke Konvergenz der restriktivere Begriff.

Satz 20. *Starke Konvergenz in X impliziert schwache Konvergenz. In endlich-dimensionalen Räumen gilt auch die Umkehrung.*

Satz 21. *Die schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup x$ impliziert*

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Definition 22. *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt*

1. schwach abgeschlossen*, falls U mit jeder schwach konvergenten Folge auch ihren Grenzwert enthält, und*

2. schwach kompakt*, falls jede Folge aus U eine schwach konvergenten Teilfolge besitzt und deren Grenzwert zu U gehört.*

Das wichtigste Resultat in diesem Abschnitt ist das folgende schwache Kompaktheitskriterium, das insbesondere die schwache Kompaktheit von beschränkten Folgen impliziert.

Satz 23. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ reflexiv und sei $U \subset X$ konvex, (stark) abgeschlossen, und beschränkt. Dann ist U schwach kompakt.*

Wir erinnern daran, das eine Teilmenge $U \subseteq$ konvex heißt, falls mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke in U liegt, d.h wenn gilt

$$x, y \in U \quad \Longrightarrow \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in U \text{ für alle } 0 \le \lambda \le 1.$$

Ein natürliche und wichtige Frage ist nun, wann man aus der schwachen Konvergenz auf die starke Konvergenz schließen kann. In Hilbert-Räumen (bzw. in uniform-konvexen Banach-Räumen) gibt es die folgende, sehr nützliche Bedingung.

Satz 24. *In Hilbert-Räumen gilt die folgenden Äquivalenz: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert stark gegen $x \in X$ genau dann, wenn*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ schwach, und*

2. $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ *in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x,\, x_n - x\rangle = \langle x_n,\, x_n\rangle + \langle x,\, x\rangle - 2\langle x_n,\, x\rangle \\ &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n,\, x\rangle \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,\, x\rangle = 0.\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Folgen* $(x_n^*)_{n_\mathbb{N}} \subset X^*$ *können natürlich auch schwach konvergieren (in* X^**), und in reflexiven Räumen ist das äquivalent zur sogenannten Schwach∗-Konvergenz. In nicht-reflexiven Räumen sind beide Begriffe aber nicht identisch.*

Definition 25. *Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{R}$ *heißt*

1. schwach stetig*, falls*

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) \to f(x),$$

2. schwach unterhalbstetig*, falls*

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n),$$

Die Norm $\|\cdot\|_X$ ist nicht schwach stetig, aber nach Satz 21 schwach unterhalbstetig. Ganz allgemein gilt das folgende Resultat.

Satz 26. *Konvexe und (stark) stetige Funktionen sind schwach unterhalbstetig.*

Dabei heißt eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvex, sofern

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall\, x, y \in X,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

1.3 Die Folgenräume ℓ^p

Wir betrachten reelle Folgen u auf einer abzählbaren Indexmenge J, dass heißt Abbildungen $u : J \to \mathbb{R}$. Wir schreiben aber wie üblich $u = (u_j)_{j\in J}$, wobei u_j den Wert von u an der Stelle $j \in J$ meint. Die Menge aller Folgen auf J wird mit $\mathcal{F}(J)$ bezeichnet, d.h.

$$\mathcal{F}(J) := \{u = u(u_j)_{j\in J}\}.$$

In den meisten Fällen wird $J = \{1, ..., n\}$, $J = \mathbb{N}$ oder $J = \varepsilon\mathbb{Z}^n$ gelten.

Wir formulieren nun eine sehr wichtige Ungleichung für reelle Folgen.

Satz 27 (Jensensche Ungleichung)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion und sei* $\mu \in \ell^1(J)$ *nichtnegativ mit* $\|\mu\| = 1$*. Dann gilt*

$$f\left(\sum_{j\in J} \mu_j u_j\right) \leq \sum_{j\in J} \mu_j f(u_j)$$

für jedes $u \in \mathcal{F}(J)$ *sofern die Reihen wohldefiniert sind.*

1.3.1 Definition und Eigenschaften der Räume

Für jedes $u \in \mathcal{F}(J)$ definieren wir nun

$$\|u\|_\infty := \sup_{j\in J} |u_j|$$

bzw.

$$\|u\|_p := \left(\sum_{j\in J} |u_j|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für} \quad 1 \le p < \infty$$

wobei $\|u\|_p = \infty$ zunächst zugelassen ist. Um diesen Fall nun aber wieder auszuschließen, betrachten wir die Mengen

$$\ell^p(J) := \Big\{u \in \mathcal{F}(J) \quad : \quad \|u\|_p < \infty\Big\}.$$

Satz 28 (Vollständigkeit der Räume ℓ^p)**.** *Für jedes $1 \le p \le \infty$ ist $(\ell^p(J),\, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banach-Raum. Der Raum $(\ell^2(J),\, \|\cdot\|_2)$ ist sogar ein Hilbert-Raum, wobei das Skalarprodukt durch*

$$\langle u,\, \tilde{u}\rangle = \sum_{j\in J} u_j \tilde{u}_j$$

gegeben ist.

Falls J eine feste Indexmenge ist, schreiben wir einfach ℓ^p statt $\ell^p(J)$. Umgekehrt, wenn wir mit verschiedenen Indexmengen J arbeiten, schreiben wir $\|u\|_{p,J}$ oder auch $\|u\|_{\ell^p(J)}$ statt $\|u\|_p$.

Bemerkung (Universalität von ℓ^2)**.** *Satz 16 zeigt, dass*

1. *jeder endlich-dimensionale Hilbert-Raum der Dimension N isometrisch isomorph zu $\ell^2(\{1, ..., N\})$ ist,*
2. *jeder unendlich-dimensionale aber noch separable Hilbert-Raum isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$ ist.*

Ein solches Universalitätsresultat kann es für Banach-Räume nicht geben.

Für einen Exponenten $1 \le p \le \infty$ definieren wir den *konjugierten* Exponenten p' durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \stackrel{!}{=} 1,$$

wobei $0 = 1/\infty$ und $\infty = 1/0$ verabredet sei.

Satz 29 (Hölder-Ungleichung)**.** *Für alle $u \in \ell^p(J)$ und $v \in \ell^{p'}(J)$ gilt*

$$\sum_{j\in J} |u_j|\,|v_j| \le \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Satz 30 (Dualraum von ℓ^p)**.** *Für $1 \le p < \infty$ gilt der Darstellungssatz*

$$\ell^p(J)^* \cong \ell^{p'}(J)$$

mit $\langle v,\, u\rangle_{\ell^{p'},\ell^p} = \sum_{j\in J} v_j u_j$.

Insbesondere ist $\ell^p(J)$ reflexiv für $1 < p < \infty$. Die Räume $\ell^1(J)$ und $\ell^\infty(J)$ sind aber für unendliche Indexmengen J nicht reflexiv, sondern erfüllen

$$\ell^1(J)^* = \ell^\infty(J), \quad \ell^1(J) \subsetneq \ell^\infty(J)^*.$$

Satz 31 (Einbettungssätze)**.** *Für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt*

$$\ell^p(J) \hookrightarrow \ell^q(J)$$

mit $\|u\|_q \leq \|u\|_p$ für alle $u \in \ell^p(J)$.

1.3.2 Schwache Konvergenz

Folgen in $\mathcal{F}(J)$ sind Folgen von Folgen. Eine Folge in $\mathcal{F}(J)$ bezeichnen wir üblicherweise mit $(u_{n,j})_{n\in N, j\in J} \subset \mathcal{F}$. Manchmal schreiben wir aber auch $(u_n)_{n\in N} \subset \mathcal{F}$ mit $u_n = (u_{n,j})_{j\in J}$.

Beispiel (schwache Konvergenz in ℓ^p)**.** *Es sei $1 < p < \infty$ und $J \in \mathbb{Z}$.*

1. *(Transport nach Unendlich) Es sei S_k der k-Shift-Operator ist, d.h. $(S_k u)_j = u_{j-k}$ für alle $u \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für jedes $u \in \ell^p(\mathbb{Z}) \neq 0$ die schwache (aber nicht starke) Konvergenz*

$$S_k u \xrightharpoonup{k\to\pm\infty} 0.$$

2. *('Verschmieren' einer Funktion) Sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte und hinreichend schnell abklingende Funktion, und sei $(u_{n,j})_{n\in\mathbb{N}, j\in J}$ definiert durch*

$$u_{n,j} = \frac{\rho(j/n)}{n^{1/p}},$$

so dass (nach Riemann-Approximation von Integralen) gilt

$$\sum_{j\in J} |u_{n,j}|^p = \frac{1}{n}\sum_{j\in J} \rho(j/n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \rho(x)^p \,\mathrm{d}x.$$

Dann gilt die schwache (aber nicht starke) Konvergenz

$$(u_{n,j})_{n\in\mathbb{N}, j\in J} \xrightharpoonup{n\to\infty} 0.$$

Satz 32. *Sei $1 < p < \infty$. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\ell^p(J)$ konvergiert stark gegen $u \in \ell^p(J)$ genau dann, wenn*

1. *$u_n \rightharpoonup u$ schwach in ℓ^p, und*
2. *$\|u_n\|_p \to \|u\|_p$ in $\mathbb{R}$.*

Die Frage wann eine schwach konvergente Folge aus $\ell^1(J)$ oder $\ell^\infty(J)$ stark konvergiert, kann jedoch nicht so einfach beantwortet werden.

1.4 Die Lebesgue-Räume L^p

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet (d.h. Ω ist offen und zusammenhängend) und sei λ^d das Lebesgue-Mass auf Ω. Wir betrachten für jedes $u : \Omega \to \mathbb{R}$ seine Äquivalenzklasse

$$[u] := \Big\{\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; \tilde{u}(x) = u(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega\Big\}$$

und nennen zwei Funktionen u_1, u_2 sind *identisch fast überall* sofern $[u_1] = [u_2]$ gilt. Für jede *messbare* Funktion u sind nun

$$\|[u]\|_\infty := \inf_{\tilde{u}\in[u]} \|\tilde{u}\|_\infty = \inf_{\tilde{u}\in[u]} \sup_{x\in\Omega} |\tilde{u}(x)|\,.$$

und

$$\|[u]\|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}\lambda^n\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

wohldefiniert, wobei zunächst der Wert ∞ zugelassen ist. Für $1 \le p \le \infty$ definieren wir außerdem Lebesgue-Räume

$$\mathsf{L}^p(\Omega) := \{[u] \;:\; \|[u]\|_p < \infty\}.$$

Statt $\mathsf{L}^p(\Omega)$ schreibt man auch L^p, und das Integral $\int_\Omega u\,\mathrm{d}\lambda^n$ wird auch mit

$$\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \quad \text{oder} \quad \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \int_\Omega u\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \int_\Omega u$$

bezeichnet.

Es ist desweiteren üblich, eine Funktion u mit ihrer Äquivalenzklasse $[u]$ zu identifizieren, d.h. wir schreiben meist $u \in \mathsf{L}^p$ statt $[u] \in \mathsf{L}^p$. Es ist aber wichtig zu betonen, dass dann gewisse Konstruktionen keinen Sinn machen. Zum Beispiel ist die Menge $\{u \in \mathsf{L}^p \;:\; u(x_0) = 0\}$ *nicht* wohldefiniert, da einer Klasse von Funktionen kein eindeutiger Wert an der Stelle x_0 zugeordnet werden kann. Definitionen wie $\{u \in \mathsf{L}^p \;:\; \int_\Omega u\,\mathrm{d}x = 0\}$ sind jedoch sehr wohl sinnvoll.

Satz 33 (Jensensche Ungleichung)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und sei $\mu \in \mathsf{L}^1(\Omega)$ nichtnegativ mit $\|\mu\|_1 = 1$. Dann gilt*

$$f\left(\int_\Omega \mu_j(x)u(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \int_\Omega \mu_j(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x$$

für alle $u : \Omega \to \mathbb{R}$, sofern die Integrale wohldefiniert sind.

Satz 34 (Hölder-Ungleichung)**.** *Für alle messbaren Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_\Omega |u(x)|\,|v(x)|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_p\|v\|_{p'},$$

wobei p und p' konjugierte Exponenten sind.

1.4.1 Eigenschaften der Räume

Satz 35 (Vollständigkeit der Räume L^p). *Für jedes $1 \le p \le \infty$ ist $(\mathsf{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ ein Banach-Raum. Der Raum $(\mathsf{L}^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$ ist sogar ein Hilbert-Raum, wobei das Skalarprodukt durch*

$$\langle u,\, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

gegeben ist.

Bemerkung. *Da Elemente in $\mathsf{L}^p(\Omega)$ Klassen von Funktionen sind, gilt*

$$\|u\|_p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u(x) = 0 \quad \textit{fast überall.}$$

Satz 36 (Dualraum von L^p). *Für $1 \le p < \infty$ gilt der Darstellungssatz*

$$\mathsf{L}^p(\Omega)^* \cong \mathsf{L}^{p'}(\Omega),$$

wobei

$$\langle v,\, u\rangle_{\mathsf{L}^{p'}(\Omega),\mathsf{L}^p(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ und $v \in \mathsf{L}^{p'}(\Omega)$. Insbesondere ist $\mathsf{L}^p(\Omega)$ reflexiv für $1 < p < \infty$.

Satz 37 (Einbettungssätze). *Für Gebiete mit endlichem Maß*

$$|\Omega| := \lambda^d(\Omega) = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}x < \infty$$

und $1 \le p \le q \le \infty$ gilt

$$\mathsf{L}^q(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^p(\Omega)$$

mit

$$\|u\|_p \le |\Omega|^{1/p-1/q}\,\|u\|_q$$

für alle $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$.

Beweis. Sei $r = q/p$, d.h. $r' = q/(q-p)$. Dann liefert die Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega 1\cdot|u|^p\,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_\Omega |1|^{r'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r'}\left(\int_\Omega |u|^{pr}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \\ &= |\Omega|^{1/r'}\left(\int_\Omega |u|^q\,\mathrm{d}x\right)^{p/q}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung.

1. *Es gibt keine Einbettungssätze für $\mathsf{L}^p(\Omega)$ falls $|\Omega| = \infty$.*

2. *Die Einbettungsreihenfolgen für $\ell^p(J)$ und $\mathsf{L}^p(\Omega)$ (mit $|\Omega| < \infty$) sind verschieden, d.h. wir haben*

$$\ell^1(J) \hookrightarrow \ell^p(J) \hookrightarrow \ell^q(J) \hookrightarrow \ell^\infty(J) \qquad \textit{aber} \qquad \mathsf{L}^\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^1(\Omega)$$

sofern $1 < p < q < \infty$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer weiteren Folgerung aus der Hölder-Ungleichung.

Satz 38. *Sei $|\Omega| < \infty$. Dann gilt*

$$\|u\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|u\|_p$$

für jede messbare Funktion u, wobei beide Seiten den Wert $+\infty$ annehmen können.

Beweis. Für $p < \infty$ definieren $\mu_p := |\Omega|^{-1/p} \|u\|_p$ (es gilt $|\Omega| > 0$ da Ω offen ist). Nach Satz 37 ist μ_p monoton wachsend in p, und deshalb existiert $\mu_\infty = \lim_{p\to\infty} \mu_p \in (0, \infty]$. Außerdem gilt $\mu_\infty \leq \|u\|_\infty$ nach Satz 37. Angenommen es gelte $\mu_\infty < \|u\|_\infty$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Menge $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $|\tilde{\Omega}| > 0$, so dass $|u|(x) > \mu_\infty + \delta$. Daraus schließen wir

$$\mu_\infty \geq \mu_p \geq |\Omega|^{-1/p} \left(\int_{\tilde{\Omega}} (\mu_\infty + \delta)^p \right)^{1/p} = (\mu_\infty + \delta)\, |\Omega|^{-1/p}\, |\tilde{\Omega}|^{1/p},$$

und der Limes $p \to \infty$ liefert den gewünschten Widerspruch zur Annahme $\mu_\infty < \|u\|_\infty$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $\|u\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \mu_p = \lim_{p\to\infty} \|u\|_p$ gilt. □

1.4.2 Starke und schwache Konvergenz

Wir studieren zunächst die starke Konvergenz.

Satz 39. *Seien $1 \leq p < \infty$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{L}^p(\Omega)$ eine Folge mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *(Punktweise Konvergenz) Es existiert $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ so dass $u_n(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.*

2. *(Existenz einer Majorante) Es existiert $h \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ so dass $|u_n| \leq h(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in \Omega$.*

Dann gilt die starke Konvergenz $u_n \to u$ in $\mathsf{L}^p(\Omega)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz angewendet auf die Funktionen g_n mit $g_n(x) := |u_n(x) - u(x)|^p$. □

Die Umkehrung dieses Konvergenzkriteriums gilt jedoch i.A. nur für Teilfolgen.

Satz 40. *Es gelte die starke Konvergenz $u_n \to u$ in $\mathsf{L}^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge, so dass die Voraussetzungen von Satz 39 erfüllt sind.*

Beweis. Nach Wahl einer geeigneten Teilfolge können wir annehmen, dass

$$\|u_{n+1} - u_n\|_p \le 2^{-n} \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun die monoton wachsende Folge

$$g_n := \sum_{j=1}^{n} |u_j - u_{j-1}|\,.$$

Nach Voraussetzung gilt nun

$$\|g_n\|_p \le \sum_{j=1}^{n} \|u_j - u_{j-1}\|_p \le 2\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2,$$

d.h. $g_n \in \mathsf{L}^p(\Omega)$. Satz dem Lemma von Fatou angewendet auf g_n^p liefert nun $g \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ wobei $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Es gilt nun

$$u_n \le u_0 + \sum_{j=1}^{n} |u_j - u_{j-1}| \le u_0 + g =: h$$

Andererseits wissen wir, dass

$$|u_{n+m}(x) - u_n(x)| \le \sum_{j=n}^{\infty} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| = g(x) - g_n(x),$$

und deshalb existiert die messbare Funktion $\tilde{u}$ mit $\tilde{u}(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. Satz 39 liefert nun die starte Konvergenz $u_n \to \tilde{u}$, und da starke Grenzwerte eindeutig sind, gilt $u = \tilde{u}$ fast überall. □

Bemerkung. *Sei $p = \infty$. Dann liefert die starke Konvergenz $u_n \to u$ sowohl die Majorante $h = \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty$ als auch die punktweise Konvergenz der gesamten Folge. Es kann aber kein zu Satz 39 analoges Resultat geben: Dazu betrachten wir $\Omega = [0,\,1] \subset \mathbb{R}$ und $u_n(x) = \chi_{(0,\,1/n)}$. Dann gilt $u_n(x) \to 0$ für fast alle $x \in \Omega$, aber wir haben $\|u_n - u_m\|_\infty = 1$, d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge in $\mathsf{L}^\infty(\Omega)$.*

Die folgenden beiden Beispiele betreffen die schwache Konvergenz.

Beispiel (schwache Konvergenz in beschränkten Gebieten)**.** *Folgende Folgen konvergieren schwach, aber nicht stark gegen 0 in $\mathsf{L}^p([-1,\,1])$ für $1 < p < \infty$:*

1. *(Oszillationen) $u_n(x) := f(n * x)$, wobei f eine beliebige 2-periodische Funktion mit $\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ist.*
2. *(Konzentration in 0) Sei $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varrho \ge 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gegeben, und sei $u_n(x) := n^{1/p}\varrho(nx)$ für $|x| \le 1$.*

Beispiel (schwache Konvergenz in unbeschränkten Gebieten)**.** *Folgende Folgen konvergieren schwach, aber nicht stark gegen 0 in $\mathsf{L}^p\big(\mathbb{R}^d\big)$ für $1 < p < \infty$:*

1. *(Transport nach Unendlich) $u_n(x) := u_0(x - n)$*
2. *('Ausschmieren' einer Funktion) $u_n(x) := n^{-1/p} u_1(n^{-1}x)$.*

Satz 41. *Sei $1 < p < \infty$. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathsf{L}^p(\Omega)$ konvergiert stark gegen $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ genau dann, wenn*

1. *$u_n \rightharpoonup u$ schwach in $\mathsf{L}^p(\Omega)$, und*
2. *$\|u_n\|_p \to \|u\|_p$ in $\mathbb{R}$.*

1.4.3 Faltungsintegrale

Satz 42. *Für $\varrho \in \mathsf{L}^1\big(\mathbb{R}^d\big)$ und $u \in \mathsf{L}^p\big(\mathbb{R}^d\big)$ ist das* Faltungsintegral

$$(\varrho * u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert und es gilt

$$\|\varrho * u\|_p \le \|\varrho\|_1 \|u\|_p.$$

Gilt außerdem $\varrho \in \mathsf{C}^k_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$, so gilt $\varrho * u \in \mathsf{C}^k\big(\mathbb{R}^d\big)$ mit

$$\mathrm{D}^\alpha(\varrho * u) = (\mathrm{D}^\alpha \varrho) * u \quad \forall\ |\alpha| \le k.$$

Bemerkung. *Es gilt* $\mathrm{supp}(\varrho * u) \subset \overline{\mathrm{supp}\varrho + \mathrm{supp}u}$.

Definition 43. *Eine Folge $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}^\infty_c\big(\mathbb{R}^d\big)$ heißt* Standardfaltungsfolge *(oder* Folge von Standardfaltunsgkernen*), sofern*

1. *ϱ_n ist nichtnegativ und hat kompakten Träger in $B_{1/n}(0)$,*
2. *$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$,*

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel. *Sei $\varrho \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$ beliebig mit $\varrho_1 \ge 0$ und $\mathrm{supp}\varrho_1 \subset B_1(0)$. Dann liefert $\varrho_n := n\varrho(nx)$ eine Standardfaltungsfolge.*

Satz 44. *Sei $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Standardfaltungsfolge und sei $u \in \mathsf{L}^p\big(\mathbb{R}^d\big)$ mit $1 \le p < \infty$. Dann gilt $\varrho_n * u \to u$ stark in $\mathsf{L}^p\big(\mathbb{R}^d\big)$.*

Satz 45 (Dichtheit der glatten Funktionen)**.** *Der Raum $\mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega)$ liegt dicht in $\mathsf{L}^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Sei χ_n die charakteristische Funktion von

$$\Omega_n := \{x \in \Omega\ :\ \mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d \setminus \Omega\big) > 2/n\},$$

und sei $\tilde{u}$ die triviale Fortsetzung von u, d.h. $\tilde{u}(x) = u(x)$ für $x \in \Omega$ und $\tilde{u}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Nach Konstruktion sind die Funktionen $|\chi_n \tilde{u} - \tilde{u}|^p$ durch $\tilde{u}^p \in \mathsf{L}^1\big(\mathbb{R}^d\big)$ majorisiert und konvergieren punktweise gegen 0. Deshalb gilt

$$\|\chi_n \tilde{u} - \tilde{u}\|_{p,\mathbb{R}^d} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

und damit auch, siehe Satz 42,

$$\begin{aligned}\|\varrho_n * (\chi_n \tilde{u}) - \tilde{u}\|_{p,\Omega} &= \|\varrho_n * (\chi_n \tilde{u}) - \tilde{u}\|_{p,\mathbb{R}^d}\\ &\le \|\varrho_n * (\chi_n \tilde{u}) - \varrho_n * \tilde{u}\|_{p,\mathbb{R}^d} + \|\varrho_n * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{p,\mathbb{R}^d}\\ &\le \|\chi_n \tilde{u} - \tilde{u}\|_{p,\mathbb{R}^d} + \|\varrho_n * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{p,\mathbb{R}^d} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Außerdem ist $\varrho_n * (\chi_n \tilde{u})$ glatt und hat kompakten Träger in Ω. □

Satz 46 (Hauptsatz der Variationsrechnung, Version 1). *Sei* $|\Omega| < \infty$ *und* $u \in \mathsf{L}^1(\Omega)$,*so dass*

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \quad \varphi \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega).$$

Dann gilt $u = 0$ *fast überall.*

Beweis. Mit Satz 36 genügt es zu zeigen, dass

$$\int_\Omega ug \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, g \in \mathsf{L}^\infty(\Omega).$$

Sei nun $g \in \mathsf{L}^\infty(\Omega)$ beliebig fixiert, und sei $g_n := \varrho_n * (\chi_n \tilde{u})$ wie im Beweis von Satz 45. Dann gilt $g_n \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}$ und damit $\int_\Omega ug_n \,\mathrm{d}x = 0$. Es gilt aber auch $g_n \to g$ in $\mathsf{L}^1(\Omega)$, und daher gibt es eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $g_{n_k} \to g$ für $k \to \infty$ punktweise fast überall. Nach Konstruktion gilt weiterhin $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ und deshalb ist $(ug_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ majorisiert durch $\|g\|_\infty u$. Die Konvergenzsätze für Lebesgue-Integrale liefern nun

$$\int_\Omega ug \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega ug_{n_k} \,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Wir definieren nun die linearen Räume

$$\mathsf{L}^p_\mathrm{loc}(\Omega) := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; u|_{\tilde{\Omega}} \in \mathsf{L}^p(\tilde{\Omega}) \quad \forall\, \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega \text{ kompakt} \Big\},$$

und folgern aus Satz 37 dass

$$\mathsf{L}^\infty_\mathrm{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^p_\mathrm{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^1_\mathrm{loc}(\Omega)$$

für $1 < p < q < \infty$.

Beispiel. *Seien* $\Omega = (0, \infty)$ *und* $u(x) = 1/x$. *Dann gilt* $u \in \mathsf{L}^1_\mathrm{loc}(\Omega)$ *aber* $u \notin \mathsf{L}^1(\Omega)$.

Satz 47 (Hauptsatz der Variationsrechnung, Version 2). *Sei* $u \in \mathsf{L}^1_\mathrm{loc}(\Omega)$ *so dass*

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \quad \varphi \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega).$$

Dann gilt $u = 0$ *fast überall.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 46. □

Kapitel 2

Elliptische Probleme in 1D

Wir betrachten ein endliches Intervall $I = (a, b)$ und studieren unter anderem *Randwertprobleme* für Funktionen $u : I \to \mathbb{R}$. Ein typisches Beispiel ist das folgende: Für eine gegebene Funktion $f \in \mathsf{C}(I)$ suchen wir eine Funktion u, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf} \quad I, \\ u'(a) &= u'(b) = 0. \end{aligned} \tag{P}$$

Eine *klassische* Lösung ist eine Funktion $u \in \mathsf{C}^2(I)$, die die Differentialgleichung in (P) punktweise erfüllt. Mit Hilfe von partieller Integration ist es leicht zu zeigen, dass jede klassische Lösung die folgende *schwache Formulierung* erfüllt

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad v \in \mathsf{C}^1\big(\overline{I}\big). \tag{P'}$$

Funktionen u, die (P') erfüllen wollen wir eine *schwache* Lösung des Randwertproblems (P) nennen. Eine charakteristische Eigenschaft der schwachen Formulierung ist, dass sie nur erste Ableitung enthält. Deshalb wird es sich zeigen, dass die schwache Formulierung der "bessere" Lösungsbegriff ist. Hat man einmal die Existenz schwacher Lösungen nachgewiesen, so kann man oftmals in einem zweiten Schritt zeigen, dass jede schwache Lösung auch klassische Lösung sein muss (*Regularitätstheorie*).

2.1 Schwache Ableitungen und Sobolev-Räume in 1D

Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches oder unendliches Interval.

Definition 1. *Eine Funktion $u \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ heiß* schwach differenzierbar, *falls es eine Funktion $u' \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ gibt, so dass*

$$\int_I u\varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_I u'\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad \varphi \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I).$$

In diesem Fall heißt u' die schwache Ableitung von u.

Wir bemerken, dass die Bedingung $v \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I)$ durch $v \in \mathsf{C}^\infty_{\mathrm{c}}(I)$ ersetzt werden kann, da jede Funktion aus $\mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I)$ in der $\mathsf{C}^1(I)$-Norm durch Funktionen aus $\mathsf{C}^\infty_{\mathrm{c}}(I)$ approximiert werden kann.

Beispiel. *1. Sei $u \in \mathsf{C}^1(I)$. Dann ist die klassische Ableitung auch schwache Ableitung.*

2. Sei $I = \mathbb{R}$ und $u(x) = |x|$. Dann gilt $u'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ im schwachen Sinne, denn partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_I u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty 1\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 1\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3. Die Funktion u mit $u(x) = \operatorname{sgn}(x)$ hat keine *schwache Ableitung auf $I = \mathbb{R}$, denn es gilt*

$$\int_I u\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2\varphi(0) \neq \int_I v\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I).$$

Die Funktion u hat aber eine schwache Ableitung auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, nämlich $u' = 0$. Sie besitzt außerdem eine distributionelle Ableitung, *nämlich die Dirac-Distribution in 0. Distributionelle Ableitungen spielen aber in dieser Vorlesung keine Rolle.*

2.1.1 Eigenschaften schwacher Ableitungen

Schwache Ableitungen verhalten sich in vielen Aspekten wie klassischen Ableitungen.

Satz 2. *Sei $u \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ gegeben mit*

$$\int_I u\varphi'\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \quad \varphi \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I).$$

Dann gilt ist u konstant fast überall.

Beweis. Sei $\Psi \in \mathsf{C}_{\mathrm{c}}(I)$ beliebig mit $\int_I \Psi\,\mathrm{d}x = 1$ und sei

$$\tilde{u}(x) = u(x) - \int_I u(y)\Psi(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall \quad x \in I.$$

Mit elementaren Argumenten aus *Analysis I* kann man zeigen, dass für jedes $\Phi \in \mathsf{C}_{\mathrm{c}}(I)$ genau ein $\varphi \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I)$ existiert, so dass

$$\varphi'(x) = \Phi(x) - \left(\int_I \Phi(y)\,\mathrm{d}y\right)\Psi(x) \qquad \forall \quad x \in I.$$

Nach Voraussetzung gilt nun

$$\begin{aligned}0 &= \int_I u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_I u(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_I \Phi(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_I u(x)\Psi(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \int_I \tilde{u}(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

und Satz 47 zeigt, dass $\tilde{u}$ – und damit auch u – fastüberall konstant ist. □

Satz 3. *Sei $u \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *u besitzt schwache Ableitung v.*
2. *Es existieren $\tilde{u} \in \mathsf{C}(\bar{I})$ und $v \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$, so dass*

$$\tilde{u}(z) - \tilde{u}(y) = \int_y^z v(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall \quad x, z \in I,$$

sowie $\tilde{u}(x) = u(x)$ für fast alle $x \in I$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Für festes $y \in I$ und jede Testfunktion $\varphi \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I)$ gilt

$$\int_I u\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_I \tilde{u}\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_a^y \tilde{u}(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^b \tilde{u}(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Nach Fubini's Theorem gilt nun sowohl

$$\begin{aligned}\int_a^y \tilde{u}(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^y \left(\tilde{u}(y) - \int_x^y v(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \tilde{u}(y)\varphi(y) - \int_a^y v(t)\left(\int_a^t \phi'(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \tilde{u}(y)\varphi(y) - \int_a^y v(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned}\int_y^b \tilde{u}(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_y^b \left(\tilde{u}(y) + \int_y^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\tilde{u}(y)\varphi(y) + \int_y^b v(t)\left(\int_t^b \phi'(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= -\tilde{u}(y)\varphi(y) - \int_y^b v(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Summation beider Resultate zeigt, dass v schwache Ableitung von u ist.

($\Rightarrow$) Sei nun $v = u'$. Für gegebenes $y \in I$ definieren wir

$$\hat{u}(z) = \int_y^z v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Funktion $\hat{u}$ ist nach Konstruktion stetig (da das Lebesgue-Integral absolut-stetig ist), und analog zu oben kann leicht gezeigt werden, dass v schwache Ableitung von $\hat{u}$ ist. Satz 2 (angewendet auf $u - \hat{u}$) liefert eine Konstante C, so dass $u(x) - \hat{u}(x)$ für fast alle $x \in I$. Die Behauptung folgt mit $\tilde{u} := \hat{u} + C$. □

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathsf{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$ die Menge aller schwach differenzierbaren Funktionen, d.h.

$$\mathsf{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I) := \Big\{u : \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I) \ : \ \text{u besitzt schwache Ableitung}\Big\}.$$

Es ist üblich, eine Funktion $u \in \mathsf{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$ mit stetige ihrem Repräsentanten $\tilde{u} \in [u]$ zu identifizieren; siehe dazu Satz 3 und beachte, dass $\tilde{u}$ eindeutig bestimmt ist. In diesem Sinne ist $\mathsf{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$ ein Unterraum von $\mathsf{C}(\bar{I})$.

2.1.2 Die Räume $\mathsf{W}^{1,p}(I)$

Wir definieren nun die $1,p$-Norm

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \|u'\|_p, \quad u \in \mathsf{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I),$$

sowie die *Sobolev-Räume*

$$\mathsf{W}^{1,p}(I) := \Big\{ u \in \mathsf{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I) \;:\; \|u\|_{1,p} < \infty \Big\}.$$

Bemerkung. *Nach Definition ist die Abbildung*

$$\mathcal{T}_{1,p} : \mathsf{W}^{1,p}(I) \to \mathsf{L}^p(I) \times \mathsf{L}^p(I) \quad \textit{mit} \quad u \mapsto (u,\, u')$$

eine Isometrie und bildet daher $\mathsf{W}^{1,p}(I)$ auf einen linearen Unterraum von $\mathsf{L}^p(I) \times \mathsf{L}^p(I)$ ab. Dieser lineare Unterraum ist sogar abgeschlossen, *denn mit Hilfe der Definition von schwacher Ableitung zeigen wir leicht die Implikation*

$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \quad \textit{in} \quad \mathsf{L}^p(I), \quad u_n' \xrightarrow{n\to\infty} v \quad \textit{in} \quad \mathsf{L}^p(I) \quad \Longrightarrow u \in \mathsf{W}^{1,p}(I) \quad \textit{mit} \quad u' = v.$$

Satz 4. *Das Paar $(\mathsf{W}^{1,p}(I),\, \|\cdot\|_{1,p})$ ist*

1. *ein Banach-Raum für alle $1 \le p \le \infty$,*
2. *ein Hilbert-Raum für $p = 2$, in dem Sinne, dass das Skalarprodukt*

$$\langle u,\, v \rangle_{1,p} = \int_I uv + u'v' \,\mathrm{d}x$$

eine zu $\|\cdot\|_{1,2}$ äquivalente Norm erzeugt,

3. *separabel für $1 \le p < \infty$,*
4. *reflexiv für $1 < p < \infty$.*

Beweis. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathsf{W}^{1,p}(I)$. Dann sind $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathsf{L}^p(I)$. Die Vollständigkeit von $\mathsf{L}^p(I)$ liefert nun zwei Funktionen u, v so dass $u_n \to u$ und $u_n' \to v$ jeweils stark in $\mathsf{L}^p(I)$. Insbesondere können wir in

$$\int_I u_n \varphi' \,\mathrm{d}x = -\int_I u_n' \varphi \,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad \varphi \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{c}}(I).$$

zum Grenzwert übergehen und erhalten, dass v die schwache Ableitung von u ist. Die Hilbert-Raum Eigenschaft für $p = 2$ folgt unmittelbar aus der Definition des Skalarproduktes und die Separabilität (bzw. Reflexivität) folgt, weil $\mathcal{T}_{1,p}$ abgeschlossenes Bild hat und weil das Kreuzprodukt separabler (bzw. reflexiver) Banach-Räume auch wieder separabel (bzw. reflexiv) ist. □

Satz 5. *Sei $1 < p \le \infty$ und sei $u \in \mathsf{L}^p(I)$. Dann sind die Aussagen*

1. *$u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$,*
2. *es gibt eine Konstante C, so dass $\left| \int_I u\varphi' \,\mathrm{d}x \right| \le C\|\varphi\|_{p'}$ für alle $\varphi \in \mathsf{C}^\infty_{\mathrm{c}}(I)$,*

äquivalent. Die beste Konstante ist dabei $C = \|u'\|_p$.

Beweis. Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2. gilt nach Definition mit $C = \|u\|_p$. Für 2. $\Rightarrow$ 1. betrachten wir die lineare Abbildung

$$f \;:\; \varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(I) \mapsto \int_I u\varphi' \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Diese ist auf einem dichten Unterraum von $\mathsf{L}^{p'}(I)$ definiert, siehe Satz 45, und stetig bzgl. der p'-Norm. Daher können wir diese Abbildung f in eindeutiger Weise zu einer linearen und stetigen Abbildung auf $\mathsf{L}^{p'}(I)$ fortsetzen. Satz (36) garantiert nun, dass f als Dualpaarung mit einem Element $v \in \mathsf{L}^p(I)$ geschrieben werden kann, d.h.

$$f \;:\; \varphi \in \mathsf{L}^{p'}(I) \mapsto \int_I \varphi v \,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere gilt

$$\int_I u\varphi' \,\mathrm{d}x = \int_I \varphi v \,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(I),$$

d.h. $-v$ ist schwache Ableitung von u. □

Satz 6. *Eine Funktion $u \in \mathsf{L}^\infty(I)$ gehört zu $\mathsf{W}^{1,\infty}(I)$ genau dann, wenn u Lipschitz-stetig ist, d.h. wenn es eine Konstante C gibt so*

$$|u(y) - u(x)| \le C\,|y - x| \qquad \forall \quad x, y, \in I.$$

Die beste Konstante ist dabei $C = \|u'\|_\infty$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Satz 3 liefert (für $y > x$)

$$|u(y) - u(x)| \le \int_x^y |u'(t)| \;\mathrm{d}t \le \|u'\|_\infty (y - x).$$

($\Leftarrow$) Sei nun $\varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ gegeben und ε hinreichend klein. Dann gilt

$$\int_I u(x)\frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon} \,\mathrm{d}x = \int_I \varphi(x)\frac{u(x-\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \,\mathrm{d}x,$$

wobei alle Integrale für hinreichend kleine ε wohldefiniert sind, da φ kompakten Träger in I hat. Nach Voraussetzung gilt nun

$$\left|\int_I u(x)\frac{\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)}{\varepsilon} \,\mathrm{d}x\right| \le C\|\varphi\|_1$$

und der Limes $\varepsilon \to 0$ liefert

$$\left|\int_I u(x)\varphi'(x) \,\mathrm{d}x\right| \le C\|\varphi\|_1.$$

Die Behauptung folgt nun mit Satz 5. □

Bemerkung. *Funktionen $u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ für $1 < p < \infty$ sind nicht Lipschitz- sondern Hölder-stetig mit Exponent $1/p'$, denn es gilt*

$$|u(y) - u(x)| \le \int_x^y |u'(t)| \;\mathrm{d}t \le \|u'\|_p (y - x)^{1/p'}.$$

2.1.3 Dichtheits-, Fortsetzungs-, und Einbettungssätze

Satz 7 (Fortsetzungssatz)**.** *Es existiert eine linearer stetiger* Fortsetzungsoperator

$$E : \mathsf{W}^{1,p}(I) \to \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R}),$$

so dass $(Eu)|_I = u$ *für alle* $u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ *gilt.*

Beweis. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. $a = -\infty$ und $b = +\infty$: Nichts zu zeigen.

2. $a = -\infty < b < \infty$: Wir definieren die Fortsetzung von u durch Spiegelung an b wie folgt

$$(Eu)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x < b, \\ u(2b - x) & \text{für } x > b. \end{cases}$$

   Dann gilt $Eu \in \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ mit $\|Eu\|_{\mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{\mathsf{W}^{1,p}(I)}$ (siehe Übungsaufgabe).

3. $-\infty < a < b = \infty$: Spiegelung an a.

4. $-\infty < a < b < \infty$: Sei $J = (2a - b, 2b - a)$. Durch Spiegelung an a und b konstruieren wir einen Fortsetzungsoperator $E_1 : \mathsf{W}^{1,p}(I) \to \mathsf{W}^{1,p}(J)$ mit $\|E_1 u\|_{\mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 3\|u\|_{\mathsf{W}^{1,p}(I)}$. Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion eines geeigneten Abschneideoperators $E_2 : \mathsf{W}^{1,p}(J) \to \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})$. Dazu wählen wir eine Funktion η, so dass

   (a) $\eta \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$,
   (b) $\eta(x) = 0$ for $x \notin J$,
   (c) $\eta(x) = 1$ for $x \in I$,

   und definieren

$$(E_2 v)(x) = \begin{cases} \eta(x)v(x) & \text{für } x \in J, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   für alle $v \in \mathsf{W}^{1,p}(J)$. Dann gilt (siehe Übungsaufgabe) $E_2 v \in \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ mit $\|E_2 v\|_{\mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})} \leq (\|\eta\|_\infty + \|\eta'\|_\infty)\|v\|_{\mathsf{W}^{1,p}(J)}$. Die Behauptung folgt nun mit $E = E_2 \circ E_1$.

□

Satz 8 (Dichtheitssatz)**.** *Der Raum* $\mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ *liegt dicht in* $\mathsf{W}^{1,p}(I)$ *für* $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Wir können $I = \mathbb{R}$ annehmen (anderenfalls benutzen wir die Fortsetzung nach Satz 7). Sei nun $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Standardfaltungskernen und $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Abschneidefunktionen, d.h.

1. $\eta_n \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$,

2. $\eta_n(x) = 0$ für $|x| > n + 1$,

3. $\eta_n(x) = 1$ für $|x| < n$,

4. $0 \leq \eta_n(x) \leq 1$ für $|n| \leq x \leq n + 1$,

5. $0 \leq |\eta_n(x)| + |\eta_n'(x)| \leq C$ für eine geeignete Konstante Cund alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Für $u_n = \varrho * (\eta_n u)$ gilt nun $u_n \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ mit supp$u_n \subset (-n-1-1/n,\, n+1+1/n)$ und $D^j(u_n) = (D^j\varrho) * (\eta_n u)$. Außerdem haben wir (siehe Übungsaufgaben)

$$(\varrho_n * u)' = \varrho_n * u', \qquad (\varrho_n * (\eta_n u))' = \varrho_n * (\eta_n u_n)' = \varrho_n * (\eta_n' u + u'\eta_n),$$

und damit (siehe Kap. 1, Satz 44)

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_{1,p} &\leq \|\varrho_n * (\eta_n u) - \varrho_n * u\|_{1,p} + \|\varrho_n * u - u\|_{1,p}\\ &\leq C(\|\eta_n u - u\|_{1,p} + \|\varrho_n * u - u\|_{1,p})\end{aligned}$$

wobei

$$\|\varrho_n * u - u\|_{1,p} = \|\varrho_n * u - u\|_p + \|\varrho_n * u' - u'\|_p \to 0.$$

Desweiteren gilt

$$\|\eta_n u - u\|_{1,p} \leq \|\eta_n u - u\|_p + \|\eta_n u' - u'\|_p + \|\eta_n' u\|_p.$$

Da die Funktionen $\eta_n - 1$ als auch η_n' uniform beschränkt sind und punktweise gegen Null konvergieren, liefert der Satz über majorisierte Konvergenz

$$\|(1-\eta_n)u\|_p \to 0, \qquad \|\eta_n' u\|_p \to 0,$$

und deshalb auch $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$. □

Bemerkung. $\mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(I)$ *liegt i.A.* nicht *dicht in* $\mathsf{W}^{1,p}(I)$.

Satz 9 (ein Einbettungssatz)**.** *Es gilt* $\mathsf{W}^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathsf{L}^\infty(I)$.

Beweis. Für $p = \infty$ ist nichts zu zeigen. Mit Satz 7 können wir außerdem $I = \mathbb{R}$ annehmen. Sei nun $u \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ gegeben, und sei $w = G \circ u$ mit $G(y) = |y|^{p-1}\, y$. Dann gilt $w \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R})$ mit $w' = p\,|u|^{p-1}\, u'$ und

$$w(x) = p\int_{-\infty}^{x} p\,|u(s)|^{p-1}\, u'(s)\,\mathrm{d}s,$$

und die Hölder-Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned}|u(x)|^p = |w(x)| &\leq p\left(\int_{-\infty}^{x} |u(s)|^{p'(p-1)}\,\mathrm{d}s\right)^{1/p'}\left(\int_{-\infty}^{x} |u'(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p},\\ &= p\|u\|_{1,p}^{1/p}\|u\|_{1,p}^{1/p'} = p^p\|u\|_{1,p},\end{aligned}$$

und mit auch

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{1,p}. \tag{2.1}$$

Damit ist die Behauptung für $u \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ bewiesen. Sei nun $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$, so dass $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$. Aus (2.1) folgt nun

$$\|u_n\|_\infty \leq C\|u_n\|_{1,p}. \tag{2.2}$$

Insbesondere ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Cauchy-Folge in $\mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})$, und daraus schließen wir $\|u_n - u\|_\infty \to 0$. Damit können wir in beiden Seiten von (2.2) zum Grenzwert übergehen. □

Satz 10 (weitere Einbettungssätze)**.** *Für* $|I| < \infty$ *gilt:*

1. $\mathsf{W}^{1,p}(I)$ *ist kompakt eingebettet in* $\mathsf{C}(\overline{I})$ *für* $1 < p \leq \infty$,

2. $\mathsf{W}^{1,1}(I)$ *ist kompakt eingebettet in* $\mathsf{L}^p(I)$ *für* $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Siehe Brezis. □

2.1.4 Weitere Eigenschaften von $\mathsf{W}^{1,p}$-Funktionen

Satz 11. *Sei $|I| = \infty$ und $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\lim_{|x|\to\infty,\, x\in I} u(x) = 0.$$

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ beliebig wählen wir $\tilde{u} \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ so dass

$$\|u - \tilde{u}|_I\|_\infty \leq C\|u - \tilde{u}|_I\|_{1,p} \leq \varepsilon.$$

Für hinreichend große $|x|$ gilt nun $\tilde{u}(x) = 0$ und daher $|u(x)| \leq \varepsilon$. Dies liefert

$$\limsup_{|x|\to\infty,\, x\in I} |u(x)| \leq \varepsilon,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 12. *Für $u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ und $G \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ mit $G(0) = 0$ gilt $G \circ u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ mit $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.*

Beweis. Für $M > 0$ sei $D_M = \sup_{|y|\leq M} |G'(y)|$. Dann gilt nach Mittelwertsatz

$$|G(y)| = (G'(\xi(y))y) \leq D_M\,|y| \qquad \forall \quad y \in [-M,\, M],$$

und damit

$$|G(u(x))| \leq D_{\|u\|_\infty}\,|u(x)| \qquad \forall \quad x \in I.$$

Insbesondere gilt $G \circ u \in \mathsf{L}^p(I)$. Außerdem haben wir $G' \circ u \in \mathsf{L}^\infty(I)$ und damit auch $(G' \circ u)u' \in \mathsf{L}^p(I)$.

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\int_I G\circ u\varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad \varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(I). \tag{2.3}$$

Sei zunächst $p < \infty$. Wir wählen eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R})$ so dass

$$\|u - u_n|_I\|_\infty \leq C\|u - u_n|_I\|_{1,p} \to 0.$$

Sei nun $M := \limsup_{n\to\infty} \|u\|_\infty \geq \|u\|_\infty$. Dann gilt nach Mittelwertsatz

$$\|G \circ u - G \circ u_n|_I\|_p \leq D_M\|u - u_n|_I\|_p \to 0.$$

Da G' gleichmäß stetig auf dem Interval $[-M,\, M]$ ist, und weil $\|u_n|_I - u\|_\infty \to 0$, gilt außerdem

$$\|G' \circ u - G' \circ u_n|_I\|_\infty \to 0,$$

und deshalb auch

$$\begin{aligned}
&\|(G' \circ u)u' - (G' \circ u_n|_I)u_n'|_I\|_p \\
&\qquad \leq \|(G' \circ u)u' - (G' \circ u)u_n'|_I\|_p + \|(G' \circ u)u_n'|_I - (G' \circ u_n|_I)u_n'|_I\|_p \\
&\qquad \leq \|G' \circ u\|_\infty\|u' - u_n'|_I\|_p + \|u_n'|_I\|_p\|G' \circ u - G' \circ u_n|_I\|_\infty \\
&\qquad \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt (2.3) aus der entsprechenden Relation für die glatten Funktionen u_n im Limes $n \to \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Für gegebenes $\varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(I)$ wählen gibt es ein endliches offenes Interval J mit $\operatorname{supp}\varphi \subset J \subset I$. Dann gilt $G \circ u \in \mathsf{W}^{1,p}(J)$ für alle $1 \leq p < \infty$. Aus dem bereits bewiesenen Aussagen folgt dann (2.3). □

Wir bemerken, dass die Voraussetzung $G(0) = 0$ in Satz 12 für $|I| < \infty$ fallen gelassen werden kann, da dann konstante Funktionen in $\mathsf{W}^{1,p}(I)$ enthalten sind.

Das nächste Resultat charakterisiert die schwache Konvergenz in $\mathsf{W}^{1,p}(I)$.

Satz 13. *Seien $|I| < \infty$ und $1 \le p < \infty$. Außerdem gelte $u_n \rightharpoonup u$ schwach in $\mathsf{W}^{1,p}(I)$. Dann gilt*

1. *$u_n' \rightharpoonup u'$ schwach in $\mathsf{L}^p(I)$,*
2. *$u_n \to u$ stark in $\mathsf{L}^p(I)$.*

Beweis. 1. Für jedes $v \in \mathsf{L}^{p'}(I)$ sind

$$\tilde{u} \in \mathsf{W}^{1,p}(I) \mapsto \int_I \tilde{u} v \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{u} \in \mathsf{W}^{1,p}(I) \mapsto \int_I \tilde{u}' v \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

zwei lineare und stetige Funktional auf $\mathsf{W}^{1,p}(I)$ (siehe Übungsaufgabe). Nach Voraussetzung gilt nun

$$\int_I u_n v \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_I u v \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_I u_n' v \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_I u' v \,\mathrm{d}x,$$

für alle $v \in \mathsf{L}^{p'}(I)$, d.h. wir haben $u_n \rightharpoonup u$ und $u_n' \rightharpoonup u'$ schwach in $\mathsf{L}^p(I)$.

2. Wie wählen $y \in I$ beliebig, und definieren die konstanten Funktionen v_n und v durch $v_n(x) = u_n(y)$ und $v(x) = u(y)$ für alle $x \in I$. Da konstante Funktionen wegen $|I| < \infty$ zu $\mathsf{W}^{1,p}(I)$ gehören, gilt $w, w_n \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ mit $w_n := u_n - v_n$ und $w := u - v$. Außerdem haben wir

$$w_n(x) = \int_y^x u_n'(s) \,\mathrm{d}s = \left\langle u_n', \, \chi_{[x,\,y]} \right\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \left\langle u', \, \chi_{[x,\,y]} \right\rangle = \int_y^x u'(s) \,\mathrm{d}s = w(x),$$

wobei $\chi_{[x,\,y]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[x,\, y]$ bezeichnet (mit $\chi_{[x,\,y]} = -\chi_{[y,\,x]}$). Insbesondere konvergiert w_n punktweise gegen w, und wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_n\|_\infty \le 2 \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty \le 2C \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p} < \infty$$

folgt daraus nach dem Satz über majorisierte Konvergenz $w_n \to w$ stark in $\mathsf{L}^p(I)$.

3. Aus dem bisher Bewiesenen folgt, dass $v_n = u_n - w_n$ schwach in $\mathsf{L}^p(I)$ gegen $v = u - w$ konvergiert. Für konstante Funktionen sind aber schwache und starke Konvergenz identisch, d.h. wir haben $v_n \to v$ stark in $\mathsf{L}^p(I)$. Daraus folgt nun, dass $u_n = w_n + v_n$ stark gegen $u = w + v$ konvergiert.

□

Bemerkung. *Es gilt auch das folgende Resultat, das insbesondere Umkehrung von Satz (13) impliziert: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathsf{W}^{1,p}(I)$, so dass $u_n \rightharpoonup u$ und $u_n' \rightharpoonup v$ jeweils schwach in $\mathsf{L}^p(I)$. Dann ist $u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ mit $u' = v$ und es gilt $u_n \rightharpoonup u$ schwach in $\mathsf{W}^{1,p}(I)$.*

Zur späteren Verwendung definieren wir nun für $k \in \mathbb{N}$ induktiv die Räume

$$\mathsf{W}^{k,p}(I) := \{u \in \mathsf{W}^{k-1,p}(I) \ : \ u' \in \mathsf{W}^{k-1,p}(I)\},$$

wobei $\mathsf{W}^{0,p}(I) = \mathsf{L}^p(I)$ vereinbart sei. In den Übungen wird bewiesen, dass $\mathsf{W}^{k,p}(I)$ ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} := \sum_{j=0}^{k} \|D^j(u)\|_p,$$

ein Banach-Raum ist, wobei $D^j u$ die j-te schwache Ableitung von u bezeichnet und $D^0 u = u$ gilt.

Zum Abschluss zeigen wir, dass stetige schwache Ableitungen auch klassische Ableitungen sind.

Lemma 14. *Habe $u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ die Eigenschaft, dass die schwache Ableitung u' zu $\mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$ gehört. Dann gilt $u \in \mathsf{C}^1\big(\overline{I}\big)$ und die schwache Ableitung ist klassische Ableitung.*

Beweis. Nach Satz 3 gilt

$$u(x+\varepsilon) - u(x) = \int_x^{x+\varepsilon} u'(s)\,\mathrm{d}s = \varepsilon u'(x) + \int_x^{x+\varepsilon} \big(u'(s) - u'(x)\big)\,\mathrm{d}s,$$

für alle $x \in \overline{I}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sofern $x + \varepsilon \in \overline{I}$. Daraus schließen wir (wegen der Stetigkeit von u'), dass

$$\left|\frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} - u'(x)\right| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} |u'(x+s) - u'(x)|\,\mathrm{d}s \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

und dies liefert die Behauptung. □

2.1.5 Die Räume $\mathsf{W}_0^{1,p}(I)$

Eine wichtige Rolle in der funktionalanalytischen Theorie von Differentialgleichungen spielt der Raum

$$\mathsf{W}_0^{1,p}(I) := \overline{\mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(I)} \quad 1 \le p < \infty,$$

wobei der Abschluss in der $\mathsf{W}^{1,p}(I)$-Norm gemeint ist. Nach Satz (8) gilt $\mathsf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}) = \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R})$, aber für $I \neq (-\infty, \infty)$ ist $\mathsf{W}_0^{1,p}(I)$ ein echter Unterraum von $\mathsf{W}^{1,p}(I)$.

Satz 15. $\big(\mathsf{W}_0^{1,p}(I), \|\cdot\|_{1,p}\big)$ *ist*

1. *separabler Banach-Raum für $1 \le p < \infty$,*
2. *Hilbert-Raum für $p = 2$,*
3. *reflexiv für $1 < p < \infty$.*

Beweis. Alle Behauptungen gelten weil $\mathsf{W}_0^{1,p}(I)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathsf{W}_0^{1,p}(I)$ ist. □

Der folgende Satz beschreibt die Randwerte von $\mathsf{W}_0^{1,p}$-Funktionen. In diesem Zusammenhang erinnern wir daran, dass

$$\mathsf{W}^{1,p}(I) \hookrightarrow \mathsf{C}\big(\bar{I}\big)$$

gilt, siehe Satz 3 und Satz 9.

Satz 16. *Sei $u \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$. Dann gilt $u \in \mathsf{W}^{1,p}_0(I)$ dann und nur dann, wenn u auf dem Rand ∂I verschwindet, d.h. wenn*

1. *$u(a) = 0$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$ für $a = -\infty$), und*

2. *$u(b) = 0$ (bzw. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ für $b = +\infty$)*

gelten.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(I)$ eine Folge, so dass

$$\|u - u_n\|_\infty \le C\|u - u_n\|_{1,p} \xrightarrow{n\to 0} 0.$$

Für $a > \infty$ folgt nun $|u(0)| \le C\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{1,p} = 0$; für $a = -\infty$ folgt die Behauptung aus Satz 11. Die Diskussion am anderen Rand von I ist analog.

($\Leftarrow$) Wir wählen eine Funktion $G \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ mit $G(s) = 0$ für $|s| \le 1$, $|G(s)| \le |s|$ für $1 \le s \le 2$ und $G(s) = s$ für $|s| \ge 2$. Desweiteren definieren wir $u_n := \frac{1}{n}G(nu)$. Dann gilt $u_n \in \mathsf{W}^{1,p}(I)$ mit $u_n'(x) = G'(nu(x))u'(x)$ nach Satz 12, wobei

$$\operatorname{supp} u_n = \{x \in I \,:\, |u(x)| \ge 1/n\}$$

nach Voraussetzung (d.h. wegen $u|_{\partial I} = 0$) kompakt in I ist. Wegen $\|G'\|_\infty < \infty$ und $|u_n| \le |u|$ fast überall, liefert der Satz über majorisierte Konvergenz

$$\|u_n - u\|_p \to 0, \qquad \|u_n' - u'\|_p = \big\|\big(-1 + G'(nu)\big)u'\big\|_p \to 0,$$

d.h. $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$. Schließlich definieren wir $\hat{u}_n = \varrho_{m(n)} * u_n$, wobei $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Standardfaltungsfolge ist und $m(n)$ so gross gewählt wird, dass $\hat{u}_n$ immer noch kompakten Träger in I hat. Mit $\hat{u}_n' = \varrho_{m(n)} * {u_n}'$ folgt nun $\|\hat{u}_n - u\|_{1,p} \to 0$ (siehe Kap 1, Satz 44). □

Wir beweisen nun die Poincaré-Ungleichung auf endlichen Intervallen. Diese impliziert insbesondere, dass auf $\mathsf{W}^{1,p}_0(I)$ die Grösse $\|u'\|_p$ eine zur Standardnorm äquivalente Norm definiert.

Lemma 17 (Poincaré-Ungleichung)**.** *Für jedes $|I| < \infty$ gibt es eine Konstante C, so dass*

$$\|u'\|_p \le \|u\|_{1,p} \le C\|u'\|_p \qquad \forall \quad u \in \mathsf{W}^{1,p}_0(I).$$

Beweis. Wegen $u(a) = 0$ gilt

$$|u(x)| \le \int_a^x |u'(s)|\,\mathrm{d}s \le \|u'\|_1,$$

d.h. $\|u\|_\infty \le \|u'\|_1$. Die Hölder-Ungleichung liefert außerdem zwei Konstanten c und C, so dass

$$c\|u\|_p \le \|u\|_\infty \le \|u'\|_1 \le C\|u'\|_p.$$

Damit gilt $\|u\|_{1,p} \le (1 + C/c)\|u'\|_p$, und $\|u'\|_p \le \|u\|_{1,p}$ gilt nach Definition. □

Abschließend bemerken wir, dass der Dualraum von $\mathsf{W}^{1,p}_0(I)$ üblicherweise mit $W^{-1,p'}(I)$ bezeichnet wird. Insbesondere gilt

$$\mathsf{W}^{1,p}_0(I) \subset \mathsf{L}^2(I) \cong \mathsf{L}^2(I)^* \subset \mathsf{W}^{-1,p'}(I) \qquad 1 \le p < \infty.$$

2.2 Lineare Randwertprobleme

In diesem Abschnitt entwickeln wir die Lösungstheorie für lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung. Aufgrund der Linearität werden wir vor allem in Hilbert-Räumen arbeiten. Dazu führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\mathsf{H}^1(I) := \mathsf{W}^{1,2}(I), \qquad \mathsf{H}^1_0(I) := \mathsf{W}^{1,2}_0(I), \qquad \mathsf{H}^{-1}(I) := \mathsf{W}^{-1,2}(I) = \mathsf{W}^{1,2}_0(I)^*.$$

Darüberhinaus schreiben wir

$$\mathsf{H}^k(I) := \mathsf{W}^{k,2}(I), \qquad \mathsf{H}^0(I) := \mathsf{L}^2(I)$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Definition 18. *Eine Bilinearform $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ auf einem Hilbert-Raum $(H, \langle\cdot, \cdot\rangle_H)$ heißt*

1. stetig*, falls es eine Konstante M gibt, so dass*

$$|\alpha(u, v)| \le M\|u\|_H\|v\|_H$$

für alle $u, v \in H$ gilt,

2. koerzitiv*, falls es eine Konstante m gibt, so dass*

$$\alpha(u, u) \ge m\|u\|_H^2$$

für alle $u \in H$ gilt.

M wird die Stetigkeitskonstante *von α genannt; m bezeichnet man als* Koerzivitätskonstante *von α.*

Wir formulieren nun das wesentliche funktionalanalytische Werkzeug für diesem Abschnitt.

Satz 19 (Satz von Lax-Milgram)**.** *Sei α eine stetige und koerzitive Bilinearform auf einem Hilbert-Raum H. Dann gibt es für jedes $\eta^* \in H^*$ genau ein $u \in H$ so dass*

$$\alpha(u, v) = \langle\eta^*, v\rangle_{H^*,H} \qquad \forall \quad v \in H \tag{2.4}$$

gilt.

Beweis. Siehe Brezis, Theorem 5.7. □

Bemerkung. *Für* symmetrische *Bilinearformen folgt das Theorem von Lax-Milgram aus der Tatsache, dass dass H^* isomorph zu H, und dass durch*

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \alpha(u, v)$$

ein zu $\langle\cdot, \cdot\rangle$ äquivalentes Skalarprodukt gegeben ist.

Jede Bilinearform $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle Au, v\rangle_H = \alpha(u, v)$$

in natürlicherweise einen linearen und stetigen Operator $A : H \to H$, wobei Stetigkeit und Koerzitivität von α sich wie folgt schreiben:

$$\|A\|_{\mathsf{Lin}(H;H)} \le M, \qquad \langle Au, u\rangle_H \ge m\|u\|_H^2.$$

Außerdem gibt es für jedes $\eta^* \in H^*$ wegen $H \cong H^*$ (Darstellungssatz von Riesz-Fréchet) ein $h \in H$ mit $\langle\eta^*, \cdot\rangle_{H^*,H} = \langle h, \cdot\rangle_H$. Die Gleichung (2.4) kann daher als Operatorgleichung

$$Au = h$$

geschrieben werden.

2.2.1 Dirichlet-Randbedingungen

Wir illustrieren den funktionalanalytische Zugang zu Randwertproblemen an folgendem prototypischen Problem auf einem endlichen Interval $I = (a,\, b)$:

$$\begin{aligned} -u'' + u = f \quad \text{auf} \quad I, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{aligned} \tag{P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$}$$

Dabei wird f als gegeben vorausgesetzt und ist u die unbekannte Funktion, die es zu bestimmen gilt. Problem (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) schreibt neben der Differentialgleichung auch sogenannte *homogene Dirichlet-Randwerte* für u vor.

Bemerkung. *Randwerte dienen dazu, die Eindeutigkeit einer Lösung zu erzwingen. In der Tat, für gegebenes f kann es keine eindeutige Lösung zu $-u'' + u = f$ geben, da mit u auch $\tilde{u}$ mit $\tilde{u}(x) = u(x) + \alpha \exp(x) + \beta \exp(-x)$ die Differentialgleichung erfüllt.*

Allgemeines Programm am Beispiel homogener Dirichlet-Randbedingungen An dem Modellproblem (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) werden wir exemplarisch zeigen, wie eine funktionalanaltyische Lösungstheorie entwickelt wird:

1. Wir zeigen die *Existenz* und *Eindeutigkeit* einer geeignet definierten *schwachen* Lösung $u \in \mathsf{H}^1(I)$.

2. Wir zeigen, dass jede schwache Lösung sogar in $H^2(I)$ liegt. Das ist ein sogenantes *Regularitätsresultat.*

3. Wir zeigen die *stetige Abhängigkeit* der schwachen Lösung u von den Daten f.

Wir führen nun den Begriff einer schwachen Lösung ein. Beachte dabei, dass die homogenen Dirichlet-Randbedingungen in den sogenannten *Ansatzraum* einfließen.

Definition 20. *Sei $f \in \mathsf{H}^0(I)$. Eine schwache Lösung des Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *ist eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1_0(I)$, so dass*

$$\int_I u'v' \,\mathrm{d}x + \int_I uv \,\mathrm{d}x = \int_I fv \,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathsf{H}^1_0(I). \tag{2.5}$$

Mit Hilfe partieller Integration (und unter Ausnutzung der Randwerte von $v \in \mathsf{H}^1_0(I)$) sieht man leicht, dass jede klassische Lösung auch schwache Lösung ist. Die Umkehrung gilt aber nur für *reguläre* Funktionen f und ist nicht so einfach zu sehen.

Wir beweisen nun die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung.

Satz 21 (Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung)**.** *Für jedes $f \in \mathsf{H}^0(I)$ gibt es genau eine schwache Lösung zu* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$).

Beweis. Wir definieren eine Bilinearform α und eine lineares stetiges Funktional η^* auf $H = \mathsf{H}^1_0(I)$ durch

$$\alpha(u,\, v) = \int_I u'v' \,\mathrm{d}x + \int_I uv \,\mathrm{d}x, \qquad \langle \eta^*,\, v\rangle = \int_I fv \,\mathrm{d}x,$$

wobei die Stetigkeit von η^* aus der Hölder-Ungleichung folgt. Die Bilinearform α ist stetig und koerzitiv, denn wegen $\|u\|_{1,2} = \|u\|_2 + \|u'\|_2$ und

$$\alpha(u,\, v) = \langle u,\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(I)} = \|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2$$

gilt

$$|\alpha(u,\,v)| \le \|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}, \qquad \alpha(u,\,u) \ge \tfrac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lax-Milgram. □

Per Definition besitzt die schwache Lösungen u zu (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) zunächst nur eine schwache Ableitung u'. Wir können jedoch zeigen, dass u auch eine schwache zweite Ableitung besitzt.

Satz 22 (Regularität der schwachen Lösung)**.** *Sei u die schwache Lösung des Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$)*. Dann gilt $u \in \mathsf{H}^2(I)$ mit $u'' = u - f$ in $\mathsf{H}^0(I)$. Für $f \in \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$ gilt sogar $u \in \mathsf{C}^2\big(\overline{I}\big)$ und u ist klassische Lösung des Randwertproblems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$)*.*

Beweis. Mit (2.5) schließen wir

$$\left|\int_I u'v'\,\mathrm{d}x\right| \le \Big(\|u_2\| + \|f\|_2\Big)\|v\|_2 \qquad \forall \quad v \in \mathsf{C}_{\mathrm{c}}^\infty(I),$$

und Satz 5 liefert $u' \in \mathsf{H}^1(I)$, d.h. es existiert $u'' \in \mathsf{H}^0(I)$ im Sinne schwacher Ableitungen. Eine direkte Rechnung zeigt dann $u'' = u - f$. Außerdem gilt $u \in \mathsf{H}^1(I) \subset \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$, und $f \in \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$ impliziert daher $u'' \in \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$. Satz 14 liefert nun $u \in \mathsf{C}^2\big(\overline{I}\big)$. □

Schließich zeigen wir, dass die Lösung u stetig von den Daten f abhängt.

Satz 23 (Stetige Abhängigkeit von den Daten)**.** *Es gibt eine Konstante C, so dass $\|u\|_{2,2} \le C\|f\|_2$ für jede schwache Lösung des Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *gilt. Insbesondere definiert* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *einen linearen und stetigen Lösungsoperator $f \in \mathsf{H}^0(I) \mapsto u \in \mathsf{H}_0^2(I)$.*

Beweis. Wir wählen $u = v$ in (2.5) und finden

$$0 \le \tfrac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 \le \alpha(u,\,u) = \int_I fu\,\mathrm{d}x \le \|f\|_2\|u\|_2 \le \|f\|_2\|u\|_{1,2}.$$

Daraus folgt $\|u\|_2 \le \|u\|_{1,2} \le 2\|f\|_2$. Außerdem haben wir $\|u''\|_2 \le \|u\|_2 + \|f\|_2$, und damit $\|u\|_{2,2} = \|u''\|_2 + \|u'\|_2 + \|u\|_2 \le C\|f\|_2$. Es ist weiterhin klar, dass der Lösungsoperator linear ist, und die soeben bewiesene Abschätzung liefert die Stetigkeit. □

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen Die im vorangegangenen Abschnitt entwickelten Ideen lassen sich leicht auf auf *inhomogene Dirichlet-Randbedingunen* verallgemeinern. Um dies zu verstehen, betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{auf} \quad I, \\ u(0) = d_a, &\quad u(b) = d_b, \end{aligned} \tag{P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$}$$

wobei nun die *Daten* durch $f \in \mathsf{L}^2(I)$ und $d_a, d_b \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

Die wesentliche Beboachtung ist, dass (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) wie folgt in ($\mathsf{P}_1$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) transformiert werden kann: Sei $w \in \mathsf{C}^2\big(\overline{I}\big)$ eine glatte Funktion, die die Randdaten annimmt, d.h.

$w(a) = d_a$, $w(b) = d_b$. Da wir viele Freiheiten haben, w zu wählen wollen wir außerdem annehmen, dass w linear und stetig von d_a und d_b abhängt, d.h. insbesondere dass $\|w\|_{2,2} \leq C(|d_a| + |d_b|)$ für eine geeignete Konstante C gilt. In praktischen Fällen werden wir meist w linear wählen, d.h. wir setzen

$$w(x) := d_a + (d_b - d_a)\frac{x-a}{b-a}.$$

Statt Problem (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) betrachten wir nun das folgende Randwertproblem für die Funktion $\tilde{u} = u - w$

$$\begin{aligned} -\tilde{u}'' + \tilde{u} = \tilde{f} &:= f + w'' - w, \\ \tilde{u}(a) = 0, &\quad \tilde{u}(b) = 0. \end{aligned}$$

Die Sätze 21 und 22 liefern nun die Existenz, Eindeutigkeit und Reguarität von $\tilde{u}$. Aus Satz 23 folgt außerdem

$$\|u\|_{2,2} \leq \|\tilde{u}\|_{2,2} + \|w\|_{2,2} \leq C(\|f\|_2 + \|w\|_{2,2}) \leq C(\|f\|_2 + |d_a| + |d_b|).$$

Damit haben wir das folgende Resultat bewiesen, dass alle Punkte im obigen Programm beschreibt.

Satz 24. *Das Problem* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) *besitzt einen linearen und stetigen Lösungsoperator*

$$(f,\, d_a,\, d_b) \in \mathsf{H}^0(I) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto u \in \mathsf{H}^2(I).$$

Wir können nun umgekehrt den schwachen Lösungbegriff für (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) ableiten.

Definition 25. *Sei $f \in \mathsf{L}^2(I)$. Eine schwache Lösung des Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) *ist eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1(I)$ mit*

$$u(a) = d_a, \qquad u(b) = d_b,$$

so dass

$$\int_I u'v'\,\mathrm{d}x + \int_I uv\,\mathrm{d}x = \int_I fv\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathsf{H}^1_0(I). \tag{2.6}$$

Beachte, dass bei Dirichlet-Problemen die *Testfunktion* v in (2.6) immer homogene Randdaten hat, d.h. es gilt immer $v(a) = v(b) = 0$.

Die obigen Argumente sind sehr robust und können auf viele Differentialgleichungen angewendet werden. Der wichtigste Schritt für jedes Randwertproblem ist dabei, zunächst die beteiligten Funktionenräume und den schwachen Lösungsbegriff abzuleiten. In den Übungsaufgaben ist dies zum Beispiel für die folgende Klasse von Sturm-Liouville-Randwertproblemen zu leisten:

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu = f &\quad \text{auf} \quad I, \\ u(0) = d_a, &\quad u(b) = d_b, \end{aligned} \tag{P_2-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$}$$

wobei p und q gegebene Funktionen mit gewissen Eigenschaften sind.

2.2.2 Neumann- , Robin- und gemischte Randbedingungen

Wir verallgemeinern nun die Ideen vom letzten Abschnitt auf andere Typen von Randbedingungen. Wir beginnen mit dem Fall allgemeiner *Neumann-Randbedingungen* auf beiden Seiten, d.h. wir suchen schwache Lösungen des Problems

$$\begin{aligned} -u'' + u = f \quad \text{auf} \quad I, \\ u'(a) = -n_a, \quad u'(b) = +n_b, \end{aligned} \tag{$\mathsf{P_1}$-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$}$$

wobei die Daten $f \in \mathsf{H}^0(I)$ und $n_a, n_b \in \mathbb{R}$ gegeben seien. Um die richtige schwache Formulierung zu finden, argumentieren wir zunnächst formal (d.h. wir nehmen an, u sei hinreichend glatt). Dann multiplizieren wir die Differentialgleichung mit einer glatten Funktion v und nutzen partielle Integration. Dies liefert

$$\int_I u'v' \,\mathrm{d}x - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) + \int_I uv \,\mathrm{d}x = \int_I fv \,\mathrm{d}x.$$

In den Randterme aus der partiellen Integration können wir nun die Randbedingungen einsetzen, d.h. wir ersetzen $u'(a)$ bzw. $u'(b)$ durch n_a bzw. n_b . Dies motiviert die folgende Definiton:

Definition 26. *Sei $f \in \mathsf{L}^2(I)$. Eine schwache Lösung des Problems* ($\mathsf{P_1}$-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$) *ist eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1(I)$, so dass*

$$\int_I u'v' \,\mathrm{d}x + \int_I uv \,\mathrm{d}x = \int_I fv \,\mathrm{d}x + n_b v(b) + n_a v(a) \qquad \forall v \in \mathsf{H}^1(I). \tag{2.7}$$

Beachte, dass wir für Neumann-Randbedingungen $u, v \in \mathsf{H}^1(I)$ annehmen, und dass die Randwerte für v wohldefiniert sind (Satz 3 angewendet auf v).

Die Lösungstheorie für ($\mathsf{P_1}$-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$) kann nun nach dem im letzten Abschnitt skizzierten Programm entwickelt werden. Insbesondere gilt das folgende Resultat:

Satz 27 (Lösungstheorie für ($\mathsf{P_1}$-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$))**.**

1. *Zu gegebenen Daten gibt es genau eine schwache Lösung $u \in \mathsf{H}^1(I)$ zu* ($\mathsf{P_1}$-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$) .
2. *Jede schwache Lösung erfüllt $u \in \mathsf{H}^2(I) \subset \mathsf{C}^1\big(\overline{I}\big)$ mit $u'' = f - u$ und $u'(a) = -n_a$, $u'(b) = +n_b$. Außerdem gilt $u \in \mathsf{C}^2\big(\overline{I}\big)$ für $f \in \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$.*
3. *Der Lösungsoperator $(f,\, n_a,\, n_b) \in \mathsf{H}^0(I) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto u \in \mathsf{H}^2(I)$ ist linear und stetig.*

Beweis. 1. Die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung kann wieder mit dem Satz von Lax-Milgram bewiesen werden, wobei α wie im Beweis von Satz 21 gewählt wird. Der Hilbert-Raum ist nun aber $\mathsf{H}^1(I)$ und η^* ist durch

$$\langle \eta^*,\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(I)^*, \mathsf{H}^1(I)} = n_b v(b) + n_a v(a) + \int_I f(x)v(x) \,\mathrm{d}x.$$

gegeben. Beachte, dass $|v(a)| + |v(b)| \le 2\|v\|_\infty \le C\|v\|_{1,2}$ nach Satz 9 gilt.

2. Die Regularitätsaussagen $u \in \mathsf{H}^2(I)$ (bzw. $u \in \mathsf{C}^2\big(\overline{I}\big)$ für $f \in \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$) sowie $u'' = u - f$ können analog zum Beweis von Satz 22 gezeigt werden. Insbesondere impliziert (2.7), dass

$$\int_I (wv' + wv')\,\mathrm{d}x = n_b v(b) + n_a v(a) \qquad \forall v \in \mathsf{H}^1(I).$$

für $w = u'$ gilt, und mit Hilfe der Produktregel für schwache Ableitungen (siehe Übungsaufgaben) und des Satzes 3 schließen wir daraus $w(a) = n_a$ und $w(b) = n_b$.

3. Die Linearität des Lösungsoperator ist offensichtlich und die Stetigkeit folgt (analog zum Beweis von Satz 23) aus $\|u''\|_2 = \|u - f\|_2 \leq \|f\|_2 + \|u\|_2$ und weil (2.7) für $v = u$ die Abschätzung

$$c\|u\|_{1,2} \leq \|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq \big(\|f\|_2 + |n_a| + |n_b|\,\big)\|u\|_{1,2}$$

liefert.

□

Ein weiterer Typ von Randbedingungen wird als *Robin-Randbedingung* (oder auch als Randbedingung der *dritten Art*) bezeichnet und führt zu dem Problem

$$\begin{aligned} -u'' + u = f \quad &\text{auf} \quad I, \\ u'(a) = +r_a u(a), \quad u'(b) = &-r_b u(b). \end{aligned} \tag{$\mathsf{P_1}$-R}$$

Durch formale Betrachtungen analog zu oben finden wir schnell den entsprechenden schwache Lösungsbegriff, d.h. wir sagen u ist schwache Lösung von ($\mathsf{P_1}$-R), sofern

$$\int_I u'v'\,\mathrm{d}x + \int_I uv\,\mathrm{d}x + k_a u(a)v(a) + k_b u(b)v(b) = \int_I fv\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in \mathsf{H}^1(I). \tag{2.8}$$

Im Gegensatz zu Neumann-Randbedingungen müssen nun die Randbeiträge aus der partiellen Integration (in offensichtlicherweise Weise) in die Bilinearform α für den Satz von Lax-Milgram integriert werden. Diese ist für alle Werte von r_a und r_b stetig, aber nur dann koerzitiv, falls $r_a, r_b \geq -c$ für eine hinreichend kleine Konstante $0 < c < \infty$ gilt. In diesem Fall kann eine schwache Lösungstheorie analog zu Satz 27 abgeleitet werden.

Wir haben nun die funktionalanalytische Formulierung von verschiedenen Randbedingungen untersucht, und es ist nicht schwer zu sehen, dass auch *gemischte Randbedingungen*, also etwa $u(0) = 0 = u'(b)$, analog behandelt werden können. Schließlich können die verschieden Randbedingungen für anderen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewendet werden (siehe Übungsaufgaben).

2.2.3 Weiterführende Betrachtungen

In diesem Abschnitt beleuchten wir einige weitere Aspekte von linearen Randwertproblemen.

Zur Riesz-Fréchet-Abbildung von $\mathsf{H}^1(I)^*$ und H^{-1} Randwertprobleme zweiter Ordnung sind in natürlicher Weise mit Riesz-Fréchet-Abbildungen verbunden. Wir erinnern daran, dass nach Kapitel 1, Satz 17 jeder Hilbert-Raum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ isometrisch isomorph zu seinem Dualraum H^* ist. Insbesondere existiert die Riesz-Fréchet-Abbildung $R : H^* \to H$, so dass

$$\langle R\eta_*, v\rangle_H = \langle v, v\rangle_{H^*,H}, \qquad \|R\eta_*\|_H = \|\eta_*\|_{H^*}$$

für alle $v \in H$ und $\eta_* \in H^*$ gilt, wobei $\|\eta_*\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} \langle\eta_*, v\rangle_{H^*,H}$.

Wir betrachten zunächst den Hilbertraum $\mathsf{H}^1(I)$ mit dem Standard-Skalarpodukt

$$\langle u, v\rangle = \int_I uv\,\mathrm{d}x + \int_I u'v'\,\mathrm{d}x.$$

Da der Raum $\mathsf{L}^2(I)$ durch

$$\langle f, v\rangle_{\mathsf{H}^1(I)^*,\mathsf{H}^1(I)} = \int_I f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

in natürlicher Weise in $\mathsf{H}^1(I)^*$ einbettet, kann jede Funktion $f \in \mathsf{H}^0(I)$ als Element aus $\mathsf{H}^1(I)^*$ betrachtet werden. Mit den obigen Identifikationen kann dann leicht gezeigt werden, dass Rf für gegebenes f gerade die schwache Lösung des homogenen Neumann-Problems (P_1-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$) mit $n_a = n_b = 0$ ist.

Wir können natürlich auch den Raum $\mathsf{H}^1_0(I)$ mit dem Standard-Skalarprodukt betrachten. Die Riesz-Fréchet-Abildung ist dann aber durch den Lösungsoperator des homogenen Dirchlet-Problems (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) gegeben (siehe Übungsaufgaben). Schließlich können wir $\mathsf{H}^1_0(I)$ aber auch mit dem Skalarprodukt

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \int_I u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

ausstatten, das nach der Poincaré-Ungleichung, siehe Satz 17), eine zur Standardnorm äquivalente Norm induziert. In diesem Fall ist Riesz-Fréchet-Abbildung der Lösungsoperator des Problems (P_2-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) mit $p \equiv 1$ und $q \equiv 0$ sowie homogenen Randdaten $d_a = d_b = 0$.

Rechte Seiten aus H^{-1} und Green-Funktionen Bisher haben wir die schwache Lösungstheorie für rechte Seiten $f \in \mathsf{H}^0(I)$ entwickelt. Wie eine Durchsicht der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise zeigt, können aber auch rechte Seiten aus dem Dualraum $\mathsf{H}^1(I)^*$ zugelassen werden. Allerdings kann dann das Regularitätsresultat $u \in \mathsf{H}^2(I)$ nicht mehr gelten, und die stetige Abhängigkeit (der Lösung von den Daten) gilt nur gemäß

$$\|u\|_{1,2} \le C\|f\|_{-1,2}.$$

Eine mögliche rechte Seite ist $f = \delta_y$, wobei δ_y die Dirac-Distribution in $y \in I$ ist (siehe übungsaufgabe). Die schwache Lösung zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' + u = \delta_y \quad \text{auf} \quad I,\\ u(a) = u(b) = 0 \end{aligned} \tag{P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$-y}$$

erfüllt dann

$$\int_I u'v'\,\mathrm{d}x + \int_I uv\,\mathrm{d}x = \langle \delta_y,\, v\rangle_{\mathsf{H}^{-1}(I),\mathsf{H}^1_0(I)} = v(y) \qquad \forall v \in \mathsf{H}^1_0(I).$$

Diese Lösung wird einen Knick bei y haben (d.h. u' springt bei y) und deshalb gibt es keine zweite schwache Ableitung auf I (es gilt aber $u \in \mathsf{C}^\infty(I \setminus \{y\})$).

Die Lösungen der Problems (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$-$\mathsf{y}$) für alle Werte von $y \in I$ liefern zusammen die sogenannte *Green-Funktion* des (linearen!) Randwertproblems (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) und beschreiben den dazugehörigen Lösungsoperator. Die Idee ist wie folgt: Wenn $G(\cdot,\, y)$ für jedes $y \in I$ die Lösung von (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$-$\mathsf{y}$) bezeichnet, so ist die Lösung u von (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) für allgemeines f durch

$$u(x) = \int_I f(y)G(x,\, y)\,\mathrm{d}y,$$

gegeben. Formal (d.h. mit symbolischen Rechnungen) ist dies leicht einzusehen. Es ist allerdings nicht ganz trivial, diese Formel rigoros zu begründen. Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung werden Green-Funktionen keine weitere Rolle spielen, aber wir wollen erwähnen, dass diese eine sehr prominente Rolle in der klassischen Theorie partieller Differentialgleichungen spielen.

2.2.4 Maximum- und Vergleichsprinzipien

In diesem Abschnitt leiten wir zwei wichtige Prinzipien aus der Theorie linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung her. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit einem Resultat für klassiche Lösungen. In diesem Abschnitt ist $I = (a,\, b)$ wieder ein endliches Interval.

Satz 28. *Seien $f \in \mathsf{C}\big(\overline{I}\big)$ und $u \in \mathsf{C}^2\big(\overline{I}\big)$ zwei Funktionen mit $-u'' + u = f$. Dann gilt*

$$\min\{u(a), u(b), \min_{y\in I} f(y)\} \le u(x) \le \max\{u(a), u(b), \max_{y\in I} f(y)\} \qquad \forall \quad x \in I.$$

Beweis. Da u stetig und beschränkt ist, gibt es einen Maximierer $x_1 \in I$, so dass $u(x) \le u(x_1)$ für alle $x \in I$ gilt. In den Fällen $x_1 = a$ oder $x_1 = b$ folgt die obere Abschätzung sofort. Für $a < x_1 < b$ gilt $u'(x_1) = 0$ und $u''(x_1) \le 0$, und die Differentialgleichung liefert

$$u(x_1) = f(x_1) + u''(x_1) \le f(x_1) \le \max_{y\in I} f(y).$$

Die unter Abschätzung kann analog bewiesen werden. □

Wir wollen nun zeigen, dass dieses sogenannte *Maximum-Prinzip* auch für schwache Lösungen gilt. Dazu beginnen wir mit dem folgenden Resultat, das mit Hilfe der Menge der nichtnegativen Funktionen auf I, das ist

$$\mathcal{K}_{[0,\,\infty)} = \Big\{u : I \to [0,\, \infty)\Big\}$$

formuliert ist. Beachte, dass $\mathcal{K}_{[0,\,\infty)}$ ein positiver und konvexer Kegel ist.

Satz 29. *Seien* $f \in \mathsf{H}^0(I)$ *und* $u \in \mathsf{H}^1(u)$ *zwei Funktionen mit*

$$\int_I u'v'\,\mathrm{d}x + \int_I uv\,\mathrm{d}x \le \int_I fv\,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad v \in \mathcal{K}_{[0,\infty)} \cap \mathsf{H}^1_0(I) \tag{2.9}$$

Dann gilt

$$u(x) \le \max\{u(a), u(b), \sup_{y\in I} f(y)\} \qquad \forall \quad x \in I. \tag{2.10}$$

Ist die Abschätzung aus (2.9) *sogar für alle* $v \in \mathcal{K}_{[0,\infty)} \cap \mathsf{H}^1(I)$ *erfüllt, so gilt*

$$u(x) \le \sup_{y\in I} f(y) \qquad \forall \quad x \in I. \tag{2.11}$$

Beweis. Wir können $\sup_{y\in I} f(y) < \infty$ annehmen, da andernfalls nichts zu zeigen ist. Sei nun $D = \max\{u(a), u(b), \sup_{y\in I} f(y)\}$ und $G \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $G(t) = 0$ für $t \le 0$ und $G'(t) > 0$ für $t > 0$. Dann gilt $v = G(u - D)$ in $\mathcal{K}_{[0,\infty)} \cap \mathsf{H}^1_0(I)$ wegen $v' = G'(u - D)u'$ und $v(a) = v(b) = 0$, und die Voraussetzung liefert

$$\int_I (u')^2 G'(u - D)\,\mathrm{d}x + \int_I (u - D)G(u - D)\,\mathrm{d}x \le \int_I (f - D)G(u - D)\,\mathrm{d}x.$$

Nach Konstruktion gilt $G(u - D) \ge 0$, $f - D \le 0$ und $G'(u - D)\,\mathrm{d}x \ge 0$, und deshalb finden wir

$$\int_I (u - D)G(u - D)\,\mathrm{d}x \le 0.$$

Die Monotonie von G impliziert aber, dass $(u - D)G(u - D) \ge 0$, und deshalb implizieren die Eigenschaften des Lebesgue-Integrals $(u - D)G(u - D) = 0$. Das heißt, wir haben $u(x) \le D$ für fast alle $x \in I$. Da u aber stetig ist, gilt dies sogar für alle $x \in I$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Für die zweite Behauptung bemerken wir, dass $D = \sup_{y\in I} f(y)$ immer noch $v = G(u - D) \in \mathcal{K}_{[0,\infty)} \cap \mathsf{H}^1(I)$ impliziert, und wir können analog zu oben argumentieren. □

Wir bemerken, dass durch die Betrachtung von $-u$ und $-f$ statt u und f ein analoges Resultat mit "$\ge$" statt "$\le$" in (2.9) sowie "min " statt "max " und "inf" statt "sup" in (2.10),(2.11) hergeleitet werden kann. Durch Kombination beider Resulate können leicht die folgenden Maximum-Prinzipien bewiesen werden.

Satz 30. *Sei* $f \in \mathsf{H}^0(I)$ *und* $u \in \mathsf{H}^1(I)$ *die Lösung des homogenen Dirichlet-Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *oder des homogenen Neumann-Problems* (P_1-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$) *mit* $n_a = n_b = 0$. *Dann gilt*

$$\inf f \le u \le \sup f.$$

Insbesondere haben die Lösungsoperatoren die folgenden Eigenschaften:

1. $f \ge 0$ *(bzw.* $f \le 0$*) impliziert* $u \ge 0$ *bzw. (*$u \le 0$*),*
2. *Es gilt* $\|u\|_\infty \le \|f\|_\infty$*, d.h. der Raum* $\mathsf{L}^\infty(I)$ *wird linear und* nicht-expansiv *in sich abgebildet.*

Satz 31. *Sei $u \in \mathsf{H}^1(I)$ die Lösung des inhomogenen Dirichlet-Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$). *Dann gilt*

$$\min\{d_a, d_b, \inf f\} \leq u \leq \max\{d_a, d_b, \sup f\}.$$

Insbesondere hat der Lösungsoperator von (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) *die folgenden Eigenschaften:*

1. *$f \geq 0$ und $d_a, d_b \geq 0$ impliziert $u \geq 0$.*
2. *$f \leq 0$ und $d_a, d_b \leq 0$ impliziert $u \leq 0$.*
3. *$f = 0$ impliziert, dass u sein Minimum und sein Maximum auf dem Rand ∂I annimmt.*

Wir bemerken abschließend, dass für lineare Differentialgleichungen Maximum-Prinzipien auch *Vergleichs-Prinzipien* implizieren. Zum Beispiel: Seien u bzw. $\tilde{u}$ die schwachen Lösungen des homogenen Dirichlet-Problems oder Neumann-Problems mit Daten f bzw. $\tilde{f}$. Dann gilt $\tilde{u} \leq u$ sofern $\tilde{f} \leq f$, da dann die Differenz $\tilde{u} - u$ den Voraussetzungen von Satz 30 genügt.

Über Ober-und Unterlösungen Vergleichs-Prinzien führen in natürlicher Weise zu den Konzepten von Ober- und Unterlösungen. Wir wollen dies am Beispiel von inhomogenen Dirchlet-Bedingungen erläutern.

Eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1(I)$ heißt *Unterlösung zu* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$), falls

1. $u(a) \leq d_a$ und $u(b) \leq d_b$,
2. $-u'' + u \leq f$ im schwachen Sinne, dass heißt es gilt (2.9).

Eine *Oberlösung* wird nun ganz analog mit "$\geq$" statt "$\leq$" eingeführt.

Um die Beziehung zwischen Lösungen auf der einen Seite sowie Ober- und Unterlösungen auf der anderen Seite zu verstehen, wollen wir annehmen, das u die Lösung, $\underline{u}$ eine Unterlösung, und $\overline{u}$ ein Oberlösung ist. Für die Funktionen $\underline{u} - u$ und $u - \overline{u}$ gilt dann

1. $(\underline{u} - u)|_{\partial I}$ bzw. $(u - \overline{u})|_{\partial I} \leq 0$,
2. $L(\underline{u} - u) \leq 0$ bzw. $L(u - \overline{u}) \leq 0$, wobei L der Differentialoperator ist, d.h. $Lu = -u'' + u$.

Aus Satz 29 folgt nun $\underline{u} - u \leq 0$ und $u - \overline{u} \leq 0$. Insbesondere gilt

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u},$$

dass heißt $\underline{u}$ bzw. $\overline{u}$ liegen *unterhalb* bzw. *oberhalb* der Lösung. Insbesondere folgen hieraus die Behauptungen von Satz 31, da man leicht einsieht, dass die konstanten Funktionen $\min\{d_a, d_b, \inf f\}$ bzw. $\max\{d_a, d_b, \sup f\}$ Unter- bzw. Oberlösung sind.

Unter- und Oberlösungen können auch benutzt werden, um Lösungen zu konstruieren. Dies ist die sogenannte *Perron-Methode* und beruht darauf, dass

$$\sup\Big\{\underline{u}(x) \;:\; \underline{u} \text{ ist Unterlösung}\Big\} = u(x) = \inf\Big\{\overline{u}(x) \;:\; \overline{u} \text{ ist Oberlösung}\Big\}$$

für die Lösung u gilt.

2.3 Variationsprobleme

Viele Differentialgleichungen beschreiben, dass die schwache Lšoung u kritischer Punkt eines Funktionals F ist, wobei F oftmals die *Energie* oder *Entropie* eines physikalischen Systems beschreibt. Dies Beobachtung kann dann benutzt werden, um diese Differentialgleichungen und ihre Lösungen *variationell* zu charakterisieren.

In diesem Abschnitt $(X, \|\cdot\|)$ ist stets eine Banach-Raum. Da wir vor allem an Funktionenräumen interessiert sind, schreiben wir meist $u \in X$ (und nicht $x \in X$).

2.3.1 Einführung in die Variationsrechnung

Definition 32. *Ein (nichtlineares) Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ heißt* Gâteaux-differenzierbar*, falls es es einen (i.A. nichtlinearen) Operator $A : X \to X^*$ gibt, so dass*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(u+hv) - F(u)}{h} = \langle A(u),\, v\rangle_{X^*,X}$$

für alle u, v in X gilt. In diesem Fall heißt A die Gâteaux-Ableitung von F und wir schreiben $A = \partial F$ oder $A = DF$.

Bemerkung.

1. *Gâteaux-Differenzierbarkeit impliziert für alle u, v die Existenz der Richtungsableitung (im Punkte u in Richtung v), aber fordert zušatzlich, dass diese linear und stetig von v abhängt.*

2. *Es gibt auch den stärkeren Begriff der* Fréchet-Differenzierbarkeit*. Dieser impliziert die Gâteaux-Differenzierbarkeit aber fordert via*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \left| \frac{F(u+h) - F(u) - \langle A(u),\, h\rangle_{X^*,X}}{\|v\|} \right| = 0.$$

mehr Regularität für die Ableitung.

Beispiel.

1. *Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist F auch Gâteaux-differenzierbar mit*

$$\partial F(x) = (\partial_1 F(x),\, ...,\, \partial_d F(x)).$$

2. *Jedes quadratische Funktional der Bauart*

$$F(u) = \langle Au,\, u\rangle_{X^*,X} + \langle b,\, u\rangle_{X^*,X} + c, \quad A \in Lin(X, X^*), \quad b \in X^*, \quad c \in \mathbb{R}$$

besitzt die Gâteaux-Ableitung $\partial F(u) = Au + b$

3. *Seien $X = \mathsf{L}^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$ und $\psi \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ mit $|\psi'(y)| \le C\,|y|^{p/p'}$. Dann ist das nichtlineare Funktional*

$$F(u) = \int_I \psi(u)\,\mathrm{d}x,$$

Gâteaux-differenzierbar (siehe Übungsaufgabe) mit Ableitung

$$\partial F(u) = \psi'(u).$$

4. *Sei* $X = \mathsf{L}^p(I)$ *mit* $1 < p < \infty$ *und* $F(u) = \|u\|_p$. *Dann gilt (siehe Übungsaufgabe)*

$$\partial F(u) = |u|^{p-1}\,\mathrm{sgn} u.$$

Beachte jedoch, dass $\|\cdot\|_1 : \mathsf{L}^1(I)$ *nicht Gâteaux-differenzierbar ist, obwohl alle Richtungsableitungen existieren.*

5. *Sei* Ψ *wie oben. Dann ist*

$$F(u) = \int_I \psi(u')\,\mathrm{d}x,$$

Gâteaux-differenzierbar auf $X = \mathsf{W}^{1,p}(I)$, *wobei die Ableitung durch*

$$\langle \partial F(u),\, v\rangle_{X^*,X} = \int_I \psi'(u')v'\,\mathrm{d}x,$$

gegeben ist.

Definition 33. *Sei* $F : X \to \mathbb{R}$ *Gâteaux-differenzierbar. Dann heißt* $u \in X$ *kritischer Punkt von* F, *falls* $\partial F(U) = 0$ *gilt.*

Die Grundidee des variationellen Zugangs zu Differentialgleichungen ist, dass sich viele Differentialgleichungen (in ihrer schwachen Formulierung) als Operatorgleichung $\partial F(u) = 0$ für eine differenzierbares Funktional F schreiben lassen. Kann man also die Existenz eines kritischen Punktes nachweisen (was oftmals relativ einfach gelingt), so hat man die Existenz einer Lösung nachgewiesen. Für viele nichtlineare Probleme beruhen die bekannten Existenzresultate auf variationellen Methoden.

Satz 34. *Jeder Minimierer oder Maximierer eine Gâteaux-differenzierbaren Funktionals ist kritischer Punkt.*

Beweis. Sei $u \in X$ Minimierer von F. Dann gilt Abschätzung

$$\frac{F(u \pm hv) - F(u)}{h} \geq 0,$$

ür alle $v \in X$ und $h \in \mathbb{R}$. Der Limes $\varepsilon \to 0$ liefert nun $\langle \partial F(u),\, \pm v\rangle_{X^*,X} \geq 0$ und damit $\langle \partial F(u),\, v\rangle_{X^*,X} = 0$. Der Beweis für Maximierer ist analog. □

Definition 35. $F : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *heißt koerzitiv, wenn für jedes* $M < \infty$ *die Menge*

$$\mathcal{N}_{F,M} = \Big\{x \in X \;:\; F(x) \leq M\Big\}$$

beschränkt in X *ist.*

Beispiel. *Auf* $\mathsf{H}^1(I)$ *mit* $a \leq p < \infty$ *betrachten wir die Funktionale*

$$F_1(u) = \int_I (u')^2 + u^2\,\mathrm{d}x, \quad F_2(u) = \int_I (u')^2\,\mathrm{d}x + \left(\int u\,\mathrm{d}x\right)^2, \quad F_3(u) = \int_I (u')^2\,\mathrm{d}x,$$

Dann sind F_1 *und* F_2, *aber nicht* F_3 *koerzitiv auf* $\mathsf{H}^1(I)$. F_3 *ist aber auf Grund der Poincaré-Ungleichung koerzitiv auf* $\mathsf{H}^1_0(I)$.

Der Fall konvexer Funktionale Die obigen Aussagen können wesentlich vereinfacht und verschäerft werden, falls das Funktional F konvex ist. Wir erinnern daran, dass ein Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ konvex ist, falls

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v)$$

bzw.

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v).$$

für alle $u, v \in X$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt. Wir sagen außerdem, dass F strikt konvex ist, falls die strikte Ungleichung für $u \neq v$ gilt.

Wir leiten nun aus dieser Bemerkung die sogenannte *Konvexitätsungleichung* ab.

Satz 36. *Sei $F : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar und konvex. Dann gilt*

$$F(v) - F(u) \geq \langle \partial F(u),\, v-u \rangle_{X^*,X}.$$

für alle $u, v \in X$. Ist F sogar strikt convex, so gilt die strikte Ungeichung für $u \neq v$.

Beweis. Aufgrund der Konvexität gilt

$$\lambda F(v) + (1-\lambda)F(u) \geq F(\lambda v + (1-\lambda)u) = F(u + \lambda(v-u)),$$

und damit

$$F(v) - F(u) \geq \frac{F(u + \lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda}.$$

Die erste Behauptung folgt nun mit $\lambda \to 0$. Für strikt konvexe Funktional erhalten wir

$$F(v) - F(u) > \frac{F(u + \lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda},$$

und auf Grund der bereits bewiesenen Ungleichung gilt

$$F(u + \lambda(v-u)) - F(u) \geq \langle \partial F(u),\, \lambda(v-u) \rangle_{X^*,X}.$$

□

Folgerung 37. *Jeder kritische Punkt eines konvexen Funktional ist Minimierer.*

Folgerung 38. *Strikt konvexe Funktionale haben höchstens einen Minimierer.*

Bemerkung. *Die Gâteaux-Ableitung eines konvexen Funktionals ist ein* monotoner Operator*, d.h. es gilt*

$$\langle \partial F(v) - \partial F(u),\, v-u \rangle_{X^*,X} \geq 0 \qquad \forall \quad u, v \in X,$$

mit strikter Ungleichung für $u \neq v$ falls F strikt konvex ist. Dies folgt, da

$$\langle \partial F(v),\, v-u \rangle_{X^*,X} \geq F(v) - F(u) \geq \langle \partial F(u),\, v-u \rangle_{X^*,X}$$

nach Konvexitätsungleichung gilt. Im Falle striker Konvexität kann wieder "$\geq$" durch "$>$" ersetzt werden (für $u \neq v$).

Wir bemerken abschließend, das der Fall konkaver Funktionale auf den Fall konvexer Funktionale zurückgeführt werden kann, da F genau dann konkav ist, wenn $-F$ konvex ist.

2.3.2 Die Direkte Methode der Variationsrechnung

Die Grundidee der sogenannten *Direkten Methode* ist, dass *Minimierer* von F als Grenzwerte von geeigneten *minimierenden* Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\inf F = \lim_{n\to\infty} F(u_n)$ zu konstruieren. Die Standardmethode um die Konvergenz zu etablieren ist dabei, die Kompaktheit von allgemeinen minimierenden Folgen auszunutzen.

Satz 39. *Seien X reflexiv und $F : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar, koerzitiv und schwach unterhalbstetig. Dann besitzt jede minimierende Folge eine Teilfolge, die schwach gegen einen Minimierer konvergiert. Insbesondere gibt es mindestens einen Minimierer u von F, der die Operatorgleichung $\partial F(u) = 0$ lößt.*

Beweis. Aufgrund der Koerzitivität ist jede minimierende Folge beschränkt und damit schwach kompakt (siehe Kap 1, Satz 23). Wir wählen nun eine Teilfolge $\big(u_{n_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ so dass $u_{n_j} \rightharpoonup u$ schwach für ein $u \in X$. Die Unterhalbstetigkeit impliziert nun

$$\inf u \le F(u) \le \liminf_{j\to\infty} F\big(u_{n_j}\big) = \inf f,$$

d.h. $F(u) = \inf F = \min F$. □

Bemerkung.

1. *Ist der Minimierer u in Satz 39 eindeutig, konvergiert jede minimierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen u.*
2. *Da $F(u) = \lim_{n\to\infty} F(u_n)$ gilt, kann oft sogar die starke Konvergenz $u_n \to u$ gezeigt werden.*

Folgerung 40. *Seien X reflexiv und $F : X \to \mathbb{R}$ strikt konvex, Gâteaux-differenzierbar und koerzitiv. Dann gibt es genau einen Minimierer von F, der auch die eindeutige Lösung der Operatorgleichung $\partial F(u) = 0$ ist.*

Beweis. Für konvexe Funktionen impliziert die starke Stetigkeit schon die schwache Unterhalbstetigkeit (siehe Kap. 1, Satz 26). □

Lineare Randwertprobleme Wir wollen nun zeigen, dass die linearen Randwertprobleme aus dem Abschnitt 2.1 sich auch variationell betrachten lassen. Dazu betrachten wir für gegebenes $f \in \mathsf{H}^0(I)$ zunächst das Funktional

$$F(u) = \tfrac{1}{2}\int_I \big((u')^2 + u^2\big)\,\mathrm{d}x - \int_I fu\,\mathrm{d}x$$

auf dem Raum $\mathsf{H}^1(I)$. Dann kann leicht gezeigt werden, dass F Gâteaux-differenzierbar und koerzitiv ist (letzteres folgt aus $F(u) \ge \|u\|_{1,2}^2 - \|f\|_2\|u\|_{1,2}$). F ist außerdem strikt konvex, denn es gilt

$$\tfrac{1}{2}F(u) - \tfrac{1}{2}F(v) - F\big(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v\big) \ge \tfrac{1}{8}\big(\|u' - v'\|_2^2 + \|u - v\|_2^2\big).$$

Nach Folgerung 40 gibt es nun einen eindeutigen Minimierer u, der die Operatorgleichung $\partial F(u) = 0$ erfüllt. Damit gilt

$$\int_I u'v'\,\mathrm{d}x + \int_I uv\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1(I),$$

d.h. u ist die schwache Lösung der Gleichung $-u'' + u = f$ mit homogenen Neumann-Randbedingungen (der inhomogene Fall entspricht einem modifizierten Funktional $\tilde{F}(u) = F(u) - n_b u(b) + n_a u(a)$.

Wir können F auf aber auch auf dem affinen Unterraum

$$\mathsf{H}^1_{d_a,d_b} = \Big\{u \in \mathsf{H}^1(I) \ : \ u(a) = d_a,\ u(b) = d_b\Big\}$$

betrachten. Analog zu oben kann nun gezeigt werden, dass F eingeschränkt auf diesen Raum wieder einen eindeutigen Minimierer besitzt, und dass dieser das homogene Dirichlet-Problem (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) lößt.

Nichtlineare Randwertprobleme Wir wollen nun an einem Beispiel illustrieren, dass variationelle Methoden auch zur Lösung nichtlinearer Randwertprobleme eingesetzt werden können.

Satz 41. *Sei $\psi, \phi \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ zwei strikt konvexe Funktionen mit $\psi(0) = \phi(0) = 0$ sowie*

$$m\,|y| \le |\psi'(y)|\,,\ |\phi'(y)| \le M\,|y| \tag{2.12}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und zwei Konstanten $m, M > 0$. Sei außerdem $F : \mathsf{H}^1(I) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(u) = \int_I \Big(\psi(u') + \phi(u) - fu\Big)\,\mathrm{d}x - n_b u(b) + n_a u(a),$$

wobei $f \in \mathsf{H}^0(I)$ und $n_a, n_b \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Dann besitzt F einen eindeutigen Minimierer, und dieser ist schwache Lösung des inhomogenen Neumann-Problems

$$\begin{aligned} -\big(\psi'(u')\big)' + \phi'(u) &= f, \\ \psi'(u'(a)) = n_a, \quad \psi'(u'(b)) &= n_b. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{m}{2}y^2 \le \psi(y),\ \phi(y) \le \frac{M}{2}y^2,$$

und damit ist F wohldefiniert auf $\mathsf{H}^1(I)$. Inbesondere gilt

$$F(u) \ge c\|u\|_{1,2}^2 - C\|u\|_{1,2}$$

und deshalb ist F auch koerzitiv. Aufgrund der strikten Konvexität der von ψ und ϕ kann leicht gezeigt werden, dass F strikt konvex ist. Die Konvexität von F impliziert nun die schwache Unterhalbstetigkeit von F (siehe Kapitel 1, Satz 26). Desweiteren ist F Gâteaux-differenzierbar mit

$$\langle \partial F(u),\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(I)^*,\mathsf{H}^1(I)} = \int \Big(\psi'(u')v' + \phi'(u)v - f\Big)\,\mathrm{d}x - n(b)v(b) + n_a v(a). \tag{2.14}$$

Damit haben wir die Voraussetzungen von Folgerung 40 nachgewiesen, d.h. die Direkte Methode liefert die Existenz eines eindeutigen Minimierers, der auch die Operatorgleichung $\partial F(u) = 0$ erfüllt. Sei nun u dieser Minimierer. Mit (2.14) für $v \in \mathsf{C}_c^\infty(I)$ schliessen wir, dass die Funktion $w = \psi'(u')$ die schwache Ableitung $w' = \phi'(u) - f$ besitzt. Da die Funktionen ψ' und ϕ' nach Voraussetzung strikt monoton und linear wachsend sind, gilt $w, \phi'(u) \in \mathsf{L}^2$, und damit $w \in \mathsf{H}^1(I)$. Insbesondere können wir in (2.14) partiell integrieren, und dies liefert (unter Ausnutzung der Differentialgleichung)

$$\Big(w(b) - n_b\Big)v(b) - \Big(w(a) - n_a\Big)v(a) = 0 \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1(I),$$

und damit $w(b) = n_b$ und $w(a) = n_a$. □

Bemerkung. *1. Das Randwertproblem* (2.13) *hat auch unter schwächeren Voraussetzungen eine Lösung. So kann muss zum Beispiel ϕ im Allgemeinen nicht konvex sein, aber dann ist nicht ohne Weiteres klar, dass die Lösung eindeutig ist.*

2. Die Abschätzung (2.12) *kann für $\psi, \phi \in \mathsf{C}^2(I)$ wie folgt verschärft werden*

$$\psi'(0) = \phi'(0) = 0, \qquad m \leq \psi''(y),\ \phi''(y) \leq M \qquad \forall \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$m(y_2 - y_1)^2 \leq \Big(\psi'(y_2) - \psi'(y_1)\Big)(y_2 - y_1) \leq M(y_2 - y_1)^2$$

und analog

$$m(y_2 - y_1)^2 \leq \Big(\phi'(y_2) - \phi'(y_1)\Big)(y_2 - y_1) \leq M(y_2 - y_1)^2.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}\Big\langle \partial F(u) - \partial\tilde{F}(\tilde{u}),\, u - \tilde{u}\Big\rangle \geq \quad & m\|u - \tilde{u}\|_{1,2}^2 \\ & - C\Big(\|f - \tilde{f}\| + |n_a - \tilde{n}_a| + |n_b - \tilde{n}_b|\Big)\|u - \tilde{u}\|_{1,2},\end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei

$$\tilde{F}(u) = \int_I \Big(\psi(u') + \phi(u) - \tilde{f}u\Big)\,\mathrm{d}x - \tilde{n}_b u(b) + \tilde{n}_a u(a),$$

das Funktional mit anderen Daten ist. Gilt nun $\partial F(u) = 0 = \partial\tilde{F}(\tilde{u})$, so verschwindet die linke Seite in (2.15) *und wir erhalten eine Abschätzung für $\|u - \tilde{u}\|$. Insbesondere folgt, dass der (nichtlineare) Lösungoperator zum Randwertproblem* (2.13) *Lipschitzstetig ist mit*

$$\|u - \tilde{u}\|_{1,2} + \|\psi'(u') - \psi'(\tilde{u}')\|_{1,2} \leq C\big(\|f - \tilde{f}\| + |n_a - \tilde{n}_a| + |n_b - \tilde{n}_b|\,\big).$$

Ein weiteres Beispiel soll verdeutlichen, dass die Direkte Methode auf auch nicht konvexe Funktionale angewendet werden kann. Allerdings ist die Unterhalbstetigkeit (in 1D) nur dann gegeben, wenn das Funktional konvex bzgl. der höchsten Ableitung ist. Dies wird in den Übungsaufgaben ausführlicher untersucht.

Satz 42. *Das Funktional $F : \mathsf{H}_0^1(I) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch*

$$F(u) = \tfrac{1}{2}\int_I (u')^2\,\mathrm{d}x + \psi\bigg(\int_I u\,\mathrm{d}x\bigg),$$

wobei $\psi \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ mit $\psi(y) \geq -m\,|y|^p$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und geeignete Konstanten $m > 0$, $0 < p < 2$ gelte. Dann besitzt F (mindestens) einen Minimierer, und jeder Minimierer ist schwache Lösung des (nichtlokalen) Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} u'' = \psi'\bigg(\int_I u\,\mathrm{d}x\bigg), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Beweis. F Gâteaux-differenzierbar mit

$$\langle \partial F(u),\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(I)^*,\mathsf{H}^1(I)} = \int u'v'\,\mathrm{d}x + \psi'\Big(\int_I u\,\mathrm{d}x\Big)\int_I v\,\mathrm{d}x, \tag{2.17}$$

und auch koerzitiv, denn nach Poincaré-Ungleichung und Voraussetzung gilt

$$F(u) \geq c\|u\|_{1,2}^2 - C\|u\|_{1,2}^p \xrightarrow{\|u\|_{1,2}\to\infty} \infty. \tag{2.18}$$

Außerdem ist F schwach unterhalb stetig, da das Funktional $u \mapsto \int_I u\,\mathrm{d}x$ schwach stetig ist. Die Direkte Methode liefert nun die Existenz eines Minimierers (siehe Satz 39), und mit Hilfe von (2.17) es ist leicht zu zeigen, dass jeder Minimierer Lösung von (2.16) ist. □

Bemerkung. *Die Lösung dieses Randwertproblems kann fast explizit angegeben werden. Aus der Differentialgleichung und den Randbedingungen schließen wir (mit $I = (a,\, b)$), dass $u(x) = \mu(x-a)(x-b)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ gelten muss. Damit reicht es, den Minimierer der skalaren Funktion*

$$f(\mu) = d\mu^2 + \psi(d\mu)$$

zu bestimmen, wobei die Konstante d durch

$$d = \int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}(b-a)^3$$

gegeben ist. Beachte, dass diese Funktion wegen $\lim_{\mu\to\pm\infty} f(\mu) = \infty$ ein globales Minimum besitzt, wobei für

$$\psi'(d\mu) = -2\mu, \qquad \psi''(d\mu) \geq -2/d^2$$

für jeden Minimierer gilt. Insbesondere sieht man leicht, dass es für monoton wachsende ψ' (konvexer Fall) genau einen Minimierer gibt, wohingegen es immer genau zwei Minimierer für $\psi(y) = -m\,|y|^p$ gibt.

2.3.3 Eigenwertprobleme für lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das *Eigenwertproblem* für lineare Differentialoperatoren. Statt eine formale Definition für allgemeine Differentialoperatoren und Randwerte anzugeben (die natürlich verfügbar ist), wollen wie die Grundbegriffe an Sturm-Liouville-Problem illustrieren. Dazu seien p, q zwei gegebene Funktionen wie in den Randwertproblemen P_2-D_{hom} und P_2-N_{hom}, d.h. wir untersuchen den Differentialoperator $Au = -(pu')' + qu$.

Wir sagen, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist *Eigenwert* zum Sturm-Liouville-Operator A mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf dem endlichen Interval $I = (a,\, b)$, falls es eine Funktion $e \in \mathsf{H}^1(I)$ mit $e \neq 0$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} -(pe')' + qe = \lambda e \quad &\text{auf} \quad I, \\ e(a) = e(b) = 0 \end{aligned} \tag{P_2-D_e}$$

im Sinne schwacher Lösungen gilt. Eine solche Funktion e wird auch *Eigenfunktion* zum Eigenwert λ genannt. Beachte, dass eine Lösung des Eigenwertproblems darin besteht, mögliche Eigenwerte λ und (alle) entsprechenden Eigenfunktionen e anzugeben.

Insbesondere wird es im Allgemeinen nur für bestimmte Werte von λ möglich sein, Eigenfunktionen $e \neq 0$ zu finden.

Eigenwertprobleme für Differentialoperatoren spielen eine fundamentale Rolle in der reinen und angewandten Mathematik sowie der Physik, insbesondere der Quantenmechanik. Es ist dabei wichtig zu betonen, dass die Eigenwerte und/oder Eigenfunktionen im Allgemeinen vom Differentialoperator, dem Gebiet und den Randwerten abhängen. Insbesondere kann man auch das Neumann-Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -(pe')' + qe &= \lambda e \quad \text{auf} \quad I, \\ e'(a) = e'(b) &= 0, \end{aligned} \tag{P_2-N_e}$$

studieren. Beachte, dass bei Eigenwertproblemen üblicherweise immer homogene Randdaten gefordert werden. Dies stellt sicher, dass die Menge aller Eigenfunktionen zu einem gegebenen Eigenwert λ einen linearen (und keine affinen) Raum bilden.

Beispiel. *Wir betrachten den Differentialoperator $Lu = -u''$:*

1. *Auf dem Intervall $I = [0, \pi]$ mit Dirichlet-Randwerten gibt es abzählbar viele Eigenwerte mit jeweils eindimensionalen Eigenraum, die durch*

   $$\lambda_n = n^2, \quad e_n \in \operatorname{span}\{\sin(nx)\}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

   gegeben sind.

2. *Mit Neumann-Randwerten auf $I = [0, \pi]$ gilt*

   $$\lambda_n = n^2, \quad e_n \in \operatorname{span}\{\cos(nx)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. *Mit Neumann-Randwerten auf $I = [0, 1]$ gilt*

   $$\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad e_n \in \operatorname{span}\{\cos(\pi n x)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4. *Auf $I = \mathbb{R}$ hat A keine* keine *Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen aus $\mathsf{H}^1(I)$. Es gilt aber*

   $$-e'' = \lambda e$$

   für

   $$\lambda = k^2, \quad e \in \operatorname{span}\{\sin(kx), \cos(kx)\}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

   Der Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Intervallen ist ziemlich bedeutsam, sowohl aus mathematischer als auch aus physikalischer Sicht. Ein vollständiges Verständnis kann aber erst im Rahmen der Spektraltheorie *allgemeiner linearer Operatoren gewonnen werden, die allerdings jenseits der Grenzen dieser Vorlesung liegt.*

Im folgenden beschreiben wir einen variationellen Zugang zum Eigenwertproblem. Es gibt aber auch einen nicht-variationellen Zugang, der auf rein funktionalanalytischen Methoden beruht. Beide Zugänge haben ihre Vor-und Nachteile. Zum Beispiel kann der variationelle Zugang auch auf nichtlineare Eigenwert-Probleme angewendet werden, ist aber im linearen Fall auf symmetrische Operatoren beschränkt, die entweder kompakt sind oder kompakte Inverse haben. In unserem Fall ist das ausreichend, da die Randwertprobleme, die wir betrachten, symmetrische und kompakte Lösungsoperatoren $\mathsf{H}^0(I) \to \mathsf{H}^0(I)$ haben.

Eigenwertprobleme für Matrizen Als Vorbereitung wollen wir das Eigenwertproblem für Matrizen studieren. Sei dazu $A \in \mathsf{Mat}(d \times d)$ eine quadratische (und reellwertige) Matrix. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ ein (reller) *Eigenwert* von A mit Eigenvektor $e \in \mathbb{R}^d$, falls

$$Ae = \lambda e.$$

Der Hauptsatz der Eigenwerttheorie *symmetrischer* Matrizen wird in der linearen Algebra bewiesen und kann wie folgt zusammengefaßt werden. Symmetrie meint dabei wie üblich $A^T = A$.

Satz 43. *Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathsf{Mat}(d \times d)$ gibt es d relle Eigenwerte*

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_d$$

sowie ein entsprechendes System von orthonormalen Eigenvektoren e_1, e_2, ..., e_d, d.h. es gilt

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \quad \langle e_n, e_k\rangle = \delta_k^n$$

für all $k, n = 1...d$. Hierbei sind $\langle\cdot, \cdot\rangle$ das kartesische Skalarprodukt und δ_n^k das Kronecker-Delta (d.h. es gilt $\delta_n^k = 1$ für $n = k$ aber $\delta_n^k = 0$ für $n \neq k$).

Um die variationelle Struktur zu verstehen, wollen wir die quadratischen Funktionale

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle, \quad G(x) = \tfrac{1}{2}\langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

betrachten, die sicherlich

$$A = \partial F, \quad B = \partial G$$

im Sinne der Gâteaux-Ableitung erfüllen, wobei $B = \mathrm{id}$ gilt. Die Eigenwertgleichung $Ae = \lambda e$ kann nun als

$$\partial F(e_n) = \lambda_n \partial G(e_n)$$

geschrieben werden.

Lemma 44. 1. *Für den kleinsten Eigenwert λ_1 gilt*

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{F(x)}{G(x)} \;:\; x \neq 0\right\}.$$

wobei e_1 ein möglicher Minimierer ist.

2. *Für den n-ten Eigenwert mit $n = 2...d$ gilt ganz allgemein*

$$\lambda_n = \min\left\{\frac{F(x)}{G(x)} \;:\; x \neq 0 \text{ mit } \langle x, e_k\rangle = 0 \text{ für alle } k = 1...n-1\right\},$$

wobei e_k ein möglicher Minimierer ist.

Beweis. Jedes $x \in \mathbb{R}$ kann bzgl. der Eigenbasis zerlegt werden, d.h. wir haben

$$x = \sum_{k=1}^{d} x_n e_k, \qquad x_k = \langle x,\, e_k\rangle.$$

Es gilt nun

$$F(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k x_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{d} x_k^2 = \lambda_1 G(x),$$

und damit folgen die Behauptungen über λ_1 und e_1. Wenn wir zusätzlich $x_1 = \langle x,\, e_1\rangle = 0$ fordern, so gilt $F(x) \geq \lambda_2 G(x)$ und wir erhalten die Aussagen über λ_2 und e_2. Die verbleibenden Aussagen können analog bewiesen werden. □

Es gibt weitere variationelle Bescheibungen des Eigenwertproblems der Matrix A.

1. Wir können auch F mit vorgeschriebenem G minimieren:

   $$\lambda_n = \min\Big\{F(x)\ :\ x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } G(x) = 1 \text{ und } \langle x,\, e_k\rangle = 0 \text{ für alle } k = 0...n-1\Big\},$$

   wobei $e_0 = 0$ vereinbart sei (damit die Orthogonalitätsbedingung wohldefiniert ist). Der Minimierer ist dann $\sqrt{2}e_n$, da $G(u) = \frac{1}{2}\|u\|$ gilt.

2. Es gilt das *Minimax-Prinzip*

   $$\lambda_n = \min_{Y,\, \dim Y = n} \max\Big\{F(x)\ :\ x \in Y \text{ mit } G(x) = 1\Big\},$$

   wobei Y einen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Jede dieser unterschiedlichen Beschreibungen hat ihre Vor- und Nachteile. In dieser Vorlesung werden wir aber nur die Formulierung von Satz 43 verwenden.

Eigenwertprobleme für Sturm-Liouville Operatoren Wir beschreiben nun den variationellen Zugang zu Eigenwertproblemen am Beispiel von $(\mathsf{P}_2\text{-}\mathsf{D}_\mathrm{e})$. Alle Argumente können aber leicht für $(\mathsf{P}_2\text{-}\mathsf{D}_\mathrm{e})$ oder auch andere Eigenwertprobleme angepasst werden.

Analog zum Abschnitt über Matrixen betrachten wir nun die Funktionale

$$F(u) = \tfrac{1}{2}\int_I p(u')^2 + qu^2 \,\mathrm{d}x, \qquad G(u) = \tfrac{1}{2}\int_I u^2 \,\mathrm{d}x,$$

wobei wir annehmen wollen, dass $q \in \mathsf{L}^\infty(I)$ und

$$0 < c \leq p(x) \leq C < \infty,$$

für geeignete Konstanten c, C und alle $x \in I$ gilt. Außerdem betrachten wir die Operatoren $A, B : \mathsf{H}^1_0(I) \to \mathsf{H}^{-1}(I)$ mit

$$\langle Au,\, v\rangle = \int_I pu'v' + quv \,\mathrm{d}x, \quad \langle Bu,\, v\rangle = \int_I uv \,\mathrm{d}x,$$

wobei (hier und im ganzen Unterabschnitt) $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ die Dualpaarung von $\mathsf{H}^{-1}(I)$ und $\mathsf{H}^1_0(I)$ bezeichnet. Beachte, dass B die Identität im Sinne der natürlichen Einbettungen $\mathsf{H}^1_0(I) \hookrightarrow \mathsf{H}^0(I) \hookrightarrow \mathsf{H}^{-1}(I)$ ist.

Nach Konstruktion gilt nun wieder $A = \partial F$, $B = \partial G$. Außerdem gilt

$$\langle Au,\, v\rangle = \langle Av,\, u\rangle, \qquad \langle Bu,\, v\rangle = \langle Bv,\, u\rangle \qquad \forall \quad u, v \in \mathsf{H}^1_0(I),$$

und dies ist das Analogon zur Symmetrie-Bedingung in der Spektraltheorie für Matrizen. Das Eigenwertproblem (P_2-D_e) kann nun als

$$Ae = \lambda Be, \qquad \lambda = \frac{F(e)}{G(e)} \tag{2.19}$$

geschrieben werden. In der Tat, $Ae = \lambda Be$ kodiert sowohl die schwache Formulierung der Differentialgleichung als auch die Randbedingungen, und die zweite Identität folgt aus der ersten via $2F(e) = \langle Ae,\, e\rangle = \lambda\langle Be,\, e\rangle = 2\lambda G(e)$.

Satz 45. *Es existiert eine monoton wachsende Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{H}^1_0(I)$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen erfüllt sind:*

1. *Es gilt* (2.19) *mit $\lambda = \lambda_n$ und $e = e_n$.*
2. *Wir haben*
$$\lambda_n = \min\left\{\frac{F(u)}{G(u)} \;:\; 0 \neq u \in \mathsf{H}^1_0(I) \text{ mit } \langle Bu,\, e_k\rangle = 0 \text{ für alle } k = 0...n-1\right\},$$
wobei wieder $e_0 = 0$ vereinbart sei.
3. *Es gilt $\langle Be_n,\, e_k\rangle = \delta^n_k$ und $\langle Ae_n,\, e_k\rangle = \lambda_k\delta^n_k$ für alle $k = 0...n$, und damit auch $\lambda_n = 2F(e_n)$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptungen durch Induktion über n, wobei die Argumente für Induktionsanfang und Induktionsschritt im wesentlichen gleich sind. Wir fixieren nun ein $n = 1...d$ und nehmen nun, dass die Behauptungen für alle $1 \leq \tilde{n} < n$ bereits bewiesen worden sind (wobei wir nichts für $n = 1$ annehmen).

Schritt 1 (Existenz eines Minimierers e_n): Sei Y_n der Unterraum

$$Y_n = \Big\{u \in \mathsf{H}^1_0(I) \;:\; \langle Bu,\, e_k\rangle \text{ für alle } k = 0...n-1\Big\},$$

und $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset Y_n$ eine minimierende Folge für F/G aus dem punktierten Unterraum $Y_n \setminus \{0\}$. Aufgrund der Homogenität – d.h. wegen $F(su) = s^2F(u)$ und $G(su) = s^2G(u)$ – können wir $G(u_j) = \frac{1}{2}$ annehmen. Dann gilt nach Poincaré-Ungleichung

$$C \geq F(u_j) \geq c\|u_j\|^2_{1,2} - C\|q\|_\infty.$$

Insbesondere ist die Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ beschränkt, und damit schwach kompakt, d.h. es gibt eine Teilfolge $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die schwach in $\mathsf{H}^1_0(I)$ gegen einen Grenzwert $e_n \in \mathsf{H}^1_0(I)$ konvergiert, and weil Y_n nach Konstruktion schwach abgeschlossen ist, gilt $e_n \in Y_n$. Da F schwach unterhalbstetig ist, und G sogar schwach stetig ist (siehe Satz 13), gilt $F(e_n) \leq \liminf_{k\to\infty} F(u_{j_k})$ und $G(e_n) = \lim_{k\to\infty} G(u_{j_k}) = \frac{1}{2}$, und dies stellt sicher, dass e_n Minimierer von F/G auf $Y_n \setminus \{0\}$ ist.

Schritt 2 (Euler-Langange-Gleichung auf Y_n): Sei nun $v \in Y_n$ beliebig und $h > 0$ hinreichend klein, so dass $e_n + hv \neq 0$. Dann gilt

$$0 \leq h^{-1}\left(\frac{F(e_n + hv)}{G(e_n + hv)} - \frac{F(e_n)}{G(e_n)}\right) = \frac{2\langle Ae_n,\, v\rangle}{G(e_n)} - \frac{F(e_n)}{G(e_n)}\frac{2\langle Be_n,\, v\rangle}{G(e_n)} + O(h).$$

Der Limes $h \to 0$ liefert

$$0 \leq \langle Ae_n,\, v\rangle - \lambda_n \langle Be_n,\, v\rangle,$$

und da $v \in Y_n$ beliebig war, schließen wir, dass e_n die folgende Identität erfüllt

$$\langle Ae_n,\, v\rangle = \lambda_n \langle Be_n,\, v\rangle \quad \text{für alle} \quad v \in Y_n, \quad \text{wobei} \quad \lambda_n = \frac{F(e_n)}{G(e_n)}. \tag{2.20}$$

Für $n = 1$ folgen nun schon alle Behauptungen, denn es gilt $Y_1 = \mathsf{H}^1_0(I)$ und deshalb implizert (2.20) schon $Ae_1 = \lambda_1 Be_1$. Für $n \neq 1$ müssen wir aber noch zeigen, dass $\langle Ae_n,\, v\rangle = \lambda_n\langle Be_n,\, v\rangle$ sogar für alle $v \in \mathsf{H}^1_0(I)$ gilt.

Schritt 3 (Nachweis der Eigenwert-Gleichung): Für jedes $v \in \mathsf{H}^1_0(I)$ haben wir

$$\tilde{v} := v - \sum_{j=0}^{n-1} \langle Bv,\, e_j\rangle e_j \in Y_n,$$

denn für alle $k = 0...n-1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\langle B\tilde{v},\, e_k\rangle = \langle Bv,\, e_k\rangle - \sum_{j=0}^{n-1} \langle Bv,\, e_j\rangle\langle Be_j,\, e_k\rangle = \langle Bv,\, e_k\rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \langle Bv,\, e_j\rangle \delta_j^k = 0.$$

Nach Konstruktion gilt $e_n \in Y_n$ und damit

$$\langle Be_n,\, v\rangle = \langle Be_n,\, \tilde{v}\rangle + \sum_{j=0}^{n-1} \langle Bv,\, e_j\rangle\langle Be_n,\, e_j\rangle = \langle Be_n,\, \tilde{v}\rangle.$$

Für $j = 0...n-1$ gilt außerdem

$$\langle Ae_n,\, e_j\rangle = \langle Ae_j,\, e_n\rangle = \lambda_j\langle Be_j,\, e_n\rangle = \lambda_j\langle Be_n,\, e_j\rangle = 0,$$

und damit

$$\langle Ae_n,\, v\rangle = \langle Ae_n,\, \tilde{v}\rangle - \sum_{j=0}^{n-1} \langle Bv,\, e_j\rangle\langle Ae_n,\, e_j\rangle\langle Ae_n,\, \tilde{v}\rangle = \langle Ae_n,\, \tilde{v}\rangle.$$

Insgesamt, und unter Verwendung von (2.20), haben wir damit gezeigt, dass

$$\langle Ae_n,\, v\rangle = \langle Ae_n,\, \tilde{v}\rangle = \lambda_n\langle Be_n,\, \tilde{v}\rangle = \langle Be_n,\, v\rangle.$$

Da $v \in \mathsf{H}^1_0(I)$ beliebig war, folgt schließlich $Ae_n = \lambda_n Be_n$. □

Bemerkung.

1. *Aus der Lösungstheorie für das Randwertproblem* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *folgt* $pe_n' \in \mathsf{H}^1(I)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Inbesondere gilt* $e_n \in \mathsf{H}^2(I)$ *sofern* $p \in \mathsf{C}^1\big(\overline{I}\big)$.

2. *Nach Konstruktion ist* $e_n \in \mathsf{H}^1(I)$ *die Lösung des homogenen Dirchlet-Problems* (P_1-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *mit rechter Seite* $\lambda_n e_n$. *Damit ist* e_n *auch Eigenfunktion des Lösungsoperators, aber der Eigenwert ist nun* $1/\lambda_n$. *Mit anderen Worten, es gilt* $Le_n = e_n/\lambda_n$, *wobei wir den Lösungsoperator* $L : \mathsf{H}^0 \to \mathsf{H}^0$ *betrachten. Beachte, dass dieser Operator kompakt ist, da die Einbettung* $\mathsf{H}^2(I) \hookrightarrow \mathsf{H}^0(I)$ *kompakt ist.*

3. *Man kann zeigen, dass alle λ_n verschieden sind, und dass der Limes $\lim_{n\to\infty} \lambda_n/n^2$ existiert. Darüberhinaus kann gezeigt werden, dass die n-te Eigenfunktion genau $n-1$ Nullstellen im Inneren von I hat.*

4. *Das System der Eigenfunktionen spannt den ganzen Raum auf, das heißt für jedes $u \in \mathsf{H}^1_0(I)$ konvergiert die Reihe*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \qquad \textit{mit} \qquad u_n = \langle Bu,\, e_n\rangle$$

im Banach-Raum $\mathsf{H}^1_0(I)$. Ausserdem gilt

$$Bu = \sum_{n=1}^{\infty} u_n B e_n, \qquad Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n B e_n,$$

im Sinne konvergenter Reihe aus $\mathsf{H}^{-1}(I)$.

Kapitel 3

Elliptische Probleme in dD

In diesem Kapitel sei Ω stets Gebiet des $\mathbb{R}^d$, d.h. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ is offen und einfach zusammenhängend. Elemente aus Ω wollen wir mit $x = (x_1, ..., x_d)$ bezeichnen, und $|x|$ meint die euklidische Länge

$$|x|^2 = x \cdot x = \sum_{j=1}^{d} |x_j|^2 .$$

3.1 Theorie der Sobolev-Räume

Wir wollen nun analog zum eindimensionalen Fall schwache (partielle) Ableitung einführen. Der Anker ist dabei wieder die Formel der partiellen Integration

$$\int_\Omega u\partial_k v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\partial_k \varphi \,\mathrm{d}x ,$$

die für alle glatten Funktionen $u, v \in \mathsf{C}^1_\mathrm{c}(\Omega)$ gilt (es gibt keine Randwerte, da u und v kompakten Träger in Ω besitzten).

3.1.1 Schwache Ableitungen und Räume $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$

Definition 1. *Seien $u, g \in \mathsf{L}^1_\mathrm{loc}(\Omega)$ zwei Funktion mit*

$$\int_\Omega u\partial_k\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g\varphi \,\mathrm{d}x \qquad \textit{für alle} \qquad \varphi \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega).$$

Dann nennen wir g die schwache k-te partielle Ableitung von u in Ω und schreiben $g = \partial_k u = D_k u = \frac{\partial}{\partial x_k} u$.

Existieren alle partiellen Ableitungen (im schwachen Sinne), so schreiben wir auch

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_d u) .$$

In Analogie zum 1D-Fall definieren wir die Räume

$$\mathsf{W}^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in \mathsf{L}^p(\Omega) \ : \ \text{schwache Ableitung } \partial_k u \in \mathsf{L}^p(\Omega) \text{ existiert für alle } k = 1...d \Big\} ,$$

sowie die Normen

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \|\nabla u\|_p, \qquad \|\nabla u\|_p := \sum_{k=1}^{d} \|\partial_k u\|_p,$$

Äquivalente Normen werden durch

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{k=1}^{d} \|\partial_k u\|_p^p \right)^{1/p} \qquad \text{für} \qquad 1 \leq p < \infty$$

bzw.

$$\|u\|_{1,\infty} = \max\Big\{ \|u\|_\infty,\, \|\partial_1 u\|_\infty,\, ...,\, \|\partial_d u\|_\infty \Big\}$$

definiert.

Satz 2. *Das Paar* $(\mathsf{W}^{1,p}(\Omega),\, \|\cdot\|_{1,p})$ *ist*

1. *ein Banach-Raum für alle* $1 \leq p \leq \infty$*,*
2. *ein Hilbert-Raum für* $p = 2$*, in dem Sinne, dass das Skalarprodukt*

$$\langle u,\, v\rangle_{1,2} = \int_\Omega uv + u'v' \,\mathrm{d}x$$

eine zu $\|\cdot\|_{1,2}$ *äquivalente Norm erzeugt,*

3. *separabel für* $1 \leq p < \infty$*,*
4. *reflexiv für* $1 < p < \infty$*.*

Beweis. Analog zu 1D. □

Wir können nun auch in natürlicher Weise schwache Ableitungen von vektorwertigen Funktionen einführen. Insbesondere definieren wir

$$\mathsf{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) := \Big\{ U : \Omega \to \mathbb{R}^m \;:\; U_j \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \text{ für alle } j = 1...m \Big\}$$

mit

$$\|U\|_{1,p} = \sum_{j=1}^{m} \|U_j\|_{1,p}.$$

wobei $U = (U_1,\, ...,\, U_m)$ gilt. Die Aussagen von Satz 2 gelten dann auch sinngemäß für die vektorwertigen Räume (beachte, dass der Bildraum $\mathbb{R}^m$ *endlich-dimensional* ist).

Rechenregeln für schwache Ableitungen

Satz 3 (Approximationssatz von Friedrichs)**.** *Es sei* $1 \leq p < \infty$*. Für jedes* $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ *existiert eine Folge* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty\big(\mathbb{R}^d\big)$*, so dass*

$$\|u_n|_\Omega - u|_\Omega\|_{p,\Omega} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0, \qquad \|\partial_k u_n|_{\tilde\Omega} - \partial_k u|_{\tilde\Omega}\|_{p,\tilde\Omega} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

für jedes $\tilde\Omega \subset\subset \Omega$ *und alle* $k = 1...d$ *gilt.*

Beweis. Sei $\bar{u}$ die triviale Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^d$, d.h.

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases}$$

Sei außerdem $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Standardfaltungskernen – siehe Kapitel 1, Definition 43 – und $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Abschneidefunktionen, d.h.

1. $\eta_n \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \le \eta_n \le 1$,
2. $\eta_n(x) = 0$ für $|x| > n+1$,
3. $\eta_n(x) = 1$ für $|x| < n$,

Wir definieren nun $u_n = \varrho_n * (\eta_n \bar{u})$, und alle Behauptungen folgen aus elementaren Eigenschaften von Faltungsintegralen. □

In höheren Dimensionen gilt natürlich auch die Produktregel, aber da für $d > 1$ nicht mehr automatisch $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathsf{L}^\infty(\Omega)$ gilt (siehe den folgenden Abschnitt), müssen leicht stärkere Voraussetzungen als in 1D gemacht werden.

Satz 4 (Produktregel)**.** *Der Raum $M = \mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathsf{L}^\infty(\Omega)$ is Banach-Algebra, d.h. mit $u \in M$ und $v \in M$ gilt auch $uv \in M$ mit*

$$\partial_k(uv) = u\partial_k v + v\partial_k u.$$

Beweis. Approximation durch glatte Funktionen, siehe Satz 3. □

Auch die Voraussetzungen der Kettenregel müssen etwas verschärft werden.

Satz 5 (Kettenregel)**.** *Sei $G \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion mit $G(0) = 0$ und beschränkter Ableitung, und sei $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $G \circ u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit*

$$\partial_k(G \circ u) = (G' \circ u)\, \partial_k u$$

Beweis. Nach Voraussetung an G gibt es eine Konstante C, so dass $G'(y) \le C$ und $|G(y)| \le C\,|y|$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere gilt

$$G \circ u \in \mathsf{L}^p(\Omega), \quad G' \circ u \in \mathsf{L}^\infty(\Omega) \qquad \text{für alle} \qquad u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega).$$

Sei zunächst $1 \le p < \infty$. Für gegebenes $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ wählen wir eine approximierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glatter Funktionen wie in Satz 3, und für diese gilt

$$\int_\Omega (G \circ u_n)\partial_k \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi(G' \circ u_n)\partial_k u_n \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \qquad \varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^1(\Omega). \tag{3.1}$$

O.B.d.A. können wir annehmen, das $u_n(x) \to u(x)$ punktweise fast überall in Ω gilt, und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine Funktion $h \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ majorisiert ist (siehe Kap. 1, Satz 40). Damit gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$\|G \circ u_n - G \circ u\|_{p,\Omega} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Für jedes $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ gilt aber auch (wegen majorisierter Konvergenz und nach Konstruktion)

$$\begin{aligned}\|(G' \circ u_n)\partial_k u_n - (G' \circ u)\partial_k u\|_{p,\tilde{\Omega}} &\le \|(G' \circ u_n - G' \circ u)\partial_k u\|_{p,\tilde{\Omega}} \\ &\quad + \|(G' \circ u_n)\|_\infty \|\partial_k u_n - \partial_k u\|_{p,\tilde{\Omega}} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Damit, und weil φ kompakten Träger in Ω hat, können auf beiden Seiten in (3.1) zum Limes $n \to \infty$ übergehen. Es bleibt der Fall $p = \infty$. In diesem Fall benutzen wir, dass es für jede Testfunktion φ ein beschränktes Gebiet $\hat{\Omega}$ mit $\mathrm{supp}\varphi \subset \hat{\Omega} \subset\subset \Omega$ gibt, und dass $\mathsf{W}^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{W}^{1,p}(\hat{\Omega})$ für alle $1 \le p < \infty$ gilt, so dass wir analog zu oben argumentieren können. □

Satz 6 (Transformationsregel)**.** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ zwei Gebiete und $\zeta : \Omega \to \Theta$ eine surjektive C^1- Abbildung mit*

$$\mathrm{Jac}\,\zeta \in \mathsf{L}^\infty\big(\Omega; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m\big).$$

Seien außerdem $v \in \mathsf{W}^{1,p}(\Theta)$ mit $1 \le p \le \infty$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = v(\zeta(x)) \qquad \text{für alle} \qquad \zeta \in \Omega.$$

Dann gilt $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j}(x)\,\frac{\partial v}{\partial y_k}(\zeta(x))$$

Beweis. Durch Approximation mit glatten Funktionen, siehe Brezis, Seite 270. □

Notwendige und hinreichende für die Existenz schwacher Ableitungen

Satz 7. *Sei $1 < p \le \infty$ und sei $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$. Dann sind die Aussagen*

1. *$u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$,*
2. *es gibt eine Konstante C, so dass $\left|\int_\Omega u \partial_k \varphi \,\mathrm{d}x\right| \le C\|\varphi\|_{p'}$ für alle $\varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ und $k = 1...d$,*

äquivalent. (Die Konstante C darf von u und Ω aber nicht von k oder φ abhängen.)

Beweis. Die Implikation 1. ⇒ 2. gilt nach Definition mit $C = \max_k \|\partial_k u\|$. Die Umkehrung 2. ⇒ 1. folgt, da nach Voraussetzung für jedes $k = 1...d$ durch

$$\varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \mapsto -\int_\Omega u\partial_k\varphi \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

in eindeutiger Weise ein lineares stetiges Funktional auf $\mathsf{L}^{p'}(\Omega)$ definiert wird, und dieses als Dualpaarung mit einem Element $v \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ dargestellt werden kann (v wird von k abhängen). Insbesondere gilt

$$\int_\Omega u\partial_k\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi v \,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle} \qquad \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega),$$

d.h. wir haben $v = \partial_k u$. □

Für das folgende Resultat definieren wir formal den Schiftoperator τ_h mit $h \in \mathbb{R}^d$ durch

$$(\tau_h u)(x) = u(x+h).$$

Beachte, dass diese Definition nur für $x + h \in \Omega$ sinnvoll ist (wobei Ω der Definitionsbereich von u ist). Für gegebenes $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ ist τ_h aber ein wohldefinierter, linearer und stetiger Operator

$$\tau_h : \mathsf{L}^p(\Omega) \to \mathsf{L}^p(\tilde{\Omega}),$$

sofern $|h|$ hinreichend klein ist, d.h. sofern $|h| \leq \operatorname{dist}(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$.

Satz 8. *Sei $1 < p < \infty$ und sei $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$. Dann sind die Aussagen*

1. *$u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$,*
2. *es gibt eine Konstante C, so dass*

$$\|\tau_h u - u\|_{p,\tilde{\Omega}} \leq C|h|$$

für alle $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ und alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h|$ hinreichend klein,

äquivalent. (Die Konstante C darf von u, Ω und p aber nicht von h oder $\tilde{\Omega}$ abhängen.)

Beweis. 1. Sei zunächst $u \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x+th)\,\mathrm{d}t = h \cdot \int_0^1 \nabla u(x+th)\,\mathrm{d}t$$

sowie

$$|u(x+h) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |\nabla u(x+th)|\,\mathrm{d}t\,,$$

und nach Hölder auch

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p\,\mathrm{d}t,$$

wobei wir $\int_0^1 1^{p'}\,\mathrm{d}t = 1$ verwendet haben. Die Integration über $x \in \tilde{\Omega}$ liefert schließlich

$$\|\tau_h u - u\|_{p,\tilde{\Omega}}^p \leq |h|^p \int_0^1 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u(x+th)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Wir wählen nun ein „Zwischengebiet“ $\hat{\Omega}$ mit

$$\tilde{\Omega} \subset\subset \hat{\Omega} \subset\subset \Omega\,,$$

und bemerken, dass $x + th \in \hat{\Omega}$ für alle $x \in \tilde{\Omega}$, alle $t \in [0, 1]$ und alle hinreichend kleinen $|h|$ gilt. Insbesondere gilt die Abschätzung

$$\|\tau_h u - u\|_{p,\tilde{\Omega}}^p \leq |h|^p \int_0^1 \int_{\hat{\Omega}} |\nabla u(\hat{x})|^p\,\mathrm{d}\hat{x}\,\mathrm{d}t = |h|^p \int_{\hat{\Omega}} |\nabla u(\hat{x})|^p\,\mathrm{d}\hat{x} = |h|\,\|\nabla u\|_{p,\hat{\Omega}}$$

für alle hinreichend kleinen $|h|$.

2. Die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2. kann durch Approximation mit glatten Funktionen, siehe Satz 3, bewiesen werden, wobei $C = \|\nabla u\|_{p,\Omega}$ eine mögliche Wahl der Konstanten ist.

3. Sei nun $u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ mit der Bedingung 2. gegeben. Dann liefert die Hölder-Ungleichung die Abschätzung

$$\left|\int_{\tilde{\Omega}} (\tau_h u - u)\varphi \,\mathrm{d}x\right| \leq C\,|h|\,\|\varphi\|_{p',\tilde{\Omega}} \qquad \text{für alle} \qquad \varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\tilde{\Omega})\,.$$

Andererseits gilt für jedes $\varphi \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\tilde{\Omega})$ und alle hinreichend kleinen $|h|$ die Identität

$$\int_{\tilde{\Omega}} (\tau_h u - u)\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\Omega}} u(\tau_{-h}\varphi - \varphi)\,\mathrm{d}x$$

und damit auch

$$\left|\int_{\tilde{\Omega}} u(\tau_{-h}\varphi - \varphi)\,\mathrm{d}x\right| \leq C\,|h|\,\|\varphi\|_{p',\tilde{\Omega}}.$$

Wir setzen nun $h = |h|\,e_k$, wobei e_k der k-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^d$ ist, und gehen zum Limes $|h| \to 0$ über. Mit Hilfe des Satzes von Taylor, angewendet auf die glatte Testfunktion φ, erhalten wir

$$\left|-\int_{\tilde{\Omega}} u\partial_k\varphi \,\mathrm{d}x\right| \leq C\|\varphi\|_{p',\tilde{\Omega}},$$

und mit Satz 7 schließen wir, dass u auf $\tilde{\Omega}$ eine schwache Ableitung $\partial_k u \in \mathsf{L}^p(\tilde{\Omega})$ besitzt. Da $\tilde{\Omega}$ beliebig gewählt werden kann, folgt schließlich die Existenz von $\partial_k u \in \mathsf{L}^p(\Omega)$ im schwachen Sinne auf ganz Ω.

$\square$

Bemerkung. *Der letzte Satz gilt auch für $p = \infty$. Für $p = 1$ gilt nur* 1. $\implies$ 2.

Weitere notwendige und hinreichende Kriterien werden in den Übungsaufgaben vorgestellt.

3.1.2 Einbettungssätze für die Räume $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Analog zum eindimensionalen Fall definieren wir die Räume

$$\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)}\,, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

wobei der Abschluss bzgl. der $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$-Norm gebildet wird, sowie

$$\mathsf{W}^{-1,p'}(\Omega) := \mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)^*.$$

Da $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ein *abgeschlossener* Unterraum von $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ist, gelten die Behauptungen von Satz 2 sinngemäß auch für $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Wir formulieren nun die sogenannten Einbettungssätze für $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Dazu bezeichnen wir mit

$$\mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega) := \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \;:\; \|u\|_{0,\lambda} < \infty\Big\},$$

den Raum aller beschränkten Hölder-stetigen Funktionen auf Ω mit Hölder-Exponent $0 < \lambda \leq 1$, wobei

$$\|u\|_{0,\lambda} = \|u\|_\infty + |u|_\lambda\,, \qquad |u|_\lambda = \sup_{x,y\in\Omega,\, y\neq x} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Beachte, dass $\big(\mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega), \|\cdot\|_{0,\lambda}\big)$ ein Banach-Raum ist, wobei $\mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega) \subset \mathsf{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$ gilt, und dass $\mathsf{BC}^{0,1}(\Omega)$ gerade aus den beschränkten Lipschitz-stetigen Funktionen besteht.

Satz 9 (Sobolevscher Einbettungssatz). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beliebig und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

$$\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Omega)$$

sofern

1. *$p < d$ und $p \leq q \leq p_* = pd/(d-p)$, oder*
2. *$p = d$ und $p \leq q < \infty$, oder*
3. *$p > d$ und $p \leq q \leq \infty$.*

Für $p > d$ gilt darüber hinaus

$$\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega)$$

für alle λ mit $0 \leq \lambda \leq \lambda_* = 1 - d/p$.

Bemerkung. 1. *Die Beweisidee ist wie folgt (siehe* BREZIS, EVANS, *...): Man zeigt zunächst die entsprechenden Einbettungsungleichungen für glatte Funktionen $u \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$, wobei alle Rechentricks und Integraltransformationen erlaubt sind. Genauer gesagt: Für $p < d$ beruhen die Einbettungsungleichungen auf der Gagliardo-Nierenberg-Sobolev-Ungleichung*

$$\|u\|_{p_*} \leq c\|\nabla u\|_p \qquad \text{für alle} \qquad u \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty\big(\mathbb{R}^d\big)\,,$$

wohingegen man für $p > d$ die sogenannte Morrey-Ungleichung für glatte Funktionen benutzt. Im zweiten Schritt benutzt man dann Approximationsargumente um die Ungleichungen auch für $u \in \mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ zu etablieren.

2. *Für $|\Omega| < \infty$ gilt die Einbettung nach $\mathsf{L}^q(\Omega)$ auch für $1 \leq q < p$, denn die Hölder-Ungleichung impliziert $\mathsf{L}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Omega)$.*

3. *Die Einbettungssätze sind "scharf". Insbesondere bettet $\mathsf{W}_0^{1,d}(\Omega)$ für $d \geq 2$ nicht in $\mathsf{L}^\infty(\Omega)$ ein. Eine klassische Gegenbeispiel (siehe* [ALT]*) ist*

$$\Omega = B_{1/2}(0)\,, \qquad u(x) = \log|\log|x||\;.$$

4. *Es gibt auch Einbettungssätze für $\mathsf{W}_0^{k,p}(\Omega)$.*

5. *Analoge Einbettungssätze gelten nur dann für $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$, wenn der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt ist. Dies werden wir später untersuchen.*

Wir formulieren nun eine wesentliche Verschärfung der Einbettungssätze.

Satz 10 (Rellich-Kondrasov)**.** *Seien* $1 \le p < \infty$ *und* Ω *ein Gebiet mit* endlichem *Maß. Dann gilt*

$$\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Omega) \tag{3.2}$$

für alle q *mit* $1 \le q \le \infty$ *und* $1/q > 1/p - 1/d$*. Für* $p > d$ *gilt außerdem*

$$\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\hookrightarrow \mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega)$$

für alle λ *mit* $0 \le \lambda < \lambda_* = 1 - d/p$*.*

Bemerkung.

1. *"$\hookrightarrow\!\hookrightarrow$" meint kompakte Einbettung. Insbesondere folgt aus* (3.2) *die Implikation*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ schwach in } \mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u \text{ stark in } \mathsf{L}^q(\Omega).$$

2. *Für* $p > d$ *gilt* $1/p - 1/d < 0$ *und alle Einbettungen in* $\mathsf{L}^q(\Omega)$ *sind kompakt. Für* $p \le d$ *gilt* $1/p - 1/d = 1/p_*$ *und der ersten Teil von Satz 10 garantiert, dass alle Einbettungen in* $\mathsf{L}^q(\Omega)$ *mit nicht-maximalem Exponenten* $q < p_*$ *kompakt sind. Analog ist für* $p > d$ *die Einbettung in* $\mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega)$ *kompakt, sofern* λ *kleiner als der maximale Exponent* λ_* *ist.*

Wir wollen nun einige Folgerungen aus den Einbettungssätzen 9 und 10 ziehen.

Bemerkung.

1. *Sei* $|\Omega| < \infty$*. Dann ist das Funktional* $F(u) = \int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}x$ *wohldefiniert und stetig auf* $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$*, sofern* q *ein zulässiger Einbettungsexponent ist. Ist* q *zudem ein nicht-maximaler Exponent, so ist* F *sogar schwach stetig.*

2. *Sei* $p > d$ *und* $\Gamma \subset \Omega$ *eine glatte* $d{-}1$*-dimensionale Mannigfaltigkeit in* Ω*. Dann definiert*

$$u \mapsto \int_\Gamma u \,\mathrm{d}\sigma$$

ein lineares stetiges Funktional auf $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Omega)$*, wobei* $\mathrm{d}\sigma$ *das Oberflächenmaß auf* Γ *ist.*

3. *Sei* $y \in \Omega$ *fixiert und* δ_y *die Dirac-Distribution in* y*. Dann gilt* $\delta_y \in \mathsf{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *nur für* $p > d$*. Insbesondere gilt* $\delta_y \notin \mathsf{H}^{-1}(\Omega) = \mathsf{W}^{-1,2}(\Omega)$ *für* $d \ge 2$*.*

3.1.3 Dichtheits-, Fortsetzungs-, Einbettungssätze für $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$

Wir werden nun zeigen, dass die Einbettungssätze von Sobolev und Rellich-Kondrasov auch für $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ gelten sofern der Rand $\partial\Omega$ hinreichend regulär ist.

Definition 11. *Ein Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *heißt* C^k*-Gebiet, wenn es für jedes* $x \in \partial\Omega$ *einen Radius* $r > 0$ *sowie eine* C^k*-Abbildung* $\Phi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *gibt, so dass – bis auf affine ON-Transformationen* $x \mapsto y$ *– gilt*

$$\Omega \cap B_r(x) = \left\{ (\tilde{y},\, y_d) \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \ :\ y_d > \Phi(\tilde{y}) \right\}.$$

Bemerkung.

1. *Analog kann man* $\mathsf{C}^{k,\lambda}$*-Gebiete definieren.*

2. *Wir werden im folgenden immer* C^1*-Gebiete betrachten. Alle Aussagen gelten aber auch für Lipschitz-Gebiete, d.h. für* $\mathsf{C}^{0,1}$*- Gebiete.*

Sei nun $B_r(x)$ mit $x \in \partial\Omega$ eine Kugel wie in Definition 11. Für jedes $\Theta \subset B_r(x)$ definieren wir das an $\partial\Omega$ *gespiegelte Gebiet* durch

$$\Theta^{\#,B_r(x)} = \{(\tilde{y},\, 2\Phi(\tilde{y}) - y_d) \;:\; (\tilde{y},\, y_d) \in \Theta\}\,.$$

Beachte, dass diese Konstruktion nur lokal Sinn hat, d.h. wenn $\partial\Omega$ als Graph einer Funktion betrachtet werden kann, und dass im Allgemeinen $\Theta^{\#,B_r(x)}$ nicht in $B_r(x)$ enthalten sein muss.

Lemma 12 (Existenz einer *passenden Zerlegung der Eins*)**.** *Sei* Ω *ein beschränktes* C^1*-Gebiet. Dann gibt es endlich viele Punkte* $x_1, ..., x_n \in \overline{\Omega}$*, offene und beschränkte Gebiete* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *sowie Funktionen* $\zeta_1, ..., \zeta_n$*, so dass gilt:*

0. *Es gilt* $\overline{\Omega} \subset \Theta_1 \cup ... \cup \Theta_n$*,*

1. *Für jedes* $i = 1...n$ *gilt entweder*

   (a) x_i *ist* innerer Punkt *mit* $x_i \in \Theta_i \subset\subset \Omega$*,*

   (b) x_i *ist* Randpunkt *mit* $x_i \in \Theta_i \subset\subset B_{r_i}(x_i)$ *und* $\Theta_i = \Theta_i^{\#,B_{r_i}(x_i)}$*, wobei* r_i *ein Radius wie in Definition 11 ist.*

2. *Es gilt* $\sum_{i=1}^{n} \zeta_i|_{\overline{\Omega}} \equiv 1$ *und* $\zeta_i \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty\big(\Theta_i\big)$ *mit* $0 \le \zeta_i \le 1$ *für alle* $i = 1...n$*.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\overline{\Omega}$ kompakt. Wir konstruieren nun eine offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \big\{\Theta_x \;:\; x \in \overline{\Omega}\big\}$$

von $\overline{\Omega}$ wie folgt: Für einen gegebenen Randpunkt $x \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ wählen wir einen Radius $r(x)$ wie in Definition 11 und setzen

$$\Theta_x := B_{r(x)/2}(x) \cap B_{r(x)/2}(x)^{\#,B_{r(x)}(x)}.$$

Dann gilt $\Theta_x = \Theta_x^{\#,B_{r(x)}(x)} \subset\subset B_{r_i}(x_i)$. Für jeden inneren Punkt $x \in \Omega$ wählen wir $r(x)$ mit $B_{r(x)}(x) \subset \Omega$ und setzen $\Theta_x = B_{r(x)/2}(x)$. Nach dem Satz von Heine-Borel gibt es nun eine endliche Teilüberdeckung $\Theta_{x_1}, ..., \Theta_{x_n}$. Die Existenz von dazu passenden Funktionen $\zeta_1, ..., \zeta_n$ folgt dann aus allgemeinen Prinzipien (siehe Übungsaufgabe). □

Das wesentliche Hilfsmittel für den Beweis der Einbettungssätze für $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit regulärem Rand $\partial\Omega$ ist die Beobachtung, dass man jede Funktion $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ so fortsetzen kann, dass auch die fortgesetzte Funktion schwache Ableitungen besitzt.

Satz 13 (Fortsetzungssatz)**.** *Seien* $1 \le p < \infty$ *und* Ω *ein beschränktes* C^1*-Gebiet. Dann gibt es ein beschränktes Gebiet* Θ *mit* $\Omega \subset\subset \Theta$ *sowie einen linearen und stetigen Fortsetzungsoperator*

$$E : \mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathsf{W}_0^{1,p}(\Theta).$$

Insbesondere gilt $Eu|_\Omega = u$ *und* $\|Eu\|_{1,p,\Theta} \le C\|u\|_{1,p,\Omega}$ *für alle* $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ *und eine geeignete Konstante* C *(die von* p *und* Ω *abhängt).*

Beweis. Wir wählen eine Zerlegung der Eins wie in Satz 12 und setzen $\Theta = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i$ sowie $u_i = \zeta_i u$ für alle $i = 1...n$. Dann gilt $u_i \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla u_i = u\nabla\zeta_i + \zeta_i\nabla u$ und $\|u_i\|_{1,p,\Omega} \leq C_i\|u\|_{1,p,\Omega}$. Wir konstruieren nun für jedes u_i eine Fortsetzung $\bar{u}_i \in \mathsf{W}^{1,p}(\Theta)$. Sei zunächst x_i ein innerer Punkt von Ω. Dann definieren wir $\bar{u}_i$ als die triviale Fortsetzung von u_i (d.h. wir setzen $u_i(x) = 0$ für $x \in \Theta \setminus \Omega$). Wegen $\operatorname{supp} u_i \subset\subset \Omega$ folgt nun $\bar{u}_i \in \mathsf{W}^{1,p}(\Theta)$ mit $\|\bar{u}_i\|_{1,p,\Theta} = \|u_i\|_{1,p,\Omega}$ (Nachrechnen!).

Sei nun x_i ein Randpunkt, d.h. es gibt einen Radius r_i und eine Funktion Φ_i wie in Definition 11 bzw. Satz 12. Wir definieren nun $\bar{u}_i$ durch Spiegelung am Rand, d.h. wir setzen

$$\bar{u}_i(\tilde{y}, y_d) = \begin{cases} u_i(\tilde{y}, y_d) & \text{für} \quad y_d \geq \Phi_i(\tilde{y}), \\ u_i(\tilde{y}, 2\Phi(\tilde{y}) - y_d) & \text{für} \quad y_d < \Phi_i(\tilde{y}). \end{cases}$$

Nach Konstruktion der Zerlegung der Eins, gilt nun $\operatorname{supp} \bar{u}_i \subset\subset \Theta_i \subset B_{r_i}(x_i)$, und mit Hilfe von Definition 1 und Standardapproximationsargumenten kann man zeigen, dass $\bar{u}_i \in \mathsf{W}^{1,p}(\Theta)$ mit $\|\bar{u}_i\|_{1,p,\Theta} \leq C_i\|u_i\|_{1,p,\Omega}$ gilt.

Schließlich definieren wir $Eu = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i$, und da die obigen Definitionen von $\bar{u}_i$ linear und stetig in u_i sind, ist E ein linearer und stetiger Fortsetzungsoperator $E : \mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathsf{W}^{1,p}(\Theta)$. Es bleibt zu zeigen, dass sogar $Eu \in \mathsf{W}_0^{1,p}(\Theta)$ gilt. Dazu bemerken wir, dass es ein Gebiet $\Xi = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i$ gibt, so dass $\operatorname{supp} Eu \subset \Xi \subset\subset \Theta$. In der Tat, für innere Punkte x_i wählen wir Ξ_i offen mit $\operatorname{supp} \zeta_i \subset \Xi_i \subset\subset \Theta_i$. Für Randpunkte x_i wählen wir Ξ_i offen mit $\operatorname{supp} \zeta_i \cup \operatorname{supp} \zeta_i^\# \subset \Xi_i \subset\subset \Theta_i$, wobei $\zeta_i^\#$ aus ζ_i durch Spiegelung am Rand gewonnen wird. Für eine Folge von Standardkernen $(\varrho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt nun $\|\varrho_k * Eu - Eu\|_{1,p,\Theta} \to 0$, und außerdem $\varrho_k * Eu \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Theta)$ für alle hinreichend großen k. Damit haben wir gezeigt, dass Eu durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger in Θ approximiert werden kann.

□

Bemerkung.

1. *Für $p < \infty$ gilt nach Definition der Räume $\mathsf{W}_0^{1,p}$ auch $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Theta) \hookrightarrow \mathsf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d) = \mathsf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Damit liefert Satz 13 auch einen stetigen Fortsetzungsoperator $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

2. *Der Beweis von Satz 13 kann so modifiziert werden, dass jedes Gebiet Θ mit $\Omega \subset\subset \Theta$ zugelassen werden kann. Die optimale Einbettungskonstante wird aber von Θ abhängen.*

3. *Es gibt auch Fortsetzungsätze für $\mathsf{W}^{k,p}(\Omega)$, aber die Fortsetzung durch Spiegelung ist dann nicht mehr ausreichend.*

Der Fortsetzungssatz hat die folgenden zwei Konsequenzen.

Satz 14 (Einbettungssätze)**.** *Seien $1 \leq p < \infty$ und Ω ein beschränktes C^1-Gebiet. Dann gelten die Einbettungssätze von Sobolev und Rellich-Kondrasov auch für $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$.*

Beweis. Wir kombinieren die stetige Fortsetzung nach Satz 13, die stetige L^q-Einbettung nach Satz 9 (für das Gebiet Θ) sowie stetige Restriktionsabbildung und erhalten

$$\mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{W}_0^{1,p}(\Theta) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Theta) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Omega).$$

Ist die mittelere Einbettung $\mathsf{W}_0^{1,p}(\Theta) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Theta)$ sogar kompakt, so ist auch $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{L}^q(\Omega)$ kompakt, das die Komposition stetiger und kompakter Operatoren kompakt ist. Die Argumente für $\mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega)$ sind analog. □

Satz 15 (Dichtheitssatz). *Seien $1 \le p < \infty$ und Ω ein C^1-Gebiet. Dann gilt*

$$\mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty\big(\mathbb{R}^d\big) \overset{\mathrm{d}}{\hookrightarrow} \mathsf{W}^{1,p}(\Omega),$$

d.h. für jedes $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty\big(\mathbb{R}^d\big)$ mit $\|u_n - u\|_{1,p,\Omega} \to 0$.

Beweis. Für beschränkte Gebiete folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 13. Für unbeschränkte Gebiete Ω betrachten wir eine Folge $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von glatten Abschneidefunktionen mit $\eta_k(x) = 1$ for $|x| < k$ und $\eta_k(x) = 0$ für $|x| > k+1$. Dann gilt $\|\eta_k u|_\Omega - u\|_{1,p,\Omega} \to 0$ und mit Hilfe des Fortsetzungsoperators (angewendet auf $\eta_k u$ bzgl. des Gebietes $B_{k+1}(0)$) konstruieren wir $u_k \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty\big(\mathbb{R}^d\big)$, so dass $\|u_k - \eta_k u\|_{1,p,\Omega} \le \|\eta_k u - u\|_{1,p,\Omega}$ und damit $\|u_k - u\|_{1,p,\Omega} \le 2\|\eta_k u - u\|_{1,p,\Omega} \to 0$. □

3.1.4 Spursatz für die Räume $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei Ω stets ein beschränktes C^1-Gebiet.

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathsf{W}^{1,p}$-Funktionen in eindeutiger Weise Randwerte auf $\partial\Omega$ annehmen, sofern $\partial\Omega$ regulär ist. Dies gilt für alle $1 \le p \le \infty$, aber für $p > d$ folgt dies bereits (siehe Satz 14 und Übungsaufgaben) aus der Einbettung

$$\mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{BC}^{0,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{C}^0\big(\overline{\Omega}\big).$$

Satz 16 (Spurabschätzung für glatte Funktionen). *Für jedes $1 \le p \le q < \infty$ gibt es eine Konstante $C < \infty$, so dass*

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{q,\,\partial\Omega} \le C\|u\|_{1,\,p,\,\Omega}^{1/q}\|u\|_{p'(q-1),\,\Omega}^{1/q'} \tag{3.3}$$

für alle $u \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^1\big(\mathbb{R}^d\big)$. Hierbei gilt

$$\|g\|_{q,\,\partial\Omega}^q = \int_{\partial\Omega} |g(x)|^q \,\mathrm{d}\sigma(x),$$

wobei $\mathrm{d}\sigma$ das natürliche Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$ ist.

Beweis. Wir wählen wieder eine Zerlegung der Eins wie in Satz 12 und setzen außerdem $\zeta_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \zeta_i$, so dass $\zeta_0|_{\overline{\Omega}} \equiv 0$. Es genügt nun die Behauptung für alle Funktionen $u_i = \zeta_i$ zu zeigen. Falls $x_i \in \Omega$ ein innerer Punkt ist, oder falls $i = 0$, so gilt $u_i|_{\partial\Omega} = 0$ und die Abschätzung gilt für alle Konstanten C. Sei daher x_i ein Randpunkt und r_i, Θ_i und Φ_i wie in Definition 11 bzw. Satz 12. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u_i(x)|^q \,\mathrm{d}\sigma(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_i(\tilde{y},\, \Phi_i(\tilde{y}))|^q \sqrt{1 + |\nabla_{\tilde{y}}\Phi_i(\tilde{y})|^2}\,\mathrm{d}\tilde{y}\\ &\le C_i \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_i(\tilde{y},\, \Phi_i(\tilde{y}))|^q \,\mathrm{d}\tilde{y},\end{aligned}$$

wobei die Konstante C_i existiert, weil Φ_1 glatt ist, u_i kompakten Träger in Θ_i besitzt und weil Θ_i beschränkt ist. Außerdem gilt nach Kettenregel

$$|u_i(\tilde{y},\, \Phi_i(\tilde{y}))|^q \le |u_i(\tilde{y},\, y_d)|^q + q\int_{y_d}^{\Phi_i(\tilde{y})} |u_i(\tilde{y},\, s)|^{q-1}\,|\partial_d u_i(\tilde{y},\, s)| \,\mathrm{d}s\,, \tag{3.4}$$

wobei ∂_d die partielle Ableitung nach der Koordinate y_d meint. Da $\operatorname{supp}\zeta_i \subset B_{r_i}(x_i)$ kompakt ist, gibt es eine Konstante a_i, so dass

$$\operatorname{supp} u_i \subset \operatorname{supp}\zeta_i \subset \Big\{(\tilde{y},\, y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \;:\; |y_d - \Phi_i(\tilde{y})| < a_i\Big\}.$$

Wir integrieren (3.4) über $y_d \in [\Phi_i(\tilde{y}) - a_i,\, \Phi_i(\tilde{y}) - a_i]$ und erhalten (mit elementaren Abschätzungen für eindimensionale Integrale)

$$|u_i(\tilde{y},\, \Phi_i(\tilde{y}))|^q \le C_i \int_{\Phi_i(\tilde{y})-a_i}^{\Phi_i(\tilde{y})+a_i} |u_i(\tilde{y},\, u_d)|^{q-1} \Big(|u_i(\tilde{y},\, y_d)| + |\partial_d u_i(\tilde{y},\, y_d)| \Big)\, \mathrm{d}y_d.$$

Die Integration über $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ liefert

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_i(\tilde{y},\, \Phi_i(\tilde{y}))|^q \,\mathrm{d}\tilde{y} \le C_i \int_\Omega |u_i(x)|^{q-1} \Big(|u_i(x)| + |\partial_d u_i(x)| \Big)\, \mathrm{d}x,$$

und die Hölder-Ungleichung ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_i(\tilde{y},\, \Phi_i(\tilde{y}))|^q \,\mathrm{d}\tilde{y} \le C_i \|u_i\|^{q-1}_{p'(q-1),\,\Omega} \Big(\|u_i\|_{p,\,\Omega} + \|\partial_d u_i\|_{p,\,\Omega} \Big).$$

Damit haben wir

$$\|u_i\|^q_{q,\partial\Omega} \le C_i \|u_i\|^{q-1}_{p'(q-1),\,\Omega} \|u_i\|_{1,\,p,\,\Omega},$$

gezeigt, und die Behauptung folgt unmmittelbar. □

Satz 17 (Existenz des Spuroperators). *Für jedes $1 \le p < \infty$ gibt es einen linearen und stetigen Operator*

$$T : \mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathsf{L}^p(\Omega)$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$ gilt.

Beweis. Nach Satz 15 ist $\mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$ eine dichte Teilmenge von $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$, und für $u \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$ definieren wir $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Wir wollen nun zeigen, dass T in eindeutiger Weise zu einem linearen und stetigem Operator auf $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ fortgesetzt werden kann. Sei dazu $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ gegeben und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$ eine approximierende Folge. Mit $p = q$ in Satz 16 finden wir

$$\|Tu_n - Tu_m\|_{p,\partial\Omega} \le C\|u_n - u_m\|_{p,\Omega},$$

d.h. $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im Banach-Raum $\mathsf{L}^p(\partial\Omega)$, und deshalb existiert $g = \lim_{n\to\infty} u|_{\partial\Omega} \in \mathsf{L}^p(\partial\Omega)$. Wir wollen nun zeigen, dass der Grenzwert g nicht von der Wahl der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. Sei dazu $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}\big(\mathbb{R}^d\big)$ eine weitere approximierende Folge von u und $\bar{g} = \lim_{n\to\infty} \bar{u}_n|_{\partial\Omega}$. Dann gilt nach Satz 16

$$\|Tu_n - T\bar{u}_n\|_{p,\partial\Omega} \le C\|u_n - \bar{u}_n\|_{p,\Omega},$$

und der Limes $n \to \infty$ liefert $\bar{g} = g$. Deshalb ist $Tu = g$ eine sinnvolle Definition. Mit Hilfe der obigen Approximationen sieht man auch dass g linear und stetig von u abhängt. □

Bemerkung. *1. Es gilt $Tu = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathsf{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$.*

2. *Im folgenden schreiben wir* $u_{\partial\Omega}$ *statt* Tu.

3. *Wegen* $\mathsf{W}^{1,\infty}(\Omega) \subset \mathsf{BC}^{0,1}(\Omega) \subset \mathsf{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$ *gibt es den Spuroperator* T *auch für* $p = \infty$.

4. *Durch Approximation mit glatten Funktionen kann auch* $(uv)|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}$ *für alle* $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ *und* $v \in \mathsf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ *gezeigt werden.*

Satz 18 (Eigenschaften des Spuroperators)**.** *Seien* $1 \leq p < d$ *und* $1 \leq q \leq p_\#$ *mit* $p_\# = p\frac{d-1}{d-p} < p_*$. *Dann bildet der Spuroperator den Raum* $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ *linear und stetig nach* $L^q(\partial\Omega)$ *ab. Für* $q < p_\#$ *ist der Spuroperator sogar kompakt.*

Beweis. Sei zunächst $u \in \mathsf{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Nach Satz 16 gilt

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{q,\,\partial\Omega} \leq C\|u\|^{1/q}_{1,\,p,\,\Omega}\|u\|^{1/q'}_{p'(q-1),\,\Omega} \tag{3.5}$$

und der Sobolevsche Einbettungssatz 9 liefert

$$\|u\|_{p'(q-1),\,\Omega} \leq C\|u\|_{1,p,\,\Omega}$$

da

$$p'(q-1) \leq p_* = \frac{pd}{d-p} \quad\iff\quad q \leq p_\#.$$

Durch Approximation mit glatten Funktionen kann nun (3.5) für alle $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ gezeigt werden, und wegen Satz 9 folgt dann $\|u\|_{q,\partial\Omega} \leq C\|u\|_{1,p,\Omega}$ für alle $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$, d.h. der Spuroperator bildet stetig nach $\mathsf{L}^q(\partial\Omega)$ ab (die Linearität folgt schon aus Satz 17).

Wir wollen nun für $q < p_\#$ zeigen, dass der Spuroperator Kugel in $\mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ auf präkompakte Menge in $L^q(\partial\Omega)$ abbildet. Nach dem Einbettungssatz 10 besitzt jede beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ eine Teilfolge $\big(u_{n_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$, die Cauchy-Folge in $L^{p'(q-1)}(\Omega)$ ist. Die Abschätzung (3.5) liefert

$$\|u_{n_j}|_{\partial\Omega} - u_{n_k}|_{\partial\Omega}\|_{q,\,\partial\Omega} \leq C\|u_{n_j} - u_{n_k}\|^{1/q'}_{p'(q-1),\,\Omega},$$

d.h. $\big(u_{n_j}|_{\partial\Omega}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $L^q(\partial\Omega)$. Damit ist die Kompaktheit des Spuroperators gezeigt. □

Bemerkung. *Aus den Einbettungssätzen folgt, dass Satz 18 auch für* $p = d$ *mit beliebigem* $p_\# < \infty$ *und für* $p > d$ *und* $p_\# = \infty$ *gilt.*

Mit Hilfe des Spursatzes können wir nun auch den Gauß'schen Satz auf C^1-Gebieten ableiten.

Satz 19 (Satz von Gauß)**.** *Seien* Ω *ein beschränktes* C^1*-Gebiet und* $1 \leq p < \infty$. *Dann gilt*

$$\int_\Omega \partial_i u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nu_i \,\mathrm{d}\sigma$$

für alle $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$, *wobei* $\nu = (\nu_1,\, ...,\, \nu_d)$ *der* äußere Normalenvektor *an* $\partial\Omega$ *ist.*

Beweis. Durch Approximation mit glatten Funktionen und unter Verwendung von Satz 17. □

Der Gaußsche Satz kann für Vektorfelder $U \in \mathsf{W}^{1,p}\big(\Omega;\, \mathbb{R}^d\big)$ wie folgt geschrieben werden

$$\int_\Omega \nabla \cdot U \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} U \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma,$$

wobei $\nabla \cdot U = \operatorname{div}(U) = \partial_1 U_1 + ... + \partial_d U_d$ die Divergenz von U ist.

Bemerkung. *In den Übungen werden wir mit Hilfe des Satzes von Gauß das folgendes Resultat zeigen: Seien $\Omega \subset\subset \Theta$, $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$, und $\bar{u}$ die triviale Fortsetzung von u, d.h.*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \textit{für } x \in \Omega, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\bar{u} \in \mathsf{W}^{1,p}_0(\Theta)$. Beachte, dass für $u_{\partial\Omega} \neq 0$ die trivale Fortsetzung i.A. keine *schwachen Ableitung auf Θ besitzt.*

Satz 20. *Sei $u \in \mathsf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

$$u \in \mathsf{W}^{1,p}_0(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Beweis. Die Implikation ($\Rightarrow$) folgt aus dem Spursatz (Satz 17) und der Definition von $\mathsf{W}^{1,p}_0(\Omega)$. Für ($\Leftarrow$) wählen wir eine Zerlegung der Eins wie in Satz 12, eine Folge $\left(\varrho_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ von Standardfaltungskernen, und setzen $u_i = \zeta_i u$. Wir wollen nun $u_i \in \mathsf{W}^{1,p}_0(\Omega)$ für alle $i = 1...n$ zeigen. Dazu bezeichnen wir mit $\bar{u}_i$ die triviale Fortsetzung von u_i, und mit obiger Bemerkung gilt $\bar{u}_i \in \mathsf{W}^{1,p}\big(\mathbb{R}^d\big)$, d.h. $\bar{u}_i$ besitzt schwache Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^d$.

Sei zunächst $x_i \in \Omega$ ein innerer Punkt. Für alle hinreichend grossen k gilt dann $\varrho_k * \bar{u}_i \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega)$ und die Eigenschaften der Faltungsoperatoren implizieren $\|\varrho_k * \bar{u}_i - u_i\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \to 0$. Insbesondere gilt $\|\varrho_k * \bar{u}_i - u_i\|_{1,p,\Omega} \to 0$ und damit haben wir $u_j \in \mathsf{W}^{1,p}_0(\Omega)$ gezeigt.

Für einen Randpunkt $x_i \in \partial\Omega$ konstruieren wir $\hat{u}_i$ in dem wir $\bar{u}_i$ nach innen um den Betrag $1/\sqrt{k}$ verschieben, d.h. wir setzen

$$\hat{u}_{i,k}(\tilde{y},\, y_d) = \bar{u}_i(\tilde{y},\, y_d - 1/\sqrt{k}).$$

Dann gilt $\hat{u}_{i,k} \in \mathsf{W}^{1,p}\big(\mathbb{R}^d\big)$ mit $\|\varrho_k * \hat{u}_{i,k} - \bar{u}_i\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \to$, und wegen $\varrho_k * \hat{u}_{i,k} \in \mathsf{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega)$ folgt wieder $u_j \in \mathsf{W}^{1,p}_0(\Omega)$. $\square$

3.2 Das Poisson-Problem

Wir wollen nun zeigen, dass – analog zum eindimensionalen Fall – eine schwache Lösungstheorie für elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung abgeleitet werden kann. Wir werden uns dabei auf das *Poisson-Problem* beschränken, d.h. wir untersuchen die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{auf} \quad \Omega, \tag{$\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$}$$

wobei der *Laplace*-Operator Δ durch

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 u \tag{3.6}$$

definiert ist. Grundlage der schwachen Lösungstheorie für ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$) ist die Formel

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\nu \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\sigma, \tag{3.7}$$

die mittels partieller Integration aus ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$) abgeleitet werden kann. Hierbei bezeichnet ν wieder den äußeren Normalenvektor auf $\partial\Omega$, und $\nu \cdot \nabla u$ ist die *Normalenableitung* von u (die oft auch als $\frac{\partial u}{\partial n}$ geschrieben wird).

Da die Differentialgleichung ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$) linear in u ist, werden wir – wie im eindimensionalen Fall – Hilbert-Räume verwenden, d.h. wir suchen Lösungen $u \in \mathsf{H}^1(\Omega) = \mathsf{W}^{1,2}(\Omega)$. Dann können wir im Allgemeinen rechte Seiten $f \in \mathsf{H}^1(\Omega)^*$ zulassen, sofern wir $\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$ durch $\langle f,\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*, \mathsf{H}^1(\Omega)}$ ersetzen.

3.2.1 Existenz und Eindeutigkeit schwache Lösungen

Im folgenden sei Ω ist immer ein beschränktes C^1-Gebiet.

Satz 21. *Es gibt Konstanten C, so dass die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:*

1. Friedrichsche Ungleichung

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq C\Big(\|\nabla u\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,\partial\Omega}\Big) \qquad \forall \quad u \in \mathsf{H}^1(\Omega),$$

2. verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq C\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega} + \tfrac{1}{|\Omega|}\left|\int_\Omega u \,\mathrm{d}x\right|\right) \qquad \forall \quad u \in \mathsf{H}^1(\Omega),$$

3. Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \leq C\|\nabla u\|_{p,\Omega} \qquad \forall \quad u \in \mathsf{H}^1_0(\Omega).$$

Beweis. Siehe Übungsaufgabe zu äquivalenten Normen. □

Homogene Dirichlet- Randbedingungen Wir entwickeln nun die schwache Lösungstheorie zum homogenen Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{$\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$}$$

Motiviert durch die Formel (3.7), und in Analogie zum eindimensionalen Fall, definieren wir den schwachen Lösungsbegriff wie folgt.

Definition 22. *Eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) mit rechter Seite $f \in \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$, falls*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \langle f,\, v\rangle_{\mathsf{H}^{-1}(\Omega), \mathsf{H}^1_0(\Omega)} \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1_0(\Omega). \tag{3.8}$$

Bemerkung. *Sei $f \in \mathsf{C}^0(\Omega)$. Dann ist klar, dass jede klassische Lösung $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Omega})$ zu ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) auch schwache Lösung ist. Umgekehrt, ist u eine schwache Lösung für die auch $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Omega})$ gilt, so ist u schon klassische Lösung. Dies kann wie folgt gezeigt werden: Für glatte Testfunktionen $v \in \mathsf{C}^2(\bar{\Omega})$ impliziert die schwache Formulierung* (3.8) *(nach partieller Integration)*

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \quad v \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega),$$

und der Hauptsatz der Variationsrechnung (siehe Kapitel 1, Satz 47) liefert $\Delta u + f = 0$ fast überall in Ω. Da f und Δu stetig sind, folgt nun $\Delta u + f = 0$ überall in Ω, und $u_{\partial\Omega} = 0$ folgt nach Satz 20 aus $u \in \mathsf{H}_0^1(\Omega)$.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung sowie deren stetige Abhängigkeit von den Daten können nun analog zum eindimensionalen Fall gezeigt werden. Die Regularitätstheorie ist allerdings etwas delikater und wird später untersucht.

Satz 23. *Für jedes $f \in \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ gibt es genau eine schwache Lösung u des homogenen Dirichlet-Problems* ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *mit*

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq C \|f\|_{-1,\Omega}.$$

Insbesondere besizt ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *einen eindeutigen linearen und stetigen Lösungsoperator $\mathsf{H}^{-1}(\Omega) \to \mathsf{H}_0^1(\Omega)$.*

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit folgt aus dem Satz von Lax-Milgram (Kap. 2, Satz 19), da gemäß der Poincare-Ungleichung die Bilinearform

$$\alpha(u,\, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$$

koerzitiv ist. Die Stetigkeitsabschätzung folgt in dem wir $v = u$ setzen, d.h. aus

$$c\|u\|_{1,2,\Omega}^2 \leq \alpha(u,\, u) \leq \|f\|_{-1,2,\Omega} \|u\|_{1,2,\Omega}.$$

□

Bemerkung (schwache Formulierung als Operatorgleichung)**.** *Der Laplaceoperator Δ bildet durch*

$$\langle \Delta u,\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*, \mathsf{H}^1(\Omega)} := -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$$

den Raum $\mathsf{H}^1(\Omega)$ in natürlicher Weise nach $\mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ ab.

1. *Eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ ist genau dann schwache Lösung der Differentialgleichung* ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$)*, wenn die Operatorgleichung*

   $$-\Delta u = f \quad \mathit{in} \quad \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$$

   gilt. Beachte, dass u genau dann klassische Lösung von ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$) *ist (mit rechter Seite $f \in \mathsf{C}^0(\Omega)$), falls*

   $$-\Delta u = f \quad \mathit{in} \quad \mathsf{C}^0(\Omega).$$

2. *Nach Satz 23 ist* $-\Delta : \mathsf{H}^1_0(\Omega) \to \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ *stetig invertierbar. Der Operator* $-\Delta : \mathsf{H}^1(\Omega) \to \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ *besitzt jedoch einen nicht-trivialen Kern, der gerade aus den* schwach harmonischen *Funktionen auf* Ω *besteht.*

3. *Nach Konstruktion ist* $-\Delta : \mathsf{H}^1_0(\Omega) \to \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ *die inverse Riesz-Fréchet-Abbildung zu dem durch* α *gegebenen Skalarprodukt auf* $\mathsf{H}^1_0(\Omega)$.

Inhomogene Dirichlet- Randbedingungen Das inhomogene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \quad &\text{auf} \quad \Omega, \\ u = g \quad &\text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{$\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}\text{-}\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$}$$

mit gegebenem g kann – analog zum eindimensionalen Fall – wieder auf das homogene Problem zurückgeführt werden. Die wesentliche *Annahme* an die Randdaten ist, dass g im Bild des Spuroperators liegt, d.h. dass $g = w|_{\partial\Omega}$ für ein $w \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ gilt (in 1D ist diese Annahme trivialerweise erfüllt, da w z.Bsp. affin gewählt werden kann).

Sofern die Existenz einer Funktion w gesichert ist, können wir das Problem mit Hilfe von $\tilde{u} = u - w$ umformulieren. Die Idee ist, dass u genau dann ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) löst, wenn

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u} = \tilde{f} := f + \Delta w \quad &\text{auf} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die schwache Lösungstheorie für ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) kann nun wie folgt entwickelt werden.

Definition 24. *Sei* $w \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ *gegeben. Eine Funktion* $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ *heißt schwache Lösung zu* ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$) *mit Randdaten* $g = w|_{\partial\Omega}$ *und rechter Seite* $f \in \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$*, falls die* $\tilde{u} = u - w$ *schwache Lösung des homogenen Problems* ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *mit rechter Seite* $f - \Delta w \in \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ *ist, d.h. wenn*

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u} \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \langle f, v\rangle_{\mathsf{H}^{-1}(\Omega),\mathsf{H}^1_0(\Omega)} - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1_0(\Omega).$$

gilt.

Satz 25. *Das inhomogene Dirchlet-Problem* ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{hom}}$) *besitzt eindeutigen, linearen und stetigen Lösungsoperator* $\mathsf{H}^{-1}(\Omega) \to \mathsf{H}^1(\Omega)$ *mit*

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq C(\|f\|_{-1,\Omega} + \|w\|_{1,2,\Omega}).$$

Bemerkung. *Da* w *nicht eindeutig durch* g *bestimmt ist, kann die obige Stetigkeitsabschätzung durch*

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq C(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{\#}).$$

ersetzt werden, wobei die natürliche Spurnorm $\|\cdot\|_{\#}$ *mit*

$$\|g\|_{\#} := \inf\left\{\|w\|_{1,2,\Omega} \;:\; w|_{\partial\Omega} = g\right\}$$

wohldefiniert auf dem Bild des Spuroperators ist.

Wir bemerken schließlich, dass es nicht trivial ist, die Menge aller zulässigen g zu charakterisieren. Die entscheidende Frage ist dabei, auf welchen Unterraum in $\mathsf{L}^{p_\#}(\partial\Omega)$ der Spuroperators abbildet bzw. welche Funktionen aus $\mathsf{L}^{p_\#}(\partial\Omega)$ sich zu einer $\mathsf{H}^1(\Omega)$-Funktion fortsetzen lassen.

Neumann-Randbedingungen Wir betrachten nun dass allgemeine Neumann-Problem zu ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$), d.h. wir suchen Lösungen u die neben der Differentialgleichung auch die Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nu \cdot \nabla u = h \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

erfüllen, wobei ν der äußere Normalenvektor an $\partial\Omega$ ist und h eine gegebene Funktion auf dem Rand $\partial\Omega$ ist.

In der Lösungstheorie von ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$) mit Neumann-Randbedingungen gibt es zwei Besonderheiten:

1. Die Randdaten und die Differentialgleichung erzwingen noch keine Eindeutigkeit, da wir zu jeder Lösung eine beliebige konstante Funktion addieren können und wieder eine Lösung erhalten. Es stellt sich aber heraus, dass dies die einzige Mehrdeutigkeit des Problems ist.

2. Es gibt Restriktionen zwischen den Daten f und h. Dies gilt sogar schon im Fall klassischer Lösungen und folgt aus

$$-\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma.$$

   Im folgenden nennen wir deshalb ein Paar $(f,\, h)$ mit $f \in \mathsf{H}^1(\Omega)^*$ und $h \in \mathsf{H}^0(\partial\Omega)$ *zulässig*, falls

$$\langle f,\, 1\rangle_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*,\mathsf{H}^1(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma = 0 \tag{3.9}$$

   gilt.

Um die konstanten Funktionen aus dem Problem zu elimieren können wir zum Beispiel fordern, dass jede Lösung *mittelwertfrei* ist, d.h. wir suchen Lösungen u mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf} \quad \Omega, \\ \nu \cdot \nabla u &= h \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \\ \tfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \,\mathrm{d}x &= 0. \end{aligned} \tag{$\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{N}_{\mathrm{inh}}$}$$

Wir definieren daher den Raum

$$\mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega) := \Big\{ u \in \mathsf{H}^1(\Omega) \;:\; \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0 \Big\},$$

der als abgeschlossener Unterraum von $\mathsf{H}^1(\Omega)$ wieder ein Hilbert-Raum ist.

Satz 26. *Auf* $\mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega)$ *wird durch*

$$(u,\, v) \mapsto \alpha(u,\, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$$

ein zum Standard-Skalarprodukt äquivalentes Skalarprodukt definiert.

Beweis. Die einzige nichttriviale Aussage ist $\alpha(u,\, u) \geq c\|u\|^2_{1,p,\Omega}$, d.h. die Koerzitivität der Bilinearform α. Diese folgt aber aus der verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung, siehe Satz 21. $\square$

Definition 27. *Eine Funktion $u \in \mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega)$ heißt schwache Lösung zu* $(\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}\text{-}\mathsf{N}_{\mathrm{inh}})$ *mit zulässigen Daten $(f,\, h)$, falls*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \langle f,\, v\rangle_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*,\mathsf{H}^1(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} vh \,\mathrm{d}\sigma \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega). \tag{3.10}$$

gilt.

Satz 28. *Das Neumann-Problems* $(\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}\text{-}\mathsf{D}_{\mathrm{hom}})$ *besitzt für gegebene zulässige Daten $(f,\, h)$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega)$ mit*

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \le C\big(\|f\|_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*} + \|h\|_{2,\partial\Omega}\big).$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit folgt wieder aus dem Satz von Lax-Milgram. Mit $u = v$ gilt

$$c\|u\|^2_{1,2,\Omega} \le \alpha(u,\, u) \le \|f\|_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*}\|u\|_{1,2,\Omega} + C\|h\|_{2,\partial\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega},$$

und dies liefert die Stetigkeitsabschätzung. □

Bemerkung.

1. *Die Bedingung $h = \mathsf{H}^0(\partial\Omega)$ ist nicht optimal: Nach den Spursätzen – siehe Satz 18 und die nachstehende Bemerkung – kann auch $h \in \mathsf{L}^q(\partial\Omega)$ mit $q \ge p_\#{}'$ zugelassen werden.*

2. *Der homogene Fall entspricht $h = 0$. In diesem Fall unterscheiden sich die obige schwache Formulierung von von der schwachen Formulierung für* $(\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}\text{-}\mathsf{D}_{\mathrm{hom}})$ *nur in der Wahl des Ansatzraumes für die Testfunktion v: Wir verwenden $\mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega)$ für homogene Neumann-Daten, aber $\mathsf{H}^1_0(\Omega)$ für homogene Dirichlet-Daten.*

3. *Das Neumann-Problem kann in natürlicher Weise als Operatorgleichung im Raum $\mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega)^*$ interpretiert werden (analog zu den entsprechenden Bemerkungen im Dirichlet-Fall).*

4. *Im Existenzbeweis ist nicht eingegangen, dass f und h durch* (3.9) *gekoppelt sind, und in der Tat gibt es auch für beliebige $(f,\, h)$ ein u, so dass* (3.10) *gilt. Der entscheidende Punkt ist, dass ohne* (3.9) *die schwache Formulierung* (3.10) *ein anderes Problem kodiert. Um dies zu sehen wollen wir wieder annehmen, dass $f \in \mathsf{C}^0(\Omega)$ und dass die schwache Lösung u regulär ist, d.h. dass auch $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}^0\big(\bar{\Omega}\big)$ gilt. Für eine gegebene Testfunktion $v \in \mathsf{C}^2\big(\bar{\Omega}\big)$ sei*

$$\tilde{v} := v - \tfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \,\mathrm{d}x \in \mathsf{H}^1_\emptyset(\Omega).$$

Wir testen nun (3.10) *mit $\tilde{v}$ (mit v dürfen wir nicht testen, da v i.A. nicht mittelwertfrei ist), und setzen dann die Definition von $\tilde{v}$ ein. Dies ergibt*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} vh \,\mathrm{d}\sigma - \left(\tfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h \,\mathrm{d}\sigma\right),$$

und partielle Integration liefert (nach Umordnen der Terme)

$$\int_\Omega \eta v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\Delta u + f)v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (h - \nu\nabla u)v \,\mathrm{d}\sigma,$$

wobei die Konstante η durch

$$\eta := \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega f\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\,\mathrm{d}\sigma\right)$$

gegeben ist. Da v eine beliebige Testfunktion war, liefert der Hautsatz der Variationsrechnung nun $\Delta u + f = \eta$ fast überall, was nur für $\eta = 0$ mit $(\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}})$ übereinstimmt.

3.2.2 Regularitätsheorie

Wir sagen, dass $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ schwache Lösung der Differentialgleichung $-\Delta u = f$ auf Ω mit rechter Seite $f \in \mathsf{H}^0(\Omega)$ ist, falls

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1_0(\Omega).$$

Beachte, dass wir hier keine Aussagen über die Regularität von $\partial\Omega$ und das Randverhalten von u machen. Insbesondere werden unsere Betrachtungen sowohl Dirichlet- als auch Neumann-Randbedingungen abdecken.

Bemerkung. *Als Vorbereitung wollen wir heuristisch ableiten, dass $\Delta u \in \mathsf{L}^2$ in der Tat schon $D^2u \in \mathsf{H}^2$ impliziert, wobei D^2u eine Abkürzung für die Hessische Matrix ist, d.h. es gilt*

$$\big(D^2u\big)(x) = \mathrm{Hess}\,u(x) = \Big(\partial_i\partial_j u(x)\Big)_{i,j=1\ldots d}.$$

Sei dazu u eine klassische Lösung des Differentialgleichung $-\Delta u = f$ auf ganz $\mathbb{R}^d$, wobei wir außerdem annehmen, dass sowohl f als auch u sowie alle alle partiellen Ableitungen von u für $|x| \to \infty$ hinreichend schnell abklingen mögen. Mit partieller Integration ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u)^2\,\mathrm{d}x &= \sum_{i,j=1\ldots d} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\partial_i u)(\partial_j\partial_j u)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{i,j=1\ldots d} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\partial_i\partial_j u)(\partial_j u)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i,j=1\ldots d} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_i\partial_j u)(\partial_i\partial_j u)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \big|D^2(u)\big|^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

wobei $|D^2(u)|$ die euklidische Norm der Matrix $D^2u(x)$ ist. Insbesondere haben wir – mit Hilfe der vereinfachende Annahmen – die Identität

$$\|D^2u\|_{2,\mathbb{R}^d} = \|\mathrm{spur}D^2u\|_{2,\mathbb{R}^d}$$

gezeigt.

Um Regularitätsaussagen zu beweisen, betrachten wir die finiten Differenzenoperatoren

$$\big(D^h_k u\big)(x) = \frac{\tau_{he_k}u - u}{h} = \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h},$$

wobei $h \in \mathbb{R}$ und e_k den k-ten Einheitsvektor aus dem $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Beachte, dass für gegebenes $\Theta \subset\subset \Omega$ und $u \in \mathsf{H}^0(\Omega)$ die Funktion $D_k^h u \in \mathsf{H}^0(\Theta)$ wohldefiniert ist, sofern $|h| \leq \operatorname{dist}(\Theta, \partial\Omega)$. Man zeigt nun leicht, dass für $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ sogar $D_k^h u \in \mathsf{H}^1(\Theta)$ mit $\partial_j\big(D_k^h u\big) = D_k^h \partial_j u$ gilt, wobei

$$\int_\Omega u D_k^{+h} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v D_k^{-h} u \,\mathrm{d}x$$

für alle Testfunktionen v mit kompakten Träger in Θ. Außerdem gilt (siehe Satz 8)

$$u \in \mathsf{H}^1(\Omega) \text{ mit } \partial_k u = v_k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k = 1...d \;\; \forall\, \Theta \subset\subset \Omega \;:\; \|D_k^h u - v_k\|_{2,\Theta} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Satz 29 (Innere Regularität). *Seien $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ und $f \in \mathsf{H}^0(\Omega)$ gegeben so dass $-\Delta u = f$ im schwachen Sinne und sei $\Theta \subset\subset \Omega$ fixiert. Dann gilt $u \in \mathsf{H}^2(\Theta)$ mit*

$$\|u\|_{2,2,\Theta} \leq C\Big(\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{0,2,\Omega}\Big)\,,$$

wobei die Konstante C von Θ, aber nicht von u abhängt.

Beweis. Sei ζ ein glatte Indikatorfunktion für Θ, d.h. $\zeta \in \mathsf{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \zeta \leq 1$ und $u|_\Theta \equiv 1$. Sei außerdem Ξ ein Zwischengebiet mit

$$\Theta \subset\subset \Xi \subset\subset \Omega, \qquad \operatorname{supp}\zeta \subset \Xi.$$

Satz 8 liefert $D_k^h u \in \mathsf{H}^1(\Xi)$ und

$$\|D_k^{-h} D_k^h u\|_{0,2,\Xi} \leq C\|\partial_k D_k^h u\|_{0,2,\Xi}, \qquad \|D_k^h u\|_{0,2,\Xi} \leq C\|\partial_k u\|_{0,2,\Xi},$$

für alle hinreichend kleinen h.

Wir testen nun die Differentialgleichung mit $v = -D_k^{-h}\zeta^2 D_k^h u$, wobei h hinreichend klein ist, so dass v kompakten Träger in Ω hat. Dies liefert

$$\begin{aligned}
\|f\|_{2,\Omega}\|v\|_{2,\Omega} &\geq \int_\Omega f\,\big(-D_k^{-h}\zeta^2 D_k^h u\big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\big(-D_k^{-h}\zeta^2 D_k^h u\big)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_\Omega \Big(\nabla D_k^h u\Big) \cdot \Big(\nabla\big(\zeta^2 D_k^h u\big)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \zeta^2 \left|\nabla D_k^h u\right|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\zeta \nabla D_k^h u\Big) \cdot \Big(2 D_k^h u \nabla\zeta\Big)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_\Omega \zeta^2 \left|\nabla D_k^h u\right|^2 \,\mathrm{d}x - \|\zeta\nabla D_k^h u\|_{0,2,\Omega}\|2D_k^h u\nabla\zeta\|_{0,2,\Omega},
\end{aligned}$$

und mit $\|2D_k^h u \nabla\zeta\|_{0,2,\Omega} \leq C\|\partial_k u\|_{0,2,\Xi} \leq C\|u\|_{1,2,\Xi}$ auch

$$\|\zeta\nabla D_k^h u\|_{0,2,\Omega}^2 \leq C\|u\|_{1,2,\Xi}\|\zeta\nabla D_k^h u\|_{0,2,\Omega} + \|f\|_{0,2,\Omega}\|v\|_{0,2,\Omega}.$$

Desweiteren gilt

$$-v = \zeta^2 D_k^{-h} D_k^h u + \big(\tau_{-he_k} D_k^{-h}\zeta^2\big) D_k^h u,$$

und damit auch

$$\|v\|_{0,2,\Omega} \leq C\big(\|\zeta\nabla D_k^h\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Xi}\big).$$

Wir können nun beide Abschätzungen kombinieren und mit $m = \|\zeta\nabla D_k^h\|_{0,2,\Omega}$ finden wir

$$m^2 \le C\Big((a+b)m + ab\Big),$$

wobei $a = \|f\|_{0,2,\Omega}$, $b = \|u\|_{1,2,\Xi}$. Für jedes ε gilt nun

$$m^2 \le C\Big(\frac{1}{2\varepsilon}(a+b)^2 + \frac{\varepsilon}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}(a+b)^2\Big),$$

und für hinreichend kleines ε folgt hieraus

$$\|D_k^h\nabla u\|_{0,2,\Theta} = \|\nabla D_k^h u\|_{0,2,\Theta} \le m \le C(a+b).$$

Da diese Abschätzung für alle k und alle hinreichend kleinen h gilt, schliessen wir (mit Satz 8), dass u alle zweiten partiellen Ableitungen in Θ besitzt, d.h. es gilt $u \in \mathsf{H}^2(\Theta)$ mit

$$\|u\|_{2,2,\Theta} \le C(\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{1,2,\Xi}).$$

Sei nun η eine glatte Indikatorfunktion von Ξ mit kompakten Träger in Ω. Durch Testen der Differentialgleichung mit $v = \eta^2 u$ finden wir

$$\begin{aligned}\|\eta\nabla u\|_{0,2,\Omega}^2 &\le \int_\Omega \nabla u \cdot \Big(\eta^2\nabla u\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f\eta^2 u + \nabla u \cdot \Big(2u\eta\nabla\eta\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\le \|f\|_{0,2,\Omega}\|u\|_{0,2,\Omega} + \|\eta\nabla u\|_{0,2,\Xi}\|u\|_{0,2,\Omega}.\end{aligned}$$

and analog zu oben schließen wir

$$\|\nabla u\|_{0,2,\Xi} \le \|\eta\nabla u\|_{0,2,\Omega} \le C(\|f\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{0,2,\Omega}).$$

In Kombination mit der Abschätzung für $\|u\|_{2,2,\Theta}$ folgt nun die Behauptung.

□

Bemerkung.

1. *Da $\Theta \subset\subset \Omega$ beliebig gewählt werden kann, schreibt man auch*

$$u \in \mathsf{H}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,,$$

wobei der Raum wir für Eigenschaften des Raumes $\mathsf{H}^2_{\mathrm{loc}}$ auf die Literatur verweisen.

2. *Für $f \in \mathsf{H}^m(\Omega)$ gilt $u \in \mathsf{H}^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit*

$$\|u\|_{m+2,2,\Theta} \le C\Big(\|f\|_{m,2,\Omega} + \|u\|_{0,2,\Omega}\Big)$$

für jedes $\Theta \subset\subset \Omega$, wobei C von Θ abhängen darf bzw. wird. Dies kann mit vollständiger Induktion über m bewiesen werden: Der Induktionsanfang ist gerade Satz 29; der Induktionsschritt beruht auf der Tatsache, dass $-\Delta u = f$ für reguläre f auch $-\Delta\partial_k u = \partial_k f$ impliziert.

3. *Satz 29 und seine Verallgemeinerungen gelten (mit im Wesentlichen analogen Beweisen) auch für stark elliptische Differentialoperatoren (sofern die Koeffizienten-Funktionen hinreichend regulär sind).*

4. *Für hinreichend gute Gebiete kann die Regularität auch bis zum Rand ausgedehnt werden. Zum Beispiel, ist Ω ein C^2-Gebiet, so gilt $\Delta u \in \mathsf{H}^0(\Omega) \implies u \in \mathsf{H}^2(\Omega)$ mit*

$$\|u\|_{2,2,\Omega} \leq C\Big(\|\Delta u\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{0,2,\Omega}\Big).$$

   Der Beweis ist aber technisch aufwändiger.

5. *Die Regularitätstheorie elliptischer Differentialoperatoren ist ein klassisches Gebiet der Reinen Analysis und mittlerweile sehr weit entwickelt. Insbesondere gibt es einen umfangreichen Katalog von Bedingungen für $u \in \mathsf{C}^{m,\lambda}\big(\bar{\Omega}\big)$ und $u \in \mathsf{W}^{k,p}(\Omega)$.*

3.2.3 Weitere Elemente der Theorie

Maximum- und Vergleichsprinzipien Sei wieder

$$\mathcal{K}_{[0,\infty]} := \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ u(x) \geq 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega.\Big\}$$

Satz 30. *Für $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ gelte*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \leq 0 \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathcal{K}_{[0,\infty]}.$$

Dann gilt nimmt u sei Supremum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d.h. es gilt $\sup u \leq u_{\partial\Omega}$.

Beweis. Sei $G \in \mathsf{C}^1(\Omega)$ gegeben mit $G(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $0 < G'(t) \leq C < \infty$, und sei $H(t) = \int_0^t \sqrt{G's}\,\mathrm{d}s$. Wie setzen nun $D = \sup u|_{\partial\Omega}$ und können $D < \infty$ annehmen (für $D = \infty$ ist nichts zu zeigen). Nach Konstruktion und der Kettenregel für schwache Ableitungen gilt $G(u - D),\ H(u - D) \in \mathsf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathcal{K}_{[0,\infty]}$ mit

$$\nabla(G(u - D)) = G'(u - D)\nabla u, \qquad \nabla(H(u - D)) = H'(u - D)\nabla u.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$0 \geq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla G(u - D)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega G'(u - D)\,|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla H(u - D)|^2 \,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Daraus folgt $\nabla H(u - D) = 0$, und die Poincare-Ungleichung (für $H(u - D) \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$) liefert $H(u - D) = 0$, d.h. es gilt $u \leq D$. □

Satz 31 (Schwaches Maximum-Prinzip)**.** *Sei $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ schwache Lösung zu $(\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}\text{-}\mathsf{D}_{\mathrm{inh}})$ mit rechter Seite $f \in \mathsf{H}^0(\Omega)$ und Randdatum g. Dann gilt*

$$f \leq 0 \text{ and } g \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u \leq 0,$$

sowie eine analoge Implikation mit "$\geq$" statt "$\leq$".

Beweis. Satz 30. □

Bemerkung.

1. *Gilt auch für rechte Seiten aus* $f \in \mathsf{H}^1(\Omega)^*$. *Dabei heißt ein Funktional* $f \in \mathsf{H}^1(\Omega)^*$ *nicht-positiv (wir schreiben* $f \le 0$*) falls* $\langle f, u\rangle_{\mathsf{H}^1(\Omega)^*, \mathsf{H}^1(\Omega)} \le 0$ *für alle* $v \in \mathsf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathcal{K}_{[0,\infty]}$.
2. *Da das Poisson-Problem linear ist, folgen aus dem Maximum-Prinzip auch* Vergleichsprinzipien.
3. *Eine Funktion* $\underline{u}$ *heißt (schwache)* Unterlösung *zu* ($\mathsf{P}_{\mathsf{Pois}}$-$\mathsf{D}_{\mathrm{inh}}$)*, falls* $-\Delta u \le f$ *(im Sinne von Funktionalen) und* $u \le g$ *(im Sinne von fast überall auf* $\partial\Omega$*) gilt.* Oberlösungen $\overline{u}$ *werden analog eingeführt.*
4. *Sei* $\underline{u}$ *Unterlösung,* u *Lösung, und* $\overline{u}$ *Oberlösung (alles im schwachen Sinne), so gilt stets* $\underline{u} \le u \le \overline{u}$.

Bemerkung. *Sei* $u \in \mathsf{H}^1(\Omega)$ *eine (schwach) harmonische Funktion, d.h.* u *ist schwache Lösung der Differentialgleichung* $\Delta u = 0$. *Dann gilt*

$$\inf u_{\partial\Omega} \le u \le \sup u_{\partial\Omega},$$

d.h. u *nimmt sein Infimum und sein Supremum auf* $\partial\Omega$ *an.*

Beweis. Satz 30. □

Eigenwertprobleme

Satz 32. *Es existiert eine positive, monoton wachsende Folge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und eine Folge* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{H}^1_0(\Omega)$ *so dass:*

1. *Für jedes* n *ist* e_n *Eigenfunktion zum* Δ*-Operator mit Eigenwert* λ_n *ist, d.h. es gilt*

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \lambda_n \int_\Omega e_n v_n \,\mathrm{d}x \qquad \forall \quad v \in \mathsf{H}^1_0(\Omega),$$

bzw.

$$-\Delta e_n = \lambda B e_n,$$

wobei B *die natürliche Einbettung* $\mathsf{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{H}^0(\Omega) \hookrightarrow \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ *bezeichnet.*

2. *Es gilt*

$$\int_\Omega e_n e_m \,\mathrm{d}x = \delta^m_n, \qquad \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m \,\mathrm{d}x = \lambda_n \delta^m_n,$$

für alle n, m.

3. *Für jedes* $n \ge 1$ *gilt*

$$\lambda_n = min\left\{ \frac{\|\nabla u\|^2_{\mathsf{L}^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{\mathsf{L}^2(\Omega)}} \ : \langle u, e_k\rangle_{\mathsf{L}^2(\Omega)} = 0 \text{ für alle } k = 1...n-1 \right\},$$

wobei $e_0 = 0$.

Beweis. Siehe Kapitel 2 □

Bemerkung. *Die Folge* $(e_n)_n$ *ist vollständiges ON-system in* $\mathsf{L}^2(\Omega)$. *Für viele Gebiete (z.Bsp. Kugeln) sind diese bekannt.*