



Prof. Dr. Michael Herrmann  
Technische Universität Braunschweig  
Institut *Computational Mathematics*  
[michael.herrmann@tu-braunschweig.de](mailto:michael.herrmann@tu-braunschweig.de)

*Skript zur Vorlesung*  
***Dynamische Systeme***  
*im Wintersemester 2018/19*

© Michael Herrmann

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 3.0 DE**.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>



Wesentliche Teile dieses Skriptes sind von 2012 bis 2016 an der *Universität des Saarlandes* und der *Westfälischen Wilhelms-Universität Münster* entstanden.

Bei der Ausarbeitung hat der Autor regelmäßig die folgenden Werke konsultiert:

- [Chi06] CHICONE, Carmen: *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 2006
- [Hol96] HOLMGREN, Richard: *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer, 1996
- [KH97] KATOK, Anatole ; HASSELBLATT, Boris: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1997
- [Ver96] VERHULST, Ferdinand: *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1996
- [Wal00] WALTER, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2000

Der Autor dankt allen Studierenden, Mitarbeitern und Kollegen, die durch Hinweise und kritische Kommentare zur Verbesserung des Skriptes beigetragen haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Iterierte Abbildungen</b>	<b>5</b>
1.1	Einführung . . . . .	5
1.1.1	Beispiele und Grundbegriffe . . . . .	5
1.1.2	Stabilität von Fixpunkten . . . . .	8
1.1.3	Bifurkationen . . . . .	11
1.2	Satz von Sarkovski . . . . .	14
1.3	Einführung in die Chaos-Theorie . . . . .	17
1.3.1	Über Cantor-Mengen . . . . .	18
1.3.2	Invariante Mengen der logistischen Abbildung . . . . .	21
1.3.3	Chaotische Dynamik . . . . .	23
1.3.4	Über Topologische Konjugiertheit . . . . .	24
1.3.5	Über symbolische Dynamik . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>31</b>
2.1	Existenz von Lösungen . . . . .	33
2.2	Vergleichsprinzipien für skalare GDgl . . . . .	34
2.3	Stetige Abhängigkeit . . . . .	37
2.4	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	40
2.4.1	Homogene Gleichungen . . . . .	40
2.4.2	Inhomogene Gleichungen . . . . .	43
2.4.3	Matrixexponential und autonome Gleichungen . . . . .	45
2.4.4	Klassifikation autonomer Gleichungen in 2D . . . . .	49
2.4.5	Stabilität der trivialen Lösung . . . . .	52
2.4.6	Floquet-Theorie . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Dynamik autonomer Differentialgleichungen</b>	<b>61</b>
3.1	Orbits und Flüsse . . . . .	64
3.2	Das Poincaré-Bendixon-Theorem . . . . .	70
3.3	Stabilität von stationären Punkten . . . . .	73
3.4	Exkurs über invariante Mannigfaltigkeiten . . . . .	78
3.4.1	Beispiel 1 . . . . .	81
3.4.2	Beispiel 2 . . . . .	83
3.5	Der nichtlineare Oszillator und verwandte Gleichungen in 2D . . . . .	84
3.5.1	Beispiel A . . . . .	85
3.5.2	Beispiel B . . . . .	86
3.5.3	Beispiel C . . . . .	87
3.6	Bifurkationen bei Differentialgleichungen . . . . .	87
3.6.1	Beispiele mit hyperbolischen stationären Punkten in 1D . . . . .	88
3.6.2	Beispiele mit hyperbolischen stationären Punkten in 2D . . . . .	89
3.6.3	Beispiele mit nichthyperbolischen stationären Punkten . . . . .	91



# Kapitel 1

## Iterierte Abbildungen

In diesem Kapitel untersuchen wir die *diskrete Dynamik*, die durch Iteration einer Abbildung

$$f : \Omega \rightarrow \Omega$$

entsteht, wobei  $\Omega$  zunächst eine beliebige Menge eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist.<sup>1</sup>

Die *dynamische Sichtweise* auf eine solche Abbildung  $f$  ist, dass sukzessive Iterationen von  $f$  via

$$x, \quad f(x), \quad f(f(x)), \quad f(f(f(x))), \quad \dots$$

eine Evolution mit *diskreter Zeit* und Startwert  $x$  beschreibt. Um diesen Zusammenhang deutlich zu machen, bezeichnen wir den Startwert üblicherweise mit  $x_0$  und schreiben

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad x_4 = f(x_3), \quad \dots \quad (1.1)$$

Die Variable  $x$  kann nun als zeitabhängige Größe betrachtet werden, deren Wert aber nur zu gewissen diskreten Werten der Zeit  $t$  bekannt ist. Das heißt, wir können (1.1) als (abstrakte) Realisierung eines dynamischen Prozesses mit  $x_i = x|_{t=t_i}$  und  $t_i = i\Delta t$  betrachten (der Skalierungsparameter  $\Delta t > 0$  beschreibt die Einheitszeit und kann im Prinzip beliebig gewählt werden).

## 1.1 Einführung

### 1.1.1 Beispiele und Grundbegriffe

**Beispiel.**

1. Viele physikalische Prozesse können durch einfache Wachstums- bzw. Zerfallsgleichungen modelliert werden: Ist  $x_i \geq 0$  die Menge eines Stoffes oder einer

---

<sup>1</sup>Die *Metrik*  $d$  auf der Menge  $X$  ist eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $d(x, \tilde{x}) = d(\tilde{x}, x) \geq 0$  für alle  $x, \tilde{x} \in X$  wobei  $d(x, \tilde{x}) = 0$  dann und nur dann gilt, wenn  $x = \tilde{x}$ .
2. Für alle  $x, \tilde{x}, \hat{x} \in X$  gilt die *Dreiecksungleichung*  $d(x, \hat{x}) \leq d(x, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, \hat{x})$ .

Substanz, die sich zur Zeit  $t_i - i\Delta t$  in einem betrachteten System befindet, kann man oftmals die Dynamik durch das Gesetz

$$x_{i+1} = ax_i$$

beschreiben, wobei  $a$  eine positive Konstante ist. Durch Induktion ergibt sich dann

$$x_1 = ax_0, \quad x_2 = ax_1 = a^2x_0, \quad x_3 = ax_2 = a^3x_0, \quad \dots, \quad x_i = a^ix_0$$

bzw.

$$x_i = \exp(i \ln a)x_0 = \exp(\lambda t_i)x_0, \quad \lambda = \frac{\ln a}{\Delta t},$$

d.h. der Stoffmenge ändert sich exponentiell mit der Zeit, wobei  $\lambda$  entweder die Zerfallsrate (für  $\lambda < 0$  bzw.  $0 < a < 1$ ) oder die Wachstumsrate (für  $\lambda > 0$  bzw.  $a > 1$ ) genannt wird.

2. Wir betrachten nun eine Kaninchenzucht und bezeichnen mit  $n_i$  die Anzahl der Tiere im Monat  $i$ . Ein sehr einfaches Evolutionsmodell besagt, dass jedes Kaninchen nach einem Monat geschlechtsreif ist und dann im Schnitt einen Nachkommen pro Monat zeugt oder gebärt. Dieser Ansatz führt auf die Fibonacci-Rekursion<sup>2</sup>

$$n_{i+2} = n_{i+1} + n_i$$

und kann, im obigen Sinne, wie folgt als diskrete Dynamik geschrieben werden: Wir setzen  $x_i = (n_{i+1}, n_i)$ ,  $\Omega = \mathbb{N}^2$  und

$$f(n_{i+1}, n_i) = (n_i, n_i + n_{i+1}).$$

3. Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine strikt monotone  $C^1$ -Abbildung mit (eindeutiger) Nullstelle  $x_*$ . Das Newton-Verfahren<sup>3</sup> zur Bestimmung von Nullstellen von  $g$  erzeugt eine diskrete Dynamik via

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Eine typische Frage ist nun, für welche Startwerte  $x_0$  die Folge  $(x_i)_{i \geq 0}$  gegen  $x_*$  konvergiert.

4. Das explizite Euler-Verfahren<sup>4</sup> mit Schrittweite  $h = \Delta t > 0$  zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.2}$$

erzeugt eine diskrete Dynamik via

$$f(x) = x + hg(x).$$

Eine wesentliche Frage ist nun, ob die diskrete Dynamik zumindest für  $0 < h \ll 1$  dieselben qualitativen Eigenschaften wie (1.2) aufweist. Das implizite Euler-Verfahren erzeugt übrigens eine diskrete Dynamik mit

$$f = (\text{id} - hg)^{-1},$$

sofern die rechte Seite im Sinne inverser Funktionen existiert.

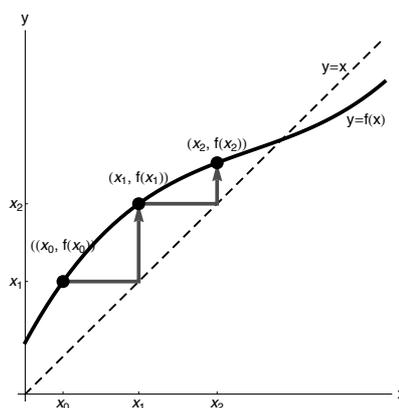
<sup>2</sup>Leonardo da Pisa (1170–1240), genannt Fibonacci, Mathematiker aus Pisa

<sup>3</sup>Isaac Newton (1643–1727), englischer Naturforscher.

<sup>4</sup>Leonard Euler (1707–1783), Schweizer Mathematiker und Physiker.

5. Die berühmten Bilder von Mandelbrot<sup>5</sup> und Julia<sup>6</sup> Mengen beruhen auf  $\Omega = \mathbb{C}$  und  $f(x) = x^2 - c$ , wobei  $c \in \mathbb{C}$  ein Parameter ist.

**Bemerkung** (Graphische Darstellung in 1D). In vielen Anwendungen und Beispielen ist  $\Omega$  ein Intervall. In diesem Fall schreiben wir auch  $I$  statt  $\Omega$ . Außerdem kann die diskrete Dynamik sehr gut veranschaulicht werden, wenn wir statt  $x_i$  die Punkte  $(x_i, f(x_i))$  betrachten. Die diskrete Dynamik findet dann auf dem Graphen von  $f$  statt, siehe Abbildung 1.1.



**Abbildung 1.1:** Diskrete Dynamik in 1D auf dem Graphen von  $f$ : Um den Punkt  $(x_{i+2}, x_{i+1})$  aus  $(x_{i+1}, x_i)$  zu konstruieren, gehen wir zuerst *waagerecht* bis zur Diagonalen (Graph der Normalfunktion  $n$  mit  $n(x) = x$ ) und dann *senkrecht* bis zum Graphen von  $f$ .

Wir definieren nun einige Grundbegriffe.

**Definition 1** (Orbits). Sei  $i_0 \in \mathbb{Z}$  und  $x_{i_0} \in \Omega$  gegeben. Dann heißt die Folge

$$(x_i)_{i \geq i_0} \quad \text{mit} \quad x_{i+1} = f(x_i) \quad \text{für} \quad i \geq i_0$$

der von  $(i_0, x_{i_0})$  erzeugte (Vorwärts-)Orbit. Ist  $f$  invertierbar, so heißt

$$(x_i)_{i \leq i_0} \quad \text{mit} \quad x_{i-1} = f^{-1}(x_i) \quad \text{für} \quad i \leq i_0$$

Der Vorwärts- und Rückwärtsorbit von  $x$  werden mit  $O(x)$  und  $O^{-1}(x)$  bezeichnet.

**Bemerkung.**

1. In praktischen Fällen setzen wir meist  $i_0 = 0$ .
2. Der Orbit  $O(x_{i_0})$  hängt von  $x_{i_0}$ , aber nicht von der Wahl von  $i_0$  ab.

**Definition 2** (Fixpunkt). Ein Punkt  $x \in \Omega$  heißt Fixpunkt (oder Gleichgewicht, oder Ruhelage, oder stationärer Punkt) von  $f$ , falls  $f(x) = x$ . Der entsprechende Orbit von  $x$  heißt stationärer Orbit

**Notation.** Mit  $f^n$  bezeichnen wir in diesem Kapitel die  $n$ -fache Iterierte von  $f$ , d.h. es gilt

$$f^0 = \text{id}, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \quad \dots$$

Beachte, dass für  $f(x) = x^3$  damit  $f^2(x) = x^9$  und nicht  $f^2(x) = x^6$  gilt.

<sup>5</sup>Benoit B. Mandelbrot (1924–2010), französisch-US-amerikanischer Mathematiker.

<sup>6</sup>Gaston Maurice Julia (1893–1978), französischer Mathematiker.

**Definition 3** (Periodischer Punkt). *Ein Punkt  $x \in \Omega$  heißt periodischer Punkt mit Periode  $k$  (oder  $k$ -periodischer Punkt), falls  $f^k(x) = x$  gilt. Der entsprechende Orbit von  $x$  heißt  $k$ -periodischer Orbit von  $f$ . Darüber hinaus nennen wir einen Punkt  $x$  (bzw. seinen Orbit) periodisch, sofern dieser  $k$ -periodisch für ein  $k > 0$  ist.*

**Bemerkung.**

1. Jeder  $k$ -periodische Punkt ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  auch  $nk$ -periodischer Fixpunkt. Die kleinste mögliche Periode wird Primperiode genannt.
2. Die Fixpunkte von  $f$  sind genau die periodischen Punkte mit Primperiode 1.
3. Ist  $x$   $k$ -periodisch, so sind es auch alle Punkte aus dem Orbit von  $x$ .

**Definition 4** (Stabile Menge). *Sei  $p$  ein periodischer Punkt von  $f$  mit Primperiode  $k$ . Dann bezeichnet*

$$W_s(p) := \{x \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p\}$$

die stabile Menge von  $p$ . Jeder Punkt aus  $W_s(p)$  heißt auch vorwärts-asymptotisch für  $p$ .

**Lemma 5.** (Disjunktheit stabiler Mengen) *Seien  $p_1$  und  $p_2$  zwei verschiedene periodische Punkte von  $f$ . Dann gilt  $W_s(p_1) \cap W_s(p_2) = \emptyset$ .*

*Beweis.* Seien  $k_1$  und  $k_2$  mögliche Perioden von  $p_1$  und  $p_2$  und sei  $x \in W_s(p_1) \cap W_s(p_2)$ . Nach Voraussetzung gilt nun

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk_i}(x), \quad i = 1, 2,$$

und damit auch (Teilfolgenargument)

$$p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk_1 k_2}(x) = p_2.$$

Es folgt die Behauptung. □

**Bemerkung.** *Sei  $f$  invertierbar. Ein  $k$ -periodischer Punkt von  $f$  ist dann auch ein  $k$ -periodischer Punkt von  $f^{-1}$  und die instabile Menge von  $p$  ist definiert als*

$$W_u(p) := \{x \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-nk}(x) = p\},$$

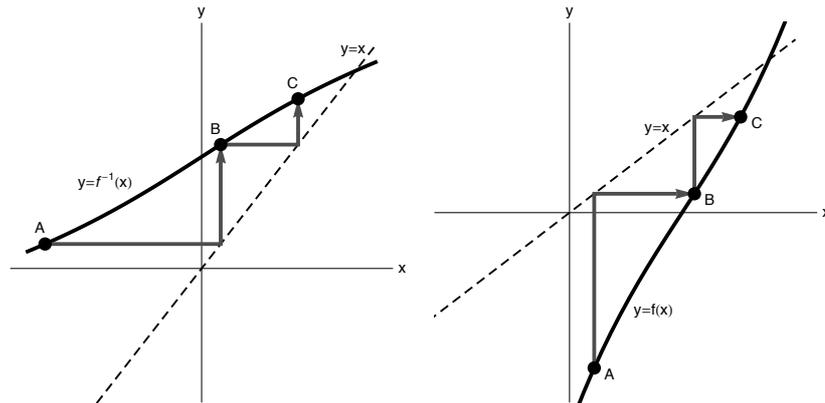
wobei  $f^{-nk}$  die  $nk$ -te Iterierte von  $f^{-1}$  bezeichnet. Insbesondere wird, wenn  $f$  durch  $f^{-1}$  ersetzt wird, aus ‘stabil’ ‘instabil’ und aus ‘instabil’ ‘stabil’. Dies reflektiert, dass der Wechsel von  $f$  zu  $f^{-1}$  als Zeitumkehr interpretiert werden kann, siehe Abbildung 1.2.

### 1.1.2 Stabilität von Fixpunkten

In diesem Abschnitt nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Zustandsraum  $\Omega$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  ist. Alle Definitionen und Resultate können aber leicht auf den Fall allgemeiner metrischer Räume verallgemeinert werden. Insbesondere bezeichnen wir mit  $|x|$  die euklidische Norm von  $x$  und mit

$$B_r(x) := \left\{ y \in \Omega : |x - y| < r \right\}$$

die offene  $\Omega$ -Kugel vom Radius  $r$  um  $x$ .



**Abbildung 1.2:** Zeitumkehr: Die Vorwärtsdynamik von  $f^{-1}$  (linkes Bild) ist äquivalent zur Rückwärtsdynamik von  $f$  (rechtes Bild).

**Definition 6** (Stabilität). Ein Fixpunkt  $p$  von  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  heißt

1. stabil (oder Ljapunow<sup>7</sup>-stabil), falls es ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit der folgenden Eigenschaft gibt: Für jedes  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , so dass

$$x \in B_\delta(p) \quad \implies \quad f^n(x) \in B_\varepsilon(p) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2. asymptotisch stabil, falls er stabil ist und es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$x \in B_\delta(p) \quad \implies \quad f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p.$$

**Bemerkung.**

1. Durch analoge Definitionen mit  $f^k$  statt  $f$  wird Stabilität von  $k$ -periodischen Punkten eingeführt.
2. Ist  $p$  asymptotisch stabil, so ist  $p$  ein innerer Punkt von  $W_s(p)$ .

Die obigen Stabilitätsbegriffe sind *lokal* in dem Sinne, dass  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $p$  gewisse gute Eigenschaften haben muss. Ist  $f$  differenzierbar, so ist es daher eine gute Strategie, die Linearisierung von  $f$  in  $p$  zu studieren. Genauer gesagt, lokal um  $p$  gilt

$$f(p + y) = f(p) + f'(p)y + O(|y|^2) \approx p + f'(p)y$$

und die lineare Funktion  $y \mapsto f'(p)y$  kodiert viele Informationen über den Fixpunkt  $p$ . Wir wollen dies nun im eindimensionalen Fall genauer untersuchen.

**Satz 7** (Stabilität in 1D). Sei  $f : I \rightarrow I$  mit  $I \subset \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und sei  $p$  innerer Punkt von  $I$  und Fixpunkt von  $f$ . Dann gilt:

1. Für  $|f'(p)| < 1$  ist  $p$  stabil. Außerdem ist  $p$  asymptotisch stabil, d.h. es gibt ein  $\delta > 0$ , so dass

$$(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_\delta(p) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p,$$

für alle  $x \in B_\delta(p)$  gilt.

<sup>7</sup>Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857–1918), russischer Mathematiker und Physiker.

2. Für  $|f'(p)| > 1$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass es für jedes  $x \in B_\delta(p)$  ein  $n = n(x)$  gibt, so dass  $f^n(x) \notin B_\delta(p)$ . Insbesondere ist  $p$  instabil.

*Beweis.* O.B.d.A. können wir  $p = 0$  annehmen, da wir andernfalls die Abbildung  $\tilde{f}(x) = f(p+x) - p$  betrachten. Nach dem Satz von Taylor gilt nun

$$\frac{f(x) - f'(0)x}{x} \xrightarrow{0 \neq x \rightarrow 0} 0.$$

Wir wählen nun  $\delta > 0$ , so dass für alle  $|x| < \delta$  der Ausdruck auf der linken Seite im Betrag kleiner als  $\frac{1}{2}|1 - |f'(0)|| > 0$  ist und betrachten von nun an nur noch Punkte  $x$  mit  $|x| \leq \delta$ . Im Fall  $|f'(0)| < 1$  gilt dann

$$0 < \lambda := \frac{1}{2}(1 + |f'(0)|) < 1$$

sowie

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f'(0)x| + |f'(0)x| \\ &\leq \left| \frac{f(x) - f'(0)x}{x} \right| |x| + |f'(0)x| \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - |f'(0)|) |x| + |f'(0)| |x| \\ &\leq \lambda |x| < \delta. \end{aligned}$$

Induktiv zeigen wir anschließend

$$|f^n(x)| \leq \lambda |f^{n-1}(x)| \leq \lambda^2 |f^{n-2}(x)| \leq \dots \leq \lambda^{n-1} |f(x)| \leq \lambda^n |x|.$$

Dies liefert sowohl die Stabilität von 0 im Sinne von Definition 6 (mit  $\varepsilon < \varepsilon_0 = \delta$  gilt  $x \in B_\varepsilon(0) \implies f^n(x) \in B_\varepsilon(0)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) als auch die asymptotische Stabilität von 0 (denn  $x \in B_\delta$  impliziert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$ ).

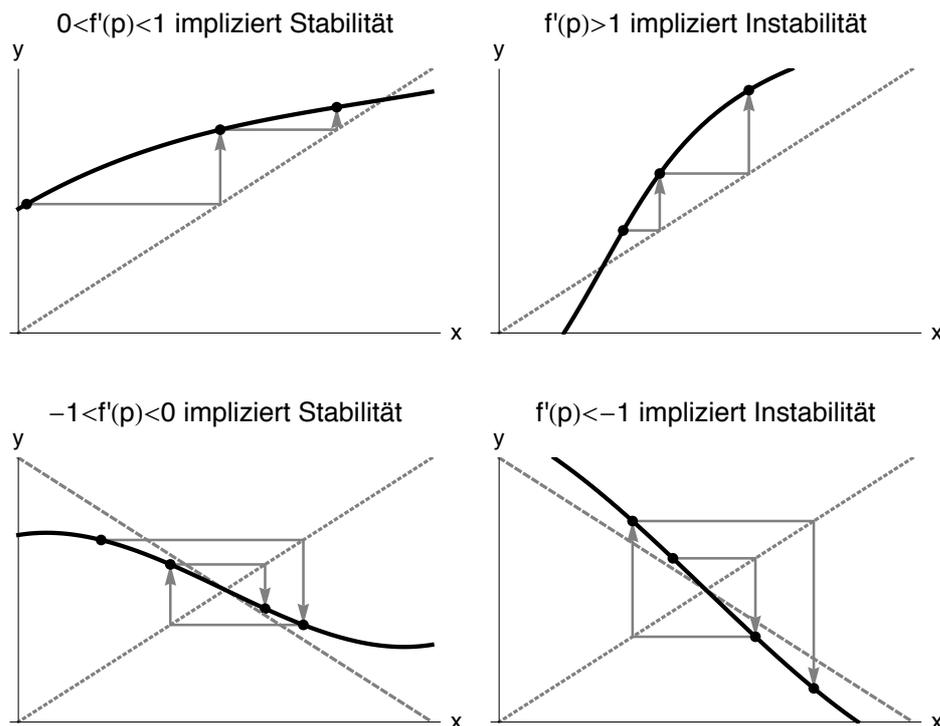
Im Fall  $|f'(0)| > 1$  gilt

$$\begin{aligned} |f(x)| &\geq |f'(0)x| - |f(x) - f'(0)x| \\ &\geq |f'(0)| |x| - \frac{1}{2}|1 - |f'(0)|| |x| \\ &= \frac{1}{2}(|f'(0)| + 1) |x| = \lambda |x|. \end{aligned}$$

und damit  $|f(x)| \geq \lambda |x| > |x|$ , weil nun  $\lambda > 1$ . Aus dieser Wachstumseigenschaft folgt unmittelbar, dass für jedes gegebene  $x \in B_\delta(0)$  die Folge  $(f^n(x))_n$  nicht ganz im Intervall  $[-\delta, \delta]$  liegen kann, d.h. es gibt mindestens ein  $N$  (das von  $x$  und  $\delta$  abhängen wird), so dass  $f^N(x) \notin B_\delta(0)$  gilt.  $\square$

### Bemerkung.

1. Für  $|f'(p)| = 1$  muss man höhere Ableitungen von  $p$  auswerten, das heißt in solchen Fixpunkten kann die Stabilität gerade nicht mit Hilfe der Linearisierung von  $f$  um  $p$  bestimmt werden.
2. Ein Fixpunkt mit  $|f'(p)| \neq 1$  heißt hyperpolisch, ein Fixpunkt mit  $|f'(p)| = 1$  heißt nicht-hyperpolisch oder neutral.
3. Fixpunkt mit  $|f'(p)| < 1$  bzw.  $|f'(p)| > 1$  sind Beispiel für Attraktoren (attractor) bzw. Repellatoren (repeller).



**Abbildung 1.3:** Generische Beispiele für hyperbolische Fixpunkte in 1D. Die gepunkteten Linien haben Anstieg  $\pm 1$ .

### 1.1.3 Bifurkationen

In praktischen Fällen hängen dynamische Systeme von gewissen Parametern ab. Eine *Bifurkation* findet bei gewissen Werten der Parameter statt und beschreibt, dass ein *qualitativer* Wechsel in der Dynamik auftritt.

In diesem Abschnitt geben wir einen ersten Einblick in die Bifurkationstheorie, indem wir die wesentlichen Bifurkationen für eindimensionale iterierten Abbildungen anhand generischer Beispiele studieren.

**Beispiel** (Saddle-Node-Bifurkation). Für  $c, x \in \mathbb{R}$  sei  $f_c(x)$  definiert durch

$$f_c(x) = \exp(x + c).$$

Durch *graphische Analysis* (bzw. *elementare Abschätzungen und Rechnungen*) verifizieren wir, dass es nur die folgenden, in *Abbildung 1.4* skizzierten drei Fälle gibt:

- $c < -1$       Es gibt genau zwei hyperbolische Fixpunkte  $p_{c,1} < 1 < p_{c,2}$  mit  $0 < f'_c(p_{c,1}) < 1 < f'_c(p_{c,2})$ . Insbesondere ist  $p_{c,1}$  stabil und  $p_{c,2}$  instabil.
- $c = -1$       Es gibt nur den neutralen Fixpunkt  $p = 1$  mit  $f'_{-1}(1) = 1$ .
- $c > -1$       Es gibt überhaupt keine Fixpunkte.

Beim Bifurkationsparameter  $c = -1$  ändert sich also das qualitative Verhalten der Dynamik. Wenn man diesen Wert mit  $c$  von links nach rechts durchläuft, kann man zu sagen, dass bei  $c = -1$  der stabile und der instabile Fixpunkt miteinander kollidieren und sich auslöschen. Läuft man umgekehrt, so scheint es, dass ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt aus dem "Nichts" erzeugt werden. Dieses Auslöschen bzw. Entstehen eines Paares aus stabilen und instabilem Fixpunkt nennt man eine Saddle-Node-Bifurkation. Beachte, dass der Fixpunkt für den Bifurkationswert  $c = -1$  neutral ist.

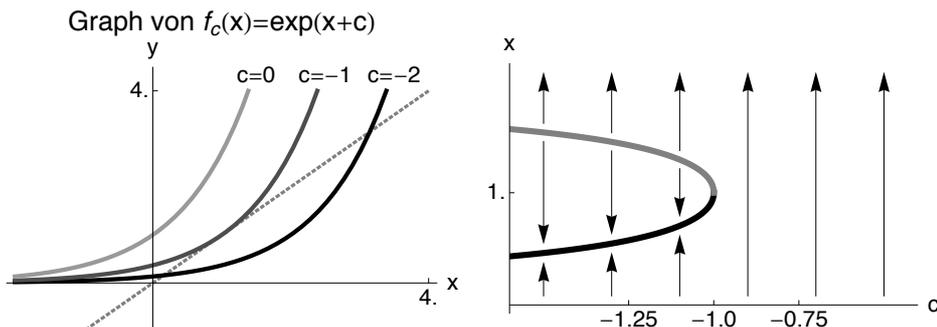


Abbildung 1.4: Beispiel für eine Saddle-Node-Bifurkation.

**Beispiel** (Pitchfork-Bifurkation). Für  $c > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  sei  $f_c(x)$  definiert durch

$$f_c(x) = \arctan(cx).$$

Wie in Abbildung 1.5 skizziert, gibt es wieder drei Fälle:

- $0 < c < 1$     Es gibt nur den stabilen Fixpunkte  $p = 0$ .
- $c = 1$         Der Fixpunkte  $p = 0$  ist neutral.
- $c > 1$         Der Fixpunkte  $p = 0$  ist instabil. Darüber hinaus gibt es nun zwei stabile Fixpunkte  $-p_c < 0 < p_c$ .

Beim Bifurkationsparameter  $c = 1$  passiert eine sogenannte Pitchfork-Bifurkation (pitchfork=Heugabel).

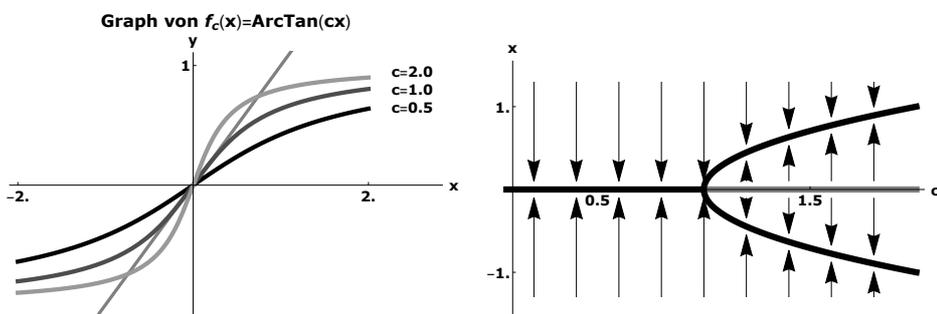


Abbildung 1.5: Beispiel für eine Pitchfork-Bifurkation.

**Beispiel** (Transkritische Bifurkation). Für  $c > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  sei  $f_c(x)$  definiert durch

$$f_c(x) = \exp(cx) - 1.$$

Wie in Abbildung 1.6 skizziert, gibt es nun eine transkritische Bifurkation:

- $0 < c < 1$     Es gibt den stabilen Fixpunkt  $p = 0$  und einen instabilen Fixpunkt  $p_c > 0$ .
- $c = 1$         Es gibt nur den neutralen Fixpunkte  $p = 0$ .
- $c > 1$         Der Fixpunkte  $p = 0$  ist nun instabil aber es gibt einen stabilen Fixpunkt  $p_c < 0$ .

Wenn wir den Parameter  $c$  von links nach rechts durchlaufen, so sehen wir, dass bei  $c = 1$  beide Fixpunkte kollidieren (bzw. die Funktion  $c \rightarrow p_c$  ihr Vorzeichen wechselt) und es dabei zu einem Stabilitätswechsel in beiden Fixpunkten kommt.

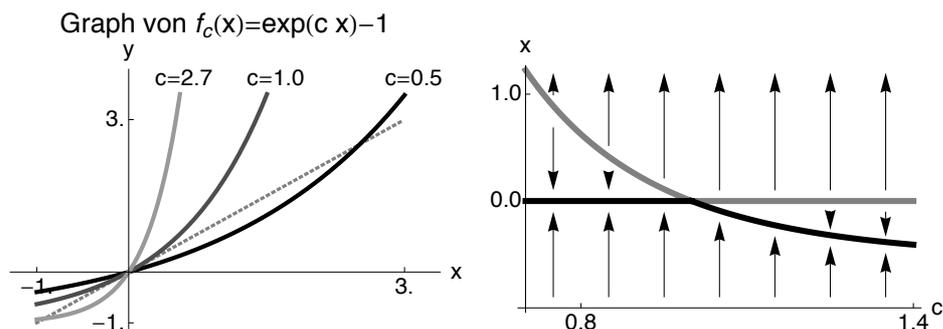


Abbildung 1.6: Beispiel für eine transkritische Bifurkation.

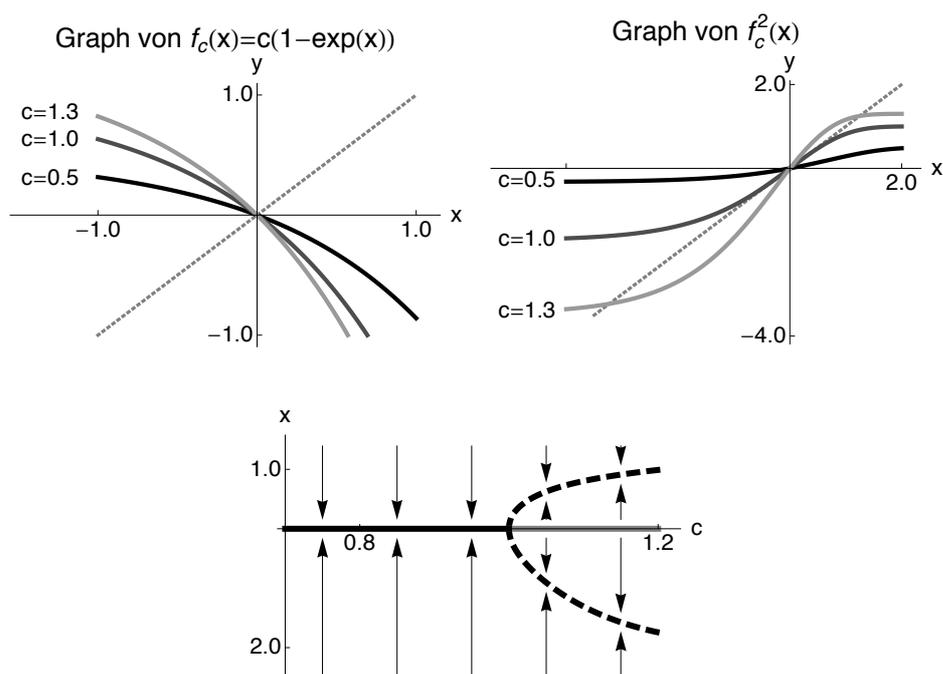


Abbildung 1.7: Beispiel für eine Periodenverdoppelungs-Bifurkation.

**Beispiel** (Periodenverdoppelung). Für  $c > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  sei  $f_c(x)$  definiert durch

$$f_c(x) = c(1 - \exp(x)).$$

Durch graphische oder analytische Methoden können wir zeigen, dass es immer nur den Fixpunkt  $p = 0$  gibt, dessen Stabilität wie folgt charakterisiert werden kann:

$$\begin{array}{ll} 0 < c < 1 & p = 0 \text{ ist stabil wegen } -1 < f'(0) < 0. \\ c = 1 & p = 0 \text{ ist neutral wegen } f'(0) = -1. \\ c > 1 & p = 0 \text{ ist instabil wegen } f'(0) < -1. \end{array}$$

Der Stabilitätswechsel von  $p = 0$  bei  $c = 1$  ist aber nicht die einzige qualitative Änderung. Dies wird deutlich, wenn wir zusätzlich den Graphen von  $f_c^2$  betrachten: Die Funktion  $f_c^2$  besitzt für  $c < 1$  nur den stabilen Fixpunkt  $p = 0$ , und deshalb wissen wir, dass  $f$  keine periodischen Orbits mit Primperiode 2 hat. Bei  $c = 1$  beobachten wir bei  $f_c^2$  jedoch eine Pitchfork-Bifurkation, d.h.  $p = 0$  wird instabil und es entstehen zwei neue stabile Fixpunkte  $p_{c,1} < 0 < p_{c,2}$ . Aus Sicht von  $f_c$  sind  $p_{c,1}$  und  $p_{c,2}$  aber keine neuen Fixpunkte sondern neue 2-periodische Punkte. Man sagt, dass bei  $c = 1$  eine Periodenverdoppelungs-Bifurkation von  $f_c$  stattfindet.

## 1.2 Satz von Sarkovski

Der Satz vom Sarkovski<sup>8</sup> ist ein sehr wichtiges und bemerkenswertes Resultat und liefert für ein-dimensionale iterierte Abbildungen hinreichende Bedingungen für die Existenz periodischer Punkte. Bevor wir diesen Satz formulieren und beweisen, stellen wir einige elementare Hilfsresultate zusammen.

**Lemma 8.** *Seien  $I, J$  zwei abgeschlossene, endliche Intervalle und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung mit  $f(I) \supseteq J$ . Dann existiert ein abgeschlossenes Teilintervall  $K \subseteq I$ , so dass  $f(K) = J$ .*

*Beweis.* Wir schreiben  $I = [a, b]$  und  $J = [c, d]$  und können o.B.d.A.  $a < b$  und  $c < d$  annehmen. Nach Voraussetzung existieren  $a_1, b_1$  in  $[a, b]$  mit  $f(a_1) = c$  und  $f(b_1) = d$ .

Im Fall  $a_1 < b_1$  definieren wir

$$a_2 := \max\{x \in [a_1, b_1] : f(x) = c\}.$$

Für jedes  $x \in [a_2, b_1]$  gilt nun  $f(x) \geq c$ , da wir anderfalls mit Hilfe des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch zur Maximalität von  $a_2$  konstruieren könnten. Wir definieren außerdem

$$b_2 := \min\{x \in [a_2, b_1] : f(x) = d\},$$

und schließen, analog zu oben, dass  $f(x) \leq d$  für alle  $x \in K := [a_2, b_2]$  gilt. Nach Konstruktion gilt also  $f(K) \subseteq J$ , und der Zwischenwertsatz garantiert  $f(K) \supseteq J$ .

Der Fall  $a_1 > b_1$  kann analog behandelt werden.  $\square$

**Lemma 9.** *Seien  $I$  ein abgeschlossenes, endliches Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung so dass*

1.  $f(I) \subseteq I$ , oder
2.  $f(I) \supseteq I$ .

*Dann besitzt  $f$  mindestens einen Fixpunkt in  $I$ .*

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

**Satz 10** (Spezialfall des Satzes von Sarkovski). *Sei  $I$  ein beliebiges Intervall und  $f : I \rightarrow I$  eine stetige Abbildung. Falls  $f$  einen periodischen Punkt mit Primperiode 3 besitzt, so besitzt  $f$  periodische Punkt zu jeder beliebigen Primperiode  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.*

1. *Normalisierung:* Nach Voraussetzung gibt es einen echten 3-periodischen Orbit in  $I$ , deren Punkte wir mit  $a < b < c$  bezeichnen können. Es gilt nun entweder
  - (a)  $b = f(a), c = f(b), a = f(c)$ , oder
  - (b)  $c = f(a), b = f(c), a = f(b)$ .

Wir werden den Beweis nur für den ersten Fall führen; der zweite Fall kann ganz analog behandelt werden. Unter dieser Voraussetzung und wegen des Zwischenwertsatzes gilt  $f([a, b]) \supseteq [b, c]$  und  $f([b, c]) \supseteq [a, c]$ .

<sup>8</sup>Olexandr Mikolajowytsch Scharkowski (geb. 1936), ukrainischer Mathematiker. Es gibt mehrere Transkriptionen seines Namens.

2.  $k = 1$  und  $k = 2$ : Wegen  $f([b, c]) \supseteq [b, c]$  hat  $f$  mindestens einen Fixpunkt in  $[b, c]$  und die Definition von  $b$  und  $c$  impliziert, dass dieser sogar in  $(b, c)$  liegt. Andererseits gilt  $f([a, b]) \supseteq [b, c]$  und nach Lemma 8 existiert ein abgeschlossenes Intervall  $K \subseteq [a, b]$  mit  $f(K) = [b, c]$ . Es gilt nun  $f^2(K) = f([b, c]) \supseteq [a, b] \supseteq K$ , und Lemma 9 impliziert, dass  $f^2$  einen Fixpunkt  $p \in K$  besitzt. Wir müssen nun zeigen, dass  $p$  wirklich Primperiode 2 hat, d.h. dass  $p$  nicht schon Fixpunkt von  $f$  ist. Dazu bemerken wir, dass  $f(p) \in [b, c]$  gilt. Würde nun  $p = f(p)$  gelten, so würde dies  $p = f(p) \in \{b\}$  implizieren (da  $K \cap f(K) \subseteq \{b\}$ ), aber dies ist ein Widerspruch zu  $f(b) = c$ . Damit ist  $p \neq f(p)$  gezeigt, d.h.  $p$  hat in der Tat Primperiode 2.
3.  $k \geq 4$ , *Teil 1*: Wir zeigen zunächst, dass es eine absteigende Folge von Intervallen

$$[b, c] = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_k$$

gibt, so dass

- (a)  $f(A_n) = A_{n-1}$  für  $n = 1, \dots, k-2$ ,
- (b)  $f^n(A_n) = [b, c]$  für  $n = 1, \dots, k-2$ ,
- (c)  $f^{k-1}(A_{k-1}) = [a, b]$ ,
- (d)  $f^k(A_k) = [b, c]$ .

Nach Definition von  $A_0$  gilt  $f(A_0) \supseteq A_0$  und deshalb, siehe Lemma 8, gibt es  $A_1 \subseteq A_0$  mit  $f(A_1) = A_0 = [b, c]$ . Für  $A_1$  gilt dann  $f(A_1) \supseteq A_1$ . Insbesondere existiert, wieder nach Lemma 8, ein Intervall  $A_2 \subseteq A_1$  mit  $f(A_2) = A_1$  und damit  $f^2(A_2) = f^1(A_1) = A_0 = [b, c]$ . Durch Iteration dieses Arguments können wir alle  $A_n$  bis einschließlich  $A_{k-2}$  konstruieren. Es gilt dann  $f^{k-1}(A_{k-2}) = f(A_0) \supseteq [a, c] \supseteq [a, b]$ , und deshalb liefert Lemma 8 (nun angewendet auf  $f^{k-1}$  statt  $f$ ) ein  $A_{k-1} \subseteq A_{k-2}$  mit  $f^{k-1}(A_{k-1}) = [a, b]$ . Da dies  $f^k(A_{k-1}) = f([a, b]) \supseteq [b, c]$  impliziert, existiert schließlich  $A_k$  mit der gewünschten Eigenschaft.

4.  $k \geq 4$ , *Teil 2*: Auf Grund von  $f^k(A_k) \supseteq A_k$  und wegen Lemma 9 hat die Abbildung  $f^k$  mindestens einen Fixpunkt  $p \in A_k$ , und  $p$  ist nach Definition ein  $k$ -periodischer Punkt von  $f$ . Wir zeigen nun, dass  $k$  die Primperiode von  $p$  ist. Dazu bemerken wir, dass nach Konstruktion

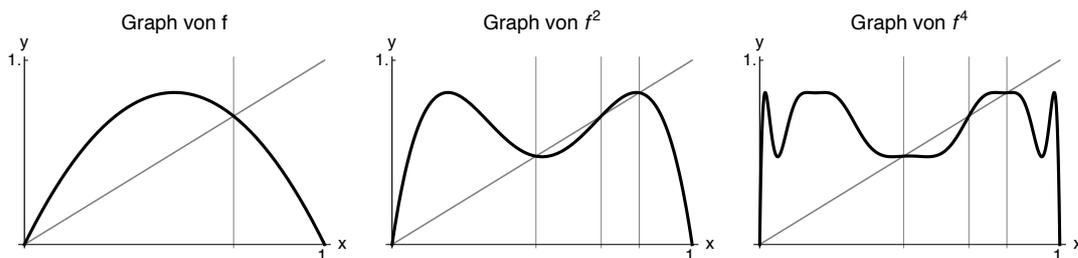
$$p, f(p), f^2(p), \dots, f^{k-2}(p) \in [b, c], \quad f^{k-1}(p) \in [a, b]$$

gilt. Die Implikation

$$f^{k-1}(p) = b \implies p = f^k(p) = f(b) = c \implies f(p) = a \notin [b, c]$$

zeigt, dass  $f^{k-1}(p) \neq b$  gelten muss. Die Menge  $\{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$  (das sind gerade die Werte des periodischen Orbits  $O(p)$ ) enthält also genau ein Element aus dem halboffenen Intervall  $[a, b)$ , aber  $k-1$  Elemente aus dem dazu disjunkten Intervall  $[b, c]$ . Hieraus folgt unmittelbar, dass es keine Periode kleiner  $k$  geben kann: Denn wäre  $\tilde{k}$  die Primperiode von  $p$ , so würde  $k = \tilde{n}\tilde{k}$  für ein  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  gelten, und die Menge  $\{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$  würde  $\tilde{n}$ -mal den Wert  $f^{k-1}(p) \in (a, b)$  annehmen.

□



**Abbildung 1.8:** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  gegeben durch  $f(x) = 3.3x(1-x)$ . Da  $f^4$  dieselben Fixpunkte wie  $f^2$  besitzt, hat  $f$  keine periodischen Orbits mit Primperiode 4. Der Satz von Sarkovski garantiert nun, dass  $f$  nur periodische Orbits mit Primperiode 1 und 2 besitzt, da nur diese in der Ordnung (1.3) kleiner als 4 sind.

Der Satz von Sarkovski ist wesentlich allgemeiner und beruht auf der folgenden Ordnung der natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned}
 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \\
 \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \succ 2^1 \succ 1.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Für zwei natürliche Zahlen  $k_1$  und  $k_2$  mit  $k_i = 2^{n_i} q_i$  (wobei  $n_1, n_2$  beliebige natürliche Zahlen und  $q_1, q_2$  ungerade sind) gilt also  $k_1 \succ k_2$  genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

1.  $q_1 > 1 = q_2$ ,
2.  $q_1 = q_2 = 1$  und  $n_1 > n_2$ ,
3.  $q_1, q_2 > 1$  und  $n_2 > n_1$ ,
4.  $q_1, q_2 > 1$  und  $n_2 = n_1$  und  $q_2 > q_1$ .

**Satz 11** (Satz von Sarkovski). *Sei  $I$  ein beliebiges Intervall und  $f : I \rightarrow I$  eine stetige Abbildung. Falls  $f$  einen periodischen Punkt mit Primperiode  $k$  besitzt, so besitzt  $f$  auch periodische Punkte zu jeder beliebigen Primperiode  $\tilde{k} \prec k$ .*

Der Beweis dieses Satzes ist technisch aufwändiger als der von Satz 10 und kann im Rahmen dieser Vorlesung nicht geführt werden. Eine mögliche Anwendung von Satz 11 ist in Abbildung 1.8 beschrieben.

## 1.3 Einführung in die Chaos-Theorie

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Chaos im Rahmen der diskreten Dynamik ein. Ein einfaches aber in diesem Zusammenhang sehr wichtiges Beispiel ist die Dynamik, die von der *logistischen Abbildung*

$$f_c(x) = cx(1-x) \quad (1.4)$$

mit Parameter  $c > 0$  erzeugt wird. Obwohl diese Funktion nur ein quadratisches Polynom ist, ist die von ihr erzeugte Dynamik für hinreichend große Werte von  $c$  ausgesprochen komplex. Zunächst bemerken wir, dass  $f_c$  immer nur zwei Fixpunkte besitzt, nämlich 0 und  $p_c = (c-1)/c$ , und dass  $f_c(1/c) = p_c$  gilt. Die verschiedenen dynamischen Regime der logistischen Abbildung können wie folgt zusammengefasst werden:

$0 < c < 1$       0 ist stabil und  $p_c < 0$  ist instabil, und man zeigt leicht (Übungsaufgabe) dass

$$W_s(0) = (p_c, 1/c), \quad W_s(p_c) = \{p_c, 1/c\}$$

und  $W_s(-\infty) = (-\infty, p_c) \cup (1/c, \infty)$ .

$c = 1$       Wegen  $p_c = 0$  tritt eine transkritische Bifurkation auf und es gilt

$$W_s(0) = [0, 1]$$

sowie  $W_s(-\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .

$1 < c < 3$       0 ist nun instabil und  $p_c$  stabil. Es gilt

$$W_s(0) = \{0, 1\}, \quad W_s(p_c) = (0, 1)$$

und  $W_s(-\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .

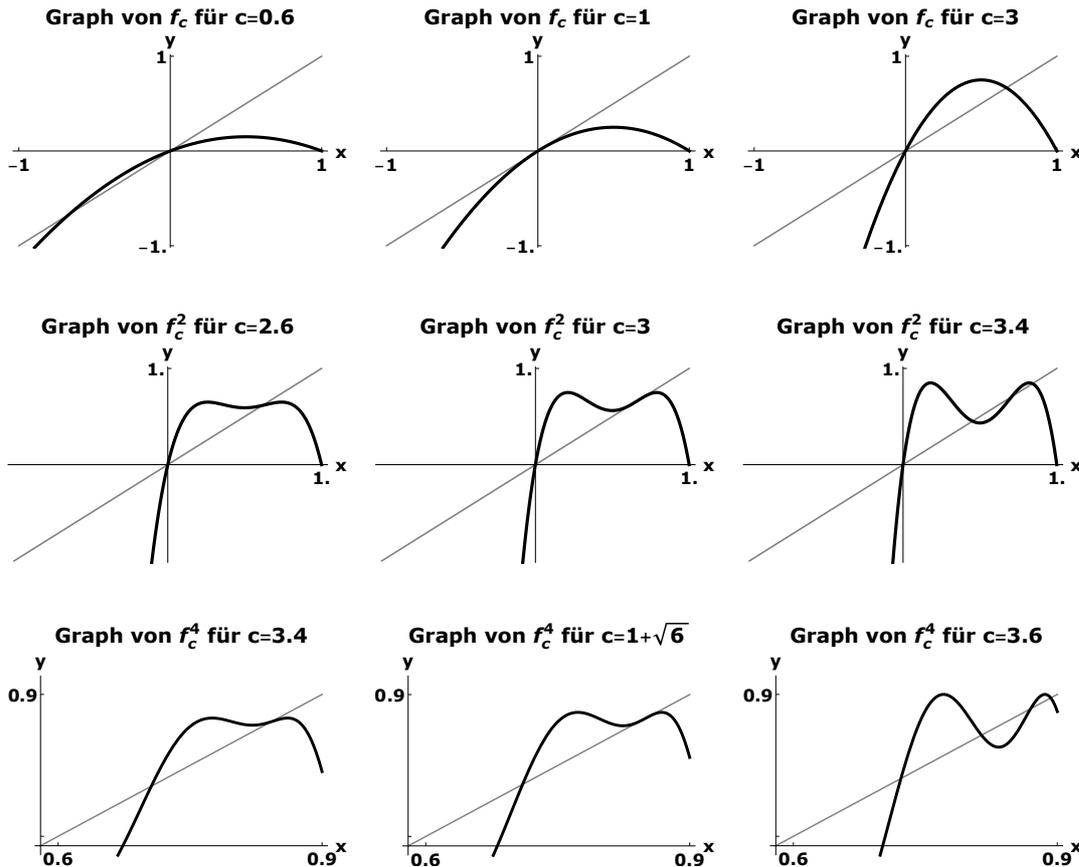
$c = 3$       Es tritt eine Periodenverdoppelung am Fixpunkt  $0 < p_c < 1$  auf.

$3 < c < 1 + \sqrt{6}$       Die beiden Fixpunkte 0 und  $p_c$  sind instabil, aber es gibt zwei stabile 2-periodische Punkte  $p_1, p_2 \in (0, 1)$ .

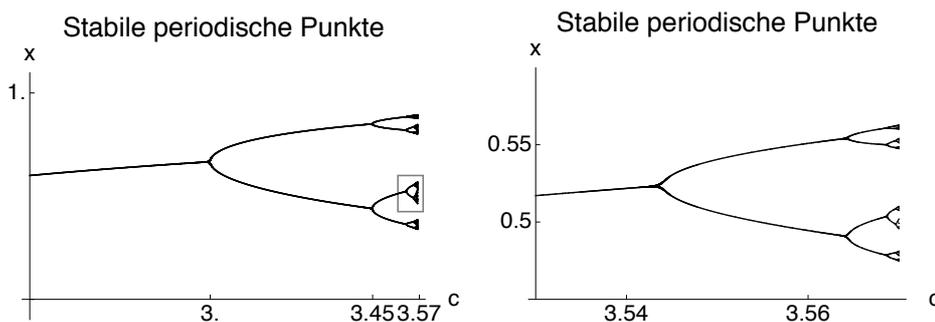
$1 + \sqrt{6} < c < 4$       Die Dynamik ist sehr kompliziert und ändert sehr schnell mit  $c$  ihr qualitatives Verhalten. Für  $c > 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$  gibt es 3-periodische Orbits und damit, nach dem Satz von Sarkowski, periodische Orbits mit beliebiger Primperiode. Außerdem gibt es eine sogenannte *Periodenverdoppelungskaskade*, siehe Abbildungen 1.9 und 1.10. Für weitere Details sei auf die Literatur, z.Bsp. HOLMGREN verwiesen.

$c = 4$       Die Dynamik ist *chaotisch* auf dem Intervall  $[0, 1]$  und dies kann relativ einfach gezeigt werden.

$4 < c$       Das Intervall  $[0, 1]$  ist nicht mehr invariant unter  $f_c$ . Es gibt aber eine  $f_c$ -invariante Cantor-Menge  $\Omega_c \subset [0, 1]$  auf der die Dynamik wieder chaotisch ist. Wir werden dies im Folgenden unter der stärkeren Voraussetzung  $c > 2 + \sqrt{5} \approx 4.24$  rigoros beweisen.



**Abbildung 1.9:** Bei  $c = 1$  beobachten wir eine transkritische Bifurkation für  $f_c$  und bei  $c = 3$  eine Periodenverdoppelung (bzw. eine Pitchfork-Bifurkation für  $f_c^2$ ). Bei  $c = 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$  beobachten wir eine Pitchfork-Bifurkation für  $f_c^4$ . Aus Sicht von  $f_c$  bedeutet dies, dass wenn  $c$  den Wert  $1 + \sqrt{6}$  von unten durchläuft, der stabile 2-periodische Orbit instabil wird und gleichzeitig ein stabiler 4-periodischer Orbit entsteht.



**Abbildung 1.10:** Periodenverdoppelungskaskade (*Feigenbaumdiagramm*) für die logistische Abbildung. Das rechte Bild ist eine Detailansicht des linken; beachte die Selbstähnlichkeit. Zwischen  $c = 3$  und  $c \approx 3.57$  treten unendliche viele Periodenverdoppelungen auf. Sind  $c_{i-1}$ ,  $c_i$  und  $c_{i+1}$  drei aufeinanderfolgende Bifurkationsparameter, so gilt  $(c_{i+1} - c_i)/(c_i - c_{i-1}) \rightarrow \delta$ , wobei  $\delta \approx 4.669$  die *Feigenbaum-Konstante* ist. Diese Konstante tritt in vielen chaotischen Systemen auf und wird deshalb oftmals als universelle Naturkonstante betrachtet.

### 1.3.1 Über Cantor-Mengen

Ein wesentliches Hilfsmittel, um die Dynamik der logistischen Abbildung für große  $c$  (oder anderer Funktionen) zu verstehen, sind spezielle Teilmengen der reellen Zahlen.

**Definition 12** (Cantor-Menge). *Eine nichtleere Menge  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  heißt Cantor-Menge, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1.  $\Gamma$  ist kompakt,
2.  $\Gamma$  enthält keine inneren Punkte, d.h. es gibt kein echtes Intervall  $J$  mit  $J \subset \Gamma$ .
3. Jeder Punkt von  $\Gamma$  ist Häufungspunkt von  $\Gamma$ , d.h. für jedes  $x \in \Gamma$  existiert eine Folge  $(x_n)_n \subset \Gamma$  mit  $x_n \neq x$  für alle  $n$  und  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Oder anders gesagt,  $\Gamma$  besitzt keine isolierten Punkte.

**Beispiel** (Klassische Cantor- $\delta$ -Mengen). *Für gegebenes  $\delta \in (0, 1)$  definieren wir eine absteigende Familie von Mengen  $\Gamma_n$  durch die folgende, in Abbildung 1.11 dargestellte, Rekursionsvorschrift:*

- Es sei  $\Gamma_0 = [0, 1]$ .
- Ist  $\Gamma_n$  die Vereinigung der abgeschlossenen und paarweise disjunkten Intervalle  $[\alpha_k, \beta_k]$  für  $k = 1, \dots, K_n$  mit  $K_n = 2^n$ , so definieren wir

$$\Gamma_{n+1} = \bigcup_{k=1, \dots, K_n} [\alpha_k, \beta_k] \setminus (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k)$$

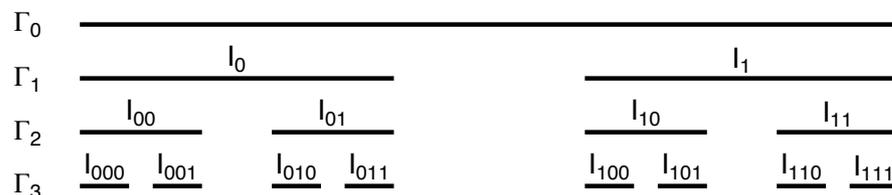
wobei

$$\tilde{\alpha}_k := \frac{1}{2}(1 + \delta)\alpha_k + \frac{1}{2}(1 - \delta)\beta_k, \quad \tilde{\beta}_k := \frac{1}{2}(1 - \delta)\alpha_k + \frac{1}{2}(1 + \delta)\beta_k.$$

Wir können nun leicht durch vollständige Induktion zeigen, dass  $\Gamma_n$  aus  $2^n$  abgeschlossenen und paarweise disjunkten Intervallen der Länge  $(\frac{1-\delta}{2})^n$  besteht. Die Cantor- $\delta$ -Menge wird nun durch

$$\Gamma := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

definiert. Es ist leicht einzusehen, dass die Menge aller Randpunkte der Teilintervalle von  $\Gamma_n$  zu  $\Gamma$  gehören. Nicht ganz so einfach zu sehen ist jedoch, dass  $\Gamma$  wesentlich mehr als nur diese Punkte enthält.



**Abbildung 1.11:** Rekursive Konstruktion der Cantor- $\delta$ -Menge (für  $\delta = 0.24$  dargestellt): In jedem Schritt wird aus jedem Teilintervall das Mittelstück mit relativer Länge  $\delta$  herausgenommen. Die spezielle Indizierung der Teilintervalle von  $\Gamma_n$  spielt im Beweis von Lemma 14 eine Rolle.

Wir zeigen nun, dass die Bezeichnung Cantor- $\delta$ -Menge sinnvoll ist.

**Lemma 13.** *Die Cantor- $\delta$ -Menge aus Beispiel 1.3.1 ist eine Cantor-Menge im Sinne von Definition 12.*

*Beweis.*

1. Nach Konstruktion ist jede der Mengen  $\Gamma_n$  kompakt, und deshalb ist auch  $\Gamma$  als Durchschnitt von kompakten Mengen selbst kompakt. Außerdem ist  $\Gamma$  nach Konstruktion nichtleer, da es mindestens die Randpunkte der Teilintervalle aller Mengen  $\Gamma_n$  enthält.
2. Seien  $x, y$  zwei beliebige Punkte mit  $0 \leq x < y \leq 1$  und  $x, y \in \Gamma$ . Nach Konstruktion von  $\Gamma$  existieren für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zwei Intervalle  $I_n$  und  $J_n$  der Länge  $\left(\frac{1-\delta}{2}\right)^n$ , so dass

$$x \in I_n \subset \Gamma_n, \quad y \in J_n \subset \Gamma_n.$$

Wir wählen nun  $n_0$  hinreichend groß, so dass  $\left(\frac{1-\delta}{2}\right)^{n_0} < \frac{y-x}{3}$ . Dann gilt

$$|\tilde{y} - \tilde{x}| \geq |y - x| - |y - \tilde{y}| - |x - \tilde{x}| \geq |y - x| - \frac{2}{3}|y - x| = \frac{1}{3}|y - x| > 0$$

für alle  $\tilde{x} \in I_{n_0}$  und  $\tilde{y} \in J_{n_0}$ . Insbesondere ist der Abstand der Intervalle  $I_{n_0}$  und  $J_{n_0}$  positiv. Wenn  $I_{n_0}$  und  $J_{n_0}$  nun benachbarte Teilintervalle von  $\Gamma_{n_0}$  sind, so gibt es mindestens ein  $z \in (x, y)$ , so dass  $z \notin \Gamma_{n_0} \supset \Gamma$ . Für nicht benachbarte Teilintervalle können wir analog argumentieren. Insgesamt haben wir damit die Implikation

$$x, y \in \Gamma \quad \implies \quad [x, y] \not\subset \Gamma$$

gezeigt, d.h.  $\Gamma$  kann kein Intervall positiver Länge enthalten.

3. Sei nun  $x \in \Gamma$  fixiert. Dann existiert nach Konstruktion von  $\Gamma$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Intervall  $I_n$  der Länge  $\left(\frac{1-\delta}{2}\right)^n$  so dass

$$x \in I_n \subset \Gamma_n.$$

Für jedes  $n$  wählen wir  $x_n$  mit

- (a)  $x_n$  ist Randpunkt von  $I_n$ ,
- (b)  $x_n \neq x$ .

Da  $x_n$  Randpunkt von  $I_n$  ist gilt,  $x_n \in \Gamma$ . Außerdem gilt

$$|x - x_n| \leq \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h.  $x$  ist Häufungspunkt von  $\Gamma$ .

□

Wir beweisen schließlich noch einige bemerkenswerte Eigenschaften der klassischen Cantor- $\delta$ -Mengen und erwähnen, dass letztere *fraktale Mengen* mit *Hausdorff-Dimensions*  $d = -\ln(2)/\ln\left(\frac{1-\delta}{2}\right) \in (0, 1)$  sind.

**Lemma 14.** *Die Cantor- $\delta$ -Menge ist für jedes  $0 < \delta < 1$  eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge.*

*Beweis.* Da jede Menge  $\Gamma_n$  die Vereinigung endlich vieler disjunkter Teilintervalle ist, kann das entsprechende Lebesgue-Maß einfach berechnet werden. Insbesondere gilt

$$\lambda(\Gamma_n) = 2^n \times \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^n = (1-\delta)^n,$$

und die Monotonie des Lebesgue-Maßes impliziert

$$0 \leq \lambda(\Gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(\Gamma_n) = 0.$$

Um die Überabzählbarkeit von  $\Gamma$  zu beweisen, indizieren wir die Teilintervalle von  $\Gamma_n$  wie in Abbildung 1.11 dargestellt. Jeder Punkt  $x \in \Gamma$  kann nun in eindeutiger Weise mit einer Folge  $(k_n)_{n \geq 1}$  identifiziert werden, die nur Werte in  $\{0, 1\}$  annimmt. In der Tat, jede solche Folge  $(k_n)_{n \geq 1}$  definiert in eindeutiger Weise eine Folge absteigender Intervalle

$$I_{k_1} \supset I_{k_1 k_2} \supset I_{k_1 k_2 k_3} \supset \dots$$

die nach dem Intervallschachtelungsprinzip gegen ein  $x \in \Gamma$  konvergiert. Sei nun umgekehrt  $x \in \Gamma$  gegeben. Dann existiert nach Konstruktion von  $\Gamma$  eine eindeutige Folge  $(k_n)_{n \geq 1}$  mit Werten in  $\{0, 1\}$ , so dass

$$x \in I_{k_1 k_2 \dots k_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass  $\Gamma$  gleichmächtig zu einem überabzählbaren Folgenraum ist.  $\square$

### 1.3.2 Invariante Mengen der logistischen Abbildung

Für jedes  $c > 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Menge

$$\Omega_{c,n} := \{x \in [0, 1] \mid f_c^k(x) \in [0, 1] \text{ für alle } k = 0, \dots, n\}, \quad (1.5)$$

wobei  $f_c$  wieder die logistische Abbildung aus (1.4) ist, und setzen

$$\Omega_c := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{c,n}.$$

Nach Konstruktion gilt

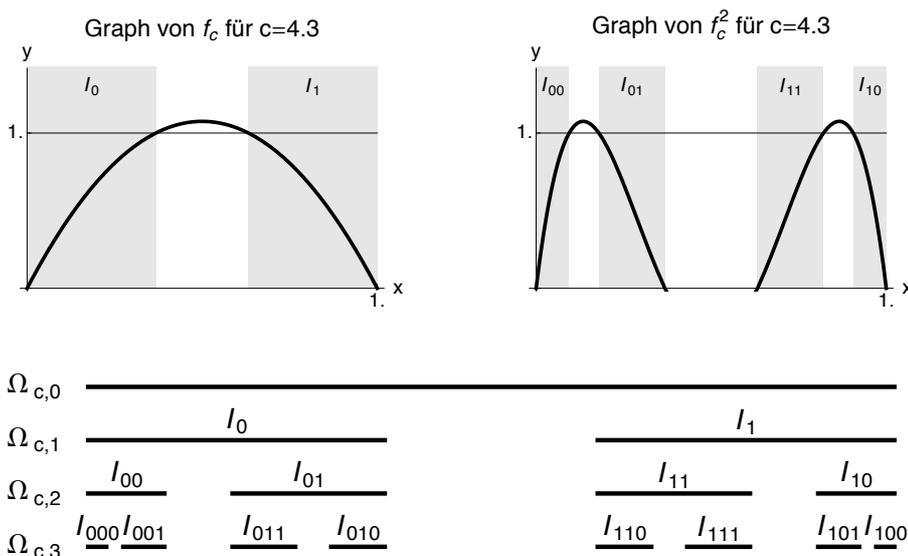
$$\Omega_{c,1} \supseteq \Omega_{c,2} \supseteq \dots \supseteq \Omega_{c,n} \supseteq \dots \supseteq \Omega_c$$

und es ist klar, dass  $\Omega_c$  invariant unter der Dynamik von  $f_c$  ist. Außerdem impliziert  $0 < c \leq 4$  die Identität  $\Omega_{c,n} = \Omega_c = [0, 1]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h. nur der Fall  $c > 4$  führt zu  $\Omega_c \neq [0, 1]$ .

**Lemma 15** (Eigenschaften von  $\Omega_{c,n}$ ). *Sei  $c > 4$ . Dann gilt*

$$\Omega_{c,1} = \left[0, \frac{1}{2} - \delta_c\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \delta_c, 1\right], \quad \delta_c = \frac{\sqrt{c^2 - 4c}}{2c}.$$

*Außerdem gilt für jedes  $n \geq 1$ : Die Menge  $\Omega_{c,n}$  besteht aus  $2^n$  abgeschlossenen und paarweise disjunkten Intervallen, und  $f_c^n$  bildet jedes dieser Intervalle strikt monoton (und damit auch bijektiv) auf  $[0, 1]$  ab.*



**Abbildung 1.12:** Rekursive Konstruktion der invarianten Menge  $\Omega_c$  (dargestellt für  $c = 4.3$ ). Im Schritt  $n \rightsquigarrow n + 1$  wird, analog zur Konstruktion der Cantor- $\delta$ -Mengen, jedes Intervall von  $\Omega_{c,n}$  in zwei Teilintervalle aufgeteilt. Der Unterschied ist aber, dass nun die Aufteilungsverhältnisse nicht mehr durch eine einzelne Konstante  $\delta$  beschrieben werden können. Die spezielle Indizierung spielt im Beweis von Satz 29 eine Rolle und ist anders als die in Abbildung 1.11 für die klassische Cantor-Delta-Mengen beschriebene.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt induktiv über  $n$ . Für den Induktionsanfang  $n = 1$  kann durch elementare Argumente leicht gezeigt werden, dass  $f_c$  die beiden Intervalle  $[0, \frac{1}{2} - \delta_c]$  und  $[\frac{1}{2} + \delta_c, 1]$  jeweils strikt monoton auf  $[0, 1]$  abbildet, und dass  $f_c(x) \notin [0, 1]$  für jedes  $x \in (\frac{1}{2} - \delta_c, \frac{1}{2} + \delta_c)$  gilt.

Für den Induktionsschritt sei  $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$  ein Intervall, so dass  $f_c^n$  dieses Intervall monoton auf  $[0, 1]$  abbildet. O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $f_c^n$  auf  $[\alpha, \beta]$  monoton wachsend ist. Dann gilt  $f_c^n(\alpha) = 0$  und  $f_c^n(\beta) = 1$  und es existieren nach Zwischenwertsatz und Monotonie eindeutige Punkte  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  mit

$$\alpha < \tilde{\beta} < \tilde{\alpha} < \beta, \quad f_c^n(\tilde{\beta}) = \frac{1}{2} - \delta_c, \quad f_c^n(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2} + \delta_c.$$

Nach Konstruktion gilt nun

$$\{x \in [\alpha, \beta] : f_c^{n+1}(x) \in [0, 1]\} = [\alpha, \tilde{\beta}] \cup [\tilde{\alpha}, \beta],$$

d.h. beim Schritt  $n \rightsquigarrow n + 1$  werden die Intervalle für  $\Omega_{c,n+1}$  dadurch erzeugt, dass jedes Intervall  $[\alpha, \beta]$  aus  $\Omega_{c,n}$  in zwei Teilintervalle  $[\alpha, \tilde{\beta}]$  und  $[\tilde{\alpha}, \beta]$  aufgespaltet wird (siehe Abbildung 1.12).  $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass  $\Omega_c$  eine Cantor-Menge ist. Um technische Details zu vermeiden, werden wir uns dabei auf den Fall  $c > 2 + \sqrt{5} \approx 4.24$  beschränken.

**Lemma 16** (Weitere Eigenschaften von  $\Omega_{c,n}$ ). *Sei  $c > 2 + \sqrt{5}$ . Dann gilt*

$$D_c := \inf_{x \in \Omega_{c,1}} |f'_c(x)| > 1.$$

*Außerdem ist die Länge  $|I|$  eines jeden Teilintervalles  $I$  von  $\Omega_{c,n}$  durch  $D_c^{-n}$  nach oben beschränkt.*

*Beweis.* Die Behauptung über  $D_c$  kann einfach nachgerechnet werden. Für jedes  $x \in \Omega_{c,n}$  gilt nach Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_c^n(x) &= \frac{d}{dx} f_c(f_c(\dots f_c(x))) \\ &= f'_c(f_c^{n-1}(x)) \cdot f'_c(f_c^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'_c(f_c^1(x)) \cdot f'_c(f_c^0(x)), \end{aligned}$$

und damit auch

$$\left| \frac{d}{dx} f_c^n(x) \right| \geq D_c^n,$$

wegen  $f_c^{n-k}(x) \in \Omega_{c,k} \subset \Omega_{c,1}$  für alle  $k = 1, \dots, n-1$ .

Sei nun  $[\alpha, \beta]$  eines der Teilintervalle von  $\Omega_{c,n}$  wie in Abbildung 1.12. Dann bildet  $f_c^n$  dieses Teilintervall strikt monoton auf  $[0, 1]$  ab. Wir nehmen im Folgenden an, dass  $f_c^n$  strikt monoton wachsend auf  $[\alpha, \beta]$  ist; der andere Fall ( $f_c^n$  strikt monoton fallend auf  $[\alpha, \beta]$ ) kann analog behandelt werden. Nach Voraussetzung und dem bisher Bewiesenen gilt

$$\frac{d}{dx} f_c^n(x) \geq D_c^n \quad \text{für alle } x \in [\alpha, \beta].$$

Dies impliziert

$$1 = 1 - 0 = f_c^n(\beta) - f_c^n(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{d}{dx} f_c^n(x) \right) dx \geq D_c^n (\beta - \alpha) = D_c^n |[\alpha, \beta]|,$$

und damit die gewünschte Abschätzung für die Länge der Teilintervalle von  $\Omega_{c,n}$ .  $\square$

**Folgerung 17.**  $\Omega_c$  ist für  $c > 2 + \sqrt{5}$  ein Cantor-Menge.

*Beweis.* Mit Lemma 16 kann der Beweis analog zu dem von Lemma 13 geführt werden.  $\square$

Wir erwähnen, dass  $\Omega_c$  für alle  $c > 4$  eine Cantor-Menge ist. Der Beweis ist aber für  $4 < c < 2 + \sqrt{5}$  technisch aufwändiger.

### 1.3.3 Chaotische Dynamik

In der Literatur existieren verschiedene (d.h. verschieden stark einschränkende) Definitionen von *Chaos*. Hier verwenden wir die folgende, auf DEVANEY<sup>9</sup> zurückgehende, Definition.

**Definition 18** (Bausteine des Chaos). *Sei  $\Omega$  eine beliebige Teilmenge des metrischen Raumes  $(X, d)$ . Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  (bzw. die von ihr erzeugte Dynamik) heißt*

1. sensitiv abhängig von den Anfangsdaten, sofern es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für jedes  $x \in \Omega$  und alle  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in \Omega$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  existieren, so dass

$$d(x, y) \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta,$$

2. topologisch transitiv, wenn es für je zwei Punkte  $x, y \in \Omega$  und jedes  $\varepsilon > 0$  einen Punkt  $z \in \Omega$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$d(x, z) \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad d(f^n(z), y) \leq \varepsilon.$$

<sup>9</sup>Robert L. Devaney (geb. 1948), US-amerikanischer Mathematiker

**Definition 19** (Chaos). Sei  $\Omega$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  (bzw. die von ihr erzeugte Dynamik) heißt chaotisch, falls  $f$  den folgenden Bedingungen genügt:

1.  $f$  ist sensitiv abhängig von den Anfangsdaten,
2.  $f$  ist topologisch transitiv,
3. die Menge der periodischen Punkte von  $f$  ist dicht in  $\Omega$ .

**Theorem 20.** Die logistische Abbildung  $f_c$  ist für  $c > 2 + \sqrt{5}$  chaotisch auf der Cantor-Menge  $\Omega_c$ .

*Beweis.*

1. Dichtheit der periodischen Punkte: Wir bemerken zunächst, dass jedes Teilintervall  $I$  von  $\Omega_{c,n}$  aus Abbildung 1.12 wegen  $f_c^n(I) = [0, 1] \supset I$  und Lemma 9 mindestens einen  $n$ -periodischen Punkt enthält ( $n$  muss aber nicht unbedingt die Primperiode sein).

Sei nun  $x \in \Omega_c$  fixiert und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir wählen  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $D_c^{-n} < \varepsilon$ , und ein Teilintervall  $I$  von  $\Omega_{c,n}$  mit  $x \in I$ . Es gibt nun mindestens einen periodischen Punkt  $y \in I$  und für diesen gilt

$$|x - y| \leq |I| \leq D_c^{-n} < \varepsilon.$$

Nach Konstruktion von  $\Omega_{c,n}$  und weil  $y \in I \subset \Omega_{c,n}$  gilt  $f_c^m(y) \in [0, 1]$  für alle  $m = 0, \dots, n-1$ . Da  $y$  aber  $n$ -periodisch ist (d.h. es gilt  $f_c^{m+n}(y) = f_c^m(y)$ ), folgt damit  $f_c^m(y) \in [0, 1]$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ , und die Definition von  $\Omega_c$  impliziert schließlich  $y \in \Omega_c$ . Da  $\varepsilon$  beliebig war, haben wir insgesamt gezeigt, dass es eine Folge von periodischen Punkten aus  $\Omega_c$  gibt, die gegen  $x$  konvergiert.

2. Topologische Transitivität: Seien  $x, y \in \Omega_c$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen nun wieder  $n$  und  $I$  als Teilintervall von  $\Omega_{c,n}$  wie oben, so dass  $x \in I$  und  $|I| \leq D_c^{-n} < \varepsilon$ . Nach Zwischenwertsatz und wegen  $f_c^n(I) = [0, 1]$  gibt es nun ein  $z \in I$ , so dass  $f_c^n(z) = y$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $z$  Element von  $\Omega_c$  ist: Wegen  $z \in I$  gilt zunächst  $f_c^m(z) \in [0, 1]$  für alle  $m = 0, \dots, n$ . Es gilt aber auch  $f_c^{n+l}(z) = f_c^l(y) \in [0, 1]$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ , und die Kombination beider Argumente liefert  $z \in \Omega_c$ .
3. Sensitive Abhängigkeit von den Anfangsdaten: Wir setzen  $\delta = \frac{1}{2}$ . Für gegebene  $x \in \Omega_c$  und  $\varepsilon > 0$  seien  $n$  und  $I$  wieder wie oben gewählt. Außerdem setzen wir  $z := 0 \in \Omega_c$  für  $f_c^n(x) \in [1/2, 1]$  bzw.  $z := 1 \in \Omega_c$  für  $f_c^n(x) \in [0, 1/2)$ . Da  $f_c^n$  das Intervall  $I$  monoton und bijektiv auf  $[0, 1]$  abbildet, gibt es nach Lemma 15 genau einen Randpunkt  $y$  von  $I$ , so dass  $f_c^n(y) = z$  und damit  $|f_c^n(y) - f_c^n(x)| \geq \frac{1}{2} = \delta$ . Weil  $y$  Randpunkt von  $I$  ist, gilt sogar  $y \in \Omega_c$ .

□

### 1.3.4 Über Topologische Konjugiertheit

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, dass die logistische Abbildung mit  $c = 4$  chaotisch auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  ist. Dazu zeigen wir, dass die Dynamik von  $f_c$  äquivalent zu der Dynamik einer einfacheren Funktion ist, von der wir relativ leicht einsehen können, dass sie chaotisch ist.

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega & \xrightarrow{f} & \Omega \\
 \tau \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \tau \\
 \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\Omega}
 \end{array}$$

**Abbildung 1.13:** Ein Homöomorphismus  $\tau : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  ist genau dann eine topologische Konjugation von  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  und  $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ , wenn das obige Diagramm kommutiert.

**Definition 21.** Seien  $\Omega$  bzw.  $\tilde{\Omega}$  Teilmengen der metrischen Räume  $(X, d)$  bzw.  $(\tilde{X}, \tilde{d})$ , und  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  sowie  $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$  stetige Abbildungen. Wir sagen, ein Homöomorphismus  $\tau : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  ist eine topologische Konjugation von  $f$  und  $\tilde{f}$ , falls  $\tau \circ f = \tilde{f} \circ \tau$  gilt.

**Bemerkung.**

1.  $\tau$  ist nach Definition genau dann ein Homöomorphismus, falls  $\tau$  stetig und stetig invertierbar ist.
2. Topologische Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation.

Die Idee hinter topologischer Konjugiertheit ist, dass wenn immer eine solcher Homöomorphismus  $\tau$  existiert, die Dynamiken von  $f$  und  $\tilde{f}$  qualitativ gleich sein müssen. Insbesondere können wir das folgende Resultat ableiten.

**Lemma 22.** Sei  $\tau : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  eine topologische Konjugation von  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  und  $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ . Dann gilt:

1. Ein Punkt  $p \in \Omega$  ist ein  $k$ -periodischer Punkt von  $f$  genau dann, wenn  $\tau(p) \in \tilde{\Omega}$  ein  $k$ -periodischer Punkt von  $\tilde{f}$  ist. Darüber hinaus gilt  $W_s(\tau(p)) = \tau(W_s(p))$  für jeden periodischen Punkt  $p$  von  $f$ .
2. Eine Menge  $\Delta \subset \Omega$  ist dicht in  $\Omega$  genau dann, wenn  $\tau(\Delta)$  dicht in  $\tilde{\Omega}$  ist.
3.  $f$  ist topologische transitiv genau dann, wenn  $\tilde{f}$  topologisch transitiv ist.

*Beweis.* Alle Behauptungen folgen unmittelbar aus der Stetigkeit von  $\tau : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  und  $\tau^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ .  $\square$

Die sensitive Abhängigkeit bleibt im Allgemeinen *nicht* unter topologischer Konjugation erhalten (siehe Beispiel in den Übungsaufgaben). Wir wollen im Folgenden aber zeigen, dass für unendliche  $\Omega$  der Begriff der Chaotizität sehr wohl invariant unter topologischer Konjugation ist. Dazu beweisen wir, dass die sensitive Abhängigkeit aus der topologischen Transitivität und der Dichtheit der periodischen Punkte gefolgert werden kann.

**Lemma 23.** Sei  $\Omega$  eine unendliche Teilmenge des metrischen Raumes  $(X, d)$  und sei  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  eine stetige Abbildung, so dass

1. die periodischen Punkte von  $f$  dicht in  $\Omega$  liegen,
2.  $f$  topologisch transitiv ist.

Dann ist  $f$  sensitiv abhängig von den Anfangsdaten und damit auch chaotisch.

*Beweis.* Um die Notation möglichst einfach zu halten wollen wir annehmen, dass  $X = \mathbb{R}^N$  mit  $N \in \mathbb{N}$  gilt und dass  $d$  der euklidische Abstand ist; alle nachfolgenden Argumente können aber leicht auf allgemeine metrische Räume übertragen werden.

Schritt 1 : Wir zeigen zunächst, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für jedes  $x \in \Omega$  ein periodischer Punkt  $q$  existiert, für den

$$|x - f^n(q)| \geq 4\delta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

gilt. Sei dazu  $q_1$  ein periodischer Punkt mit Primperiode  $k_1$ . Nach Voraussetzung existieren aber unendlich viele periodische Punkte (eine endliche Menge kann nicht dicht in einer unendlichen Menge liegen), und deshalb existiert ein periodischer Punkt  $q_2$  mit Primperiode  $k_2$ , so dass

$$q_2 \notin \{q_1, f(q_1), f^2(q_1), \dots, f^{k_1-1}(q_1)\}.$$

Wir können nun leicht zeigen (zum Beispiel durch einen Widerspruchsbeweis), dass

$$\{q_1, f(q_1), f^2(q_1), \dots, f^{k_1-1}(q_1)\} \cap \{q_2, f(q_2), f^2(q_2), \dots, f^{k_2-1}(q_2)\} = \emptyset.$$

Insbesondere existiert  $\delta > 0$ , so dass

$$8\delta \leq |f^{n_1}(q_1) - f^{n_2}(q_2)| \quad \text{für alle } n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

und dies impliziert

$$8\delta \leq |x - f^{n_1}(q_1)| + |x - f^{n_2}(q_2)| \quad \text{für jedes } x \in \Omega \text{ und alle } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Durch Widerspruchsbeweis zeigen wir nun, dass dies für jedes  $x \in \Omega$  schon

$$4\delta \leq |x - f^{n_1}(q_1)| \quad \text{für alle } n_1 \in \mathbb{N}$$

oder

$$4\delta \leq |x - f^{n_2}(q_2)| \quad \text{für alle } n_2 \in \mathbb{N}$$

impliziert, d.h. für jedes  $x \in \Omega$  können wir  $q = q_1$  oder  $q = q_2$  wählen.

Schritt 2 : Von nun an sei  $\delta > 0$  wie oben gegeben. Außerdem seien  $x \in \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  fixiert. Wir wollen nun die Aussage

$$\exists y \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |x - y| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |f^n(x) - f^n(y)| \geq \delta \quad (1.7)$$

beweisen, denn diese impliziert (da  $x$  und  $\varepsilon$  beliebig sind), dass  $f$  sensitiv abhängig von den Anfangsdaten ist.

In Abhängigkeit von  $x$  wählen wir nun einen periodischen Punkt  $q$ , so dass (1.6) gilt. Die Primperiode von  $q$  sei mit  $k$  bezeichnet. Wegen der Dichtigkeit der periodischen Punkte gibt es einen weiteren periodischen Punkt  $p$ , so dass

$$|x - p| \leq \min\{\delta, \varepsilon\}.$$

Die Primperiode von  $p$  sei mit  $l$  bezeichnet. Für jedes  $i = 1, \dots, l$  gibt es nun wegen der Stetigkeit von  $f^i$  ein  $\mu_i > 0$ , so dass

$$|\tilde{q} - p| \leq \mu_i \quad \implies \quad |f^i(\tilde{q}) - f^i(p)| \leq \delta.$$

Wir setzen

$$\mu := \min\{\delta, \varepsilon, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l\}.$$

Aufgrund der topologischen Transitivität von  $f$  gibt es außerdem ein  $z \in \Omega$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|z - x| \leq \mu \quad \text{und} \quad |f^m(z) - q| \leq \mu.$$

Wir wollen nun zeigen, dass unter der diskreten Dynamik von  $f$  der Punkt  $x$  sich von  $z$  oder von  $p$  (oder von beiden) entfernen muss, d.h. dass wir  $y = p$  oder  $y = z$  wählen können. Dazu wählen wir  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$n \in \{m + 1, m + 2, \dots, m + l - 1, m + l\} \quad \text{und} \quad n \text{ ist Vielfaches von } l.$$

Für dieses  $n$  gilt

$$\begin{aligned} 4\delta &\leq |x - f^{n-m}(q)| \\ &\leq |x - f^n(p)| + |f^n(p) - f^n(z)| + |f^{n-m}(f^m(z)) - f^{n-m}(q)|. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt  $f^n(p) = p$  und daher  $|x - f^n(p)| \leq \delta$ . Außerdem gilt (nach Wahl von  $z$  und wegen  $n - m \in \{1, \dots, l\}$ )

$$|f^m(z) - q| \leq \mu \leq \mu_{n-m}$$

und die Wahl der  $\mu_i$  garantiert  $|f^{n-m}(f^m(z)) - f^{n-m}(q)| \leq \delta$ . Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned} 2\delta &\leq |f^n(p) - f^n(z)| \\ &\leq |f^n(x) - f^n(p)| + |f^n(x) - f^n(z)|, \end{aligned}$$

und wir schließen, dass

$$\delta \leq |f^n(x) - f^n(p)| \quad \text{oder} \quad \delta \leq |f^n(x) - f^n(z)|.$$

Insbesondere gilt (1.7) für  $y = p$  oder  $y = z$  (oder für beide). □

Wir betrachten nun die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Diese Funktion wird auch die *Zeltfunktion* (*tent map*) genannt, siehe Abbildung 1.14.

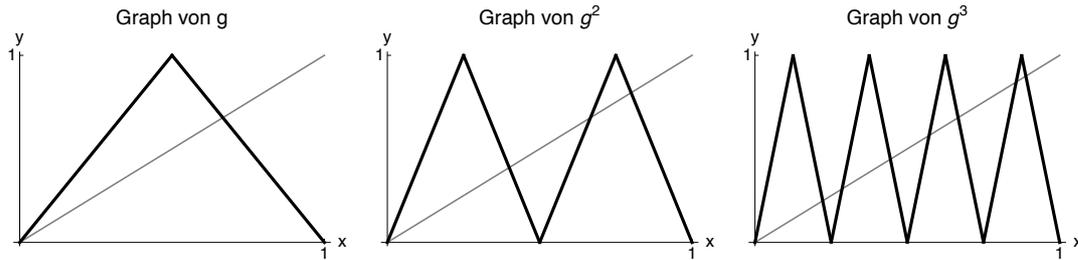
**Satz 24.** *Die Zeltabbildung ist topologisch konjugiert zur Einschränkung der logistischen Abbildung mit  $c = 4$  auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ .*

*Beweis.* Die Abbildung  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definiert durch  $\tau(x) = \sin^2(\pi x/2)$  ist Homöomorphismus und mit Hilfe von Additionstheoremen finden wir  $\tau \circ g = f_4 \circ \tau$ . □

**Satz 25.** *Die Zeltabbildung ist chaotisch.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Folgerung 26.** *Die logistische Abbildung mit  $c = 4$  ist chaotisch auf dem Einheitsintervall.*



**Abbildung 1.14:** Die Zeltabbildung erzeugt eine chaotische Dynamik auf dem Einheitsintervall.

### 1.3.5 Über symbolische Dynamik

In diesem Abschnitt wollen wir das Chaos in der logistischen Abbildung für  $c > 2 + \sqrt{5}$  noch einmal im Lichte der topologischen Konjugation beleuchten. Insbesondere werden wir zeigen, dass die Dynamik von  $f_c$  äquivalent zu einer sogenannten *symbolischen Dynamik* ist. Dazu führen wir den Folgenraum

$$2^{\mathbb{N}} := \text{Menge der Folgen mit Werten in } \{0, 1\}$$

ein. Jedes Element  $\kappa \in 2^{\mathbb{N}}$  ist also eine Folge  $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots)$  mit  $\kappa_n \in \{0, 1\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Auf  $2^{\mathbb{N}}$  können wir nun eine Metrik durch

$$d(\kappa, \lambda) := \|\kappa - \lambda\|, \quad \|\kappa\| := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\kappa_n|$$

einführen.

**Lemma 27.** *Das Paar  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  ist ein vollständiger metrischer Raum*

*Beweis.* Es ist klar, dass  $d$  eine Metrik auf  $2^{\mathbb{N}}$  definiert. Zu zeigen bleibt die Vollständigkeit. Sei dazu  $(\kappa_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset 2^{\mathbb{N}}$  mit  $\kappa_j = (\kappa_{j,0}, \kappa_{j,1}, \kappa_{j,2}, \dots)$  eine Cauchy-Folge in  $2^{\mathbb{N}}$ , d.h. es gelte

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|\kappa_j - \kappa_{j+m}\| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\kappa_{j,n} - \kappa_{j+m,n}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |\kappa_{j,n} - \kappa_{j+m,n}| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

d.h.  $(\kappa_{j,n})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  ist Cauchy-Folge reeller Zahlen. Insbesondere existiert für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\kappa_{\infty,n} \in \mathbb{R}$  mit  $\kappa_{\infty,n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \kappa_{j,n}$  und wegen  $\kappa_{j,n} \in \{0, 1\}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  folgt sofort  $\kappa_{\infty,n} \in \{0, 1\}$ .

Wir wollen nun zeigen, dass  $\kappa_{\infty} := (\kappa_{\infty,0}, \kappa_{\infty,1}, \kappa_{\infty,2}, \dots) \in 2^{\mathbb{N}}$  der Grenzwert der Folge  $(\kappa_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ist, d.h. dass  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\kappa_j - \kappa_{\infty}\| = 0$  gilt. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen nun  $N_{\varepsilon}$ , so dass  $\sum_{n=N_{\varepsilon}+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\kappa_j - \kappa_{\infty}\| &= \left( \sum_{n=0}^{N_{\varepsilon}} \frac{1}{2^n} |\kappa_{j,n} - \kappa_{\infty,n}| \right) + \left( \sum_{n=N_{\varepsilon}+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\kappa_{j,n} - \kappa_{\infty,n}| \right) \\ &\leq \left( \sum_{n=0}^{N_{\varepsilon}} |\kappa_{j,n} - \kappa_{\infty,n}| \right) + \varepsilon, \end{aligned}$$

und der Limes  $j \rightarrow \infty$  liefert

$$0 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|\kappa_j - \kappa_\infty\| \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt nun  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\kappa_j - \kappa_\infty\| = 0$ , das heißt, die Cauchy-Folge  $(\kappa_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset 2^{\mathbb{N}}$  konvergiert im metrischen Raum  $2^{\mathbb{N}}$  gegen  $\kappa_\infty$ . Damit ist gezeigt, dass  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  wirklich vollständig ist.  $\square$

Wir betrachten nun die *Linksverschiebung*  $L : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  mit

$$L\left((\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots)\right) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots),$$

und bemerken, dass  $L$  wegen

$$\|L\kappa - L\tilde{\kappa}\| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\kappa_{n+1} - \tilde{\kappa}_{n+1}| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\kappa_n - \tilde{\kappa}_n| \leq 2\|\kappa - \tilde{\kappa}\|$$

Lipschitz-stetig ist. Die von  $L$  erzeugte Dynamik ist ein Beispiel für eine *symbolische Dynamik* mit *endlichem Alphabet*.

**Satz 28.** *Die von  $L$  erzeugte Dynamik auf  $2^{\mathbb{N}}$  ist chaotisch.*

*Beweis.* Die Bausteine des Chaos können direkt mit den Definitionen von  $d$  und  $L$  abgeleitet werden (siehe Übungsaufgabe).  $\square$

**Satz 29.** *Die logistische Abbildung ist für  $c > 2 + \sqrt{5}$  topologisch konjugiert zur Linksverschiebung in  $2^{\mathbb{N}}$ .*

*Beweis.* Definition von  $\tau$ : Die Teilintervalle von  $\Omega_{c,n}$  wurden in (1.5) definiert. Wir führen nun die in Abbildung 1.12 dargestellte Indizierung der Teilintervalle von  $\Omega_{c,n}$  induktiv wie folgt ein:

1. Es gilt  $I_0 := [0, \frac{1}{2} - \delta_c]$  und  $I_1 := [\frac{1}{2} + \delta_c, 1]$ .
2. Für jedes  $n \geq 1$  sei

$$\begin{aligned} I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_{n-1} 0} &:= \{x \in I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_{n-1}} : f_c^n(x) \in I_0\}, \\ I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_{n-1} 1} &:= \{x \in I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_{n-1}} : f_c^n(x) \in I_1\}. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Lemma 14 können wir nun zeigen, dass es eine bijektive Abbildung  $\tau : \Omega_c \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  gibt, so dass die Implikation

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots) = \tau(x) \iff x \in I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist. In der Tat, für jedes  $\kappa \in 2^{\mathbb{N}}$  ist

$$I_{\kappa_0} \supset I_{\kappa_0 \kappa_1} \supset \dots \supset I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_n} \supset \dots$$

eine Intervallschachtelung, die (siehe Lemma 16) gegen einen eindeutigen Punkt  $x \in \Omega_c$  konvergiert. Umgekehrt existiert für jedes  $x \in \Omega_c$  nach Konstruktion von  $\Omega_c$  eine eindeutige Folge  $\kappa \in 2^{\mathbb{N}}$ , so dass  $x \in I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_n}$  für alle  $n$  gilt.

$\tau$  ist *Konjugation*: Die spezielle Indizierung der Teilintervalle von  $\Omega_{c,n}$  – siehe wieder Abbildung 1.12 – garantiert die Implikation

$$x \in I_{\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_n} \iff f_c^m(x) \in I_{\kappa_m} \quad \text{für alle } m = 0, \dots, n,$$

und damit auch

$$\tau(x) = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots) \iff f_c^n(x) \in I_{\kappa_n} \quad \text{für alle } n \geq 0. \quad (1.8)$$

Wir fixieren nun  $x \in \Omega_c$  beliebig und schreiben wieder  $\tau(x) = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots)$ . Aus (1.8) folgt nun zunächst

$$f_c^n(f_c(x)) \in I_{\kappa_{n+1}} \quad \text{für alle } n \geq 0$$

und anschließend

$$\tau(f_c(x)) = (\kappa_1, \kappa_2, \dots) = L\tau(x).$$

Da  $x$  beliebig fixiert war, haben wir insgesamt  $\tau \circ f_c = L \circ \tau$  gezeigt.

$\tau$  ist *Homöomorphismus*: Im Folgenden sei  $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $\Omega_c$  und  $(\kappa_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\kappa_j = \tau(x_j)$  die entsprechende Folge von Folgen aus  $2^{\mathbb{N}}$ . Wir schreiben  $\kappa_j = (\kappa_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Wir zeigen nun, dass  $\tau$  die Menge  $\Omega_c$  wirklich stetig nach  $2^{\mathbb{N}}$  abbildet. Dazu nehmen wir an, es gilt  $x_j \rightarrow x_\infty$  für  $j \rightarrow \infty$  im Sinn der Konvergenz reeller Zahlen (beachte dass  $x_\infty \in \Omega_c$  aufgrund der Abgeschlossenheit von  $\Omega_c$  gilt), schreiben  $\kappa_\infty := \tau(x_\infty)$  und fixieren schließlich  $\varepsilon > 0$  beliebig.

Dann existiert  $n_* \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-n_*} < \varepsilon$  und  $x_\infty \in \Omega_c$  garantiert  $x_\infty \in I_{\kappa_{\infty,0} \kappa_{\infty,1} \dots \kappa_{\infty,n_*}}$ . Auf Grund der Konvergenz  $x_j \rightarrow x_\infty$  – und weil je zwei Teilintervalle von  $\Omega_{c,n_*}$  einen positiven Abstand besitzen – existiert ein  $j_* \in \mathbb{N}$  (das von  $n_*$  und damit von  $\varepsilon$  abhängen wird), so dass

$$x_j \in I_{\kappa_{\infty,0} \kappa_{\infty,1} \dots \kappa_{\infty,n_*}} \quad \text{für alle } j \geq j_*. \quad (1.9)$$

Nach Konstruktion gilt deshalb

$$\kappa_{j,n} = \kappa_{\infty,n} \quad \text{für alle } n = 0, \dots, n_* \quad \text{und } j \geq j_*, \quad (1.10)$$

und damit auch

$$\|\kappa_j - \kappa_\infty\| \leq \sum_{n=n_*+1}^{\infty} 2^{-n} \leq 2^{-n_*} < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq j_*.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, haben wir insgesamt  $\kappa_j \rightarrow \kappa_\infty$  für  $j \rightarrow \infty$  in  $2^{\mathbb{N}}$  gezeigt.

- Um die Stetigkeit von  $\tau^{-1}$  zu zeigen, nehmen wir nun an, dass  $\kappa_j \rightarrow \kappa_\infty$  für  $j \rightarrow \infty$  im Sinne der Konvergenz in  $2^{\mathbb{N}}$  gilt. Wir fixieren wieder  $\varepsilon > 0$  und wählen nun  $n_* \in \mathbb{N}$ , so dass  $D_c^{-(n_*+1)} < \varepsilon$  gilt, wobei  $D_c$  die Konstante aus Lemma 16 ist. Außerdem können wir  $j_* \in \mathbb{N}$  so wählen, dass (1.10) gilt. Dies liefert dann (1.9), und damit

$$|x_j - x_\infty| \leq D_c^{-(n_*+1)} < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq j_*.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, gilt damit  $x_j \rightarrow x_\infty$  für  $j \rightarrow \infty$  im Sinne der Konvergenz reeller Zahlen.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass sowohl  $\tau$  als auch  $\tau^{-1}$  stetig sind.  $\square$

# Kapitel 2

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung und die von Ihnen erzeugte (*zeit-*) *kontinuierliche* Dynamik. Dazu sei  $\Omega$  stets ein Gebiet des  $\mathbb{R}^d$  (d.h.  $\Omega$  ist offen und zusammenhängend) und  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine gegebene Funktion. Die entsprechende Differentialgleichung ist nun durch

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{DGI}$$

gegeben. Eine Lösung von (DGI) ist eine stetig differenzierbare Funktion  $x = x(t)$ , die auf einem (offenen, halboffenen, oder abgeschlossenen) Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert ist, und für die

$$\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt. Oftmals untersuchen wir *Anfangswertprobleme*, d.h. wir stellen zusätzlich die Bedingung

$$x(t_0) = x_0 \tag{AW}$$

wobei  $t_0$  die gegebene Anfangszeit und  $x_0 \in \Omega$  der gegebene Anfangszustand ist. Für eine Lösung des Anfangswertproblems muss dann natürlich  $t_0 \in I$  gelten.

**Beispiel.** 1. Wir betrachten die *skalare*<sup>1</sup> Differentialgleichung

$$\dot{x} = t$$

mit  $d = 1$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $f(t, x) = t$ . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert und durch

$$x(t) = c + \frac{1}{2}t^2$$

gegeben, wobei  $c$  ein freier Parameter ist; insbesondere gibt es also eine einparametrische Schaar von Lösungen der Differentialgleichung. Durch die Vorgabe der Anfangsbedingung (AW) kann der Parameter  $c$  mittels  $x_0 = c + \frac{1}{2}t_0^2$  eliminiert werden und wir finden

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2).$$

---

<sup>1</sup>Das Wort *skalar* bezieht sich hier auf  $d = 1$ . Insbesondere ist  $x(t)$  für jedes  $t$  ein *Skalar*, also eine reelle Zahl.

## 2. Die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = x$$

mit  $d = 1$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $f(t, x) = x$  besitzt die Lösungsschaar

$$x(t) = c \exp(t),$$

wobei  $t \in \mathbb{R}$  beliebig und  $c \in \mathbb{R}$  wieder ein freier Parameter ist. Das entsprechende Anfangswertproblem besitzt aber nur die Lösung

$$x(t) = x_0 \exp(t - t_0),$$

denn es gilt  $c = x_0 \exp(-t_0)$ .

## 3. Die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = -E'(x),$$

wobei  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Energiefunktion ist und  $'$  die Ableitung nach  $x$  meint, ist das einfachste Beispiel eines sogenannten Gradientenflusses. Wegen  $\dot{E} = E'(x)\dot{x} = -\dot{x}^2 < 0$  nimmt die Energie längs jeder Lösung ab.

4. Die Lotka<sup>2</sup>-Volterra<sup>3</sup>-Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ cx_1x_2 - dx_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $a, b, c, d$  positive Konstanten sind, ist eine nichtlineare Differentialgleichung auf  $\mathbb{R}^2$  und beschreibt ein einfaches Räuber-Beute-Modell.

## 5. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{y} + y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} + \sin(y) = 0$$

mit  $y \in \mathbb{R}$  werden das physikalische bzw. mathematische Pendel genannt. Durch die Einführung der neuen Variable  $v = \dot{y}$  können diese als

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\sin y \end{pmatrix},$$

d.h. als Systeme erster Ordnung, geschrieben werden. Statt  $(y, v)$  kann man natürlich auch  $(x_1, x_2)$  schreiben. Man sieht außerdem leicht, dass jede Differentialgleichung zweiter Ordnung als System erster Ordnung geschrieben werden kann, sofern  $\dot{x}$  als unabhängige Variable eingeführt wird.

## 6. Die allgemeine Lösung des physikalischen Pendels ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +a \cos(t) + b \sin(t) \\ -a \sin(t) + b \cos(t) \end{pmatrix},$$

wobei die freien Parameter  $a$  und  $b$  durch die Vorgabe von Anfangsdaten  $y(t_0)$  und  $v(t_0) = \dot{x}(t_0)$  bestimmt werden können; mit  $t_0 = 0$  und  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 1$  ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Alfred James Lotka (1880–1949), österreichisch-US-amerikanischer Chemiker und Demograph.

<sup>3</sup>Vito Volterra (1860–1940), italienischer Mathematiker und Physiker.

Um die mathematische Lösungstheorie für Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme zu entwickeln, müssen wir geeignete Regularitätsforderungen an die Funktion  $f$  stellen.

**Definition 1.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt regulär, sofern die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $f$  ist stetig im ersten Argument (also bzgl.  $t \in \mathbb{R}$ ),
2.  $f$  ist lokal Lipschitz-stetig bzgl. des zweiten Arguments (also bzgl.  $x \in \Omega$ ), d.h. für jedes  $(t_*, x_*) \in \mathbb{R} \times \Omega$  existiert eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R} \times \Omega$  von  $(t_*, x_*)$  sowie eine Konstante  $L$ , so dass

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in U.$$

Sofern wir es nicht explizit anders vereinbaren, wollen wir im Folgenden stets annehmen, dass  $f$  in diesem Sinne regulär ist.

Ein wichtiger Spezialfall sind *autonome Differentialgleichungen*, bei denen  $f$  nicht von der Zeit abhängt. In diesem Fall betrachten wir  $f$  als  $\mathbb{R}^d$ -wertige Funktion auf  $\Omega$  und schreiben

$$\dot{x} = f(x)$$

an Stelle von (DGI).

## 2.1 Existenz von Lösungen

Der Hauptsatz der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kann wie folgt formuliert werden.

**Satz 2** (Satz von Picard<sup>4</sup>-Lindelöf<sup>5</sup>). Seien  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \Omega$  gegeben, und sei  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  regulär. Dann existieren zwei eindeutige Zahlen  $t_- \in [-\infty, t_0)$  und  $t_+ \in (t_0, +\infty]$  sowie eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \Omega$ , so dass die folgenden Aussagen gelten:

1. Die Funktion ist Lösung des Anfangswertproblems (DGI)+(AW), d.h. es gilt

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \text{ mit } t_- < t < t_+.$$

2. Diese Lösung geht von Rand zu Rand, d.h. es gilt

$t_- = -\infty$  oder  $x(t)$  verlässt für  $t \searrow t_-$  jedes Kompaktum  $K$  mit  $x_0 \in K \subset \Omega$   
sowie

$t_+ = +\infty$  oder  $x(t)$  verlässt für  $t \nearrow t_+$  jedes Kompaktum  $K$  mit  $x_0 \in K \subset \Omega$ .

3. Diese Lösung ist maximal in dem Sinne, dass für jede andere Lösung  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \Omega$  des Anfangswertproblems (DGI)+(AW) gilt

$$\tilde{I} \subseteq I := (t_-, t_+), \quad \tilde{x}(t) = x(t) \quad \text{für alle } t \in \tilde{I}.$$

<sup>4</sup>Charles Émile Picard (1856–1941), französischer Mathematiker

<sup>5</sup>Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), finnischer Mathematiker.

*Beweis.* Dies ist ein Standardresultat und der Beweis kann der Literatur, z.Bsp. WALTER oder AMMAN, entnommen werden.  $\square$

Die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems (DGL)+(AW) wird oftmals auch mit

$$x(t; t_0, x_0) \quad \text{bzw.} \quad x_{(t_0, x_0)}(t)$$

bezeichnet.

### Bemerkung.

1. Ist  $f$  nur stetig (in  $t$  und  $x$ ), so kann zwar Existenz aber nicht die Eindeutigkeit einer Lösung zu (DGL)+(AW) bewiesen werden (Satz von Peano). Das Standardbeispiel für die Nichteindeutigkeit ist

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 0,$$

denn dieses Anfangswertproblem wird durch

$$x_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}(t - t_1)^2 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

für alle Parameter  $t_1 \geq 0$  gelöst. Beachte, dass das Anfangswertproblem für  $x_0 \neq 0$  eine eindeutige Lösung besitzt, da die Funktion  $f(x) = \sqrt{|x|}$  zwar nicht lokal Lipschitz-stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ , aber sehr wohl auf den Teilmengen  $(-\infty, 0)$  und  $(0, +\infty)$  ist.

2. Im Fall  $t_+ < +\infty$  sagt man, die Lösung hat einen Blow Up bei  $t = t_+$  bzw. explodiert bei  $t = t_+$  (analog für  $t_- > -\infty$ ). Ein Standardbeispiel ist

$$\dot{x} = x^2, \quad t_0 = 0, \quad x_0 > 0,$$

denn die (maximale) Lösung

$$x(t; 0, x_0) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

ist nur auf  $(-\infty, t_+]$  definiert und explodiert bei  $t_+ = 1/x_0$ . Beachte, dass bei beschränkten Gebieten  $\Omega$  Blow Up nur meint, dass die Lösung für  $t \rightarrow t_+$  an den Rand von  $\Omega$  läuft.

3. Wir werden später diskutieren, unter welchen Umständen ein Blow Up ausgeschlossen werden kann.

## 2.2 Vergleichsprinzipien für skalare GDgl

**Definition 3** (Defekt bzgl. einer skalaren GDgl). Sei  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann nennen wir die stetige Funktion  $Px : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(Px)(t) = \dot{x}(t) - f(t, x(t))$$

den Defekt von  $x$  bzgl. (DGL).

**Satz 4** (Vergleichsprinzip für skalare GDgl.). Seien  $x, y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige differenzierbare Funktion mit

$$x(t_0) \leq y(t_0), \quad (Px)(t) \leq (Py)(t) \quad \text{für alle } t_0 \leq t \leq t_1.$$

Dann gilt  $x(t) \leq y(t)$  für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Genauer gesagt, es gilt genau eine der drei folgenden Alternativen

1.  $x(t) = y(t)$  für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,
2.  $x(t) < y(t)$  für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,
3. es existiert  $t_*$  mit  $t_0 < t_* < t_1$ , so dass  $x(t) = y(t)$  für alle  $t_0 \leq t \leq t_*$  und  $x(t) < y(t)$  für alle  $t_* < t \leq t_1$ .

*Beweis.* Schritt 1: Angenommen, die erste Behauptung ist falsch. Dann existiert ein Intervall  $[\bar{t}, \hat{t}] \subseteq [t_0, t_1]$  mit

$$x(\bar{t}) = y(\bar{t}), \quad x(t) > y(t) \quad \text{für alle } \bar{t} \leq t \leq \hat{t}.$$

Nach Generalvoraussetzung ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variablen, und o.B.d.A. (d.h. durch Verkleinern von  $\hat{t} > \bar{t}$ ) können wir annehmen, dass

$$f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \leq L|x(t) - y(t)| = L(x(t) - y(t)) \quad \text{für alle } \bar{t} \leq t \leq \hat{t}$$

gilt, wobei  $L$  die lokale Lipschitz-Konstante von  $f$  in  $(\bar{t}, x(\bar{t}))$  ist. Wir definieren nun

$$w(t) := (x(t) - y(t)) \exp(-Lt).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (\dot{x}(t) - \dot{y}(t) - Lx(t) + Ly(t)) \exp(-Lt) \\ &= \left( (Px)(t) - (Py)(t) + f(t, x(t)) - f(t, y(t)) - Lx(t) + Ly(t) \right) \exp(-Lt) \\ &\leq \left( f(t, x(t)) - f(t, y(t)) - L(x(t) - y(t)) \right) \exp(-Lt) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Mit  $w(\bar{t}) = 0$  ergibt sich damit  $w(t) \leq 0$  für alle  $\bar{t} \leq t \leq \hat{t}$  und damit  $x(t) \leq y(t)$  für alle  $\bar{t} \leq t \leq \hat{t}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Schritt 2: Sei nun  $\tilde{t} \in [t_0, t_1]$  eine beliebige, aber feste Zeit mit  $x(\tilde{t}) < y(\tilde{t})$ . Wir wollen nun durch Widerspruchsbeweis zeigen, dass  $x(t) < y(t)$  für alle  $t \leq t \leq t_1$  gilt. Dazu nehmen wir an, dass es eine Zeit  $\bar{t}$  mit  $\tilde{t} < \bar{t} \leq t_1$  gibt, so dass

$$x(\bar{t}) = y(\bar{t}), \quad x(t) < y(t) \quad \text{für alle } \tilde{t} \leq t < \bar{t}.$$

Analog zu oben können wir nun für alle Zeiten  $t \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon]$  mit  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, die Funktion  $w$  definieren und zeigen, dass  $\dot{w}(t) \leq 0$ . Nach Definition von  $\bar{t}$  gilt aber  $w(\bar{t} - \varepsilon) < 0$  und damit  $w(\bar{t}) < 0$ . Dies liefert  $x(\bar{t}) < y(\bar{t})$  und damit den gewünschten Widerspruch. Insgesamt haben wir damit die Implikation

$$x(\tilde{t}) < y(\tilde{t}) \quad \implies \quad x(t) < y(t) \quad \text{für alle } \tilde{t} \leq t \leq t_1$$

zeigt. Hieraus folgt unmittelbar die zweite Behauptung.  $\square$

**Definition 5** (Ober- und Unterlösungen). Eine stetig differenzierbare Funktion  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Unterlösung bzw. Oberlösung (manchmal auch Unterfunktion bzw. Oberfunktion) zum Anfangswertproblem (DGL)+(AW) auf dem Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ , falls

$$x(t_0) \leq x_0, \quad \dot{x}(t) \leq f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t_0 \leq t \leq t_1$$

bzw.

$$x(t_0) \geq x_0, \quad \dot{x}(t) \geq f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t_0 \leq t \leq t_1$$

gilt.

**Satz 6** (Alternative Formulierung des Vergleichsprinzips). Sei  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems (DGL)+(AW), und seien  $\underline{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Unterlösung und  $\bar{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Oberlösung. Dann gilt

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad \text{auf } [t_0, t_1],$$

d.h.  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$  für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

*Beweis.* Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Satz 4. □

**Satz 7** (Lemma von Gronwall<sup>6</sup> = Spezielles Vergleichsprinzip in Integralform). Sei  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit

$$x(t) \leq a + \int_{t_0}^t \psi(s)x(s) \, ds$$

für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$ , wobei  $a \in \mathbb{R}$  eine Konstante und  $\psi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine gegebene stetige und nichtnegative Funktion ist. Dann gilt

$$x(t) \leq a \exp \left( \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds \right)$$

für alle  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Folgerung 8.** Die reguläre Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei höchstens linear wachsend im zweiten Argument, d.h. es gibt stetige und nichtnegative Funktionen  $C, D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  so dass

$$|f(t, x)| \leq C(t) + D(t)|x|$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dann existiert jede maximale Lösung der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x)$  für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$ .

<sup>6</sup>Thomas Hakon Grönwall (1877–1932), schwedischer Mathematiker. Sein Name wird heute meist Gronwall geschrieben.

*Beweis. Schritt 1:* Für eine gegebene maximale Lösung  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^d$  zeigen wir zunächst indirekt, dass  $t_+ = +\infty$  gelten muss. Dazu nehmen wir an, es gilt  $t_+ < \infty$ . Dann gilt auch

$$\limsup_{t \uparrow t_+} |x(t)| = \infty, \quad (2.1)$$

da jede maximale Lösung von Rand zu Rand geht. Für jedes feste  $t_0 \in (t_-, t_+)$  und  $t \in [t_0, t_+)$  gilt aber auch

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

und damit

$$\begin{aligned} |x|(t) = |x(t)| &\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| \, ds \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t C(s) + D(s)|x(s)| \, ds \\ &\leq A + B \int_{t_0}^t |x|(s) \, ds \end{aligned}$$

wobei

$$A := |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t_+} C(s) \, ds, \quad B := \max_{s \in [t_0, t_+]} D(s).$$

Das Lemma von Gronwall – angewendet auf die skalare Funktion  $|x|$  – impliziert nun

$$|x|(t) \leq A \exp(B(t - t_0))$$

für alle  $t \in [t_0, t_+)$  und damit einen Widerspruch zu (2.1). Damit haben wir gezeigt, dass in der Tat  $t_+ = +\infty$  gelten muss.

*Schritt 2:* Um  $t_- = -\infty$  zu zeigen, invertieren wir die Zeit, das heißt wir betrachten die Funktion  $\tilde{x} : (-t_+, -t_-) \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\tilde{x}(t) = x(-t)$ . Diese erfüllt die Differentialgleichung  $\dot{\tilde{x}} = -f(t, \tilde{x})$ , und nach Schritt 1 gilt  $-t_- = +\infty$ .  $\square$

## 2.3 Stetige Abhängigkeit

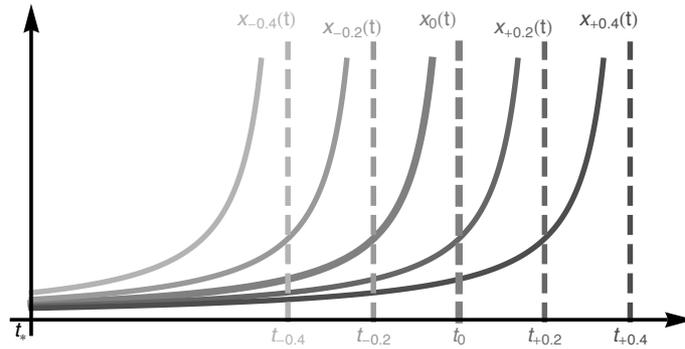
In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass für hinreichend gute Funktionen  $f$  die Lösungen der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x)$  stetig von den Anfangsdaten bzw. von möglichen Parametern abhängen. Um die Beweise möglichst einfach zu halten, beweisen wir diese Aussagen nur den Fall globaler Lipschitz-Stetigkeit.

### Definition 9.

1. Eine reguläre Funktion  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt stark regulär, falls sie global Lipschitz-stetig bzgl. des zweiten Arguments ist, d.h. wenn es eine Konstante  $L$  gibt, so dass

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $x_1, x_2 \in \Omega$  gilt.



**Abbildung 2.1:** Zur stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten (siehe Satz 10): Für jeden Parameter  $\mu$  aus dem offenen Intervall  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  ist die rechtsseitig maximale Lösung  $x_\mu$  auf dem Zeitintervall  $[t_*, t_\mu)$  definiert, wobei  $t_*$  als Anfangszeit verstanden werden kann. Im Limes  $\mu \rightarrow 0$  konvergieren die Funktionen  $x_\mu$  uniform auf jedem Zeitintervall  $[0, t_\#]$  mit  $t_* < t_\# < t_0$  gegen  $x_0$ ; beachte, dass es für jedes solches  $t_\#$  ein  $\varepsilon_\#$  mit  $0 < \varepsilon_\# < \varepsilon$  gibt, so dass die Funktion  $x_\mu$  für alle Parameter  $\mu$  mit  $|\mu| \leq \varepsilon_\#$  auf dem Zeitintervall  $[t_*, t_\#]$  definiert ist, d.h. dass  $t_\mu > t_\#$  gilt.

2. Eine Familie  $(f_\eta)_{|\eta| < \varepsilon}$  regulärer Funktionen  $f_\eta : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt Lipschitz-Familie uniform regulärer Funktionen (oder einfach uniform stark regulär), falls es eine Konstante  $L$  sowie eine stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$|f_{\eta_2}(t, x_2) - f_{\eta_1}(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1| + g(t)|\eta_2 - \eta_1|$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  und alle  $x_1, x_2 \in \Omega$  gilt.

**Satz 10** (Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten). Sei  $f$  stark regulär und sei  $(x_\mu)_{\mu < \varepsilon}$  eine Familie von rechtsseitig maximalen Lösungen  $x_\mu : [t_*, t_\mu) \rightarrow \Omega$  der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x)$ , so dass

$$x_\mu(t_*) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} x_0(t_*).$$

Dann existiert für jedes  $t_\# \in [t_*, t_0)$  ein  $\varepsilon_\# \in (0, \varepsilon]$ , so dass  $t_\mu > t_\#$  sowie

$$\sup_{t \in [t_*, t_\#]} |x_\mu(t) - x_0(t)| \leq |x_\mu(t_*) - x_0(t_*)| \exp\left(L|t_\# - t_*|\right)$$

für alle  $\mu$  mit  $|\mu| \leq \varepsilon_\#$  gilt. Insbesondere gilt

$$\sup_{t \in [t_*, t_\#]} |x_\mu(t) - x_0(t)| \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0.$$

*Beweis.* Für jedes  $\mu$  und alle  $t \in [t_*, t_\mu]$  gilt nach Voraussetzung

$$x_\mu(t) = x_\mu(t_*) + \int_{t_*}^t f(s, x_\mu(s)) ds.$$

Für alle  $t$  mit  $t_* \leq t < \min\{t_0, t_\mu\}$  folgt nun

$$\begin{aligned} |x_\mu(t) - x_0(t)| &\leq |x_\mu(t_*) - x_0(t_*)| + \int_{t_*}^t |f(s, x_\mu(s)) - f(s, x_0(s))| ds \\ &\leq |x_\mu(t_*) - x_0(t_*)| + \int_{t_*}^t L|x_\mu(s) - x_0(s)| ds, \end{aligned}$$

und Gronwall's Lemma liefert

$$|x_\mu(t) - x_0(t)| \leq |x_\mu(t_*) - x_0(t_*)| \exp\left(L(t - t_*)\right). \quad (2.2)$$

Sei nun  $t_\#$  mit  $t_* < t_\# < t_0$  fixiert. Dann ist wegen der Stetigkeit der Funktion  $x_0$  die Menge

$$\Gamma_0 := \{x_0(t) : t \in [t_*, t_\#]\}$$

eine kompakte Teilmenge von  $\Omega$  und es existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$B_\delta(\Gamma_0) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, \Gamma_0) = \min_{y \in \Gamma_0} |x - y| < \delta\right\} \subset \Omega.$$

Wir wählen nun  $\varepsilon_\# \in (0, \varepsilon]$ , so dass

$$|x_\mu(t_*) - x_0(t_*)| \exp\left(L(t_\# - t_*)\right) \leq \delta \quad \text{für alle } |\mu| \leq \varepsilon_\#$$

gilt. Aufgrund der Maximalität von  $x_\mu$  schließen wir, dass  $t_\mu > t_\#$  für alle  $\mu$  mit  $|\mu| \leq \varepsilon_\#$  gelten muss (andernfalls könnte  $x_\mu$  nicht eine rechtsseitig maximale Lösung sein). Die zweite Behauptung folgt dann unmittelbar aus (2.2).  $\square$

**Bemerkung.** *Mit denselben Beweisideen kann man ein analoges Resultat für linksseitig maximale Familien  $x_p : (t_p, t_*] \rightarrow \Omega$  ableiten.*

**Satz 11** (Stetige Abhängigkeit von Parametern). *Sei  $(f_\eta)_{|\eta| < \varepsilon}$  eine Lipschitz-Familie uniform regulärer Funktionen, und sei  $(x_\eta)_{|\eta| < \varepsilon}$  eine Familie von rechtsseitig maximalen Lösungen  $x_\eta : [t_*, t_\eta] \rightarrow \Omega$  des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = f_\eta(t, x), \quad x(t_*) = x_*.$$

*Dann existiert für jedes  $t_\# \in [t_*, t_0)$  ein  $\varepsilon_\# \in (0, \varepsilon]$ , so dass  $t_\eta \geq t_\#$  und*

$$\sup_{t \in [t_*, t_\#]} |x_\eta(t) - x_0(t)| \leq M |\eta| \exp\left(L|t - t_*|\right) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

*für alle  $\eta$  mit  $|\eta| \leq \varepsilon_\#$  gilt, wobei die Konstante  $M$  weder von  $\eta$  noch von  $t_\#$  abhängt.*

*Beweis.* Es reicht, die Aussagen für den Fall  $t_0 < \infty$  zu beweisen; der Fall  $t_0 = \infty$  kann dann analog behandelt werden. Für jedes  $\eta$  und alle  $t$  mit  $t_* \leq t \leq \min\{t_0, t_\eta\}$  gilt

$$\begin{aligned} |x_\eta(t) - x_0(t)| &\leq \int_{t_*}^t |f_\eta(s, x_\eta(s)) - f_0(s, x_0(s))| \, ds \\ &\leq \int_{t_*}^t L |x_\eta(s) - x_0(s)| + g(s) |\eta| \, ds \\ &\leq M |\eta| + \int_{t_*}^t L |x_\eta(s) - x_0(s)| \, ds, \end{aligned}$$

wobei die Konstante

$$M := \int_{t_*}^{t_0} g(s) \, ds$$

nur von der Lösung  $x_0$  abhängt. Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall erhalten wir

$$|x_\eta(t) - x_0(t)| \leq M |\eta| \exp\left(L|t - t_*|\right)$$

und die Behauptungen können analog zum Beweis von Satz 10 bewiesen werden.  $\square$

## 2.4 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Differentialgleichungen im  $\mathbb{R}^d$ , d.h. wir studieren Lösungen des Systems

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (2.3)$$

wobei die Funktionen  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  stetig und gegeben sind. Eine Lösung ist dann eine stetig differenzierbare und vektorwertige Funktion  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Das System (2.3) heißt *homogen* falls  $b = 0$ , andernfalls *inhomogen*.

**Satz 12.** *Jede maximale Lösung zu (2.3) ist für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  definiert.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Folgerung 8. □

### 2.4.1 Homogene Gleichungen

Eine sehr wichtige Eigenschaft linearer und homogener Differentialgleichungen ist das *Superpositionsprinzip*. Dieses besagt, dass die Summe von zwei Lösungen wieder eine Lösung ist.

**Satz 13** (Superpositionsprinzip und Lösungsraum). *Der Lösungsraum des homogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x$  ist ein  $d$ -dimensionaler Vektorraum. Insbesondere sind für je  $d$  Lösungen  $x^{(1)}, \dots, x^{(d)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  die folgenden Aussagen äquivalent :*

1. *die Funktionen  $x^{(1)}, \dots, x^{(d)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  sind Basis des Lösungsraumes,*
2. *die Vektoren  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(d)}(t) \in \mathbb{R}^d$  sind für ein  $t \in \mathbb{R}$  linear unabhängig,*
3. *die Vektoren  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(d)}(t) \in \mathbb{R}^d$  sind für alle  $t \in \mathbb{R}$  linear unabhängig.*

*Beweis.* Für gegebenes  $t_0 \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Abbildung

$$L_{t_0} : \xi \in \mathbb{R}^d \quad \mapsto \quad \text{Lösung } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ mit Anfangswert } x(t_0) = \xi.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit von maximalen Lösungen garantiert, dass  $L_{t_0}$  surjektiv und injektiv ist. Außerdem impliziert die Linearität der Differentialgleichung, dass  $L_{t_0}$  eine lineare Abbildung ist, d.h. es gilt

$$\left( L_{t_0}(\lambda_1 \xi^{(1)} + \lambda_2 \xi^{(2)}) \right)(t) = \lambda_1 (L_{t_0} \xi^{(1)})(t) + \lambda_2 (L_{t_0} \xi^{(2)})(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und alle  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in \mathbb{R}^d$ . Hieraus schließen wir, dass der Lösungsraum in der Tat ein  $d$ -dimensionaler Vektorraum ist. Die behauptete Äquivalenz folgt schließlich weil  $L_{t_0}$  für jedes  $t_0 \in \mathbb{R}$  eine Vektorraum-Isomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^d$  und dem Lösungsraum der Gleichung ist. □

**Definition 14** (Fundamentalsystem und Wronski<sup>7</sup>-Determinante). *Eine Basis*

$$x^{(1)}, \dots, x^{(d)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

*des Lösungsraumes des homogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x$  heißt Fundamentalsystem. Die matrixwertige Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  mit*

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(d)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_d^{(1)}(t) & \dots & x_d^{(d)}(t) \end{pmatrix}$$

*heißt Fundamentalmatrix, und  $\det \Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die Wronski-Determinante.*

<sup>7</sup>Józef Maria Hoëné-Wroński (1776–1853), polnischer Philosoph und Mathematiker.

**Bemerkung.**

1. Nach Satz 13 gilt  $\det \Phi(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Fundamentalsysteme und -matrizen sind nicht eindeutig. Für zwei verschiedene Fundamentalmatrizen  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}$  gibt es aber immer eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}(d \times d)$ , so dass

$$\Phi(t) = \tilde{\Phi}(t)B$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt (siehe Übungsaufgabe). Insbesondere hängt  $B$  nicht von der Zeit  $t$  ab.

3. Man rechnet leicht nach, dass jede Fundamentalmatrix Lösung der matrizenwertigen Differentialgleichung

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

ist. Umgekehrt, die Spalten einer jeden Lösung  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  mit  $\det \Phi(t) \neq 0$  dieser Gleichung definieren ein Fundamentalsystem für  $\dot{x} = A(t)x$ .

4. Seien  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gegeben. Durch Nachrechnen zeigt man leicht, dass für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^d$  die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = \xi$$

mittels

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi$$

durch die Fundamentalmatrix  $\Phi$  ausgedrückt werden kann.

**Beispiel.** Der harmonische Oszillator

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

besitzt die linear unabhängigen Lösungen

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} +\sin(t) \\ +\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Diese liefern die Fundamentalmatrix

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) & +\sin(t) \\ -\sin(t) & +\cos(t) \end{pmatrix},$$

wobei offensichtlich  $\det \Phi(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

**Satz 15** (Dynamik der Wronski-Determinante). Sei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  eine Fundamentalmatrix für das homogene System  $\dot{x} = A(t)x$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\det \Phi(t)) = \text{tr } A(t) \cdot \det \Phi(t) \quad (2.4)$$

und damit

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds\right). \quad (2.5)$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst eine beliebige Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  mit

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1}(t) & \dots & \Phi_{1,d}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{d,1}(t) & \dots & \Phi_{d,d}(t) \end{pmatrix}.$$

Nach den Rechenregeln für Determinanten (d.h. weil  $\det \Phi$   $d$ -linear bzgl. der Spalten von  $\Phi$  ist) gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t) &= \det \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_{1,1}(t) & \Phi_{1,2}(t) & \dots & \Phi_{1,d}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{\Phi}_{d,1}(t) & \Phi_{d,2}(t) & \dots & \Phi_{d,d}(t) \end{pmatrix} + \dots \\ &+ \det \begin{pmatrix} \Phi_{1,1}(t) & \dots & \Phi_{1,d-1}(t) & \dot{\Phi}_{1,d}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Phi_{d,1}(t) & \dots & \Phi_{d,d-1}(t) & \dot{\Phi}_{d,d}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sei nun  $t_0 \in \mathbb{R}$  gegeben und  $\Phi$  eine Fundamentalmatrix, d.h. es gelte  $\Phi_{i,j}(t) = x_i^{(j)}(t)$  im Sinne von Definition 14. Wir betrachten zunächst den Spezialfall  $\Phi(t_0) = \text{id}$  (im Allgemeinen wird aber  $\Phi(t) \neq \text{id}$  für alle  $t \neq t_0$  gelten). Durch Nachrechnen verifizieren wir

$$\det \begin{pmatrix} \dot{x}_1^{(1)}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ \dot{x}_2^{(1)}(t_0) & 1 & \dots & 0 \\ \dot{x}_3^{(1)}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_d^{(1)}(t_0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \dot{x}_1^{(1)}(t_0) = (A(t_0)x^{(1)}(t_0))_1 = A_{1,1}(t_0),$$

sowie entsprechende Formeln für alle anderen Terme in (2.6). Insgesamt erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t_0) = A_{1,1}(t_0) + \dots + A_{d,d}(t_0) = \text{tr } A(t_0) = \text{tr } A(t_0) \cdot \det \Phi(t_0). \quad (2.7)$$

Sei nun  $\Phi(t_0) \neq \text{id}$ . Dann ist  $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$  auch ein Fundamentalsystem für  $\dot{x} = A(t)x$ , und für dieses haben wir bereits gezeigt, dass

$$\frac{d}{dt} \det \tilde{\Phi}(t) = \text{tr } A(t) = \text{tr } A(t) \cdot \det \tilde{\Phi}(t) \quad (2.8)$$

gilt. Da aber

$$\det \tilde{\Phi}(t) = \det \Phi^{-1}(t_0) \cdot \det \Phi(t), \quad \frac{d}{dt} \det \tilde{\Phi}(t) = \det \Phi^{-1}(t_0) \cdot \frac{d}{dt} \det \Phi(t),$$

gilt, folgt aus (2.8) wieder (2.7). Da  $t_0$  außerdem beliebig war, folgt (2.4) aus (2.7). Durch Lösen der skalaren Differentialgleichung (2.4) ergibt sich schließlich die Formel (2.5).  $\square$

Man kann den Beweis von Satz 15 alternativ auch wie folgt führen<sup>8</sup>: Nach einem wohlbekanntem Resultat der Analysis ist die Abbildung

$$\det : \text{Mat}(d \times d) \cong \mathbb{R}^{d^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

<sup>8</sup>Der Autor dankt Gautam Banhatti für diesen Hinweis.

in jedem  $M \in \text{Mat}(d \times d)$  mit  $\det M \neq 0$  differenzierbar, wobei

$$\langle D \det(M), N \rangle = \det(M) \cdot \text{tr}(M^{-1}N) \quad \text{für alle } N \in \text{Mat}(d \times d)$$

im Sinne linearer Abbildungen gilt, und für  $M = \Phi(t)$  und  $N = \dot{\Phi}(t)$  ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = \langle D \det(\Phi(t)), \dot{\Phi}(t) \rangle = \det \Phi(t) \cdot \text{tr}(\Phi(t)^{-1} \dot{\Phi}(t)).$$

Wegen  $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$  und weil die Spur einer Matrix invariant unter Konjugation ist, gilt außerdem

$$\text{tr}(\Phi(t)^{-1} \dot{\Phi}(t)) = \text{tr}(\Phi(t)^{-1} A(t) \Phi(t)) = \text{tr}(A(t)).$$

Durch Einsetzen erhalten wir schließlich zunächst (2.4) und anschließend wieder (2.5).

## 2.4.2 Inhomogene Gleichungen

Wir untersuchen nun die Lösungen des inhomogenen Problems.

**Satz 16** (Lösung des inhomogenen Problems). *Der Lösungsraum des inhomogenen Systems  $\dot{x} = A(t)x + b(t)$  ist ein affiner Raum, d.h. wenn  $\bar{x}_{\text{inh}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine gegebene Lösung ist, so kann jede andere Lösung  $x_{\text{inh}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  als*

$$x_{\text{inh}} = \bar{x}_{\text{inh}} + x_{\text{hom}}$$

geschrieben werden, wobei  $x_{\text{hom}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Lösung des homogenen Problems  $\dot{x} = A(t)x$  ist.

*Beweis.* Die Behauptung folgt, da  $x_{\text{inh}} - \bar{x}_{\text{inh}}$  offensichtlich eine Lösung des homogenen Problems ist, und weil  $\bar{x}_{\text{inh}} + x_{\text{hom}}$  stets Lösung des inhomogenen Problems ist.  $\square$

**Beispiel.** *Wir betrachten die skalare Differentialgleichung*

$$\dot{x} + x = t. \tag{2.9}$$

*Die entsprechende homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung*

$$x_{\text{hom}}(t) = c \exp(-t),$$

*wobei die Konstante  $c$  durch Anfangsdaten bestimmt werden kann, und durch Nachrechnen verifizieren wir, dass*

$$\bar{x}_{\text{inh}}(t) = \exp(-t) + t - 1$$

*eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist (wir werden weiter unten sehen, wie man eine spezielle Lösung finden kann). Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist damit durch*

$$x_{\text{inh}}(t) = (c + 1) \exp(-t) + t - 1 = x_{\text{inh}}(t) = (x_{\text{inh}}(0) + 1) \exp(-t) + t - 1$$

*gegeben, wobei  $c = x_{\text{inh}}(0)$  der freie Parameter ist.*

In vielen praktischen Fällen ist die folgende Lösungsformel nützlich.

**Satz 17** (Prinzip von Duhamel<sup>9</sup>, Variation der Konstanten). *Jede Lösung des inhomogenen Problems  $\dot{x} = A(t)x + b(t)$  kann als*

$$x_{\text{inh}}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_{\text{inh}}(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) \, ds \quad (2.10)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  geschrieben werden. Hierbei ist  $t_0 \in \mathbb{R}$  eine beliebige Zeit und  $\Phi(t)$  ist eine Fundamentalmatrix des homogenen Problems  $\dot{x} = A(t)x$ .

*Beweis.* Wir beginnen den sogenannten *Variation-der-Konstanten-Ansatz*

$$x_{\text{inh}}(t) = \Phi(t)c(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

und berechnen

$$\dot{x}_{\text{inh}}(t) = \dot{\Phi}(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t)$$

sowie

$$A(t)x_{\text{inh}}(t) + b(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t) = \dot{\Phi}(t)c(t) + b(t).$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten sehen wir, dass  $x_{\text{inh}}$  genau dann eine Lösung des inhomogenen Problems ist, wenn

$$\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t)b(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) \, ds$$

und mit  $c(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_{\text{inh}}(t_0)$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** *Die Lösungsformel (2.10) hängt nicht von der Wahl der Fundamentalmatrix ab. In der Tat, ist  $\tilde{\Phi}$  eine weitere Fundamentalmatrix, so gilt*

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \tilde{\Phi}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(s)$$

für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  (siehe Übungsaufgabe).

**Beispiel.** *Wir betrachten noch einmal die inhomogene Differentialgleichung (2.9) und suchen die allgemeine Lösung durch den Variation-der-Konstanten-Ansatz*

$$x_{\text{inh}}(t) = c(t) \exp(-t).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\dot{c}(t) \exp(-t) = t$$

und daher

$$c(t) = c(0) + 1 + (t-1) \exp(+t),$$

wobei  $c(0)$  die Rolle einer Integrationskonstanten spielt. Damit, und weil  $c(0) = x_{\text{inh}}(0)$ , ist

$$x_{\text{inh}}(t) = (x_{\text{inh}}(0) + 1) \exp(-t) + t - 1$$

die allgemeine Lösung von (2.9).

<sup>9</sup>Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872), französischer Mathematiker und Physiker.

### 2.4.3 Matrixexponential und autonome Gleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir lineare Systeme, die sowohl homogen als auch autonom sind, d.h. wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = Ax,$$

wobei  $A \in \text{Mat}(d \times d)$  eine gegebene reellwertige Matrix ist.

Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$|A| := \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,d} |A_{i,j}|^2}$$

die euklidische Norm (bzw. den euklidische Betrag) der Matrix  $A = (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$  und mit  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$  den euklidischen Betrag des Vektors  $x = (x_1, \dots, x_d)$ . Dann gilt

$$|Ax| \leq |A| |x|, \quad |AB| \leq |A| |B|, \quad |A+B| \leq |A| + |B| \quad (2.11)$$

für alle Vektoren  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle  $d \times d$ -Matrizen  $A, B$ .

**Lemma 18** (Existenz des Matrixexponentials). *Für jede Matrix  $A \in \text{Mat}(d \times d)$  ist*

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \text{id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \in \text{Mat}(d \times d)$$

*absolut konvergent (und damit auch wohldefiniert). Insbesondere gilt*

$$\exp(A) = Q^{-1} \exp(B) Q$$

*sofern  $A = Q^{-1} B Q$  mit  $B \in \text{Mat}(d \times d)$  und  $Q \in \text{Mat}(d \times d)$  invertierbar gilt.*

*Beweis. Teil 1:* Für festes  $A$  betrachten wir die Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Mat}(d \times d)$  mit

$$S_n := \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}.$$

Dann gilt wegen der Eigenschaften von  $|\cdot|$  die Abschätzung

$$|S_{n+m} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{A^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \left| \frac{A^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|A|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{|A|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!}.$$

und damit

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |S_{n+m} - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!}.$$

Die rechte Seite konvergiert nun für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0, da die reellwertige Reihe

$$\exp(|A|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!}$$

absolut konvergiert. Insbesondere ist die Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge (im Raum der Matrizen  $\text{Mat}(d \times d) \cong \mathbb{R}^{d^2}$ ) und daher konvergent, d.h.

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

ist in der Tat wohldefiniert. Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{A^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k}{k!} = \exp(|A|) < \infty$$

schließen wir schließlich, dass die Reihe des Matrixexponentials sogar absolut konvergiert.

*Teil 2:* Sei nun  $A = Q^{-1}BQ$ . Dann gilt  $A^0 = \text{id} = Q^{-1}B^0Q$  sowie  $A^1 = Q^{-1}B^1Q$  und

$$A^2 = Q^{-1}BQQ^{-1}BQ = Q^{-1}B^2Q.$$

Durch Induktion folgt ganz allgemein  $A^k = Q^{-1}B^kQ$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit ergibt sich

$$S_n = Q^{-1}T_nQ, \quad T_n := \sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!},$$

und der Limes  $n \rightarrow \infty$  liefert  $\exp(A) = Q^{-1} \exp(B)Q$ . □

### Bemerkung.

1. Das Matrixexponential  $\exp(A)$  wird analog für komplexwertige Matrizen  $A \in \text{Mat}(d \times d; \mathbb{C})$  definiert und Lemma 18 kann ganz analog zum reellen Fall bewiesen werden.
2. Ist  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  eine Diagonalmatrix, so gilt  $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_d^k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit

$$\exp(A) = \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_d)).$$

3. Es gilt  $\exp(A)^T = \exp(A^T)$ , wobei  $A^T$  die Transponierte von  $A$  ist.
4. Da die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist, können wir nicht erwarten, dass

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

für alle Matrizen  $A, B \in \text{Mat}(d \times d)$  gilt. In der Tat, wir haben

$$\exp(A+B) = \text{Id} + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$$

und

$$\begin{aligned} \exp(A)\exp(B) &= (\text{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots)(\text{Id} + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots) \\ &= \text{Id} + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots, \end{aligned}$$

aber im Allgemeinen nicht  $AB + BA = 2AB$ .

5. Es gilt (siehe Übungsaufgabe)

$$[A, B] := AB - BA = 0 \quad \implies \quad \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B),$$

wobei  $[A, B]$  der Kommutator von  $A$  und  $B$  ist, und damit auch

$$\exp(\lambda_1 A + \lambda_2 A) = \exp(\lambda_1 A) \exp(\lambda_2 A) = \exp(\lambda_2 A) \exp(\lambda_1 A)$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

6. Für jede Matrix  $A \in \text{Mat}(d \times d)$  und je zwei Zeiten  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp\left((t_1 + t_2)A\right) = \exp(t_1 A) \exp(t_2 A),$$

d.h.  $\{\exp(tA) : t \in \mathbb{R}\}$  ist stets multiplikative Untergruppe von  $\text{Mat}(d \times d)$ . Insbesondere gilt

$$\exp(tA) \exp(-tA) = \exp(0 \cdot A) = \text{Id}$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ , d.h.  $\exp(tA)$  ist stets invertierbar.

**Satz 19** (Fundamentalmatrix autonomer Systeme). Die allgemeine maximale Lösung des linearen und autonomen Systems  $\dot{x} = Ax$  ist durch

$$x(t) = \exp\left((t - t_0)A\right)x(t_0)$$

gegeben, wobei  $t_0 \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

*Beweis.* Seien  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}^d$  beliebig, und sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  definiert durch

$$x(t) := \exp\left((t - t_0)A\right)c. \quad (2.12)$$

Dann gilt wegen  $\exp((t + h - t_0)A) = \exp(hA) \exp((t - t_0)A)$  die Formel

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} - Ax(t) = \left(\frac{\exp(hA) - \text{id}}{h} - A\right)x(t) =: R_h x(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $0 \neq h \in \mathbb{R}$ . Die Definition des Matrixexponentials impliziert nun

$$R_h = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!} = hA^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k A^k}{(k+2)!}$$

und daher gilt für festes  $t \in \mathbb{R}$  auch

$$|R_h x(t)| \leq h |A|^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k |A|^k}{k!}\right) |x(t)| \leq h |A|^2 \exp(h |A|) |x(t)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die in (2.12) definierte Funktion  $x$  stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung erfüllt. Nach dem Existenz und Eindeigkeitsatz ist diese Lösung aber die einzige maximale Lösung mit den Anfangsdaten  $x(t_0) = c$ .  $\square$

Satz 19 besagt insbesondere, dass für jedes  $t_0 \in \mathbb{R}$  die matrixwertige Funktion  $\Phi_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  mit

$$\Phi_{t_0}(t) = \exp\left((t - t_0)A\right)$$

eine Fundamentalmatrix des linearen und homogenen Systems  $\dot{x} = Ax$  ist.

**Bemerkung.** Nach Satz 15 gilt

$$\det \exp(tA) = \exp((\operatorname{tr} A)(t - t_0)).$$

Insbesondere impliziert  $\operatorname{tr} A = 0$  schon  $\det \exp(tA) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel.**

1. Diagonalisierbare Matrizen: Mit  $A = Q^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) Q$  gilt

$$\exp(tA) = Q^{-1} \operatorname{diag}(\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_d t)) Q$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Analoge Aussagen gelten im Komplexen.

2. Matrizen in Jordan-Form:<sup>10</sup> Für

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q$$

gilt (siehe Übungsaufgabe)

$$\exp(tA) = Q^{-1} \begin{pmatrix} \exp(t\lambda) & t \exp(t\lambda) \\ 0 & \exp(t\lambda) \end{pmatrix} Q.$$

Auch diese Formeln gelten sowohl im Reellen als auch im Komplexen.

3. Komplexwertig-diagonalisierbare Matrizen: Ein Sonderfall im Reellen sind verallgemeinerte Drehmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

mit Parametern  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , die zwar im Komplexen, aber nicht im Reellen diagonalisierbar sind. Durch Nachrechnen verifizieren wir

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} Q, \quad Q = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ +i & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= Q^{-1} \begin{pmatrix} \exp((\alpha - i\beta)t) & 0 \\ 0 & \exp((\alpha + i\beta)t) \end{pmatrix} Q \\ &= \exp(\alpha t) Q^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) - i \sin(\beta t) & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) + i \sin(\beta t) \end{pmatrix} Q \\ &= \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} +\cos(\beta t) & +\sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & +\cos(\beta t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Matrizen mit Blockstruktur: Seien  $d = n + m$  und

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

<sup>10</sup>Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), französischer Mathematiker.

mit  $B \in \text{Mat}(n \times n)$  und  $C \in \text{Mat}(m \times m)$ . Dann gilt

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tB) & 0 \\ 0 & \exp(tC) \end{pmatrix},$$

wobei diese Formel sich direkt aus den Definition des Matrixexponential und den Eigenschaften der Matrixmultiplikation ergibt (insbesondere gilt  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$ ).

5. Die bisherigen Ergebnisse erlauben es uns – zumindest im Prinzip – die Matrixexponential  $\exp(tA)$  für jede (im Allgemeinen komplexwertige)  $d \times d$ -Matrix  $A$  zu berechnen. Nach dem Jordanschen Darstellungssatz gibt es nämlich zu jedem  $A$  eine invertierbare Matrix  $Q$  (die einen Basiswechsel repräsentiert) sowie eine Blockmatrix  $B$ , so dass

$$A = Q^{-1}BQ, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$$

und so dass jeder der Blöcke  $B_1, \dots, B_m$  entweder Diagonal- oder Jordanmatrix ist.

#### 2.4.4 Klassifikation autonomer Gleichungen in 2D

In diesem Abschnitt untersuchen wir die linearen Dynamiken, die durch eine  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  erzeugt werden können. Bis auf Konjugation mit  $O(2)$ -Matrizen gibt es nach einem wohlbekannten Satz der linearen Algebra die drei Fälle

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  bzw.  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Aus dynamischer Sicht ist aber eine verfeinerte Klassifikation sinnvoll. Wir werden nun alle möglichen Fälle untersuchen, in denen der Kern der Matrix  $A$  trivial ist, das heißt wir nehmen  $\ker A = \{0\}$  an. Darüber hinaus gibt es natürlich noch Fälle, in denen mindestens ein Eigenwert verschwindet (z.Bsp.  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = 0$ ). Diese können analog untersucht werden, stellen aber (aus Sicht der nichtlinearen Theorie) entartete Fälle dar.

**Beispiel** („Node“- generischer Fall). *Dies ist der Fall*

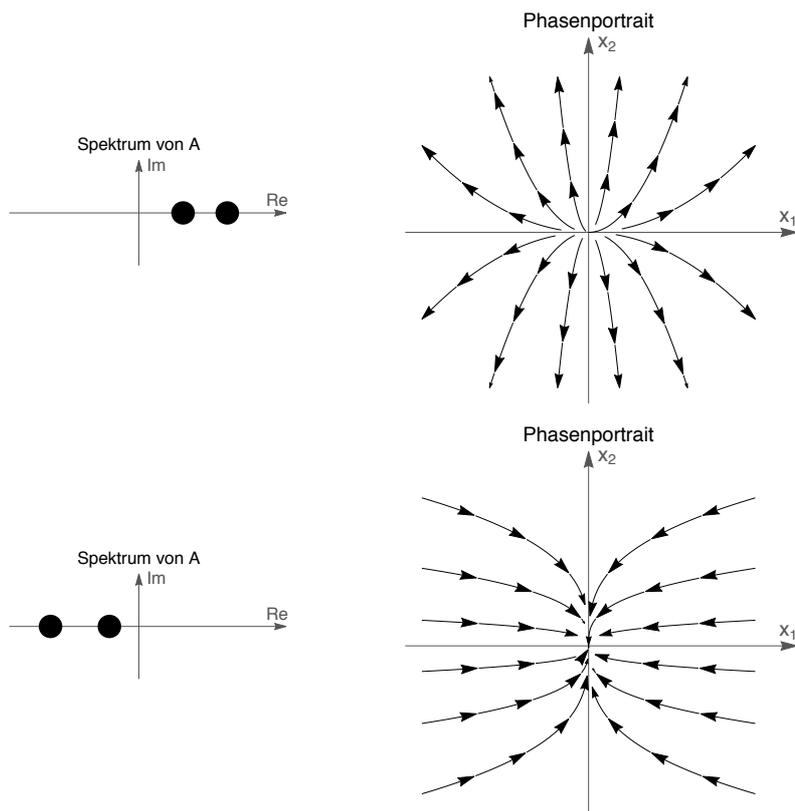
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) = \pm 1.$$

Die allgemeine Lösung lautet

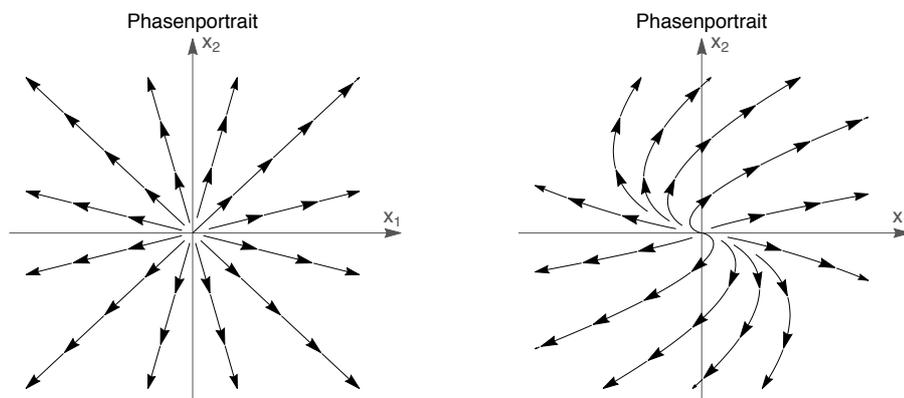
$$x_1(t) = x_1(0) \exp(\lambda_1 t), \quad x_2(t) = x_2(0) \exp(\lambda_2 t)$$

und nach einfachen Rechnungen mit positiven reellen Zahlen (Wurzeln negativer Zahlen sind nicht eindeutig) erhalten wir

$$|x_1(t)| = c |x_2(t)|^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad c = \frac{|x_1(0)|}{|x_2(0)|^{\lambda_1/\lambda_2}}.$$



**Abbildung 2.2:** ‚Node‘: Phasenportrait und Spektrum für  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  bzw.  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .



**Abbildung 2.3:** ‚Node‘: Mögliche Phasenportraits für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ .

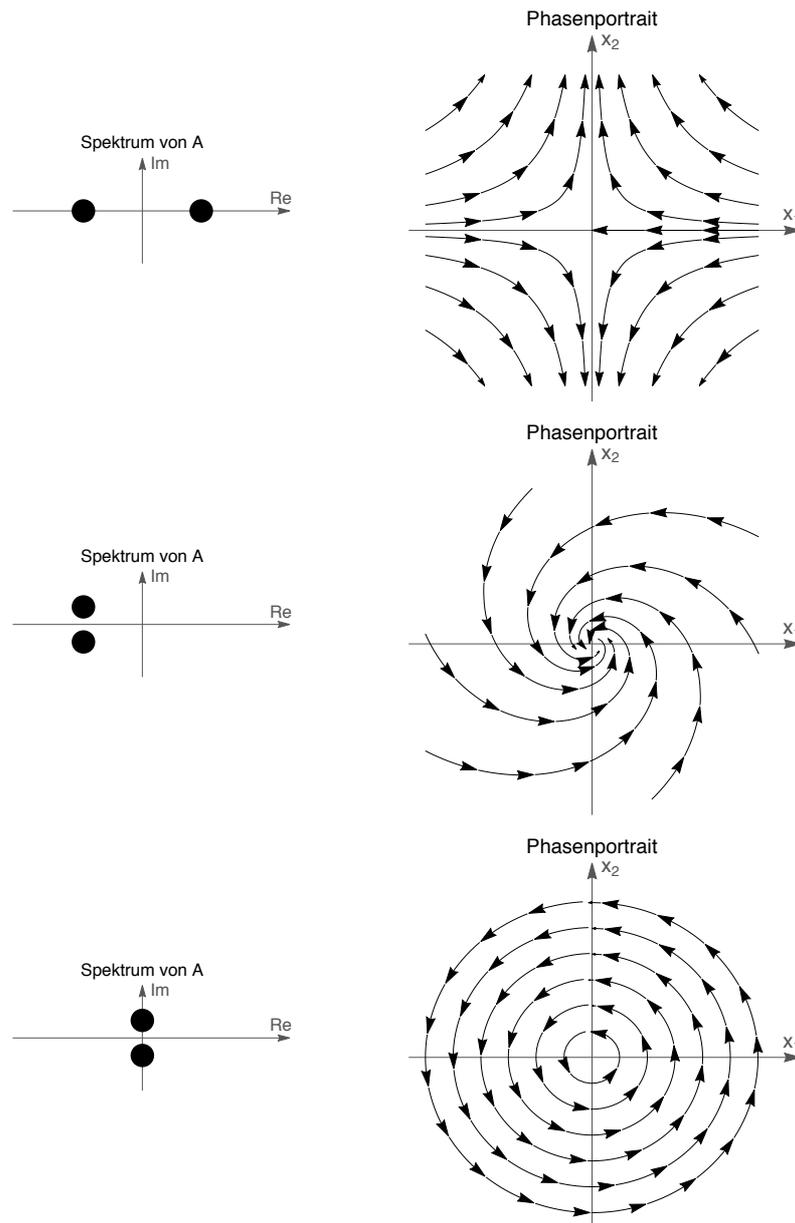
Insbesondere sind die *Orbits* (bzw. *Trajektorien*) des Systems, d.h. die Kurven  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ , *parabelförmig*, siehe *Abbildung 2.2*. Beachte, dass die stationäre Lösung  $(0, 0)$  *stabil* bzw. *instabil* für  $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) = -1$  bzw.  $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) + 1$  ist.

**Beispiel** (‚Node‘- nichtgenerischer Fall). *Im Falle eines einzelnen reellen Eigenwerts  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$  kann die Systemmatrix  $A$  entweder diagonalisierbar sein oder Jordanform haben, d.h. es gilt*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Die allgemeine Lösung im Diagonalfall lautet

$$x_1(t) = x_1(0) \exp(\lambda t), \quad x_2(t) = x_2(0) \exp(\lambda t),$$



**Abbildung 2.4:** ‚Saddle‘ (oben) – ‚Focus‘ (mitte) für  $\alpha < 0$  – ‚Centre‘ (unten): Phasenportraits und Spektrum von A.

so dass die Trajektorien des Systems die Geraden durch den Ursprung sind. Im Jord-anfall gilt hingegen

$$x_1(t) = x_1(0) \exp(\lambda t) + x_2(0)t \exp(\lambda t), \quad x_2(t) = x_2(0) \exp(\lambda t),$$

und damit

$$x_1(t) = \left( \frac{x_1(0)}{x_2(0)} + t \right) x_2(t),$$

siehe Abbildung 2.3.

**Beispiel** (‚Saddle‘). Dies ist der Fall

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{sgn}(\lambda_1) \neq \text{sgn}(\lambda_2).$$

Die allgemeine Lösung lautet wieder

$$x_1(t) = x_1(0) \exp(\lambda_1 t), \quad x_2(t) = x_2(0) \exp(\lambda_2 t),$$

aber die Trajektorien sind nun hyperbelförmig, siehe Abbildung 2.4.

**Beispiel** („Focus“). Im Falle

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ist

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp(\alpha t) \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix},$$

die allgemeine Lösung, d.h. die Trajektorien laufen spiralförmig in den stationären Punkt  $(0, 0)$  hinein (für  $\alpha < 0$ ) bzw. aus diesem heraus (für  $\alpha > 0$ ), siehe Abbildung 2.4.

**Beispiel** („Centre“). In diesem Fall haben wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

und die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix},$$

rotiert um den stationären Punkt  $(0, 0)$ .

### 2.4.5 Stabilität der trivialen Lösung

Jede homogene und lineare Differentialgleichung  $\dot{x} = A(t)x$  besitzt die *triviale Lösung*  $x(t) \equiv 0$ . Wir wollen nun die Stabilität dieser Lösung untersuchen, wobei Stabilität der trivialen Lösung wie folgt definiert ist (vgl. auch Definition 18 in Kapitel 3).

**Definition 20.** Die triviale Lösung von  $\dot{x} = A(t)x$  heißt

1. Ljapunow-stabil (oder einfach stabil), falls für jede Zeit  $t_*$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass die Implikation

$$|x(t_*)| \leq \delta \quad \implies \quad |x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq t_*$$

für jede Lösung  $x$  der Differentialgleichung gilt.

2. asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und darüber hinaus für jedes  $t_*$  ein  $\delta' > 0$  existiert, so dass

$$|x(t_*)| \leq \delta' \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

**Bemerkung.** Aufgrund der Linearität der Gleichung können leicht die folgenden Aussagen abgeleitet werden (Übungsaufgabe):

1. Die triviale Lösung ist stabil genau dann, wenn jede Lösung  $x$  für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt ist, d.h. falls  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| < \infty$  gilt.
2. Die triviale Lösung ist asymptotisch stabil genau dann, wenn jede Lösung für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert, d.h. wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$  gilt.

Wir untersuchen zunächst die Stabilität der trivialen Lösung im autonomen Fall.

**Satz 21** (Stabilitätskriterien für den autonomen Fall  $A(t) \equiv A$ ). *Die komplexen Eigenwerte der Matrix  $A \in \text{Mat}(d \times d)$  seien mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$  bezeichnet.*

1. *Gibt es eine Konstante  $\mu > 0$ , so dass  $\text{Re}(\lambda_k) \leq -\mu$  für alle  $k = 1, \dots, d$ , so ist die triviale Lösung asymptotisch stabil. Insbesondere gibt es für jedes  $0 < \eta < \mu$  eine Konstante  $C_\eta$ , so dass*

$$|x(t)| \leq C_\eta \exp(-\eta(t - t_*)) |x(t_*)| \quad (2.13)$$

für jede Lösung  $x$ , jedes  $t_* \in \mathbb{R}$  und alle  $t \geq t_*$  gilt.

2. *Gilt  $\text{Re}(\lambda_k) \leq 0$  für jeden Nicht-Jordan-Eigenwert  $\lambda_k$  und  $\text{Re}(\lambda_k) < 0$  für jeden Jordan-Eigenwert  $\lambda_k$ , so ist die triviale Lösung stabil. Insbesondere gibt es eine Konstante  $C$ , so dass*

$$|x(t)| \leq C |x(t_*)| \quad (2.14)$$

für jede Lösung  $x$ , jedes  $t_* \in \mathbb{R}$  und alle  $t \geq t_*$  gilt.

3. *Gibt es einen Nicht-Jordan-Eigenwert  $\lambda_k$  mit  $\text{Re}(\lambda_k) > 0$  oder einen Jordan-Eigenwert mit  $\text{Re}(\lambda_k) \geq 0$ , so ist die triviale Lösung instabil. Insbesondere gibt es in jeder Umgebung von 0 ein Anfangsdatum  $x_*$  so dass*

$$|x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$$

für die Lösung mit Anfangsbedingung  $x(t_*) = x_*$ ,  $t_* \in \mathbb{R}$  beliebig, gilt.

*Beweis.* Die Behauptungen folgen mit einfacher linearer Algebra aus den Eigenschaften des Matrixexponentials, siehe insbesondere Beispiel 2.4.3 und die Übungsaufgaben  $\square$

**Bemerkung.** *Die Abschätzungen (2.13) bzw. (2.14) sind äquivalent zu*

$$\left| \exp((t - t_*)A) \right| \leq \tilde{C} \exp(-\eta(t - t_*))$$

bzw.

$$\left| \exp((t - t_*)A) \right| \leq \tilde{C},$$

wobei  $\tilde{C}$  nur von  $\eta$  und  $A$  abhängt.

In vielen praktischen Fällen ist  $A(t)$  nicht konstant aber konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Grenzwert. In diesem Fall schreibt man oft

$$A(t) = A + B(t) \quad \text{wobei} \quad |B(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere gilt dann  $\dot{x}(t) \approx Ax(t)$  für jede Lösung  $x$  und alle großen Zeiten  $t$ , und man könnte vermuten, dass deshalb die Behauptungen von Satz 21 immer noch richtig sind. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht so.

**Beispiel.** Für die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{t}{1+t^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

kann man leicht nachrechnen, dass die Fundamentallösung durch

$$\Phi(t) = \sqrt{1+t^2} \exp(tA).$$

gegeben ist. Damit gilt  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$  für jede Lösung  $x$  und die triviale Lösung ist damit instabil.

**Satz 22** (Ein Stabilitätskriterium für den nicht-autonomen Fall). *Erfüllt  $A$  die erste Bedingung aus Satz 21 und gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} |B(t)| = 0$ , so existieren für jedes  $\eta \in (0, \mu)$  eine Zeit  $t_\eta \in \mathbb{R}$  und eine Konstante  $C_\eta$ , so dass*

$$|x(t)| \leq C_\eta \exp(-\eta(t-t_\eta)) |x(t_\eta)| \quad (2.15)$$

für alle  $t \geq t_\eta$  und jede Lösung von  $\dot{x} = Ax + B(t)x$  gilt. Insbesondere ist die triviale Lösung asymptotisch stabil, denn für jedes  $t_* \in \mathbb{R}$  gilt auch stets

$$|x(t)| \leq C_{*,\eta} \exp(-\eta(t-t_*)) |x(t_*)|, \quad (2.16)$$

wobei  $C_{*,\eta}$  eine geeignet zu wählende Konstante ist, die nur von  $\eta$ ,  $t_*$ ,  $A$  und  $B$  abhängt.

*Beweis.* Satz 21 liefert eine Konstante  $C_\eta$ , so dass

$$|\exp(tA)| \leq C_\eta \exp(-\tilde{\eta}t)$$

für alle  $t \geq 0$  gilt, wobei  $\tilde{\eta} := \frac{1}{2}(\eta + \mu)$  größer als  $\eta$  aber immer noch kleiner als  $\mu$  ist. Wir wählen nun  $t_\eta \geq 0$  so groß, dass

$$C_\eta \sup_{t \geq t_\eta} |B(t)| \leq \tilde{\eta} - \eta = \frac{1}{2}(\mu - \eta) =: \varepsilon.$$

Mit Variation der Konstanten erhalten wir

$$x(t) = \exp(A(t-t_\eta))x(t_\eta) + \int_{t_\eta}^t \exp((t-s)A)B(s)x(s) ds$$

und damit

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |\exp((t-t_\eta)A)| |x(t_\eta)| + \int_{t_\eta}^t |\exp((t-s)A)| |B(s)| |x(s)| ds \\ &\leq C_\eta \exp(-\tilde{\eta}(t-t_\eta)) |x(t_\eta)| + C_\eta \int_{t_\eta}^t \exp(-\tilde{\eta}(t-s)) |B(s)| |x(s)| ds. \\ &\leq C_\eta \exp(-\tilde{\eta}(t-t_\eta)) |x(t_\eta)| + \varepsilon \int_{t_\eta}^t \exp(-\tilde{\eta}(t-s)) |x(s)| ds. \end{aligned}$$

Mit  $\zeta(t) := \exp(+\tilde{\eta}(t-t_\eta)) |x(t)|$  gilt deshalb

$$\zeta(t) \leq C_\eta |x(t_\eta)| + \varepsilon \int_{t_\eta}^t \zeta(s) ds$$

und Gronwalls Lemma liefert

$$\zeta(t) \leq C_\eta |x(t_\eta)| \exp(\varepsilon(t - t_\eta)).$$

Insbesondere gilt

$$|x(t)| \leq C_\eta |x(t_\eta)| \exp(\varepsilon(t - t_\eta) - \tilde{\eta}(t - t_\eta)) = C_\eta |x(t_\eta)| \exp(-\eta(t - t_\eta))$$

und damit auch die Behauptung (2.15).

Sei nun  $t_* \in \mathbb{R}$  beliebig und  $\Phi$  die Fundamentallösung zu  $\dot{x} = Ax + B(t)x$  mit  $\Phi(t_*) = \text{Id}$ , d.h.  $x(t) = \Phi(t)x(t_*)$  gilt für jede Lösung  $x$ . Wir konstruieren nun die Konstante  $C_{*,\eta}$  für den Fall  $t_* < t_\eta$ ; für  $t_* > t_\eta$  kann analog argumentiert werden. Für  $t_* < t_\eta$  setzen wir

$$C_{*,\eta} := \max \left\{ C_\eta \exp(\eta(t_\eta - t_*)) |\Phi(t_\eta)|, \sup_{t \in [t_*, t_\eta]} |\Phi(t)| \exp(\eta(t - t_*)) \right\}.$$

Insbesondere gilt für alle  $t \in [t_*, t_\eta]$  die Abschätzung

$$|x(t)| = |\Phi(t)x(t_*)| \leq C_{*,\eta} \exp(-\eta(t - t_*)) |x(t_*)|$$

und damit (2.16). Für  $t \geq t_\eta$  gilt hingegen

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq C_\eta \exp(-\eta(t - t_\eta)) |x(t_\eta)| \\ &= C_\eta \exp(-\eta(t - t_*)) \exp(\eta(t_\eta - t_*)) |\Phi(t_\eta)x(t_*)| \\ &\leq \left( C_\eta \exp(\eta(t_\eta - t_*)) |\Phi(t_\eta)| \right) \exp(-\eta(t - t_*)) |x(t_*)| \\ &\leq C_{*,\eta} \exp(-\eta(t - t_*)) |x(t_*)| \end{aligned}$$

und damit auch (2.16). □

**Bemerkung.** In den Übungsaufgaben wird folgendes Resultat bewiesen: Erfüllt  $A$  die zweite Bedingung aus Satz 21, so garantiert

$$\int_0^\infty |B(t)| dt < \infty$$

die Stabilität der trivialen Lösung von  $\dot{x} = Ax + B(t)x$ .

## 2.4.6 Floquet-Theorie

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, d.h. Systeme der Bauart

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t + t_{\text{per}}) = A(t), \quad (2.17)$$

wobei  $t_{\text{per}} \in \mathbb{R}$  die feste Periode der stetigen matrizenwertigen Abbildung  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  ist. Solche Gleichungen entstehen zum Beispiel, wenn wir eine autonome nichtlineare Differentialgleichung  $\dot{y} = f(y)$  entlang eines  $t_{\text{per}}$ -periodischen Orbits  $y_*$  linearisieren: der Ansatz  $y(t) = y_*(t) + \varepsilon x(t)$  mit  $0 < \varepsilon \ll 1$  liefert nämlich

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + O(\varepsilon), \quad A(t) = Df(y_*(t))$$

und damit zu führender Ordnung (d.h. unter Vernachlässigung der  $\varepsilon$ -Terme) die lineare Gleichung (2.17).

**Bemerkung.** *Obwohl die Gleichung (2.17) periodisch ist, ist nicht jede Lösung notwendigerweise periodisch. Ein einfaches eindimensionales Beispiel ist die skalare Differentialgleichung*

$$\dot{x} = a(t)x, \quad a(t) := \alpha + \cos(t),$$

deren allgemeine Lösung durch

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right)x(0) = \exp(\alpha t) \exp(\sin(t))x(0)$$

gegeben ist. Insbesondere ist für  $\alpha \neq 0$  nur die triviale Lösung periodisch.

Wir beweisen zunächst ein technisches Resultat über das Matrixexponential.

**Lemma 23** (Existenz eines verallgemeinerten Matrix-Logarithmus). *Für jede invertierbare Matrix  $C \in \text{Mat}(d \times d)$  existiert eine Matrix  $B \in \text{Mat}(d \times d)$  sowie eine orthogonale Matrix  $K \in \text{OMat}(d \times d)$ ,*

$$C = K \exp(B) = \exp(B)K, \quad KB = BK, \quad K^2 = \text{Id}.$$

gilt.

*Beweis.* Vereinfachung durch Konjugation mit geeigneten Matrizen: Wir können annehmen, dass  $C$  eine Blockmatrix ist, wobei jeder Block

1. eine Diagonalmatrix  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  mit von Null verschiedenen Eigenwerten ist,
2. eine (reelle)  $2 \times 2$  Matrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta \\ -\sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix}$$

ist, wobei  $\varrho > 0$  und  $\alpha = \varrho \cos \eta$ ,  $\beta = \varrho \sin \eta$ ,

3. eine Jordanmatrix der Länge  $m$  zum Eigenwert  $\lambda \neq 0$  ist.

In der Tat, für eine allgemeine invertierbare Matrix  $C$  gibt es (nach einem wohlbekannten Satz der linearen Algebra) eine Matrix  $Q \in \text{Mat}(d \times d)$  sowie eine solche Blockmatrix  $\tilde{C}$ , so dass  $C = Q^{-1}\tilde{C}Q$ . Finden wir nun eine Matrix  $\tilde{B}$  und eine orthogonale Matrix  $\tilde{K}$  mit

$$\tilde{K} \exp(\tilde{B}) = \tilde{C}, \quad \tilde{K}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{K}, \quad \tilde{K}^2 = \text{Id},$$

so gilt

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}\tilde{K} \exp(\tilde{B})Q = \left(Q^{-1}\tilde{K}Q\right) \left(Q^{-1} \exp(\tilde{B})Q\right) \\ &= \left(Q^{-1}\tilde{K}Q\right) \exp\left(Q^{-1}\tilde{B}Q\right) = K \exp(B) \end{aligned}$$

mit  $K := Q^{-1}\tilde{K}Q$  und  $B := Q^{-1}\tilde{B}Q$ , wobei  $K$  wieder eine orthogonale Matrix ist und  $KB = BK$  sowie  $K^2 = \text{Id}$  nach Konstruktion gelten. Wir bemerken außerdem, dass es für Blockmatrizen  $C$  ausreichend ist,  $B \in \text{Mat}(m \times m)$  und  $K \in \text{OMat}(m \times m)$  für jeden Block der Länge  $m$  zu finden.

Diagonalmatrizen: In diesem Fall setzen wir

$$B := \text{diag}(\ln |\lambda_1|, \dots, \ln |\lambda_m|), \quad K := \text{diag}(\text{sgn} \lambda_1, \dots, \text{sgn} \lambda_m),$$

und verifizieren  $C = K \exp(B) = \exp(B)K$  durch einfache Rechnungen. Beachte, dass  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1 \dots m$  gilt.

Verallgemeinerte Drehmatrizen: Wir setzen

$$B := \ln \varrho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt  $\exp(B) = C$  wieder durch einfache Rechnungen.

Jordan-Matrizen: Sei also  $C$  eine Jordan-Matrix der Dimension  $2 \leq m \leq d$  zum Eigenwert  $\lambda \neq 0$ . Mit  $K := (\text{sgn} \lambda) \text{Id}$  schreiben wir

$$KC = CK = |\lambda| (\text{Id} + N), \quad N := \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und bemerken, dass  $N$  nilpotent ist, d.h. es gilt  $N^k = 0$  für alle  $k \geq m$ . Insbesondere ist die Matrix

$$M := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{N^k}{k} = \frac{N}{1} - \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{N^{m-1}}{m-1}$$

wohldefiniert und erfüllt  $\exp(M) = \text{Id} + N$ ; letzteres folgt aus algebraischen Identitäten, weil  $\ln(1+n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k n^k / k$  gilt. Wir können daher

$$B = \ln |\lambda| \text{Id} + M$$

setzen. □

**Bemerkung.** 1. Ein analoges Resultat gilt für komplexwertige Matrizen, wobei dann zusätzlich  $K = \text{Id}$  gewählt werden kann. Dies liegt daran, dass im Komplexen  $-\text{Id} = \exp(i\pi \text{Id})$  gilt, d.h. es gibt einen komplexwertigen Logarithmus der negativen Einheitsmatrix. In Raum der reellwertigen Matrizen gibt es jedoch keine Matrix  $M$  mit  $\exp(M) = -\text{Id}$  und deshalb kann auf die Matrix  $K$  nicht verzichtet werden.

2. Die Matrizen  $K$  und  $B$  aus Satz 23 sind nicht eindeutig.

Wir formulieren nun den Hauptsatz über lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

**Satz 24** (Satz von Floquet<sup>11</sup>). Sei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  eine beliebige Fundamentalmatrix zu (2.17). Dann existiert eine Matrix  $B \in \text{Mat}(d \times d)$  sowie eine orthogonale Matrix  $K \in \text{OMat}(d \times d)$  mit  $BK = KB$  und  $K^2 = \text{Id}$ , so dass

$$P(t + t_{\text{per}}) = P(t)K$$

für die matrizenwertige Abbildung  $P$  mit  $P(t) := \Phi(t) \exp(-tB)$  gilt.

*Beweis.* Mit  $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t + t_{\text{per}})$  gilt

$$\dot{\tilde{\Phi}}(t) = \dot{\Phi}(t + t_{\text{per}}) = A(t + t_{\text{per}})\Phi(t + t_{\text{per}}) = A(t)\tilde{\Phi}(t),$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$  für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  gilt (vgl. die Bemerkungen zu Definition 14). Insbesondere ist  $\tilde{\Phi}$  auch Fundamentallösung zu (2.17) und es gilt

$$\tilde{\Phi}(t + t_{\text{per}}) = \tilde{\Phi}(t)M$$

für eine invertierbare Matrix  $M$  (siehe Übungsaufgabe). Lemma 23 liefert nun Matrizen  $B$  und  $K$ , so dass

$$M = K \exp(t_{\text{per}}B) = \exp(t_{\text{per}}B)K.$$

Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned} P(t + t_{\text{per}}) &= \Phi(t + t_{\text{per}}) \exp(-(t + t_{\text{per}})B) \\ &= (\Phi(t)K \exp(t_{\text{per}}B)) \exp(-tB - t_{\text{per}}B) \\ &= P(t) \left( \exp(tB)K \exp(t_{\text{per}}B) \exp(-tB - t_{\text{per}}B) \right) \\ &= P(t)K, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass mit  $KB = BK$  auch  $K \exp(tB) = \exp(tB)K$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.  $\square$

### Bemerkung.

1. Für komplexwertige Matrizen kann wieder  $K = \text{Id}$  gewählt werden, d.h.  $P$  ist dann  $t_{\text{per}}$ -periodisch. Im Reellen ist  $P$  wenigstens  $2t_{\text{per}}$ -periodisch, denn es gilt  $P(t + 2t_{\text{per}}) = P(t + t_{\text{per}})K = P(t)K^2 = P(t)$ .
2. Die Matrix  $M$  aus dem Beweis von Satz 24 heißt Monodromie-Matrix von (2.17) bzgl. der Fundamentalmatrix  $\Phi$  und die Eigenwerte von  $M$  werden die charakteristischen Multiplikatoren von (2.17) genannt. Nach Konstruktion gilt

$$M = \Phi(t)^{-1}\tilde{\Phi}(t + t_{\text{per}}) = K \exp(t_{\text{per}}B) = \exp(t_{\text{per}}B)K$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Die erste Identität zeigt auch, dass  $M$  i.A. von der Wahl von  $\Phi$  abhängt: Ist  $\tilde{P}$  eine weitere Fundamentalmatrix, so gilt  $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)D$  für eine invertierbare Matrix  $D$  (siehe Übungsaufgabe) und damit

$$\tilde{M} = \tilde{\Phi}(t)^{-1}\tilde{\Phi}(t + t_{\text{per}}) = D^{-1}\Phi(t)^{-1}\Phi(t + t_{\text{per}})D = D^{-1}MD.$$

Die Matrizen  $M$  und  $\tilde{M}$  sind also verschieden, können aber durch Konjugation ineinander überführt werden. Insbesondere hängen alle Invarianten von  $M$  – also etwa  $\text{spec}_{\mathbb{C}}M$ ,  $\det M$  oder  $\text{tr} M$  – nicht von der Wahl von  $\Phi$  ab.

<sup>11</sup>Achille Marie Gaston Floquet (1847–1920), französischer Mathematiker.

3. Wegen  $P(t_0 + nt_{\text{per}}) = P(t_0)K^n$  gilt stets

$$\begin{aligned}\Phi(t_0 + nt_{\text{per}}) &= P(t_0 + nt_{\text{per}}) \exp((t_0 + nt_{\text{per}})B) \\ &= P(t_0)K^n \exp(t_0 B) \exp(t_{\text{per}}B)^n \\ &= \left(P(t_0) \exp(t_0 B)\right) M^n = \Phi(t_0)M^n\end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Die Berechnung von  $M$  bzw.  $K$  und  $B$  ist im Allgemeinen alles andere als trivial.

**Beispiel.** Wir betrachten die (sehr einfache) Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

wobei  $A \in \text{Mat}(2 \times 2)$  eine feste Matrix und  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $t_{\text{per}}$ -periodische Funktion mit  $\int_0^{t_{\text{per}}} a(s) ds = 0$  ist. Aufgrund der speziellen Struktur der rechten Seite in (2.18) können wir leicht nachrechnen, dass durch

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right) \exp(tA)$$

eine Fundamentalmatrix von (2.17) gegeben ist. Insbesondere kann die Monodromie-Matrix  $M$  durch

$$\begin{aligned}M &= \Phi(t)^{-1} \Phi(t + t_{\text{per}}) \\ &= \left(\exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) \exp(-tA)\right) \left(\exp\left(\int_0^{t+t_{\text{per}}} a(s) ds\right) \exp((t + t_{\text{per}})A)\right) \\ &= \exp(t_{\text{per}}A)\end{aligned}$$

berechnet werden, d.h. wir können  $K = \text{Id}$  und  $B = A$  wählen. Insbesondere besitzt (2.18) genau dann eine nichttriviale  $t_{\text{per}}$ -periodische Lösung, falls es ein  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  gibt, so dass

$$\Phi(t + t_{\text{per}})\xi = \Phi(t)\xi \quad \text{bzw.} \quad M\xi = \xi$$

gilt. Hat  $A$  zum Beispiel die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so besitzt  $\exp(t_{\text{per}}A)$  die Eigenwerte  $\exp(t_{\text{per}}\lambda_1)$ ,  $\exp(t_{\text{per}}\lambda_2)$  und  $t_{\text{per}}$ -periodische Lösungen können nicht existieren. Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gilt jedoch} \quad M = \begin{pmatrix} \cos t_{\text{per}} & \sin t_{\text{per}} \\ -\sin t_{\text{per}} & \cos t_{\text{per}} \end{pmatrix}$$

und periodische Lösungen existieren genau dann, wenn  $t_{\text{per}}$  ein Vielfaches von  $2\pi$  ist.

Eine wesentliche Konsequenz des Satzes von Floquet ist, dass das Stabilitätsproblem einer linearen Gleichung mit periodischen Koeffizienten auf ein autonomes Problem zurückgeführt werden kann.

**Satz 25.** Die triviale Lösung von (2.17) ist genau dann stabil (bzw. asymptotisch stabil), falls die triviale Lösung von

$$\dot{y} = By \quad (2.19)$$

stabil (bzw. asymptotisch stabil) ist.

*Beweis. Umrechnung der Lösungen:* Ist  $x$  eine Lösung von (2.17), so gilt

$$x(t) = \Phi(t)(\Phi^{-1}(0)x(0)) = P(t) \exp(tB)(\Phi^{-1}(0)x(0)) = P(t)y(0),$$

wobei  $\Phi$  eine Fundamentalmatrix zu (2.17) ist und  $y$  mit

$$y(t) := \exp(tB)\Phi^{-1}(0)x(0) = \exp(tB)y(0)$$

offensichtlich eine Lösung von (2.19) ist. Ist nun umgekehrt  $y$  eine beliebige Lösung von (2.19) und setzen wir

$$x(t) := P(t)y(t),$$

so erhalten wir

$$x(t) = P(t) \exp(tB)y(0) = \Phi(t)y(0) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}x(0),$$

d.h.  $x$  ist Lösung von (2.17).

Äquivalenz der Stabilität Sei nun  $x$  wieder eine beliebige Lösung von (2.17) und  $y$  die entsprechende Lösung zu (2.19). Dann gilt nach den obigen Überlegungen

$$x(t) = P(t)y(t) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = P(t)^{-1}x(t),$$

wobei wir benutzt haben, dass  $P(t) = \Phi(t) \exp(-tB)$  für jedes  $t$  als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar ist. Da  $P(t)^{-1}$  auch stetig von  $t$  abhängt und darüber hinaus auch

$$P(t + 2t_{\text{per}}) = P(t + t_{\text{per}})K = P(t)K^2 = P(t) \quad \text{bzw.} \quad P(t + 2t_{\text{per}})^{-1} = P(t)^{-1}$$

gilt, erhalten wir insgesamt die Abschätzungen

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq C \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)|, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| \leq D \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$$

mit

$$C := \sup_{t \geq 0} |P(t)| = \sup_{0 \leq t \leq 2t_{\text{per}}} |P(t)| < \infty,$$

$$D := \sup_{t \geq 0} |P(t)^{-1}| = \sup_{0 \leq t \leq 2t_{\text{per}}} |P(t)^{-1}| < \infty.$$

Die Bemerkung zu Definition 20 liefert schließlich die behauptete Äquivalenz der Stabilität bzw. der asymptotischen Stabilität.  $\square$

# Kapitel 3

## Dynamik autonomer Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir die dynamischen Eigenschaften des (i.A. nichtlinearen) autonomen Systems

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.1)$$

wobei  $\Omega$  ein gegebenes *Gebiet* des  $\mathbb{R}^d$  (d.h.  $\Omega$  ist offen und zusammenhängend)  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine gegebenes *glattes Vektorfeld* ist (d.h. die Abbildung  $f$  ist stetig differenzierbar und damit insbesondere auch lokal Lipschitz-stetig).

Bevor wir die allgemeine Theorie entwickeln, wollen wir zwei wichtige Klassen von Differentialgleichungen einführen.

**Definition 1** (Gradientenfluss). *Das System (3.1) heißt (abstrakter) Gradientenfluss, falls es eine zweimal stetig differenzierbare Energiefunktion  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sowie eine glatte matrixwertige Funktion  $M : \Omega \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

1. *Die Matrix  $M(x)$  ist für jedes  $x \in \Omega$  symmetrisch und positiv definit, d.h. es existiert ein Konstante  $m(x) > 0$ , so dass*

$$\xi^T M(x) \xi \geq m(x) |\xi|^2$$

2. *Es gilt*

$$f(x) = -M^{-1}(x)DE(x)$$

*für alle  $x$ , wobei (der Spaltenvektor)  $DE(x) \in \text{Mat}(d \times 1)$  die Ableitung von  $E$  im Punkte  $x$  ist.*

**Bemerkung.**

1. *Die Existenz von  $M^{-1}(x)$  für jedes  $x \in \Omega$  folgt aus der Symmetrie und der positiven Definitheit.*
2. *Die Funktion  $M^{-1} : \Omega \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  ist auch glatt.*

3. Für Gradientenflüsse gilt

$$\dot{E} := \frac{d}{dt}E(x(t)) \leq 0$$

entlang jeder Lösung von (3.1). Insbesondere ist  $E$  eine sogenannte Ljapunow-Funktion von (3.1).

4. Gradientenflüsse spielen in der Thermodynamik (aber auch in anderen Bereichen) eine wichtige Rolle, da sie beschreiben, wie ein physikalisches System seine (freie) Energie  $E$  minimiert.

5. Die Matrix  $M(x)$  wird metrischer Tensor im Punkt  $x$  genannt.

**Definition 2** (Hamiltonsystem). Das System (3.1) heißt (abstraktes) Hamiltonsystem, falls es eine zweimal stetig differenzierbare Energiefunktion  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sowie eine glatte matrixwertige Funktion  $S : \Omega \rightarrow \text{Mat}(d \times d)$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. Die Matrix  $S(x)$  ist für jedes  $x \in \Omega$  schiefsymmetrisch, d.h.  $S^T(x) = -S(x)$ , und invertierbar.
2. Es gilt

$$f(x) = S^{-1}(x)DE(x)$$

für alle  $x$ .

**Bemerkung.**

1. Aus elementaren Argumenten der linearen Algebra folgt, dass schiefsymmetrische und invertierbare Matrizen nur für gerade  $d$  existieren können.
2. Die Matrix  $S(x)$  wird symplektischer Tensor im Punkt  $x$  genannt. Für  $d = 2$  bzw.  $d = 4$  wird

$$S_{\text{kanon}} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad S_{\text{kanon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die kanonische symplektische Matrix genannt.

3. Für Hamiltonsysteme gilt

$$\dot{E} := \frac{d}{dt}E(x(t)) = 0$$

entlang jeder Lösung von (3.1). Insbesondere ist  $E$  eine sogenannte Erhaltungsgröße (bzw. ein sogenanntes Erstes Integral) von (3.1).

4. Hamiltonsysteme spielen in der Mechanik eine wichtige Rolle, da sie direkt aus dem Hamiltonschen Prinzip der Stationären Wirkung abgeleitet werden können.

5. Für  $d = 2$  und  $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1)$  und  $S(x_1, x_2) = -S_{\text{kanon}}$  ist (3.1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

bzw.

$$\ddot{x}_1 = -V'(x_1).$$

Um die Darstellung im Folgenden möglichst einfach zu halten, wollen wir in diesem Kapitel immer annehmen, dass alle maximalen Lösungen von (3.1) für alle Zeiten existieren. Alle wesentlichen Konzepte und Resultate können aber auch für den allgemeinen Fall eingeführt bzw. formuliert werden.

**Annahme 3** (Maximale Lösungen existieren stets für alle Zeiten). *Das Gebiet  $\Omega$  und das glatte Vektorfeld  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  haben die Eigenschaft, dass für jedes  $\xi \in \Omega$  die maximale Lösung zum Anfangswertproblem (3.1) mit  $x(0) = \xi$  für alle Zeiten existiert. Diese maximale Lösung wird im Folgenden stets mit*

$$x_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$$

bezeichnet.

Beachte, dass der Index  $\xi$  die Anfangsdaten und nicht die Komponente von Lösungen bezeichnet. Insbesondere gilt

$$x_\xi(t) = (x_{\xi,1}(t), \dots, x_{\xi,d}(t)) \in \mathbb{R}^d$$

für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$ . Manchmal schreiben wir auch  $x(t; \xi)$  anstatt von  $x_\xi(t)$  bzw.

$$x(t; \xi) = (x_1(t; \xi), \dots, x_d(t; \xi)).$$

**Bemerkung.** *Typische Beispiele sind:*

1. *Lineare Systeme mit  $\Omega = \mathbb{R}^d$  und  $f(x) = Ax$  für eine gegebene Matrix  $A \in \text{Mat}(d \times d)$ .*
2. *Systeme mit  $|f(x)| \leq C|x| + D = Ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und geeignete Konstanten  $C$  und  $D$ .*
3. *Hamiltonsysteme mit  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : C_1 \leq E(x) \leq C_2\}$  für zwei Konstanten  $C_1, C_2$ .*
4. *Gradientenflüsse mit  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : E(x) \leq C\}$  für eine Konstante  $C$ .*

In Annahme 3 haben wir die *Anfangszeit* mit  $t = 0$  fixiert. Diese Einschränkung ist aber nicht wesentlich, wie das folgende Resultat zeigt.

**Lemma 4** (Shiftinvarianz von Lösungen autonomer Gleichungen). *Seien  $t_0, \tilde{t}_0 \in \mathbb{R}$  beliebig. Ist  $x : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  eine Lösung von (3.1) mit  $x(t_0) = \xi$ , so ist  $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  mit  $\tilde{x}(t) = x(t - \tilde{t}_0 + t_0)$  Lösung mit  $\tilde{x}(\tilde{t}_0) = \xi$ . Insbesondere gilt  $x(t) = x_\xi(t - t_0)$  und  $\tilde{x}(t) = x_\xi(t - \tilde{t}_0)$ .*

*Beweis.* Klar. □

### 3.1 Orbits und Flüsse

Ein wichtiges dynamisches Konzept sind Orbits.

**Definition 5** (Orbit). *Die Menge*

$$\Gamma_\xi = \{x_\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

heißt der Orbit (oder die Trajektorie) von  $\xi \in \Omega$  unter der Dynamik von  $f$  (bzw. unter (3.1)).

**Lemma 6.** *Ist  $\tilde{\xi} \in \Gamma_\xi$ , so gibt es eine Zeit  $t_* \in \mathbb{R}$  mit  $\tilde{\xi} = x_\xi(t_*)$  und es gilt  $\Gamma_\xi = \Gamma_{\tilde{\xi}}$ .*

*Beweis.* Die Existenz von  $t_*$  folgt unmittelbar aus der Definition 5 und Lemma 4 liefert

$$x_{\tilde{\xi}}(t) = x_\xi(t + t_*)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und damit die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 7.** *Es gilt*

$$\Gamma_\xi \cap \Gamma_{\tilde{\xi}} \neq \emptyset \iff \Gamma_\xi = \Gamma_{\tilde{\xi}},$$

für alle  $\xi, \tilde{\xi} \in \Omega$ , d.h. zwei verschiedene Orbits sind disjunkt. Insbesondere definiert

$$\tilde{\xi} \sim \xi \stackrel{\text{def}}{\iff} \tilde{\xi} \in \Gamma_\xi$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\Omega$ .

*Beweis.* Für jedes  $\eta \in \Gamma_\xi \cap \Gamma_{\tilde{\xi}}$  gilt  $\Gamma_\eta = \Gamma_\xi = \Gamma_{\tilde{\xi}}$  nach Lemma 6, und alle Behauptungen folgen unmittelbar.  $\square$

**Bemerkung.** *Die Orbits von (3.1) werden auch die Integralkurven des Vektorfeldes  $f$  genannt. Stellt man das Vektorfeld graphisch dar, so sind die Orbits in jedem Punkt tangential zu  $f$ , siehe Abbildungen 3.1 und 3.2.*

**Lemma 8** (Drei Typen von Lösungen bzw. Orbits). *Für jedes  $\xi \in \Omega$  hat  $x_\xi$  genau eine der folgenden Eigenschaften:*

- (i) Stationärer Orbit: *Es gilt  $x_\xi(t) = \xi$  und  $\dot{x}_\xi(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\Gamma_\xi = \{\xi\}$  eine Einpunktmenge.*
- (ii) Periodischer (aber nichtstationärer) Orbit: *Es gilt  $\dot{x}_\xi(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und es existiert  $T > 0$ , so dass  $x_\xi(t) = x_\xi(T + t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\Gamma_\xi$  das Bild einer geschlossenen Kurve.*
- (iii) Orbit ohne Doppelpunkt: *Es gilt  $\dot{x}_\xi(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $x_\xi(t_1) \neq x_\xi(t_2)$  für je zwei verschiedene Zeiten  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\Gamma_\xi$  das Bild einer Kurve ohne Selbstdurchdringung.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Implikation

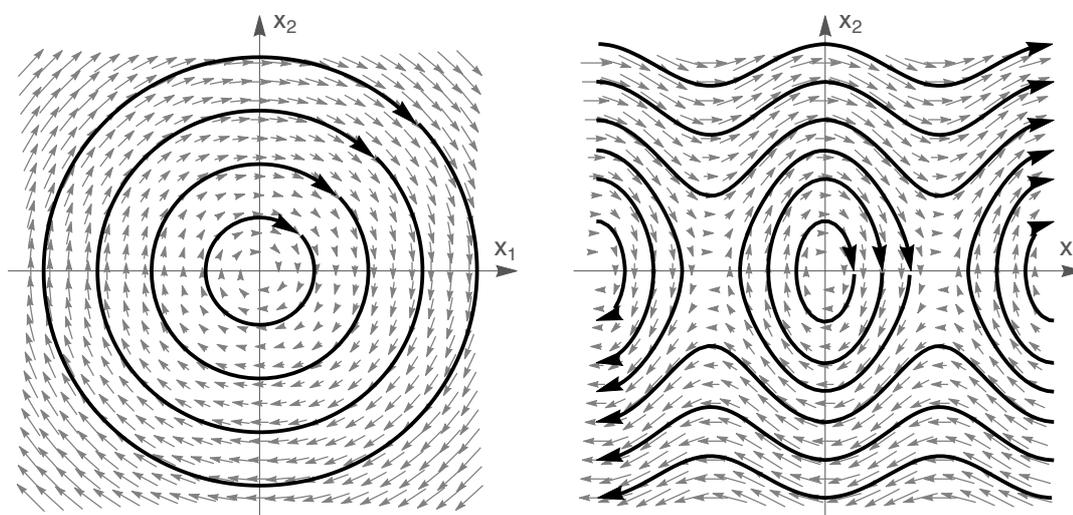
$$\exists t \in \mathbb{R} : \dot{x}_\xi(t) = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R} : \dot{x}_\xi(t) = 0.$$

Sei also  $\dot{x}_\xi(t_0) = 0$ . Dann gilt  $f(x_\xi(t_0)) = 0$  und  $x(t) \equiv x_\xi(t_0)$  ist die eindeutige Lösung von (3.1) mit Anfangsdatum  $x(t_0) = x_\xi(t_0)$ . Da aber  $x_\xi$  auch eine Lösung ist, folgt  $x_\xi(t) = x_\xi(t_0)$  für alle  $t$  und damit  $x_\xi(t) = \xi$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Wir nehmen nun an, dass (i) nicht erfüllt ist. Dann gilt  $\dot{x}_\xi(t) \neq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Außerdem nehmen wir an, dass (iii) nicht erfüllt ist, d.h. es gilt  $x_\xi(t_1) = x_\xi(t_2)$  für zwei Zeiten  $t_1 \neq t_2$ . Nach Konstruktion und wegen der Autonomie der Gleichung sind die Funktionen

$$t \mapsto x_\xi(t), \quad t \mapsto x_\xi(t - t_1 + t_2)$$

beide Lösungen von (3.1) mit Anfangsdatum  $x(t_1) = x_\xi(t_1)$ . Da es aber nur eine Lösung geben kann, gilt  $x_\xi(t) = x_\xi(t + T)$  mit  $T = t_2 - t_1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass (ii) immer dann gilt, wenn (i) und (iii) nicht erfüllt sind.  $\square$



**Abbildung 3.1:** Graphische Darstellung des Vektorfeldes (grau) und einiger Orbits (schwarz) für das Hamiltonsystem (3.2) mit  $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$  (links, physikalisches Pendel) und  $V(x_1) = -\cos(\pi x_1)$  (rechts, mathematisches Pendel).

**Definition 9** (Fluss). *Ein Fluss ist eine Familie  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$  von Abbildungen  $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$  mit  $F_0 = \text{id}_\Omega$  und*

$$F_{t_2+t_1} = F_{t_2} \circ F_{t_1}$$

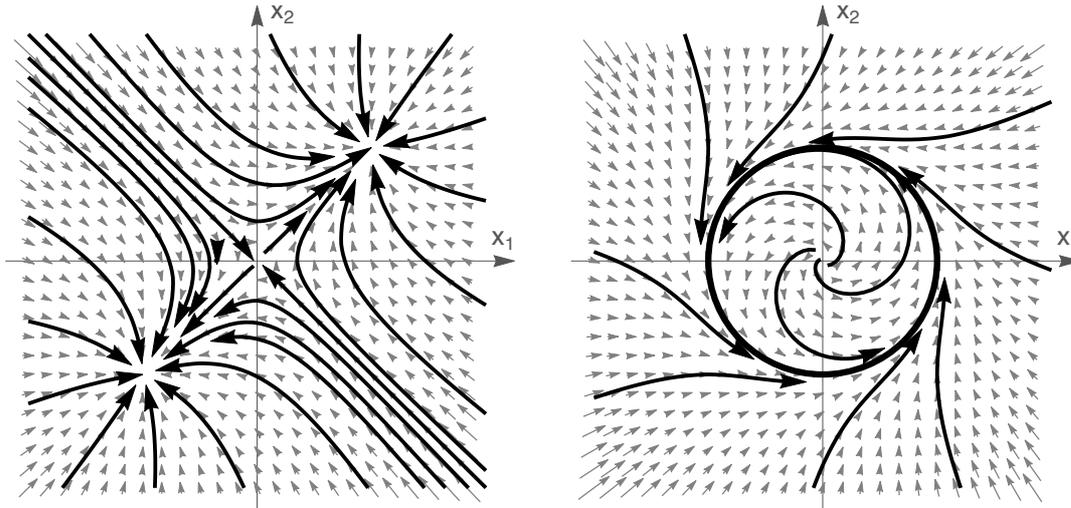
für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung.**

1. Ein Fluss ist offensichtlich eine Gruppe. Insbesondere gilt  $(F_t)^{-1} = F_{-t}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , d.h. jede Abbildung  $F_t$  ist bijektiv.
2. Wir schreiben oft auch  $F(t, x)$  statt  $F_t(x)$  und betrachten dann einen Fluss als eine Abbildung  $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ .

**Satz 10** (Glatter Fluss einer Differentialgleichung). *Die Differentialgleichung (3.1) erzeugt einen Fluss via*

$$F_t(\xi) := x_\xi(t) \tag{3.3}$$



**Abbildung 3.2:** Graphische Darstellung des Vektorfeldes (grau) und einiger Orbits (schwarz) für den Gradientenfluss  $\dot{x} = -DE(x)$  mit  $E(x) = |x - (1, 1)|^2 \cdot |x - (-1, -1)|^2$  (links) und  $\dot{x} = f(x)$  mit  $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1 + 1) + (1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1, x_2)$  (rechts).

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\xi \in \Omega$ . Dieser Fluss ist, als Abbildung von  $\mathbb{R} \times \Omega$  nach  $\Omega$  betrachtet, stetig differenzierbar und damit ist auch  $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  stetig differenzierbar.

*Beweis.* 1. Nach Konstruktion gilt  $F(0, \xi) = x_\xi(0) = \xi$ . Außerdem impliziert Lemma 4 die Identität

$$x_{x_\xi(t_1)}(t) = x_\xi(t + t_1) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} (F_{t_2} \circ F_{t_1})(\xi) &= F(t_2, F(t_1, \xi)) = x_{F(t_1, \xi)}(t_2) = x_{x_\xi(t_1)}(t_2) \\ &= x_\xi(t_2 + t_1) = F(t_2 + t_1, \xi) = F_{t_2+t_1}(\xi), \end{aligned}$$

d.h. (3.3) definiert in der Tat einen Fluss.

2. Die stetige Differenzierbarkeit bzgl.  $t$  folgt unmittelbar aus

$$\partial_t F(t, \xi) = f(F(t, \xi))$$

und weil nach Konstruktion  $F$  stetig in  $t$  und  $\xi$  ist. In der Tat, es gilt

$$F(t_2, \xi) - F(t_1, \xi) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_\xi(t)) dt \xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} 0$$

und die Stetigkeit bzgl.  $\xi$  folgt aus Kapitel 2, Satz 10.

3. Seien nun  $\xi \in \Omega$  und  $T > 0$  beliebig fixiert und  $t \in [0, T]$ . Dann existiert (wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten) ein Kompaktum  $K \subset \Omega$ , so dass

$$x_\xi(t), x_{\xi+h\eta}(t) \in K$$

für alle  $\eta \in \mathbb{R}^d$  mit  $|\eta| = 1$ , jedes  $t \in [0, T]$  und alle hinreichend kleinen  $h$ . Wir definieren nun

$$y_{h,\eta}(t) := \frac{F(t, \xi + h\eta) - F(t, \xi)}{h} = \frac{x_{\xi+h\eta}(t) - x_\xi(t)}{h},$$

und wollen nun zeigen, dass  $y_{h,\eta}(t)$  für  $h \rightarrow 0$  konvergiert und dass dieser Grenzwert linear von  $\eta$  und stetig von  $t$  und  $\xi$  abhängt. Dazu bemerken wir, dass  $y_{h,\eta}$  die nichtautonome Differentialgleichung

$$\dot{y}_{h,\eta}(t) = \frac{f(x_{\xi+h\eta}(t)) - f(x_\xi(t))}{h} = \frac{f(x_\xi(t) + hy_{h,\eta}(t)) - f(x_\xi(t))}{h} \quad (3.4)$$

erfüllt, wobei

$$\left| \frac{f(x_{\xi+h\eta}(t)) - f(x_\xi(t))}{h} \right| \leq L |y_{h,\eta}(t)|$$

für eine geeignete Konstante  $L$  (die von  $\xi$ ,  $T$  und  $K$  abhängen kann). Dies impliziert

$$|y_{h,\eta}(t)| \leq |y_h|(0) + \int_0^t L |y_{h,\eta}(s)| \, ds$$

und Gronwalls (angewendet auf die Funktion  $|y_{h,\eta}|$ ) kombiniert mit (3.4) liefert

$$|y_{h,\eta}(t)| \leq \exp(Lt) |\eta| \leq \exp(LT) |\eta| \quad (3.5)$$

für alle  $\eta$ , alle  $0 \leq t \leq T$ , und alle hinreichend kleinen  $h$ .

4. Wir definieren nun außerdem eine Funktion  $y_{0,\eta}$  als Lösung des linearen aber nichtautonomen Anfangswertproblems

$$\dot{y} = Df(x_\xi(t))y, \quad y(0) = \eta. \quad (3.6)$$

Mit anderen Worten: Es gilt

$$y_{0,\eta}(t) = \Phi(t)\eta.$$

wobei  $\Phi(t)$  die Fundamentalmatrix der linearen Differentialgleichung aus (3.6) ist (beachte das  $\Phi$  von  $x_\xi$  und damit von  $\xi$  abhängt). Es gilt nun

$$y_{h,\eta}(t) - y_{0,\eta}(t) = \int_0^t Df(x_\xi(s)) (y_{h,\eta}(s) - y_{0,\eta}(s)) + R_{h,\eta}(s) \, ds,$$

wobei

$$R_{h,\eta}(t) := \frac{f(x_{\xi+h\eta}(t)) - f(x_\xi(t))}{h} - Df(x_\xi(t))y_{h,\eta}(t),$$

und Gronwalls Lemma (angewendet auf  $|y_{h,\eta} - y_{0,\eta}|$ ) liefert

$$|y_{h,\eta}(t) - y_{0,\eta}(t)| \leq a_{h,\eta} \exp\left(\int_0^t |Df(x_\xi(s))| \, ds\right)$$

wobei

$$a_{h,\eta} := \int_0^T |R_{h,\eta}(s)| \, ds.$$

Da die Funktionen  $y_{h,\eta}$  uniform in  $h$  beschränkt sind, siehe (3.5), gibt es eine Konstante  $C$ , so dass

$$|R_{h,\eta}(t)| \leq C \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T, |\eta| \leq 1$$

und alle hinreichend kleinen  $h$ . Außerdem gilt nach dem Satz von Taylor (angewendet auf  $f$  im Punkt  $x_\xi(t)$ ) die Restglied-Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_{h,\eta}(t) = 0$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und jedes  $\eta$ . Die Eigenschaften des Integrals liefern dann

$$a_{h,\eta} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Insbesondere gilt

$$y_{h,\eta}(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} y_{0,\eta}(t) = \Phi(t)\eta$$

für alle  $0 \leq t \leq T$ . Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass der Fluss  $F$  im Punkte  $(t, \xi)$  alle Richtungsableitung in Richtung  $\eta$  besitzt, und damit existieren insbesondere die partiellen Ableitungen

$$\partial_{\xi_1} F(t, \xi), \quad \dots, \quad \partial_{\xi_d} F(t, \xi).$$

Die Stetigkeit aller Richtungsableitung bzgl.  $t$  und  $\xi$  folgt nun weil  $x_\xi$  stetig in  $t$  und  $\xi$  ist, und weil der Ausdruck  $\Phi(t)\eta$  stetig von  $t$  und  $\eta$  abhängt. □

### Bemerkung.

1. Wegen  $(F_t)^{-1} = F_{-t}$  ist jede Abbildung  $F_t : \Omega \rightarrow \Omega$  sogar ein Diffeomorphismus. Allgemein kann gezeigt werden, dass höhere Differenzierbarkeit von  $f$  auch höhere Differenzierbarkeit von  $F$  impliziert.
2. Es existieren immer die gemischten Ableitungen  $\partial_t D_\xi F$  und  $D_\xi \partial_t F$  und es gilt

$$\partial_t D_\xi F(t, \xi) = D_\xi \partial_t F(t, \xi)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $\xi \in \Omega$ . In der Tat, nach dem Beweis von Satz 10 gilt zum einen

$$\partial_t D_\xi F(t, \xi) = D_x f(F(t, \xi)) D_\xi F(t, \xi)$$

eben weil jede Spalte von  $D_\xi F(t, \xi)$  die entsprechende lineare Differentialgleichung erfüllt. Zum anderen folgt

$$D_\xi \partial_t F(t, \xi) = D_x f(F(t, \xi)) D_\xi F(t, \xi)$$

schon aus  $\partial_t F(t, \xi) = f(F(t, \xi))$  und der Kettenregel.

3. Ist  $f(x) = Ax$  ein lineares Vektorfeld, so gilt offensichtlich

$$F_t(\xi) = \exp(tA)\xi.$$

**Satz 11** (Volumenänderung unter dem Fluss). *Es gilt*

$$\frac{d}{dt} \text{vol } F_t[B] = \int_{F_t[B]} \text{div } f(x) \, dx = \int_{F_t[B]} \partial_{x_1} f_1(x) + \dots + \partial_{x_d} f_d(x) \, dx$$

für alle messbaren Teilmengen  $B \subset \Omega$  und alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist der Fluss für divergenzfreie Vektorfelder volumenerhaltend.

*Beweis.* Für jedes feste  $\xi \in \Omega$  und beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  sei

$$M_\xi(t) := D_\xi F(t, \xi) \in \text{Mat}(d \times d), \quad A_\xi(t) := D_x f(F(t, \xi)) \in \text{Mat}(d \times d),$$

wobei  $D_\xi$  (bzw.  $D_x$ ) die Ableitung nach  $\xi$  (bzw. nach  $x$ ) bezeichnet, d.h.

$$M_\xi(t) = \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} F(t, \xi) & \dots & \partial_{\xi_d} F(t, \xi) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

und

$$A_\xi(t) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(F(t, \xi)) & \dots & \partial_{x_d} f(F(t, \xi)) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Aufgrund der zweiten Bemerkung zu Satz 10 gilt

$$\dot{M}_\xi(t) = \partial_t D_\xi F(t, \xi) = D_\xi \partial_t F(t, \xi) = D_x f(F(t, \xi)) \cdot D_\xi F(t, \xi) = A_\xi(t) \cdot M_\xi(t),$$

d.h.  $M_\xi$  ist Fundamentalmatrix für die nichtautonome Differentialgleichung  $\dot{x} = A_\xi(t)x$ , und der Satz 15 aus Kapitel 2 liefert

$$\frac{d}{dt} \det M_\xi(t) = \text{tr } A_\xi(t) \cdot \det M_\xi(t) = \text{div}_x f(F(t, \xi)) \cdot \det M_\xi(t).$$

Insbesondere ist die Funktion  $t \mapsto \det M_\xi(t)$  für jedes feste  $\xi \in \Omega$  die Lösung einer linearen Differentialgleichung, und wegen  $\det M_\xi(0) = \det \text{Id} > 0$  schließen wir, dass  $\det M_\xi(t) > 0$  für alle  $t$  gilt, denn andernfalls hätte diese Funktion mindestens eine Nullstelle und würde – wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von Anfangswertproblemen – schon identisch zur Nullfunktion sein. Für jede messbare Menge  $B$  gilt daher und wegen der Definition des Volumens und der Transformationsformel für Lebesgue-Integrale die Identität

$$\text{vol } F_t[B] = \int_{F_t[B]} 1 \, dx = \int_B |\det D_\xi F(t, \xi)| \, d\xi = \int_B \det M_\xi(t) \, d\xi.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{vol } F_t[B] &= \int_B \frac{d}{dt} \det M_\xi(t) \, d\xi \\ &= \int_B \text{div}_x f(F(t, \xi)) \det M_\xi(t) \, d\xi \\ &= \int_{F_t[B]} \text{div}_x f(x) \, dx, \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

**Bemerkung.** Ist  $B$  glatt berandet, so gilt nach dem Gaußschen Satz auch

$$\frac{d}{dt} \text{vol } F_t[B] = \int_{\partial F_t[B]} \nu(x) \cdot f(x) \, dS(x),$$

wobei  $\nu$  die äußere Normale an den Rand  $\partial F_t[B]$  von  $F_t[B]$  bezeichnet.

## 3.2 Das Poincaré-Bendixon-Theorem

In diesem Abschnitt werden wir zwei wichtige Resultate für *planare* Vektorfelder bzw. autonome Gleichungen mit *zwei* skalaren Unbekannten kennenlernen, die unter gewissen Umständen die Existenz bzw. Nichtexistenz von echt-periodischen Orbits liefern. Dabei meint *echt-periodisch* einen Orbit der periodisch aber nicht stationär ist.

Um die wesentlichen Ideen zu verdeutlichen, werden wir dazu in diesem Abschnitt die folgende Verschärfung von Annahme 3 zu Grunde legen.

**Annahme 12.** Das planare Vektorfeld  $f$  ist stetig differenzierbar und auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert. Außerdem existiert für jedes  $\xi$  in  $\mathbb{R}^2$  die Lösung  $x_\xi$  wieder für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$ .

Wir beginnen mit einer Definition, die analog auch für  $d > 2$  formuliert werden kann.

**Definition 13** ( $\alpha$ -Limes und  $\omega$ -Limes). Für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^2$  heißen

$$\alpha_\xi := \{ \zeta \in \mathbb{R}^d : \text{es existiert Folge } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } t_n \rightarrow -\infty \text{ und } x_\xi(t_n) \rightarrow \zeta \}$$

$$\omega_\xi := \{ \zeta \in \mathbb{R}^d : \text{es existiert Folge } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } t_n \rightarrow +\infty \text{ und } x_\xi(t_n) \rightarrow \zeta \}$$

die  $\alpha$ -Limes- und die  $\omega$ -Limes-Menge von  $\xi$ .

**Lemma 14** (Elementare Eigenschaften von  $\alpha_\xi$  und  $\omega_\xi$ ). Für jedes  $\xi$  ist  $\omega_\xi$  abgeschlossen und invariant unter der Dynamik. Letzteres meint

$$\Gamma_\zeta \subseteq \omega_\xi \quad \text{für alle } \zeta \in \omega_\xi$$

und damit

$$x_\zeta(t) \in \omega_\xi \quad \text{für alle } \zeta \in \omega_\xi \text{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

Analoges gilt für  $\alpha_\xi$ .

*Beweis.* Die Abgeschlossenheit von  $\alpha_\xi$  und  $\omega_\xi$  folgt unmittelbar aus Definition 13.<sup>1</sup> Sei nun  $\zeta \in \omega_\xi$  fixiert und  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $t_n \rightarrow +\infty$  und  $x_\xi(t_n) \rightarrow \zeta$ . Aufgrund der Autonomie der Differentialgleichung gilt

$$x_\xi(t + t_n) = x_{x_\xi(t_n)}(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere liefert für jedes festgehaltene  $t \in \mathbb{R}$  der Limes  $n \rightarrow \infty$  die Konvergenz

$$x_\xi(t + t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_\zeta(t),$$

wobei wir auf der rechten Seite benutzt haben, dass die Lösungen der Differentialgleichung stetig von den Anfangsdaten abhängen (siehe Satz 10 in Kapitel 2). Per Definition 13 gilt nun  $x_\zeta(t) \in \omega_\xi$  und die gewünschte Invarianzeigenschaft von  $\omega_\xi$  folgt, da  $t$  beliebig war.  $\square$

<sup>1</sup>Ganz allgemein gilt: Die Menge der Häufungspunkte einer stetigen Funktion  $f : (t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist abgeschlossen.

Das wesentliche Ergebnis in diesem Abschnitt ist das folgende Theorem über planare Vektorfelder.

**Theorem 15** (Theorem von Poincaré<sup>2</sup> und Bendixson<sup>3</sup>). *Es gelte*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_\xi(t)| < \infty. \quad (3.7)$$

*Dann enthält  $\omega_\xi$  entweder einen Fixpunkt oder ist ein echt-periodischer Orbit.*

*Beweis.* Der Beweis kann hier nicht geführt werden; es sei auf die einschlägige Literatur, etwa VERHULST verwiesen.  $\square$

**Folgerung 16.** *Sei  $\Xi \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet, so dass  $\bar{\Xi}$  vorwärts-invariant unter der Dynamik ist, d.h. es gelte  $x_\xi(t) \in \bar{\Xi}$  für alle  $\xi \in \bar{\Xi}$ . Dann enthält  $\bar{\Xi}$  einen stationären Punkt oder einen echt-periodischen Orbit.*

*Beweis.* Sei  $\xi \in \bar{\Xi}$  beliebig. Dann gilt (3.7) sowie  $\omega_\xi \subset \bar{\Xi}$  und die Behauptung folgt aus Theorem 15.  $\square$

**Beispiel.** *Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2(4 - x_1^2 - 4x_2^2) \end{pmatrix}$$

*deren einzige stationäre Lösung der Koordinatenursprung ist. Wir betrachten außerdem die Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

*und berechnen*

$$\dot{L}(t) := \frac{d}{dt} L(x_1(t), x_2(t)) = 2x_2(t)^2(4 - x_1^2 - 4x_2^2)$$

*für jede Lösung der Differentialgleichung. Insbesondere gilt*

$$\dot{L}(t) \geq 0 \quad \text{für} \quad L(t) \leq 1 \quad \text{sowie} \quad \dot{L}(t) \leq 0 \quad \text{für} \quad L(t) \geq 4$$

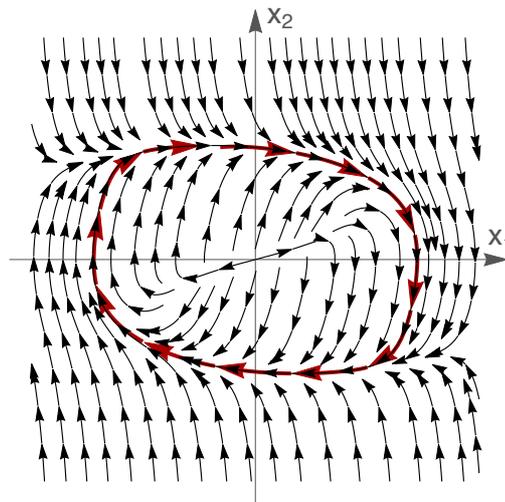
*und wir schließen, dass der abgeschlossene Kreisring*

$$\bar{\Xi} := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq L(x) \leq 4\}$$

*vorwärtsinvariant unter der Dynamik ist. Da  $\Xi$  auch keinen stationären Punkt enthält, existiert nach (16) also ein echt-periodischer Orbit innerhalb von  $\Xi$ , den wir natürlich auch im Phasenportrait sehen können.*

<sup>2</sup>Jules Henri Poincaré (1854–1912), französischer Mathematiker und einer der bedeutendsten Pioniere der nichtlinearen Dynamik.

<sup>3</sup>Ivar Otto Bendixson (1861–1935), schwedischer Mathematiker.



Manchmal will man jedoch zeigen, dass es keine echt-periodischen Orbits gibt. In diesem Fall kann das folgende Resultat nützlich sein.

**Lemma 17** (Bendixon-Kriterium). *Eine einfach zusammenhängende Menge  $\Xi \subset \mathbb{R}^2$  kann nur dann einen echt-periodischen Orbit enthalten, wenn  $\text{div } f$  mindestens eine Nullstelle  $\Xi$  besitzt.*

*Beweis.* Angenommen, es gibt einen periodischen aber nicht-stationären Orbit  $\Gamma_\xi \subset \Xi$ . Nach dem Jordanschen Kurvensatz gibt es dann auch ein Gebiet  $\Omega \subset \Xi$ , so dass  $\Gamma_\xi$  gerade der Rand von  $\Omega$  ist. Nach dem Gaußschen Satz gilt nun

$$\int_{\Omega} \text{div } f(x) \, dx = \int_{\Gamma_\xi} f(x) \cdot \nu(x) \, dS,$$

wobei  $\nu(x)$  gerade der äußere Normalenvektor an  $\Omega$  im Punkt  $x$  ist. Außerdem liefert  $x_\xi$  eine Parametrisierung von  $\Gamma_\xi$ , wobei  $\dot{x}_\xi(t)$  der Tangentialvektor im Punkte  $x_\xi(t)$  ist und daher senkrecht auf  $\nu(x_\xi(t))$  steht. Insbesondere gilt

$$f(x_\xi(t)) \cdot \nu(x_\xi(t)) = \dot{x}_\xi(t) \cdot \nu(x_\xi(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und wir erhalten zunächst

$$\int_{\Gamma_\xi} f(x) \cdot \nu(x) \, dS = \int_0^{t_{\text{per}}} f(x_\xi(t)) \cdot \nu(x_\xi(t)) |\dot{x}_\xi(t)| \, dt = 0$$

und dann

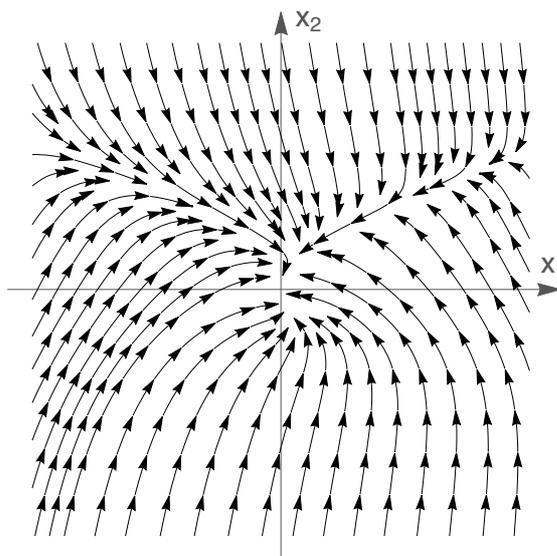
$$\int_{\Omega} \text{div } f(x) \, dx = 0.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar, denn das Integral einer positiven oder einer negativen Funktion kann nicht verschwinden.  $\square$

**Beispiel.** *Die Differentialgleichung*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2^2 \\ +x_1^2 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

*besitzt keine echt-periodischen Lösungen, denn es gilt  $\text{div } f(x_1, x_2) = -1 - 3x_2^2$ . Das entsprechend Phasenportrait sieht wie folgt aus:*



### 3.3 Stabilität von stationären Punkten

In diesem Abschnitt betrachten wir stationäre Orbits von (3.1), d.h. konstante Lösungen  $x_{\xi_*}(t) = \xi_*$  für alle  $t$ , und untersuchen, ob diese stabil unter kleinen Störungen sind. Dazu bemerken wir, dass  $\Gamma_{\xi_*} = \{\xi_*\}$  genau dann gilt, wenn  $\xi_*$  ein *kritischer Punkt* des Vektorfeldes  $f$  ist, d.h. genau dann wenn  $f(\xi_*) = 0$  gilt.

**Definition 18** (Ljapunow-Stabilität). *Ein stationärer Punkt  $\xi_* \in \Omega$  (bzw. der Orbit  $\Gamma_{\xi_*}$  bzw. die stationäre Lösung  $x_{\xi_*}$ ) heißt*

1. Ljapunow-stabil (oder einfach stabil), falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$|\xi - \xi_*| \leq \delta \quad \implies \quad |x_\xi(t) - \xi_*| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (3.8)$$

2. asymptotisch stabil, falls er stabil ist und darüber hinaus ein  $\delta' > 0$  existiert, so dass

$$|\xi - \xi_*| \leq \delta' \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_\xi(t) = \xi_*. \quad (3.9)$$

**Bemerkung.**

1. Einen nichtstabilen stationären Punkt  $\xi$  nennen wir instabil.
2. Stabilität meint immer Vorwärtsstabilität, da ja nur Aussagen für nichtnegative Zeiten gemacht wird. Analog kann man den Begriff der Rückwärtsstabilität (=Vorwärtsstabilität unter Zeitumkehr) definieren.
3. Ganz allgemein kann man (3.8) verwenden, um die Ljapunow-Stabilität von allgemeinen Lösungen  $x_\xi$  zu definieren. Asymptotische Stabilität für allgemeine Orbits ist aber etwas subtiler.

**Satz 19** (Prinzip der linearisierten Stabilität). *Sei  $\xi_*$  stationärer Punkt, so dass alle komplexen Eigenwerte der Matrix  $A := Df(\xi_*)$  negativen Realteil haben, d.h. es gelte*

$$-\mu := \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A\} < 0.$$

Dann existieren für jedes  $0 < \alpha < \mu$  Konstanten  $C > 0$  und  $\delta > 0$ , so dass

$$|x_\xi(t) - \xi_*| \leq C \exp(-\alpha t) |\xi - \xi_*|$$

für alle  $t > 0$  und alle  $\xi$  mit  $|\xi - \xi_*| \leq \delta$  gilt. Insbesondere ist  $\xi_*$  asymptotisch stabil.

*Beweis.* O.B.d.A können wir  $\xi_* = 0$  annehmen (für  $\xi_* \neq 0$  setzen wir  $y = x - \xi_*$ ,  $g(y) = f(\xi_* + y) - f(\xi_*) = f(\xi_* + y)$  und betrachten  $\dot{y} = g(y)$ ). Die Theorie der Matrixexponentiale impliziert (siehe Übungsaufgabe), dass es eine Konstante  $C > 1$  gibt, so dass

$$|\exp(tA)| \leq C \exp(-\beta t), \quad \beta := \frac{1}{2}(\mu + \alpha).$$

Wir definieren nun

$$h(x) := f(x) - Ax, \quad \eta(x) := \frac{|h(x)|}{|x|}$$

und schreiben die Differentialgleichung als

$$\dot{x} = Ax + h(x) \tag{3.10}$$

Nach Taylorentwicklung von  $f$  in 0 gilt

$$\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Insbesondere ist  $\eta$  stetig auf  $\Omega$  mit  $\eta(0) = 0$  und es existiert ein Radius  $R > 0$ , so dass

$$|x| \leq R \implies 0 \leq \eta(x) \leq \frac{\beta - \alpha}{C}.$$

Wir wenden nun das Prinzip der Variation der Konstanten auf (3.10) an. Dies liefert

$$x_\xi(t) = \exp(tA)\xi + \int_0^t \exp(tA - sA)h(x_\xi(s)) ds$$

für alle  $\xi \in \Omega$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und damit

$$|x_\xi(t)| \leq C \exp(-\beta t) |\xi| + C \int_0^t \exp(-\beta t + \beta s) \eta(x_\xi(s)) |x_\xi(s)| ds$$

bzw.

$$\exp(\beta t) |x_\xi(t)| \leq C |\xi| + C \int_0^t \eta(x_\xi(s)) \exp(\beta s) |x_\xi(s)| ds$$

Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall (angewendet auf die Funktion  $t \mapsto \exp(\beta t) |x_\xi(t)|$ ) schließen wir

$$\exp(\beta t) |x_\xi(t)| \leq \exp\left(C \int_0^t \eta(x_\xi(s)) ds\right) C |\xi|.$$

Nach Konstruktion von  $R$  gilt nun die Implikation

$$|x_\xi(s)| \leq R \text{ für alle } 0 \leq s \leq t \implies |x_\xi(t)| \leq C \exp(-\alpha t) |\xi|,$$

und damit auch

$$|x_\xi(t)| \leq R \text{ für } t \in [0, T] \implies |x_\xi(t)| \leq C \exp(-\alpha t) |\xi| \text{ für } t \in [0, T] \tag{3.11}$$

für alle  $0 < T < \infty$ . Sei nun  $|\xi| \leq \delta := R/C < R$ . Mit der Implikation (3.11) können wir leicht durch Widerspruchsbeweis zeigen, dass  $|x_\xi(t)| \leq R$  für alle  $t \geq 0$  gilt, und daher liefert (3.11) die Behauptung.  $\square$

Wir wollen erwähnen, dass Linearisierung nicht nur für Stabilitätsuntersuchungen nützlich ist. Insbesondere gilt der folgende Satz.

**Satz 20** (Theorem von Hartmann und Grobmann). *Der stationäre Punkt  $\xi_*$  sei hyperbolisch, d.h. alle komplexen Eigenwerte von  $A = Df(\xi_*)$  haben einen nichtverschwindenden Realteil. Dann existiert zwei Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $\xi_*$  sowie einen Homöomorphismus  $H : U \rightarrow V$ , so dass*

$$H(\Gamma_\xi \cap U) = \Delta_{H(\xi)} \cap V$$

*gilt, wobei  $\Delta_\eta$  die Orbits der linearisierten Gleichung  $\dot{y} = Df(\xi_*)(y - \xi_*)$  bezeichnet. Mit anderen Worten: unter der Hyperbolizitätsannahme beschreibt der Fluss der linearisierten Gleichung lokal den Fluss der nichtlinearen Gleichung.*

*Beweis.* Es sei auf die Literatur (z.Bsp. CHICONE) verwiesen.  $\square$

Die Hyperbolizitätsannahme ist sehr wichtig für das Theorem von Hartmann und Grobmann, da man andernfalls höhere Ordnungsterme in der Taylor-Entwicklung von  $f$  um  $\xi_*$  berücksichtigen muss, um den nichtlinearen Fluss nahe  $\xi_*$  zu charakterisieren.

Wir wollen nun zwei wichtige nichtlineare Stabilitätskonzepte ableiten.

**Definition 21** (Ljapunow-Funktion bzgl  $\xi_*$ ). *Sei  $\xi_*$  ein stationärer Punkt von (3.1). Eine stetig differenzierbare Funktion  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Ljapunow-Funktion für  $\xi_*$ , falls*

1.  $L(\xi_*) < L(x)$ ,
2.  $\partial_f L(x) := DL(x) \cdot f(x) \leq 0$

*für alle  $x \in \Omega \setminus \{\xi_*\}$  gilt. Gilt sogar  $\partial_f L(x) < 0$  für alle  $x \in \Omega \setminus \{\xi_*\}$ , so nennen wir  $L$  eine strikte Ljapunow-Funktion für  $\xi_*$*

**Satz 22** (Direkte Methode). *Jeder stationäre Punkt  $\xi_*$ , für den eine (strikte) Ljapunow-Funktion existiert, ist (asymptotisch) stabil.*

*Beweis.* Schritt 1: Für jedes beliebige  $\mu > 0$  sei

$$U_\mu := \{x \in \Omega : L(x) < L(\xi_*) + \mu\}.$$

Dann ist  $U_\mu$  eine offene Umgebung von  $\xi_*$  (weil  $L$  stetig ist) und für alle  $\xi \in U_\mu$  und  $t \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} L(x_\xi(t)) - L(\xi) &= \int_0^t \frac{d}{ds} L(x_\xi(s)) ds \\ &= \int_0^t DL(x_\xi(s)) \cdot f(x_\xi(s)) ds \leq 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

und damit  $L(x_\xi(t)) \leq L(\xi) < L(\xi_*) + \mu$ . Insbesondere gilt die Implikation

$$\xi \in U_\mu \quad \implies \quad x_\xi(t) \in U_\mu \quad \forall \quad t \geq 0,$$

d.h.  $U_\mu$  ist vorwärtsinvariant unter der Dynamik von  $f$ .

Schritt 2: Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben. O.B.d.A. können wir  $\overline{B}_\varepsilon(\xi_*) \subset \Omega$  annehmen, wobei

$$\overline{B}_\varepsilon(\xi_*) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \xi_*| \leq \varepsilon\} \subset \Omega, \quad B_\varepsilon(\xi_*) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - \xi_*| < \varepsilon\} \subset \Omega.$$

Dann ist der Rand  $\partial B_\varepsilon(\xi_*)$  der Kugel  $B_\varepsilon(\xi_*)$  kompakt und in  $\Omega$  enthalten, und deshalb existiert ein  $\mu_\varepsilon > 0$ , so dass

$$\min_{x \in \partial B_\varepsilon(\xi_*)} L(x) \geq L(\xi_*) + \mu_\varepsilon.$$

Da  $U_{\mu_\varepsilon/2}$  und  $B_\varepsilon(\xi_*)$  beides offene Umgebungen von  $\xi_*$  sind, existiert außerdem ein  $\delta_\varepsilon > 0$

$$B_{\delta_\varepsilon}(\xi_*) \subset B_\varepsilon(\xi_*) \cap U_{\mu_\varepsilon/2}.$$

Sei nun  $\xi \in B_{\delta_\varepsilon}(\xi_*)$  gegeben. Da  $L(x_\xi(t))$  monoton fallend ist, siehe (3.12), gilt  $x_\xi(t) \in U_{\mu_\varepsilon/2}$  für alle  $t \geq 0$ . Damit kann es keine Zeit  $t > 0$  mit  $x_\xi(t) \in \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(\xi_*)}$  geben: Andernfalls gäbe es eine Zeit  $\tilde{t}$  mit  $0 \leq \tilde{t} \leq t$  und  $x_\xi(\tilde{t}) \in \partial B_\varepsilon(\xi_*) \cap \Omega$ , und dies wäre ein Widerspruch zu  $L(x_\xi(\tilde{t})) \leq \mu_\varepsilon/2$ . Damit haben wir die Implikation

$$\xi \in B_{\delta_\varepsilon}(\xi_*) \quad \implies \quad x_\xi(t) \in B_\varepsilon(\xi_*) \quad \forall \quad t \geq 0$$

gezeigt. Da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt kann, folgt schließlich die Stabilität von  $\xi_*$ .

**Schritt 3:** Sei nun  $L$  eine strikte Ljapunow-Funktion für  $\xi_*$ , und sei  $\varepsilon$  mit  $\overline{B_\varepsilon(\xi_*)} \subset \Omega$  fixiert. Für jedes  $\xi \in B_{\delta_\varepsilon}(\xi_*)$  wollen wir nun zeigen, dass  $x_\xi(t) \rightarrow \xi_*$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt. Zunächst bemerken wir, dass die Funktion  $t \mapsto L(x_\xi(t))$  monoton fallend und nach unten durch  $L(\xi_*)$  beschränkt ist. Deshalb existiert ein  $\tilde{\mu} \geq 0$ , so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(x_\xi(t)) = L(\xi_*) + \tilde{\mu}.$$

Wir nehmen nun an, es gilt  $\tilde{\mu} > 0$ . Da die Menge

$$K := \{x \in \overline{B_\varepsilon(\xi_*)} : L(x) \geq L(\xi_*) + \tilde{\mu}\}$$

kompakt ist und  $\xi_*$  nicht enthält, gibt es nach Voraussetzung ein  $m > 0$ , so dass

$$DL(x) \cdot f(x) \leq -m \quad \forall x \in K.$$

Nach (3.12) gilt

$$L(x_\xi(t)) - L(\xi) \leq -mt$$

für alle  $t \geq 0$  und damit  $\lim_{t \rightarrow \infty} L(x_\xi(t)) = -\infty$ . Dies ist aber ein Widerspruch, das heißt, es gilt  $\tilde{\mu} = 0$  bzw.  $\lim_{t \rightarrow \infty} L(x_\xi(t)) = L(\xi_*)$ . Wir nehmen nun an,  $x_\xi(t)$  konvergiere nicht für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\xi_*$ . Dann existiert ein  $\tilde{\varepsilon} > 0$  sowie eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$t_n \rightarrow \infty, \quad x_n := x_\xi(t_n) \in \tilde{K} := \overline{B_\varepsilon(\xi_*)} \setminus B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi_*).$$

Wegen der Kompaktheit von  $\tilde{K}$  können wir ohne Einschränkung annehmen – andernfalls wählen wir eine geeignete Teilfolge – dass  $x_n \rightarrow x_\infty$  für ein  $x_\infty \in \tilde{K}$  gilt. Dies impliziert aber

$$L(\xi_*) < L(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(x_n) = L(\xi_*)$$

und damit einen Widerspruch. Damit haben wir  $\xi_* = \lim_{t \rightarrow \infty} x_\xi(t)$  gezeigt.  $\square$

**Beispiel.** Wir betrachten die Liendarische Differentialgleichung  $\ddot{y} + g(y)\dot{y} + y = 0$ , wobei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative und stetige Funktion ist, bzw. das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_2 \\ -g(x_1)x_2 - x_1 \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2).$$

Dieses Systems besitzt nur den stationären Punkt  $\xi_* = (0, 0)$ . Außerdem ist  $L$  mit  $L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  eine Ljapunow-Funktion, denn es gilt

$$\partial_f L(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +x_2 \\ -g(x_1)x_2 - x_1 \end{pmatrix} = -2g(x_1)x_2^2 \leq 0.$$

Nach Satz 22 ist 0 stabil, und sogar asymptotisch stabil sofern  $g(x_1) > 0$  für alle  $x_1$ .

**Definition 23** (Erhaltungsgrößen). Eine stetig differenzierbare Funktion  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Erhaltungsgröße (oder Erstes Integral) der Differentialgleichung (3.1), falls

$$\partial_f E(x) := DE(x) \cdot f(x) = 0$$

für alle  $x \in \Omega$  gilt.

**Beispiel.**

- Wir betrachten die skalare Gleichung  $\ddot{y} = -V'(y)$ , wobei  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar ist, bzw. das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2). \quad (3.13)$$

Diese Gleichung beschreibt das physikalische Pendel (mit  $V(x_1) = cx_1^2$ ), das mathematische Pendel (mit  $V(x_1) = -a \cos(bx_1)$ ), und den allgemeinen nichtlinearen Oszillator (mit  $V$  strikt konvex). Die Funktion  $E$  mit  $E(x_1, x_2) := V(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$  ist eine Erhaltungsgröße, denn es gilt

$$\partial_f E(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} V'(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Außerdem folgt unmittelbar, dass jede Nullstelle  $\xi_{*,1}$  von  $V'$  einem stationären Punkt  $\xi_* = (\xi_{*,1}, 0)$  entspricht und umgekehrt. Beachte, dass die lokalen Minima von  $V$  den lokalen Minima von  $E$  entsprechen, aber das lokale Maxima von  $V$  nur Sattelpunkte von  $E$  liefern.

- Ganz allgemein gilt: Jedes Hamiltonsche System, siehe Definition 2, besitzt (mindestens) eine Erhaltungsgröße. Es gibt aber auch nicht-Hamiltonsche Systeme mit Erhaltungsgrößen.

**Satz 24.** Sei  $E$  eine zweimal stetig differenzierbare Erhaltungsgröße und  $\xi_*$  eine striktes lokales Minimum oder Maximum von  $E$ . Dann ist  $\xi_*$  ein stabiler stationärer Punkt.

*Beweis.* Wir betrachten den Fall, dass  $\xi_*$  striktes lokales Minimum ist. Der Fall lokaler Maxima ist dann auch abgedeckt, weil mit  $E$  auch  $\tilde{E} = -E$  eine Erhaltungsgröße ist.

Für jedes Anfangsdatum  $\xi \in \Omega$  gilt

$$\frac{d}{dt} E(x_\xi(t)) = DE(x_\xi(t)) \cdot f(x_\xi(t)) = 0$$

und damit  $E(x_\xi(t)) = E(\xi)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Es folgt nun unmittelbar, dass  $\xi_*$  ein stationärer Punkt sein muss. In der Tat, die Annahme  $f(\xi_*) \neq 0$  impliziert  $x_{\xi_*}(t) \neq \xi_*$  für alle hinreichend kleinen Zeiten  $t$  (siehe Lemma 8). Da  $\xi_*$  ein striktes lokales Minimum ist, würde dann aber für diese Zeiten

$$E(x_{\xi_*}(t)) > E(\xi_*)$$

und damit ein Widerspruch folgen.

Für jedes  $\mu > 0$  sei

$$U_\mu := \{x \in \Omega : E(x) < E(\xi_*) + \mu\}.$$

Analog zum Beweis von Satz 22 können wir zeigen, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  mit  $\overline{B_\varepsilon(\xi_*)} \subset \Omega$  die Menge

$$B_\varepsilon(\xi_*) \cap U_{\mu_\varepsilon/2}, \quad \mu_\varepsilon := \inf_{x \in \partial B_\varepsilon(\xi_*)} E(x)$$

invariant unter der Dynamik von  $f$  ist, und das deshalb  $\xi_*$  stabil ist. □

**Beispiel** (Orbits der Lotka-Volterra-Gleichung). *Auf der Menge*

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

*betrachten wir die autonome Differentialgleichung*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2 \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2),$$

*wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  gegebene Konstanten sind. Durch Nachrechnen überprüfen wir nun, dass durch  $E(x_1, x_2) = E_1(x_1) + E_2(x_2)$  mit*

$$E_1(x_1) = -\gamma \ln x_1 + \delta x_1, \quad E_2(x_2) = -\alpha \ln x_2 + \beta x_2$$

*eine Erhaltungsgröße gegeben ist. Die Funktion  $E_1$  ist strikt konvex mit*

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} E_1(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} E_1(x_1) = \infty$$

*und besitzt ein globales Minimum bei  $\xi_{*,1} = \gamma/\delta$ . Analoges gilt für die Funktion  $E_2$ . Wir schliessen nun, dass der einzige stationäre Punkt  $\xi_*(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  stabil ist, und dass  $\Gamma_\xi \subset N_{E(\xi)}$  für jedes  $\xi \in \Omega$  gilt, wobei*

$$N_c := \{x \in \Omega : E(x) = c\}$$

*die Niveaumenge von  $E$  zum Wert  $c$  bezeichnet. Da  $N_c$  für  $c > E(\xi_*)$  eine geschlossene Kurve ist, die keinen stationären Punkt enthält, ist der Orbit  $\Gamma_\xi$  für jedes  $\xi \neq \xi_*$  periodisch (siehe Übungsaufgabe).*

### 3.4 Exkurs über invariante Mannigfaltigkeiten

Für ein lineares System

$$\dot{x} = Ax$$

mit diagonalisierbarer Matrix  $A$  können wir den Raum  $\mathbb{R}^d$  wie folgt zerlegen. Wir betrachten zu jedem Eigenwert  $\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}} A$  den Eigenraum

$$E(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^d : Ax = \lambda x\}$$

und definieren

$$E_s = \bigoplus_{\text{Re } \lambda < 0} E(\lambda), \quad E_c = \bigoplus_{\text{Re } \lambda = 0} E(\lambda), \quad E_u = \bigoplus_{\text{Re } \lambda > 0} E(\lambda).$$

Wir nennen  $E_s$  den *stabilen Unterraum*,  $E_c$  den *Zentrumsraum*, und  $E_u$  den *instabilen* Unterraum von  $A$ . Ein wohlbekanntes Theorem der Linearen Algebra garantiert, dass

$$\mathbb{R}^d = E_s \oplus E_c \oplus E_u.$$

Die dynamischen Eigenschaften dieser Räume können wie folgt zusammengefasst werden.

**Lemma 25.** *Die linearen Räume  $E_s$ ,  $E_c$ , und  $E_u$  sind invariant unter der Dynamik, das heißt, es gilt*

$$\exp(tA)E_s \subseteq E_s, \quad \exp(tA)E_c \subseteq E_c, \quad \exp(tA)E_u \subseteq E_u$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Außerdem gilt

$$\xi \in E_s \quad \implies \quad x_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

sowie

$$\xi \in E_u \quad \implies \quad x_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0,$$

wobei die Konvergenz jeweils exponentiell ist.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des Matrixexponentials sowie den Übungsaufgaben.  $\square$

Ein wesentliches Resultat der nichtlinearen Dynamik besagt, dass es auch bei nichtlinearen Systemen in der Nähe von stationären Punkten stabile, Zentrums- und instabile Richtungen gibt.

**Theorem 26** (‘stable-unstable manifold theorem’ + ‘centre manifold theorem’). *Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$\dot{x} = Ax + g(x), \tag{3.14}$$

wobei  $A \in \text{Mat}(d \times d)$  eine gegebene Matrix und  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine  $C^k$ -Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0$$

sind. Ist  $0$  ein isolierter stationärer Punkt von (3.14) und ist  $A$  diagonalisierbar, so gelten die folgenden Aussagen:

1. Ist der stabile Unterraum  $E_s$  von  $A$  nichttrivial (d.h.  $\dim E_s > 0$ ), so existiert eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $W_s \subset \mathbb{R}^d$  mit:

- (a)  $W_s$  hat dieselbe Dimension wie  $E_s$  und ist tangential zu  $E_s$  in 0, das heißt, es gilt  $0 \in W_s$  mit  $T_0W_s = E_s$  (wobei  $T_0W_s$  den Tangentialraum an  $W_s$  im Punkt 0 bezeichnet),
- (b)  $W_s$  ist vorwärtsinvariant unter dem Fluss  $F_t$  für (3.14), d.h. es gilt  $x_\xi(t) = F_t(\xi) \in W_s$  für alle  $t \geq 0$  und alle  $\xi \in W_s$ ,
- (c) es gilt  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_\xi(t) = 0$  für alle  $\xi \in W_s$ .
2. Ist der instabile Unterraum  $E_u$  von  $A$  nichttrivial (d.h.  $\dim E_u > 0$ ), so existiert eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $W_u \subset \mathbb{R}^d$  mit:
- (a)  $W_u$  hat dieselbe Dimension wie  $E_u$  und ist tangential zu  $E_u$  in 0,
- (b)  $W_u$  ist rückwärtsinvariant unter dem Fluss  $F_t$  für (3.14), d.h. es gilt  $x_\xi(t) = F_t(\xi) \in W_u$  für alle  $t \leq 0$  und alle  $\xi \in W_u$ ,
- (c) es gilt  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_\xi(t) = 0$  für alle  $\xi \in W_u$ .
3. Ist der Zentrumsraum  $E_c$  von  $A$  nichttrivial (d.h.  $\dim E_c > 0$ ), so existiert eine  $C^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit  $W_u \subset \mathbb{R}^d$  mit:
- (a)  $W_c$  hat dieselbe Dimension wie  $E_c$  und ist tangential zu  $E_c$  in 0,
- (b)  $W_c$  ist vorwärts- und rückwärtsinvariant unter dem Fluss  $F_t$  für (3.14).

*Beweis.* Es sei auf die Literatur verwiesen. □

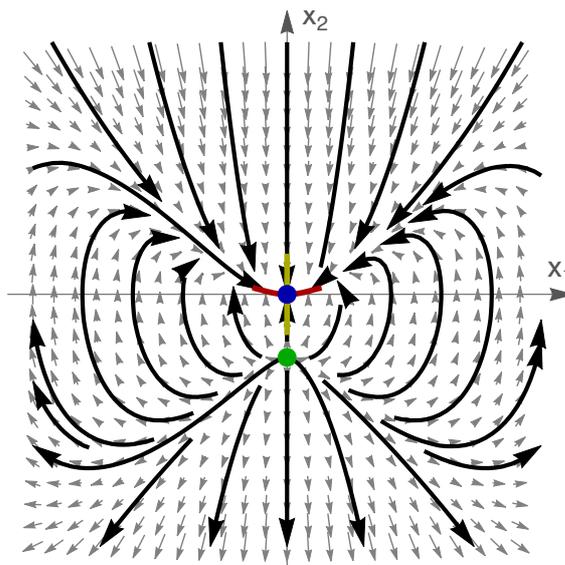
### Bemerkung.

- $W_s$  ist die stabile,  $W_c$  die Zentrums-, und  $W_u$  die instabile Mannigfaltigkeit. Alle diese Mannigfaltigkeiten existieren zunächst lokal.
- Ist  $E_s$  trivial (d.h. gilt  $E_s = \{0\}$  und damit  $\dim E_s = 0$ ), so kann man  $W_s := \{0\}$  als triviale (also nulldimensionale) stabile Mannigfaltigkeit betrachten. Analoges gilt für  $E_c = \{0\}$  und  $E_u = \{0\}$ .
- Für  $g \equiv 0$  kann  $W_s = E_s$  usw. gewählt werden.
- Die Aussagen von Theorem 26 gelten auch, wenn  $A$  negative oder positive Jordan-Eigenwerte besitzt. In diesem Fall sind  $E_s$  und  $E_u$  als verallgemeinerten Eigenräume zu verstehen, d.h.  $\dim E_s$  (bzw.  $\dim E_u$ ) ist die Summe aller geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte mit negativen (bzw. positiven) Realteil.
- Sei  $\xi_*$  ein stationärer Punkt des linearen Systems  $\dot{x} = f(x)$ . Mittels der Transformation  $x = y + \xi_*$  kann diese als

$$\dot{y} = A(y) + g(y)$$

geschrieben werden, wobei  $A := Df(\xi_*)$  und  $g(y) := f(y + \xi_*) - Ay$ . Theorem 26 kann nun analog formuliert werden. Wir schreiben dann oftmals  $W_s(\xi_*)$  statt  $W_s$  usw.

- Die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit sind lokal eindeutig, aber die Zentrumsmannigfaltigkeit muss nicht lokal eindeutig sein.
- Die Mannigfaltigkeiten  $W_s$ ,  $W_c$ , und  $W_u$  können im Allgemeinen nicht explizit berechnet werden. Es gibt aber gute numerische Approximationsverfahren.



**Abbildung 3.3:** Phasenporträt für die Differentialgleichung (3.15):  $\eta_*$  (grün) besitzt eine zweidimensionale instabile Mannigfaltigkeit,  $\mu_*$  (blau) eine eindimensionale stabile (gelb) sowie eine eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit (rot); beachte, dass sowohl die rote als auch die gelbe Kurve nicht die maximale Ausdehnung der entsprechenden Mannigfaltigkeit wiedergeben.

### 3.4.1 Beispiel 1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ -x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, siehe auch Abbildung 3.3, dass es genau zwei stationäre Punkte

$$\mu_* = (0, 0)^T, \quad \eta_* = \left(0, -\frac{1}{2}\right)^T,$$

gibt, wobei

$$A := Df(\mu_*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := Df(\eta_*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da  $B$  zwei positive Eigenwerte besitzt, ist die instabile Mannigfaltigkeit von  $\eta_*$  zweidimensional und damit eine offene Umgebung von  $\eta_*$ , d.h. wir können

$$W_u(\eta_*) = B_\varepsilon(\eta_*)$$

mit hinreichend kleinem  $\varepsilon$  wählen. Insbesondere hat  $\eta_*$  keine (nichttriviale) stabile Mannigfaltigkeit bzw. Zentrumsmannigfaltigkeit.

Da  $A$  einen nichttrivialen Kern sowie einen negativen Eigenwert besitzt, existiert eine eindimensionale stabile sowie eine eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit für  $\mu_*$ , aber keine (nichttriviale) instabile Mannigfaltigkeit. Die stabile Mannigfaltigkeit kann nun einfach abgelesen werden: Das System hat exakte Lösungen

$$x_1 \equiv 0, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_2^2,$$

und die Eigenschaften der skalaren Differentialgleichung für  $x_2$  implizieren, dass

$$W_s(\mu_*) = \{(0, x_2)^T : x_2 > -\frac{1}{2}\}$$

die größtmögliche Wahl für die stabile Mannigfaltigkeit von  $\mu_*$  ist.

Wir wollen nun die Zentrumsmannigfaltigkeit  $W_c(\mu_*)$  approximativ berechnen. Da diese horizontal durch  $\mu_*$  laufen muss (dies folgt, weil  $E_c = \text{span}\{(1, 0)^T\}$  der Zentrumsraum von  $A$  ist) machen wir den Ansatz

$$x_2 = h(x_1),$$

wobei  $h$  eine zu identifizierende glatte Funktion ist. Die Invarianzeigenschaft von  $W_c(\mu_*)$  meint nun, dass (3.15) Lösungen der Bauart

$$t \mapsto \left(x_1(t), h(x_1(t))\right)^T \in W_c(\mu_*)$$

besitzt. Entlang einer solchen Lösung gilt

$$\dot{x}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 h(x_1) \\ -h(x_1) + x_1^2 - 2h(x_1)^2 \end{pmatrix},$$

und deshalb muss  $h$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$-x_1 h(x_1) h'(x_1) = -h(x_1) + x_1^2 - 2h(x_1)^2 \quad (3.16)$$

sein. Andererseits soll auch Anfangsbedingung

$$h(0) = 0 \quad (3.17)$$

gelten.

Das Anfangswertproblem (3.16) +(3.17) ist jedoch *singulär*, da bei  $x_1 = 0$  die Differentialgleichung nicht nach  $h'(x_1)$  aufgelöst werden kann (dies ist natürlich kein Zufall sondern im Problem begründet). Theorem 26 stellt aber sicher, dass es eine Lösung gibt.

Um  $h$  approximativ zu berechnen, verwenden wir den Potenzreihenansatz

$$h(x_1) = ax_1 + bx_1^2 + cx_1^3 + \dots$$

Durch Einsetzen in (3.16) und Koeffizientenvergleich erhalten wir dann

$$h(x_1) = x_1^2 - 4x_1^4 + O(x^4)$$

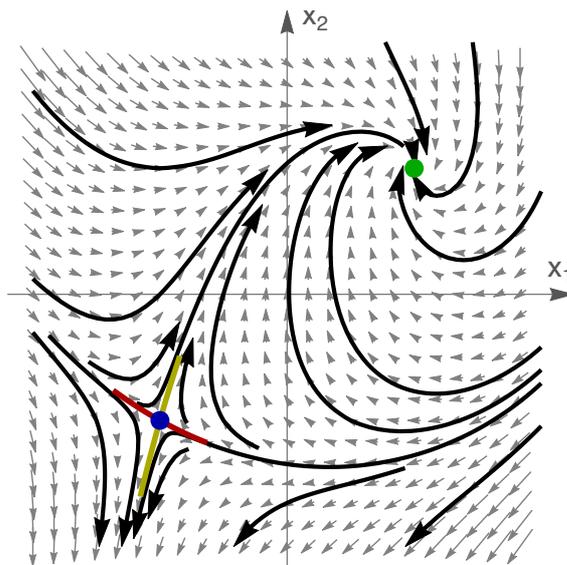
und haben damit die Zentrumsmannigfaltigkeit zumindest in der Nähe von  $\mu_*$  approximativ berechnet.

Wir bemerken schließlich, dass die invarianten Mannigfaltigkeiten für verschiedene stationäre Punkte sich schneiden können. Zum Beispiel gilt

$$\Gamma := \{(0, x_2)^T : -\frac{1}{2} < x_2 < 0\} \subset W_s(\mu_*) \cap W_u(\eta_*),$$

und dies reflektiert, dass es einen *heteroklinen Orbit* gibt, der  $\eta_*$  mit  $\mu_*$  verbindet: Mit  $\xi = (0, -1/3)$  gilt

$$x_\xi(t) = \left(0, -\frac{1}{2 + \exp(t)}\right)^T, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_\xi(t) = \mu_*, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_\xi(t) = \eta_*,$$



**Abbildung 3.4:** Phasenporträt für die Differentialgleichung (3.18):  $\mu_*$  (grün) besitzt eine zweidimensionale stabile Mannigfaltigkeit,  $\eta_*$  (blau) eine eindimensionale stabile (rot) sowie eine eindimensionale instabile (gelb) Mannigfaltigkeit (die gezeichneten Kurven geben nicht die maximale Ausdehnung der Mannigfaltigkeiten an).

### 3.4.2 Beispiel 2

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Diese hat wieder zwei stationäre Punkte

$$\mu_* = (+1, +1)^T, \quad \eta_* = (-1, -1)^T,$$

und eine einfache Rechnung liefert

$$A := Df(\mu_*) = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cong \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 - i\sqrt{7} & 0 \\ 0 & -3 + i\sqrt{7} \end{pmatrix},$$

$$B := Df(\eta_*) = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +2 & +2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{17} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere besitzt  $\mu_*$  eine zweidimensionale stabile Mannigfaltigkeit, und  $\eta_*$  jeweils eine eindimensionale stabile und instabile Mannigfaltigkeit, siehe Abbildung 3.4.

Um die stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit von  $\eta_*$  lokal und approximativ zu berechnen, machen wir wieder den Ansatz

$$x_2 = h(x_1),$$

da wir durch Berechnung der Räume  $E_s(B)$  und  $E_u(B)$  wissen, dass beide Mannigfaltigkeiten nicht vertikal durch  $\eta_*$  laufen. Die Differentialgleichung (3.18) liefert dann das singuläre Anfangswertproblem

$$h(-1) = -1, \quad h'(x_1)(-x_1 + h(x_1)) = 2 - x_1^2 - h(x_1)^2. \quad (3.19)$$

Um Lösungen zu approximieren, verwenden wir den Potenzreihenansatz

$$h(x_1) = -1 + a(x_1 + 1) + b(x_1 + 1)^2 + c(x_1 + 1)^3 + \dots,$$

den wir in (3.18) einsetzen. Durch Vergleich der Koeffizienten vor  $(x_1 + 1)$  finden wir die quadratische Gleichung

$$2 + 3a - a^2 = 0. \quad (3.20)$$

Diese hat zwei Lösungen, nämlich

$$a_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17}), \quad a_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17}).$$

Die Tangentialvektoren an den Graphen von  $h$  im Punkte  $\eta_*$  erfüllen nun

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

d.h.  $a_1$  entspricht der stabilen und  $a_2$  der instabilen Mannigfaltigkeit. Die beiden Lösungen  $a_1$  und  $a_2$  von (3.20) liefern zwei verschiedene Lösungen von (3.19), nämlich

$$h_s(x_1) = -1 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17})(x_1 + 1) - \frac{15 - 3\sqrt{17}}{1 - 3\sqrt{17}}(x_1 + 1)^2 + O((x_1 + 1)^3),$$

$$h_u(x_1) = -1 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})(x_1 + 1) - \frac{15 + 3\sqrt{17}}{1 + 3\sqrt{17}}(x_1 + 1)^2 + O((x_1 + 1)^3),$$

und damit asymptotische Formeln für  $W_s(\eta_*)$  und  $W_u(\eta_*)$  nahe  $\eta_*$ .

### 3.5 Der nichtlineare Oszillator und verwandte Gleichungen in 2D

In diesem Abschnitt wollen wir die Dynamik der skalaren Gleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y} = -V'(y)$$

bzw. das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

verstehen, wobei  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene und zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. In (3.13) hatten wir schon gesehen, dass es die Erhaltungsgröße

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1)$$

gibt, wobei  $\frac{1}{2}x_2^2$  bzw.  $V(x_1)$  als die kinetische bzw. die potentielle Energie des Systems interpretiert werden können. Insbesondere gilt stets

$$\Gamma_\xi \subseteq N_{E(\xi)},$$

wobei

$$N_c := \{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = c\}$$

die Niveaulinie von  $E$  zum Wert  $c$  ist.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit der Charakterisierung aller stationären Punkte sowie der Dimensionen der dazugehörigen invarianten Mannigfaltigkeiten.

**Lemma 27.** Sei  $\xi_* = (\xi_{*,1}, \xi_{*,2})$  ein stationärer Punkt von (3.21). Dann gilt

$$V'(\xi_{*,1}) = 0, \quad \xi_{*,2} = 0 \quad (3.22)$$

sowie

$$W_s(\xi_*), W_u(\xi_*) \subseteq N(\xi_*) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 = V(\xi_{*,1})\}.$$

Insbesondere gelten die folgenden Aussagen:

1. Für  $V''(\xi_{*,1}) > 0$  ist  $\xi_*$  ein lokales Minimum von  $E$  und es gilt  $\dim W_c(\xi_*) = 2$  und damit  $\dim W_s(\xi_*) = \dim W_u(\xi_*) = 0$ .
2. Für  $V''(\xi_{*,1}) < 0$  ist  $\xi_*$  ein Sattelpunkt von  $E$  und es gilt  $\dim W_s(\xi_*) = 1 = \dim W_u(\xi_*)$  und damit  $\dim W_c(\xi_*) = 0$ .

*Beweis.* Die Behauptung 3.22 folgt unmittelbar aus der Gleichung. Die Funktion

$$E(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

ist eine Erhaltungsgröße, siehe Beispiel 3.3. Sei nun  $\xi \in W_s(\xi_*)$ . Für jedes  $\xi \in W_s(\xi_*)$  gilt dann (nach Definition von  $W_s$  und Stetigkeit von  $E$ )

$$E(\xi) = E(x_\xi(t)) \quad \forall t \geq 0, \quad E(x_\xi(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E(\xi_*)$$

und dies impliziert  $W_s(\xi_*) \subseteq N(\xi_*)$ . Analog folgt  $W_u(\xi_*) \subseteq N(\xi_*)$ .

Durch Nachrechnen finden wir außerdem

$$A = Df(\xi_*) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -V''(\xi_{*,1}) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} := \text{Hess } E(\xi_*) = \begin{pmatrix} V''(\xi_{*,1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit  $\alpha := V''(\xi_{*,1})$  erhalten wir  $\text{spec } \tilde{A} = \{\alpha, 1\}$  sowie

$$\text{spec}_{\mathbb{C}} A = \begin{cases} \{-i\sqrt{|\alpha|}, +i\sqrt{|\alpha|}\} & \text{für } \alpha > 0, \\ \{0\} & \text{für } \alpha = 0, \\ \{-\sqrt{|\alpha|}, +\sqrt{|\alpha|}\} & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

Die Behauptungen über die invarianten Mannigfaltigkeiten folgen nun aus Theorem 26 und Klassifikation bzgl.  $E$  ergibt sich aus Analysis II.  $\square$

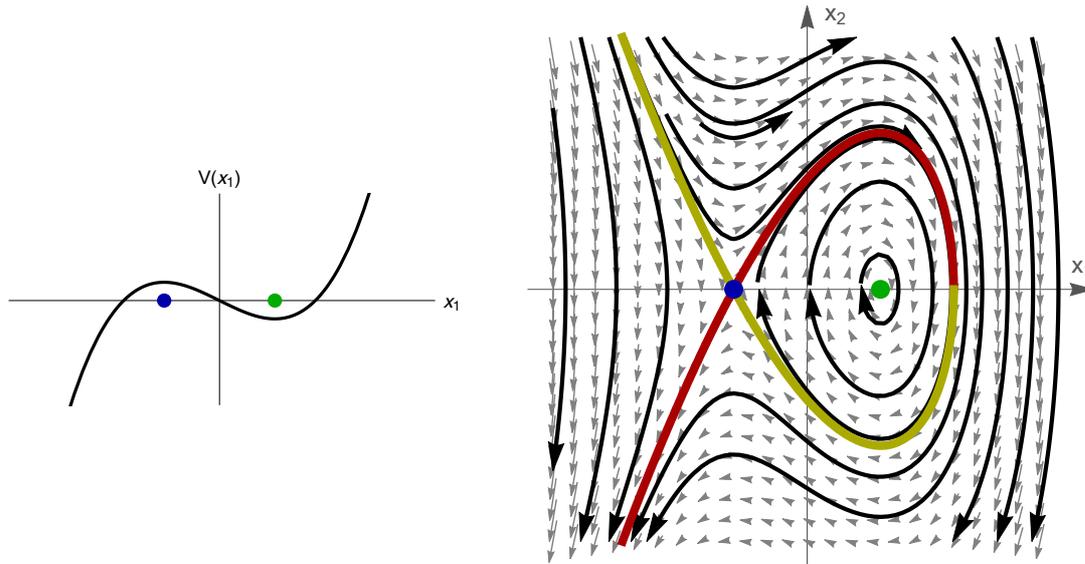
### 3.5.1 Beispiel A

Für  $V(x_1) = x_1^3 - x_1$  gibt es die stationären Punkte

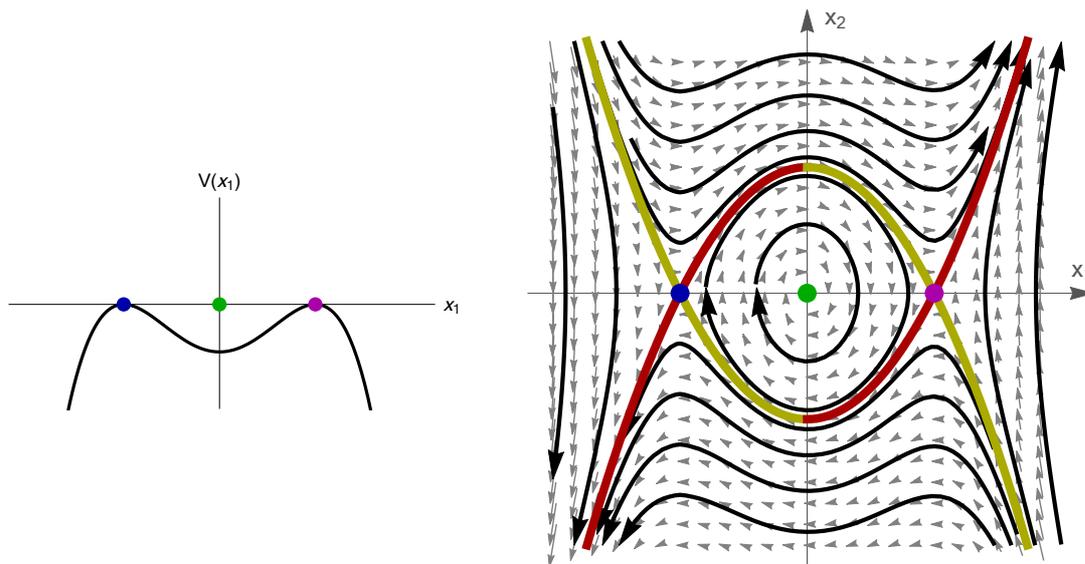
$$\mu_* = \left(-1/\sqrt{3}, 0\right), \quad \eta_* = \left(1/\sqrt{3}, 0\right).$$

Dabei ist  $-1/\sqrt{3}$  ein lokales Maximum von  $V$ , und  $+1/\sqrt{3}$  ein lokales Minimum. Wie in Abbildung 3.5 dargestellt, ist  $\eta_*$  ein Zentrum („centre“) und hat eine zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit. Der stationäre Punkt  $\mu_*$  ist ein Sattelpunkt („saddle“) und hat jeweils eine eindimensionale stabile und instabile Mannigfaltigkeit. Dabei fällt ein Ast der stabilen Mannigfaltigkeit mit einem Ast der instabilen Mannigfaltigkeit zusammen. Dies reflektiert die Existenz eines *homoklinen Orbits* für  $\mu_*$ , d.h. für jedes  $\xi$  mit  $E(\xi) = E(\mu_*)$  und  $\xi_1 > -1/\sqrt{3}$  gilt

$$x_\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \mu_*.$$



**Abbildung 3.5:** Potential  $V$  und Phasenporträt für Beispiel 3.5.1. Es gibt einen homoklinen Orbit für  $\mu_*$  (blau), der sowohl in der stabilen Mannigfaltigkeit (gelb) als auch in die instabile Mannigfaltigkeit (rot) von  $\mu_*$  liegt.



**Abbildung 3.6:** Potential  $V$  und Phasenporträt für das Beispiel aus §3.5.2. Es gibt einen heteroklinen Orbit der  $\mu_*$  (blau) mit  $\kappa_*$  (lila) verbindet, und einen anderen der  $\kappa_*$  mit  $\mu_*$  verbindet.

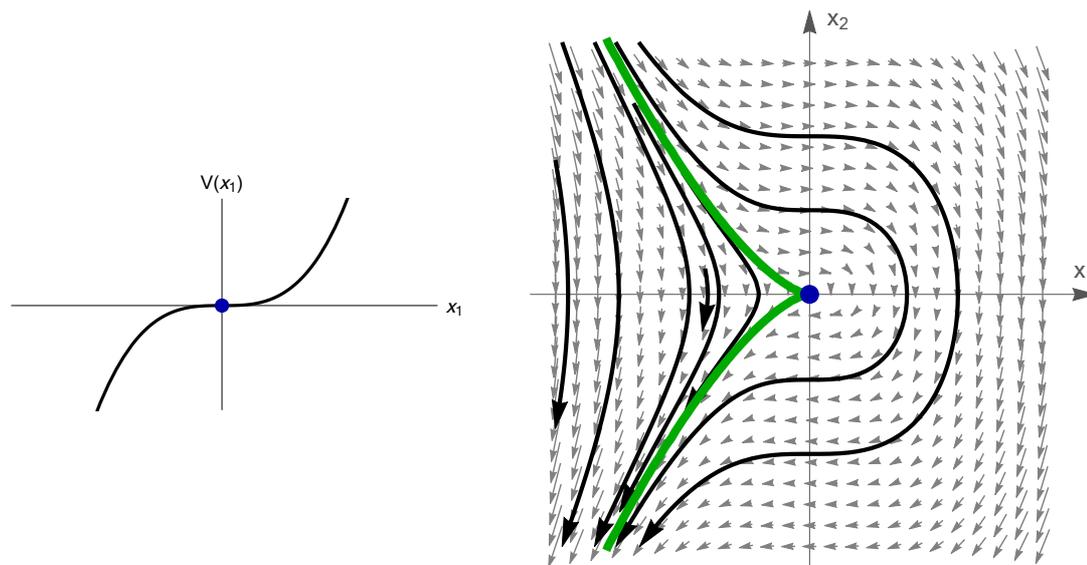
### 3.5.2 Beispiel B

Für  $V(x_1) = -(x_1^2 - 1)^2$  gibt es drei stationäre Punkte

$$\mu_* = (-1, 0), \quad \eta_* = (0, 0), \quad \kappa_* = (1, 0),$$

siehe Abbildung 3.6. Es gibt nun zwei *heterokline Orbits*:

1.  $E(\xi) = E(\mu_*) = E(\kappa_*)$ ,  $-1 < \xi_1 < +1$  und  $\xi_2 > 0$  impliziert  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_\xi(t) = \kappa_*$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_\xi(t) = \mu_*$ ,
2.  $E(\xi) = E(\mu_*) = E(\kappa_*)$ ,  $-1 < \xi_1 < +1$  und  $\xi_2 < 0$  impliziert  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_\xi(t) = \mu_*$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_\xi(t) = \kappa_*$ ,

Abbildung 3.7: Potential  $V$  und Phasenporträt für Beispiel 3.5.3.

### 3.5.3 Beispiel C

Für  $V(x_1) = x_1^3$  gibt es nur den stationären Punkt  $\xi_* = (0, 0)$ , der weder zu einem lokalen Maximum noch zu einem lokalen Minimum von  $V$  gehört. Die Linearisierung ist durch die (nicht diagonalisierbare) Jordan-Matrix

$$A = Df(\xi_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, und deshalb ist Theorem 26 nicht anwendbar, siehe Abbildung 3.7.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen qualitativen Aussagen.

**Lemma 28.** Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Aussagen:

1. Enthält  $N_c$  sowohl stationäre als auch nicht-stationäre Punkte, so existiert mindestens ein Orbit, der homoklin oder heteroklin ist. Dabei heißt der Orbit  $\Gamma_\xi$  homoklin, falls es einen stationären Punkt  $\sigma_*$  gibt, so dass  $x_\sigma(t) \rightarrow \xi_*$  sowohl für  $t \rightarrow -\infty$  als auch für  $t \rightarrow +\infty$ .  $\Gamma_\xi$  heißt heteroklin, falls zwei stationäre Punkte  $\mu_*$  und  $\eta_*$  gibt, so dass  $x_\xi(t) \rightarrow \mu_*$  für  $t \rightarrow -\infty$  aber  $x_\xi(t) \rightarrow \eta_*$ .
2. Ist  $N_c$  eine geschlossene Kurve, die keinen stationären Punkt enthält, so entspricht  $N_c$  einem periodischen Orbit.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

## 3.6 Bifurkationen bei Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

wobei  $\mu \in \mathbb{R}$  ein skalarer Parameter ist, und wollen verstehen, inwieweit die Anzahl und die Stabilität von stationären Punkten von  $\mu$  abhängt. Dabei wollen wir immer

annehmen, dass die rechte Seite  $f$  für alle  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  und (wenigstens) für alle  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  mit festem  $\varepsilon > 0$  definiert ist.

Eine wesentliche Beobachtung ist, dass (isolierte) hyperbolische stationäre Punkte unter kleinen Störungen persistieren, d.h. Bifurkationen können nur bei nichthyperbolischen stationären Punkten auftreten.

**Lemma 29** (Keine Bifurkation bei hyperbolischen stationären Punkten). *Sei  $f : \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar und sei  $\xi_0 \in \Omega$  gegeben mit:*

1.  $\xi_0$  ist isolierter stationärer Punkt der Gleichung mit Parameter  $\mu = 0$  (d.h.  $f(\xi_0, 0) = 0$  und  $f(x, 0) \neq 0$  für alle  $x$  in einer kleinen Kugel um  $\xi_0$ ),
2.  $\xi_0$  ist hyperbolisch, d.h. es gilt

$$\text{spec}_{\mathbb{C}} A \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \neq 0\}$$

für  $A = D_x f(\xi_0, 0)$ .

Dann existiert ein  $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon]$  sowie eine stetige Funktion  $\xi : (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \Omega$ , so dass

1.  $\xi(0) = \xi_0$ ,
2. für jedes  $\mu$  mit  $|\mu| < \tilde{\varepsilon}$  ist  $\xi(\mu)$  ein isolierter stationärer Punkt der Gleichung mit Parameter  $\mu$ ,
3. es gilt

$$\dim W_s(\xi(\mu)) = \dim W_s(\xi_0), \quad \dim W_u(\xi(\mu)) = \dim W_u(\xi_0)$$

für alle  $\mu$  mit  $|\mu| < \tilde{\varepsilon}$ .

*Beweis.* Da die Matrix  $A$  nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, kann die Gleichung  $f(\xi, \mu) = 0$  nach dem Satz über implizite Funktionen nach  $\xi$  aufgelöst werden. Insbesondere existieren eine Konstante  $\tilde{\varepsilon}$  und eine stetige Funktion  $\xi$ , so dass  $\xi(0) = \xi_0$  und  $f(\xi(\mu), \mu) = 0$  für alle  $\mu$  mit  $|\mu| \leq \tilde{\varepsilon}$ . Die verbleibenden Behauptungen folgen unmittelbar (wobei wir  $\tilde{\varepsilon}$  ggf. verkleinern), da die Matrix  $A(\mu) = D_x f(\xi(\mu), \mu)$  stetig von  $\mu$  abhängt und weil das Spektrum einer Matrix stetig von der Matrix abhängt.  $\square$

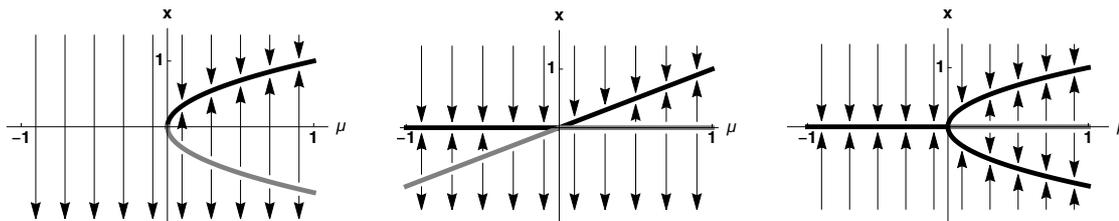
### 3.6.1 Beispiele mit hyperbolischen stationären Punkten in 1D

Wir wollen nun die Standardbeispiele für Bifurkationen in skalaren Differentialgleichungen studieren.

**Beispiel** ('saddle-node bifurcation').

$$\dot{x} = f(x, \mu) = -x^2 + \mu \tag{3.23}$$

- |           |   |
|-----------|---|
| $\mu < 0$ | <i>Es gibt keinen stationären Punkt.</i>  |
| $\mu = 0$ | <i>Der einzige stationäre Punkt <math>\xi_* = 0</math> ist nichthyperbolisch wegen <math>\partial_x f(\xi_*, \mu) = 0</math>.</i>   |
| $\mu > 0$ | <i>Es gibt zwei hyperbolische stationäre Punkte: <math>\xi_* = +\sqrt{\mu}</math> ist stabil und <math>\xi_* = -\sqrt{\mu}</math> ist instabil weil <math>\partial_x f(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu} \leq 0</math>.</i> |



**Abbildung 3.8:** Bifurkationstypen für die eindimensionalen Differentialgleichungen aus Abschnitt 3.6.1: ‘saddle-node’ (Gleichung (3.23)), ‘transcritical’ (Gleichung (3.24)), ‘pitchfork’ (Gleichung (3.25))

**Beispiel** (‘transcritical bifurcation’).

$$\dot{x} = f(x, \mu) = -x^2 + \mu x \quad (3.24)$$

In diesem Fall gibt es für  $\mu \neq 0$  zwei hyperbolische stationäre Punkte:

$$\begin{aligned} \mu < 0 & \quad \xi_* = \mu \text{ ist instabil, } \xi_* = 0 \text{ ist stabil.} \\ \mu = 0 & \quad \text{Beide stationären Punkte fallen zusammen;} \\ & \quad \xi_* = \mu = 0 \text{ ist aber nicht hyperbolisch (und nicht stabil).} \\ \mu > 0 & \quad \xi_* = 0 \text{ ist instabil, } \xi_* = \mu \text{ ist stabil.} \end{aligned}$$

**Beispiel** (‘pitchfork bifurcation’).

$$\dot{x} = f(x, \mu) = -x^3 + \mu x \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mu < 0 & \quad \text{Es gibt nur den stationären Punkt } \xi_* = 0. \text{ Dieser ist} \\ & \quad \text{hyperbolisch und stabil.} \\ \mu = 0 & \quad \text{Der stationäre Punkt } \xi_* = 0 \text{ ist nicht hyperbolisch (aber stabil).} \\ \mu > 0 & \quad \text{Der stationäre Punkt } \xi_* = 0 \text{ ist hyperbolisch und instabil. Außerdem} \\ & \quad \text{gibt es mit } \xi_* = \pm\sqrt{\mu} \text{ ein Paar stabiler hyperbolischer Punkte.} \end{aligned}$$

### 3.6.2 Beispiele mit hyperbolischen stationären Punkten in 2D

Die eindimensionalen Bifurkationen aus Abbildung 3.8 gibt es auch in höheren Dimensionen, siehe Abbildungen 3.9, 3.10 und 3.11 (das linke, mittlere und rechte Bild entspricht jeweils  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ , und  $\mu > 0$ , wobei  $\mu = 0$  der Bifurkationsparameter ist; der nicht-hyperbolische stationäre Punkt ist jeweils grün dargestellt).

Darüber hinaus gibt es noch die Hopf-Bifurkation.

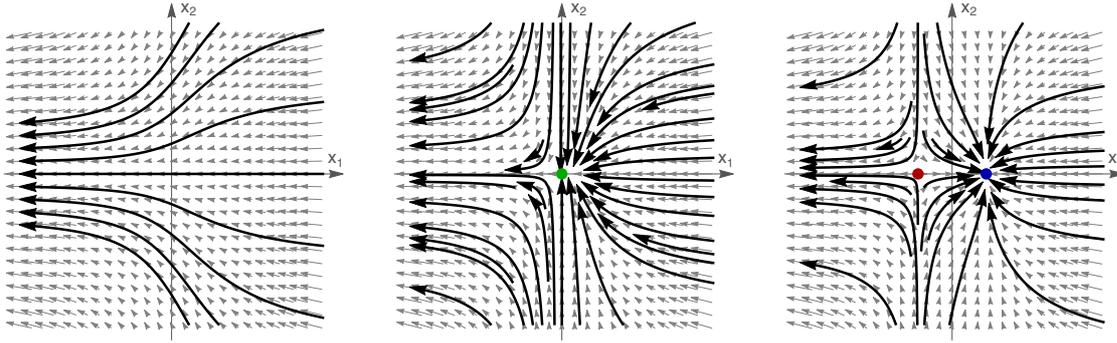
**Beispiel** (‘Hopf bifurkation’). Wir betrachten das zweidimensionale System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ +x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

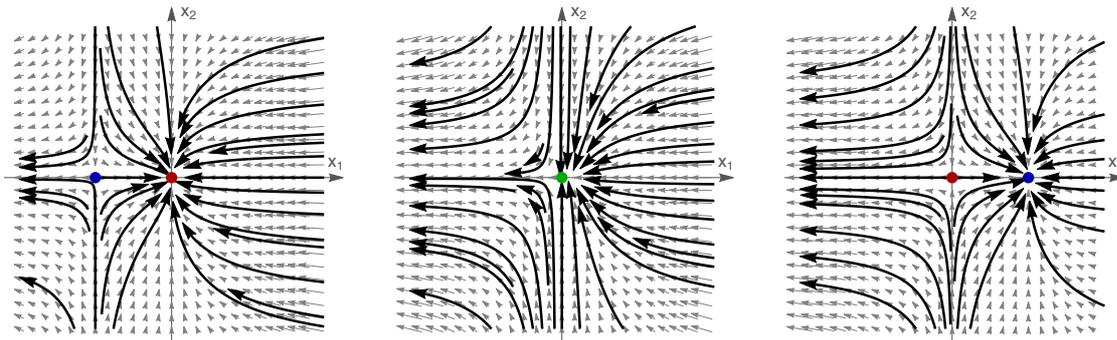
Für alle Werte von  $\mu \neq 0$  ist  $\xi_* = (0, 0)$  der einzige stationäre Punkt, und mit

$$A = D_x f(x, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ +1 & \mu \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mu - \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mu + \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

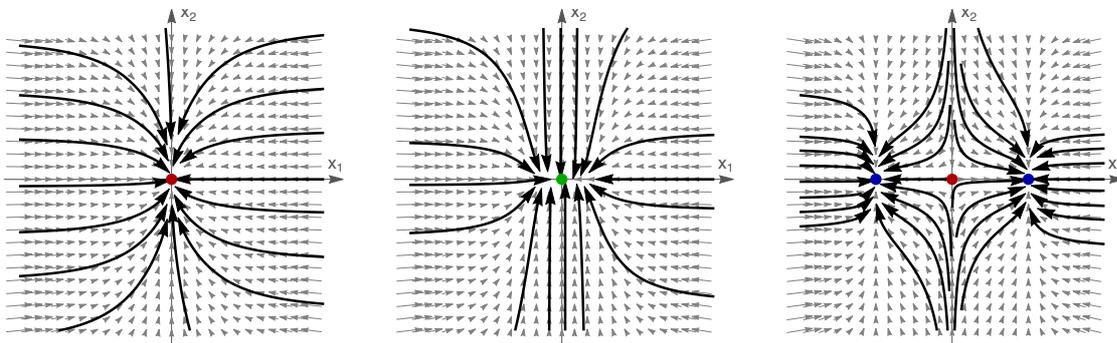
finden wir, dass  $\xi_*$  für  $\mu \neq 0$  hyperbolisch ist, wobei  $\xi_*$  stabil für  $\mu < 0$  aber instabil für  $\mu > 0$  ist. Deshalb kann man sagen, dass  $\xi_*$  bei  $\mu = 0$  seine Stabilität ändert.



**Abbildung 3.9:** Phasenporträts für  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  und  $\mu > 0$  bei einer ‘saddle-node bifurcation’ in 2D.



**Abbildung 3.10:** Phasenporträts für  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  und  $\mu > 0$  bei einer ‘transcritical bifurcation’ in 2D.



**Abbildung 3.11:** Phasenporträts für  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  und  $\mu > 0$  bei einer ‘pitchfork bifurcation’ in 2D.

Dies ist aber nicht die einzige qualitative Änderung. Um dies zu sehen, führen wir Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  via

$$x_1 = r \cos(\phi), \quad x_2 = r \sin(\phi)$$

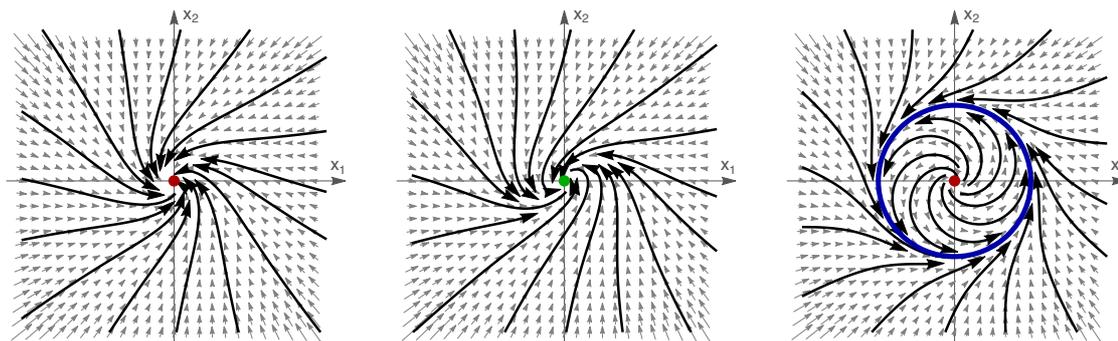
ein. Die Gleichung (3.26) ist äquivalent zu

$$\dot{\phi}(t) = +1, \quad \dot{r}(t) = r(\mu - r^2),$$

und durch Diskussion der skalaren Gleichung für  $r$  sieht man leicht, dass

$$r(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \max\{\sqrt{\mu}, 0\}$$

für alle nicht stationären Lösungen, siehe auch Abbildung 3.12. Insbesondere gibt es für  $\mu > 0$  einen ‘limit cycle’, das heißt einen periodischen Orbit der alle nichtstationären Lösungen anzieht. Dieser periodische Orbit ist offensichtlich durch  $r(t) = \sqrt{\mu}$  und  $\phi(t) = \phi(0) + t$  gegeben.



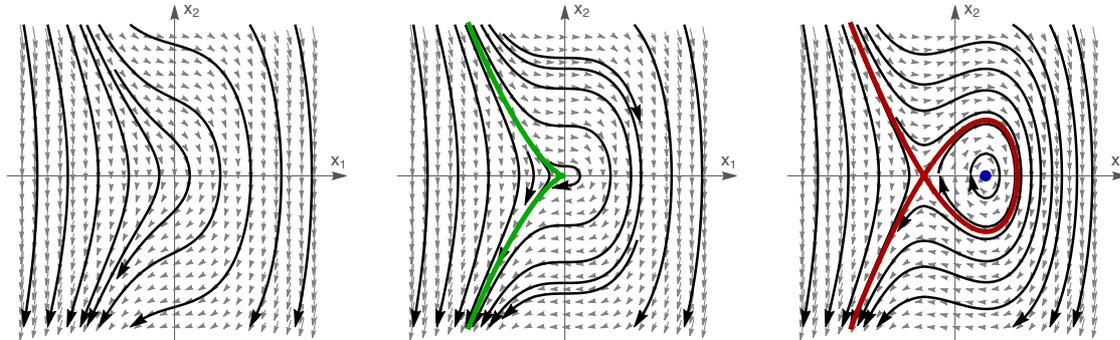
**Abbildung 3.12:** Phasenporträt für (3.26) mit  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  und  $\mu > 0$ . Bei  $\mu = 0$  tritt eine Hopf-Bifurkation auf, das heißt, ein stabiler hyperbolischer Punkt wird instabil und von diesem verzweigt ein stabiler periodischer Orbit.

### 3.6.3 Beispiele mit nichthyperbolischen stationären Punkten

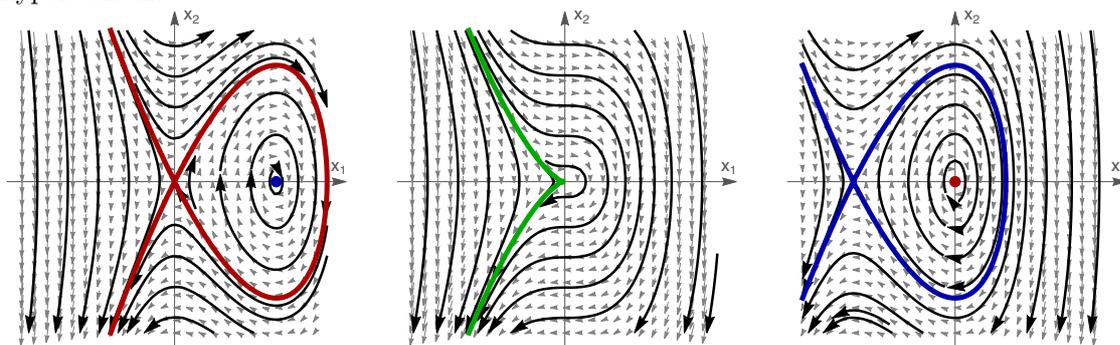
Es gibt auch Bifurkationen mit nichthyperbolischen stationären Punkten. Als Beispiel soll wieder die skalare Gleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = -\partial_x V(x, \mu) \quad (3.27)$$

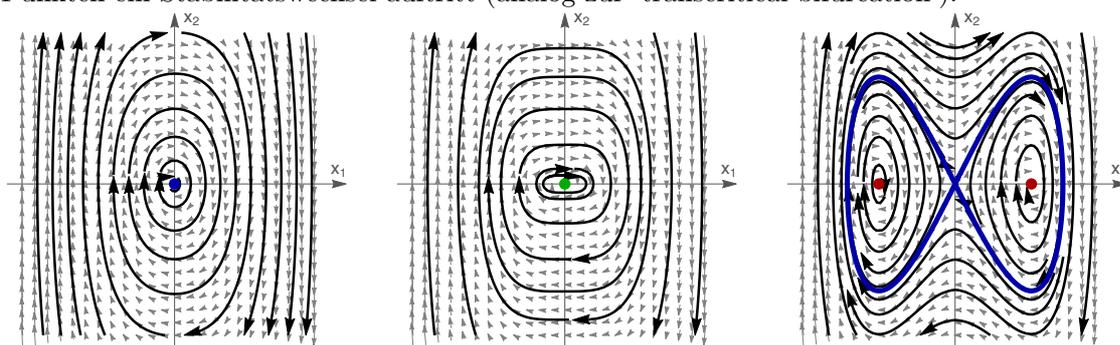
bzw. das äquivalente System erster Ordnung dienen. Obwohl stabile stationäre Punkte nun nicht mehr hyperbolisch sind, können verschiedene Bifurkationen auftreten. Dies ist in den Abbildungen 3.13, 3.14, und 3.15 dargestellt.



**Abbildung 3.13:** Phasenporträt für (3.27) mit  $V(x, \mu) = x^3 - \mu x$  für  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ , und  $\mu > 0$ . Bei  $\mu = 0$  entsteht ein Paar bestehend aus einem stabilen und einem instabilen stationären Punkt (analog zur ‘saddle-node bifurcation’), aber der stabile Punkt ist nicht hyperbolisch.



**Abbildung 3.14:** Phasenporträt für (3.27) mit  $V(x, \mu) = x^3 + \mu x^2$  für  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ , und  $\mu > 0$ . Bei  $\mu = 0$  kollidieren ein stabiler und ein instabiler stationärer Punkt, wobei in beiden Punkten ein Stabilitätswechsel auftritt (analog zur ‘transcritical bifurcation’).



**Abbildung 3.15:** Phasenporträt für (3.27) mit  $V(x, \mu) = x^4 - \mu x^2$  für  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ , und  $\mu > 0$ . Bei  $\mu = 0$  wird ein stabiler stationärer Punkt instabil. Gleichzeitig entsteht ein Paar stabiler stationärer Punkte (analog zur ‘pitchfork bifurcation’).