



Prof. Dr. Michael Herrmann  
Technische Universität Braunschweig  
Institut *Computational Mathematics*  
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

*Skript zur Vorlesung*  
***Komplexe Analysis***

© Michael Herrmann

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 3.0 DE**.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>



Dieses Skript ist im Sommersemester 2017 an der *Westfälischen Wilhelms-Universität Münster* entstanden.

Bei der Ausarbeitung dieses Vorlesungsskriptes hat der Autor regelmäßig die folgenden Werke konsultiert und viele Beweisstrategien, Präsentationsideen, Beispiele usw. übernommen:

[Sp] R. SPEICHER: *Funktionentheorie*  
Vorlesungsskript Uni Saarland, 2012

[FB] E. FREITAG AND R. BUSAM:  
*Complex Analysis*, Springer, 2005

[Bor] F. BORNEMANN:  
*Funktionentheorie*, Springer, 2013

[FL] W. FISCHER AND O. LIEB:  
*Funktionentheorie*, Vieweg, 2005

[Ea] R. EARL: *Metric Spaces and Complex Analysis*, Lecture Notes, University of Oxford, 2015

Der Autor dankt allen Kollegen und Studierenden, die durch sorgfältiges Korrekturlesen dieses Skript verbessert haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Die komplexen Zahlen . . . . .	5
1.2 Holomorphe Funktionen . . . . .	7
1.3 Folgen und Reihen von Funktionen . . . . .	9
1.4 Potenzreihen . . . . .	11
1.5 Kurvenintegrale . . . . .	14
1.6 Die Windungszahl als Kurvenintegral . . . . .	19
<b>2 Der Cauchysche Integralsatz und Folgerungen</b>	<b>21</b>
2.1 Der Integralsatz auf Sterngebieten . . . . .	21
2.2 Die Cauchysche Integralformel . . . . .	26
2.3 Lokaler Struktursatz und Holomorphiekriterien . . . . .	28
2.4 Die Cauchysche Ungleichung . . . . .	30
2.5 Nullstellensatz und Identitätssatz . . . . .	33
2.6 Gebietstreue und Maximumsprinzip . . . . .	36
2.7 Logarithmus und Allgemeine Potenzen . . . . .	37
2.8 Die globale Variante des Satzes von Cauchy . . . . .	42
2.9 Einfach zusammenhängende Mengen . . . . .	47
<b>3 Singularitäten und Residuen</b>	<b>51</b>
3.1 Holomorphe Funktionen auf Kreisringen . . . . .	51
3.2 Intermezzo: Fourier-Reihen periodischer Funktionen . . . . .	55
3.3 Singularitäten und Polstellen . . . . .	57
3.4 Der Residuensatz . . . . .	60
3.5 Residuensatz und reelle Integrale . . . . .	65
3.6 Das Argumentprinzip . . . . .	70
3.7 Randzyklen und Vereinfachungen . . . . .	74
3.8 Riemannsche Sphäre und meromorphe Funktionen . . . . .	76
<b>4 Biholomorphe Abbildungen</b>	<b>81</b>
4.1 Möbius-Transformationen . . . . .	82
4.2 Automorphismen . . . . .	86
4.3 Der Riemannsche Abbildungssatz . . . . .	90



# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Die komplexen Zahlen

#### Notationen

1.  $i^2 = -1$ ,
2.  $\mathbb{C} \ni z = x + iy$  mit  $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$  und  $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$
3.  $\bar{z} = x - iy$  ist die komplex konjugierte Zahl zu  $z$
4.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist Norm von  $z$

**Euler-Formel** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

gemäß der Definitionen von  $\exp$ ,  $\cos$ , und  $\sin$ . Diese sind durch die folgenden, absolut konvergenten, Reihen gegeben (siehe weiter unter)

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots \\ \sin(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \dots \\ \cos(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \dots\end{aligned}\tag{1.1}$$

Insbesondere gibt es für jedes  $z$  eine Polarzerlegung

$$z = \rho e^{i\phi} \quad \text{mit} \quad \rho = |z| \quad \text{and} \quad \phi = \arg(z),$$

wobei  $\arg z \in \mathbb{R}$  das *Argument von  $z$*  genannt wird und nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt ist.

**Topologie der komplexen Ebene**  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  sind mit den jeweiligen Abstands- und Normdefinitionen offensichtlich äquivalent und wir können über *offene*, *abgeschlossene*, *kompakte*, *zusammenhängende* und *einfach-zusammenhängende* Teilmengen reden.

Im folgenden schreiben wir

$$D_r(m) = \{z \in \mathbb{C} : |z - m| < r\} \quad \text{bzw.} \quad \bar{D}_r(m) = \{z \in \mathbb{C} : |z - m| \leq r\}$$

für die offene bzw. abgeschlossene Kreisscheibe von Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $m \in \mathbb{C}$ , und bezeichnen die entsprechende Kreislinie mit

$$C_r(m) = \{z \in \mathbb{C} : |z - m| = r\}.$$

Eine wichtige Rolle wird auch die *punktierte* offene Kreisscheibe

$$\dot{D}_r(m) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - m| < r\}$$

spielen.

**Annahme 1.** *Sofern nichts anderes explizit vereinbart wird, ist  $U$  (und analog  $V$ ) im Folgenden eine offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Diese kann in natürlicher Weise als offene und zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  betrachtet werden.*

**Abbildungen** In diesem Kapitel werden wir Abbildungen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  untersuchen. Wir können jedes solches  $f$  als

$$f = u + iv$$

schreiben, wobei  $u$  und  $v$  als Funktionen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  betrachten werden können, d.h. es gilt

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

**Definition 2** (Stetigkeit).  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt stetig im Punkt  $z_* \in U$ , sofern die Implikation

$$z_n \rightarrow z_* \quad \implies \quad f(z_n) \rightarrow f(z_*)$$

im Sinne der Konvergenz komplexer Zahlen gilt.  $f$  heißt stetig auf der Menge  $V \subseteq U$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $z_* \in V$  stetig ist.

**Lemma 3.** 1.  $f = u + iv$  ist in einem Punkt  $z = x + iy$  genau dann stetig, wenn sowohl  $u$  als auch  $v$  stetig im Punkt  $(x, y)$  sind.

2.  $f$  ist genau dann stetig auf  $U$ , wenn das Urbild offener Mengen offen ist.

3. Die Summe, das Produkt, und die Superposition stetiger Funktionen sind stetig.

*Beweis.* Alle Behauptungen folgen aus den obigen Definitionen bzw. analog zu den klassischen Argumenten in  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $c = a + ib$  gegeben. Die komplex-lineare Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto cz \in \mathbb{C}$$

entspricht der reell-linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +a & -b \\ +b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Inbesondere kann die lineare Abbildung

$$(x, y)^T \mapsto M \cdot (x, y)^T$$

genau dann als Multiplikation mit einer komplexen Zahl interpretiert werden, wenn die reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $M$  eine Drehstreckung beschreibt, d.h. wenn  $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  für geeignete  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt.

## 1.2 Holomorphe Funktionen

**Definition 4** (Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie<sup>1</sup>). Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (komplex) differenzierbar im Punkt  $z_* \in U$ , sofern der Limes

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(z_* + h) - fz_*}{h}$$

existiert, wobei dieser Limes dann die Ableitung von  $f$  in  $z_*$  genannt und mit

$$f'(z_*) \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dz}(z_*)$$

bezeichnet wird. Existiert  $f'(z)$  für jedes  $z \in V \subseteq U$ , so heißt  $f$  (komplex) differenzierbar auf  $V$  oder auch holomorph auf  $V$ .

**Lemma 5** (Elementare Eigenschaften).

1. Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $z_* \in \mathbb{C}$ , so ist  $f$  auch stetig in  $z_*$ .
2. Es gelten die üblichen Regeln bzgl. Addition und Multiplikation von Funktionen: Sind  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g$  differenzierbar in  $z \in \mathbb{C}$ , so sind auch  $f + g$  and  $fg$  differenzierbar in  $z_* \in \mathbb{C}$  mit

$$(f + g)'(z_*) = f'(z_*) + g'(z_*), \quad (f \cdot g)'(z_*) = f'(z_*)g(z_*) + f(z_*)g'(z_*).$$

3. Es gelten die Quotientenregel und die Kettenregel.
4.  $f$  ist genau dann in  $z_*$  differenzierbar, falls es ein  $c_* \in \mathbb{C}$  sowie ein sogenanntes Restglied  $t$  gibt, so dass

$$f(z_* + h) = f(z) + c_*h + t(h) \quad |t(h)|/|h| \xrightarrow{0 \neq h \rightarrow 0} 0.$$

In diesem Fall gilt natürlich  $c_* = f'(z_*)$ .

**Beispiel.**

1. Jedes Polynom ist holomorph (auf ganz  $\mathbb{C}$ ).
2.  $z \mapsto z^{-1}$  ist holomorph (auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).
3.  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  sind holomorph (auf ganz  $\mathbb{C}$ ).
4.  $f$  mit  $f(z) := \bar{z}$  ist nirgends holomorph, denn  $f'(z)$  existiert in keinem Punkt  $z$ .

**Theorem 6** (Cauchy<sup>2</sup>-Riemann<sup>3</sup>). Seien  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_* = x_* + iy_*$  gegeben. Dann ist sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist in  $z_*$  komplex differenzierbar.

<sup>1</sup>Holomorphie setzt sich aus *holos* (ganz) und *morphe* (Form) zusammen.

<sup>2</sup>Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), französischer Mathematiker. In der Funktionentheorie sind sehr viele Theoreme, Formeln usw. nach ihm benannt

<sup>3</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), deutscher Mathematiker.

2.  $(u, v)$  ist in  $(x_*, y_*)$  differenzierbar (im Sinne reeller Funktionen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) und die Jacobi-Matrix

$$J_* = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} (x_*, y_*)$$

beschreibt eine Drehstreckung, d.h. im Punkt  $x_*$  gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\partial_x u(x_*, y_*) = +\partial_y v(x_*, y_*), \quad \partial_y u(x_*, y_*) = -\partial_x v(x_*, y_*). \quad (1.2)$$

*Beweis.* Es gelte zunächst die zweite Bedingung, d.h. die Jacobimatrix

$$J_* = \begin{pmatrix} +a_* & -b_* \\ +b_* & +a_* \end{pmatrix}$$

existiert und beschreibt eine Drehstreckung. Nach Definition der reellen Differenzierbarkeit gibt es außerdem Restterme  $r$  und  $s$ , so dass

$$\begin{pmatrix} u(x_* + \varepsilon, y_* + \delta) \\ v(x_* + \varepsilon, y_* + \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_*, y_*) \\ v(x_*, y_*) \end{pmatrix} + J_* \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(\varepsilon, \delta) \\ s(\varepsilon, \delta) \end{pmatrix}$$

mit

$$\frac{|r(\varepsilon, \delta)| + |s(\varepsilon, \delta)|}{|\varepsilon| + |\delta|} \xrightarrow{(0,0) \neq (\varepsilon, \delta) \rightarrow 0} 0.$$

Mit  $h = \varepsilon + i\delta$ ,  $t = r + is$  und den anderen Identifikation gilt damit

$$f(z_* + h) = f(z_*) + (a_* + ib_*)h + t(h) \quad \text{mit} \quad \frac{|t(h)|}{|h|} \xrightarrow{0 \neq h \rightarrow 0} 0$$

und es folgt die erste Bedingung, d.h. die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $z_*$  mit  $f'(z_*) = a_* + ib_*$ . Unsere Argumentationskette kann auch rückwärts durchlaufen werden und damit ist die behauptete Äquivalenz gezeigt.  $\square$

### Bemerkung.

1. Ist  $f$  nicht nur in einem Punkt  $z_*$  sondern sogar auf einer offenen Menge  $V$  differenzierbar, so besitzen  $f$  bzw.  $(u, v)$  (wir werden das später beweisen) schon unendliche viele Ableitungen, und die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen (1.2) implizieren

$$\Delta u(x_*, y_*) = \Delta v(x_*, y_*) = 0 \quad \text{für jedes } z_* = x_* + iy_* \in V,$$

wobei  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  der Laplace-Operator ist. Insbesondere sind der Real- und der Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch.

2.  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  wird reell-differenzierbar in  $z_* = x_* + iy_*$  genannt, falls  $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  im Sinne der reellen Analysis existiert (die Jacobi-Matrix muss dann aber nicht unbedingt eine Drehstreckung repräsentieren). Für solche Funktionen definiert man die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(z_*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_* + \varepsilon) - f(z_*)}{\varepsilon}, \quad \partial_y f(z_*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_* + \varepsilon i) - f(z_*)}{\varepsilon},$$



mit reellem  $\varepsilon$  sowie die sogenannten Wirtinger-Ableitungen

$$\partial_z f(z_*) := \frac{1}{2} \left( \partial_x f(z_*) - i \partial_y f(z_*) \right), \quad \partial_{\bar{z}} f(z_*) := \frac{1}{2} \left( \partial_x f(z_*) + i \partial_y f(z_*) \right).$$

Eine in diesem Sinne reell-differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann komplex-differenzierbar, falls  $\partial_{\bar{z}} f = 0$ ; in diesem Fall gilt dann  $f'(z) = \partial_z f(z)$ . Beachte, dass  $\partial_x f(z_*)$  und  $\partial_y f(z_*)$  sowie  $\partial_z f(z_*)$  und  $\partial_{\bar{z}} f(z_*)$  jeweils komplexe Zahl sind.

3. Neben holomorphen Funktionen gibt es auch antiholomorphe Funktionen: Für diese gilt  $\partial_z f(z_*) = 0$  bzw.

$$J_* = \begin{pmatrix} +c_* & +d_* \\ +d_* & -c_* \end{pmatrix}.$$

Beispiele sind Funktionen in  $z$ , die als Polynom oder konvergente Reihe in  $\bar{z}$  geschrieben werden können. Wir werden später sehen, dass jede Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die sowohl holomorph als auch antiholomorph auf  $U$  ist, schon konstant sein muss.

## 1.3 Folgen und Reihen von Funktionen

Wir erinnern daran, dass Reihen komplexer Zahlen per Definition Grenzwerte von Partialsummenfolgen sind. Genauer gesagt, die Reihe zur Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn der Grenzwert auf der rechten Seite in

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k$$

im Sinne der Konvergenz komplexer Zahlen existiert. Darüber sagen wir, die die Reihe zu  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert absolut, falls auch die Reihe zu  $(|c_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

Wir wollen nun ähnliche Konzepte für Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen in der Variablen  $z$  einführen.

**Definition 7** (Konvergenz von Funktionenfolgen). Sei  $M \subseteq \mathbb{C}$  eine gegebene Menge und sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ , und  $f_\infty : M \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Funktion. Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert auf der Menge  $M$

1. punktweise gegen  $f_\infty$ , falls

$$|f_n(z) - f_\infty(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jedes feste  $z \in M$  gilt.

2. gleichmäßig gegen  $f_\infty$ , falls

$$\sup_{z \in M} |f_n(z) - f_\infty(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ist die Menge  $M$  darüber hinaus offen, so sagen wir, die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f_\infty$ , falls für jedes  $z_* \in M$  ein  $\varepsilon_* > 0$  mit  $\overline{D_{\varepsilon_*}(z_*)} \subset M$  existiert, so dass

$$\sup_{z \in \overline{D_{\varepsilon_*}(z_*)}} |f_n(z) - f_\infty(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Lemma 8.** *Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen  $f_\infty$  konvergiert, so ist  $f_\infty$  auch stetig.*

*Beweis.* Übungsaufgabe □

**Bemerkung.**

1. *Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nur punktweise, so ist der Grenzwert  $f_\infty$  nicht unbedingt stetig. Ein Standardbeispiel ist*

$$M = \overline{D}_1(0), \quad f_n(z) = |z|^n, \quad f_\infty(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z| < 1, \\ 1 & \text{falls } |z| = 1. \end{cases}$$

*Auf der offenen Kreisscheibe  $D_1(0)$  konvergieren die (Einschränkungen der) Funktionen  $f_n$  übrigens lokal gleichmäßig gegen die Nullfunktion und auf jeder Kreisscheibe  $\overline{D}_r(0)$  mit  $r < 1$  sogar gleichmäßig.*

2. *Wir werden später sehen, dass jeder lokal gleichmäßige Grenzwert holomorpher Funktionen selbst schon holomorph sein muss. Dass ist ein sehr bemerkenswertes Resultat und zeigt einmal mehr, dass die komplexe Differenzierbarkeit eine sehr starke Eigenschaft ist.*

Ein wichtige Rolle spielen Reihen von Funktionen bzw. die entsprechenden Partialsummenfolgen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ . Dabei existiert die Reihe der Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sofern die entsprechende Partialsummenfolge  $(s_n)$  konvergiert und wir schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = s_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Insbesondere können also Reihen von Funktionen *punktweise*, *gleichmäßig*, oder *lokal gleichmäßig* konvergieren. Darüber hinaus gibt es noch das stärkere Konzept der absoluten Konvergenz, bei der nicht nur die Partialsummenfolge zu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sondern auch die Partialsummenfolge zu  $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Eine Reihe kann also *absolut und punktweise*, *absolut und gleichmäßig*, oder *absolut und lokal gleichmäßig* konvergieren.

**Lemma 9.** *Für alle drei Konvergenzbegriffe aus Definition 7 gilt: Absolute Konvergenz einer Reihe impliziert schon die Konvergenz der Reihe.*

*Beweis.* Wir beginnen mit dem schwächsten Konvergenzbegriff und betrachten eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deren Reihe absolut und punktweise konvergiert, d.h. für jedes  $z \in M$  ist der Grenzwert

$$t_\infty(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(z) \quad \text{mit} \quad t_n(z) := \sum_{k=0}^n |f_k(z)|$$

wohldefiniert. Insbesondere ist  $(t_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge reeller Zahlen und für  $s_n(z) := \sum_{k=0}^n f_k(z)$  gilt

$$|s_{n+m}(z) - s_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |f_k(z)| = t_{n+m}(z) - t_n(z),$$

d.h.  $(s_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen und besitzt damit einen eindeutigen Grenzwert  $s_\infty(z)$ . Also konvergiert die Reihe zu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch punktweise (nämlich gegen  $s_\infty$ ). Auch im Fall von lokal gleichmäßiger bzw. gleichmäßiger Konvergenz der Reihe ist  $s_\infty$  als punktweise Grenzwert von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wohldefiniert und wir müssen nur noch zeigen, dass  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht nur punktweise, sondern sogar lokal gleichmäßig bzw. gleichmäßig gegen  $s_\infty$  konvergiert. Dies folgt aber sofort aus

$$|s_n(z) - s_\infty(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| = |t_n(z) - t_\infty(z)|$$

und der Definition der Konvergenzbegriffe. □

**Lemma 10** (Majorantenkriterium). *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n < \infty$  eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen mit*

$$\sup_{z \in M} |f_n(z)| \leq \varrho_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  absolut und gleichmäßig.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

## 1.4 Potenzreihen

**Lemma 11** (Lemma von Abel<sup>4</sup>). *Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  gegeben. Ist für ein  $z_1 \neq z_0$  die Folge  $n \mapsto a_n(z_1 - z_0)^n$  beschränkt, so konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  absolut und gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kugel  $\overline{D}_r(z_0)$  mit  $r < |z_1 - z_0|$ . Insbesondere konvergiert die Potenzreihe absolut und lokal gleichmäßig auf der offenen Kugel  $D_{|z_1 - z_0|}(z_0)$ .*

*Beweis.* Sei  $0 < r < |z_1 - z_0|$  fixiert und  $x \in \overline{D}_r(z_0)$  beliebig. Dann gilt

$$|\alpha_n(z - z_0)^n| \leq |\alpha_n| |z_1 - z_0|^n \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \leq C s^n$$

für eine geeignete Konstante  $C$  und  $s = r/|z_1 - z_0| < 1$ . Nach Vergleich mit der geometrischen Reihe konvergiert die Potenzreihe nun wegen des Majorantenkriteriums gleichmäßig auf  $\overline{D}_r(z_0)$ , und weil  $r$  beliebig im Intervall  $(0, |z_1 - z_0|)$  gewählt werden kann, folgt schließlich auch die behauptete lokal-gleichmäßig Konvergenz. □

**Theorem 12** (Cauchy-Hadamard<sup>5</sup>). *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$  eine beliebige Folge und sei*

$$\frac{1}{r} := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \in [0, \infty].$$

*Dann konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  als Funktion in  $z$  absolut und lokal gleichmäßig auf  $D_r(z_0)$ , aber die Reihe divergiert für jedes  $z \notin \overline{D}_r(z_0)$ .*

<sup>4</sup>Niels Henrik Abel (1802–1829), norwegischer Mathematiker.

<sup>5</sup>Jacques Hadamard (1865–1963), französischer Mathematiker.

*Beweis. Teil 1:* Sei  $r > 0$  und seien  $0 < r_1 < r$  sowie  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $|z_1 - z_0| = r_1$  beliebig. Dann gilt

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r_1} = \frac{1}{|z_1 - z_0|} \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h. die Folge  $(a_n(z_1 - z_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt. Mit dem Lemma von Abel folgt dann die lokal-gleichmässige Konvergenz der Potenzreihe auf  $D_{r_1}(z_0)$ . Da  $r_1$  beliebig im Intervall  $(0, r)$  gewählt werden kann, folgt auch die lokal-gleichmässige Konvergenz der Potenzreihe in  $D_r(z_0) = \cup_{r_1: 0 < r_1 < r} D_{r_1}(z_0)$  durch ein einfaches Ausschöpfungsargument.

*Teil 2:* Sei nun  $r < \infty$  und  $z$  beliebig fixiert mit  $|z - z_0| > r$ . Für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z_1 - z_0|} \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

und damit

$$|a_n| |z - z_0|^n \geq 1.$$

Insbesondere ist die Folge  $(a_n(z - z_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  also keine Nullfolge komplexer Zahlen, d.h. die Potenzreihe ausgewertet in  $z$  kann nicht konvergieren.  $\square$

Der Radius  $r$  und die Kreisscheibe  $D_r(z_0)$  aus Theorem 12 werden auch der *Konvergenzradius* und der *Konvergenzkreis* der Potenzreihe genannt,

**Theorem 13** (Potenzreihen sind holomorph). *Mit den Notationen von Theorem 12 gilt im Falle von  $r > 0$ : Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  ist holomorph auf  $D_r(z_0)$  mit Ableitung*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n,$$

wobei  $r$  auch der Konvergenzradius der Reihe auf der rechten Seite ist.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|^{1/n} (n+1)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

d.h. die Funktion  $g$  ist durch

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)(z - z_0)^{n-1}$$

wohldefiniert auf  $D_r(z_0)$ . Außerdem können wir o.B.d.A.  $z_0 = 0$  annehmen und für gegebenes  $z \in D_r(0)$  sowie alle hinreichend kleinen  $h$  verifizieren wir durch direkte

Rechnungen bzw. Indexverschiebungen die Formeln

$$\begin{aligned}
 r(z, h) &:= \frac{f(z+h) - f(z) - hg(z)}{h^2} \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n - hnz^{n-1}}{h^2} \\
 &= \sum_{n=2} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \\
 &= \sum_{n=2} a_n \sum_{\tilde{k}=0}^{n-2} \binom{n}{\tilde{k}+2} z^{n-2-\tilde{k}} h^{\tilde{k}} \\
 &= \sum_{\tilde{n}=0} a_{\tilde{n}+2} \sum_{\tilde{k}=0}^{\tilde{n}} \binom{\tilde{n}+2}{\tilde{k}+2} z^{\tilde{n}-\tilde{k}} h^{\tilde{k}} \\
 &= \sum_{n=0} a_{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+2} z^{n-k} h^k.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle hinreichend kleine  $|h|$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |r(z, h)| &\leq \sum_{n=0} |a_{n+2}| \sum_{k=0}^n \frac{(n+2)(n+1)}{(k+2)(k+1)} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k \\
 &\leq \sum_{n=0} |a_{n+2}| (n+2)^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k \\
 &= \sum_{n=0} |a_{n+2}| (n+2)^2 (|z| + |h|)^n \\
 &\leq \sum_{n=0} |a_n| n^2 (|z| + |h|)^n.
 \end{aligned}$$

Wir setzen  $\varrho := \frac{1}{2}(r + |z|)$ , so dass für alle hinreichend kleinen  $|h|$  die Abschätzungen

$$|z| + |h| < \varrho < r$$

und

$$|(z, h)| \leq \sum_{n=0} |a_n| n^2 \varrho^n$$

gelten. Die reelle Reihe auf der rechten Seite konvergiert aber auf Grund des Wurzelkriteriums für reelle Reihen und wegen  $\varrho < r$ , d.h. es gilt  $\limsup_{h \rightarrow 0} |r(z, h)| < \infty$  und dies impliziert

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| \leq |h| |r(z, h)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Insbesondere ist  $f$  holomorph in  $z$  und besitzt die Ableitung  $g(z)$ . Da  $z$  beliebig in  $D_r(0)$  gewählt werden kann, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** *Mit den Notationen von Theorem 12 folgt induktiv: Jede Potenzreihe besitzt auf ihrem offenen Konvergenzkreis unendliche viele Ableitungen im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit und jede Ableitung kann durch gliedweise Differentiation berechnet werden.*

**Beispiel.** Die komplexen Potenzreihen  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  aus (1.1) konvergieren auf ganz  $\mathbb{C} = D_\infty(0)$  und erfüllen

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z),$$

wobei ' die komplexe Ableitung  $d/dz$  meint.

## 1.5 Kurvenintegrale

**Erinnerung an Ana I und II** Im folgenden sei  $\phi : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine gegebene Funktion, d.h. es gibt eine reelle unabhängige Variable, die wir mit  $t \in I$  bezeichnen, und eine vektorwertige abhängige Größe, nämlich  $\phi \in \mathbb{C}$ .

1.  $\phi$  heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

von  $I$  gibt, so dass

- (a)  $\phi$  auf jedem offenen Teilintervall  $(t_{n-1}, t_n)$  stetig ist, und
- (b) die einseitigen Grenzwerten  $\phi(t_n \pm 0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \phi(t_n \pm \varepsilon)$  wohldefiniert sind.

Es muß aber weder  $\phi(t_n + 0) = \phi(t_n - 0)$  noch  $\phi(t_n \pm 0) = \phi(t_n)$  gelten.

2.  $\phi$  ist in  $t \in [a, b]$  differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\dot{\phi}(t) = \phi'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t+\varepsilon \in I} \varepsilon^{-1} (\phi(t+\varepsilon) - \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

existiert (für  $t = a$  und  $t = b$  als einseitiger Grenzwert).

3.  $\phi$  heißt stetig differenzierbar oder glatt, falls  $\dot{\phi}(t)$  für jedes  $t \in I$  existiert und stetig von  $t$  abhängt.
4.  $\phi$  heißt stückweise stetig differenzierbar oder stückweise glatt, falls  $\phi$  stetig ist und es analog zu oben eine Zerlegung von  $I$  gibt, so dass  $\phi$  auf jedem offenen Intervall  $(t_{n-1}, t_n)$  stetig differenzierbar ist und die einseitigen Grenzwerte  $\dot{\phi}(t_n \pm 0)$  wohldefiniert sind.
5. Das Integral einer stückweise stetigen Funktion  $\phi$  ist

$$\int_I \phi(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(\phi(t)) dt + i \int_I \operatorname{Im}(\phi(t)) dt \in \mathbb{C}.$$

6. Die Abbildung  $\phi \mapsto \int_I \phi(t) dt$  ist linear und stetig bzgl. lokal gleichmäßiger Konvergenz von  $\phi$ , d.h.  $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$  lokal gleichmäßig impliziert  $\int_I \phi_n(t) dt \rightarrow \int_I \phi_\infty(t) dt$ .
7. Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_I \phi(t) dt \right| \leq \int_I |\phi(t)| dt.$$

Dies kann entweder durch Approximation mit Treppenfunktionen oder wie folgt gezeigt werden: Es existiert  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$  mit

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \left| \int_I \phi(t) dt \right| &= \alpha \int_I \phi(t) dt = \operatorname{Re} \left( \alpha \int_I \phi(t) dt \right) = \int_I \operatorname{Re} (\alpha \phi(t)) dt \\ &\leq \int_I |\alpha| |\phi(t)| dt = \int_I |\phi(t)| dt. \end{aligned}$$

8. Für eine stückweise stetig-differenzierbare Funktion gilt mit

$$\int_I \dot{\phi}(t) dt = \phi(b) - \phi(a)$$

das vektorwertige Analogon des Hauptsatzes de Differential- und Integralrechnung.

**Definition 14** (Kurve, Integrationsweg, ‘path’, ‘contour’). *Eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  wird auch als Kurve (oder als Weg) in  $\mathbb{C}$  bezeichnet, wobei  $[a, b]$  der Parameterbereich ist und*

$$\operatorname{im} \gamma = \operatorname{sp} \gamma = \left\{ \gamma(t) : t \in [a, b] \right\}$$

das Bild der Kurve oder Spur der Kurve genannt wird. Dabei heißt  $\gamma$  geschlossen, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt, und einfach, sofern es keine zwei Zahlen  $a \leq t_1 < t_2 < b$  mit  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  gibt. Die reelle Größe

$$\operatorname{len}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

heißt die Länge der Kurve  $\gamma$ .

**Bemerkung.**

1. In der Geometrie wird oftmals  $\operatorname{sp} \gamma$  die Kurve (=geometrisches Objekt) genannt, wohingegen die Funktion als  $\gamma$  Parametrisierung bezeichnet wird.
2. Sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Kurven, sind auch  $\gamma_1 + \gamma_2$  und  $\gamma_1 \cdot \gamma_2$  Kurven im Sinne der obigen Definition, obwohl die entsprechenden geometrischen Objekte nicht addiert oder multipliziert werden können.
3. Ist  $\gamma : I \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  eine Kurve und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so ist auch  $f \circ \gamma$  eine Kurve.
4. Die Länge ist eine geometrische Größe im folgenden Sinne: Sei  $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{C}$  eine orientierungserhaltenden Reparametrisierung von  $\gamma$ , d.h. es gibt eine stetig-differenzierbare und strikt monotone (und damit invertierbare) Abbildung  $\psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  mit  $\psi(\tilde{a}) = a$  und  $\psi(\tilde{b}) = b$ , so dass  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ . Dann gilt  $\operatorname{len} \gamma = \operatorname{len} \tilde{\gamma}$ .
5. Das Bild  $\operatorname{sp} \gamma$  von  $\gamma$  ist immer beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

**Beispiel.**

1. Strecke  $[z_1, z_2]$  mit  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ :  $t \in [0, 1]$  und  $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$
2.  $l$ -mal durchlaufende geschlossene Kreislinie vom Radius  $r$  mit Mittelpunkt  $m$ :

$$\sigma_{r,l}(m)(t) = m + re^{ilt}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei positive bzw. negative  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  einem positiven bzw. negativen Durchlaufsinne entsprechen ( $l = 0$  beschreibt einen entarteten Weg).

3. Komposition  $\gamma_1 \oplus \gamma_2$  zweier Wege  $\gamma_1 : [a_1, b_1]$  und  $\gamma_2 : [a_2, b_2]$  mit  $a_2 = b_1$  und  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ :  $t \in [a_1, b_2]$  mit  $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) = \gamma_1(t)$  für  $a_1 \leq t \leq b_1$  bzw.  $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) = \gamma_2(t)$  für  $a_2 \leq t \leq b_2$ .
4. zu  $\gamma$  entgegengesetzter Weg  $\ominus\gamma$ :  $t \in [a, b]$  mit  $\ominus\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$

Ein sehr wichtiger Satz ist der folgende.

**Theorem 15** (Jordanscher<sup>6</sup> Kurvensatz). *Ist  $\gamma$  eine einfache und geschlossene Kurve, so besteht  $\mathbb{C} \setminus \text{sp } \gamma$  aus zwei disjunkten und jeweils offenen und zusammenhängenden Teilen, wovon genau ein Teil beschränkt ist (und das Innere genannt wird) und der andere unbeschränkt ist (und das Äußere genannt wird).*

*Beweis.* Es sei auf die einschlägige Literatur verwiesen. □

**Bemerkung.** *Ist  $\gamma$  eine geschlossene aber nicht einfache Kurve, so gibt es genau ein unbeschränktes Außengebiet und im Allgemeinen mehrere beschränkte Innengebiete.*

**Definition 16** (Komplexes Kurven- oder Wegintegral, ‘contour integral’). *Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  eine Kurve im Sinne von Definition 14 und  $f : \text{sp } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Dann wird*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \quad (1.3)$$

als das (komplexe) Kurvenintegral (bzw. Wegintegral) von  $f$  über  $\gamma$  bezeichnet.

**Beispiel.**

1. Da Integral des quadratischen Monoms entlang einer Strecke berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_{[z_1, z_2]} z^2 dz &= \int_0^1 ((1-t)z_1 + tz_2)^2 (z_2 - z_1) dt \\ &= (z_2 - z_1) \left( z_1^2 \int_0^1 (1-t)^2 dt + z_1 z_2 \int_0^1 2t(1-t) dt + z_2^2 \int_0^1 t^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{3} (z_2 - z_1) (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) = \frac{1}{3} (z_2^3 - z_1^3). \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), französischer Mathematiker.



2. Die vielleicht wichtigste Formel der komplexen Analysis ist

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{r,l}(0)} z^k dz &= \int_0^{2\pi} r^k e^{ikl t} (r i l e^{i l t}) dt = i l r^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{l(k+1)t} dt \\ &= \begin{cases} 2\pi l i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gegebene Parameter sind. Beachte, dass für  $k = -1$  der Wert des Integrals von der Umlaufzahl  $l$  aber nicht vom Radius abhängt.

### Bemerkung.

1. Die Formel (1.3) ist sehr intuitiv denn mit  $z = \gamma(t)$  gilt auch  $dz = \dot{\gamma}(t) dt$ . Manchmal schreibt man auch

$$\oint_{\gamma} f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_{\gamma} f(z) dz.$$

2. Das Kurvenintegral ist eine im Wesentlichen geometrische Größe, denn es gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

sofern  $\tilde{\gamma}$  eine orientierungserhaltende Reparametrisierung von  $\gamma$  ist (siehe oben). Dies folgt mit  $t = \psi(\tilde{t})$  und  $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\psi(\tilde{t}))$  via

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{t})) \dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{t})) (\dot{\gamma}(\psi(\tilde{t})) \psi'(\tilde{t})) d\tilde{t} = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

aus der Transformationsformel für reelle Integrale (siehe Ana I). Aus diesen Grund schreibt man manchmal/oftmals auch  $\int_{\text{sp } \gamma} f(z) dz$  anstatt von  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . Ein Beispiel ist

$$\int_{C_r(m)} f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_{\sigma_{r,1}(m)} f(z) dz,$$

wobei dann immer stillschweigend vorausgesetzt wird, dass geschlossenen Kurven in mathematisch positiver Richtung (also entgegen dem Uhrzeigersinn) und nur einmal durchlaufen werden.

3. Es gilt stets die Ungleichung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \leq (\text{len } \gamma) \sup_{z \in \text{sp } \gamma} |f(z)|,$$

die wir im Folgenden Standardabschätzung für Wegintegrale nennen wollen. Beachte, dass im Allgemeinen

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \not\leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$$

gilt, d.h. es gibt keine "Dreieckungleichung für Wegintegrale".

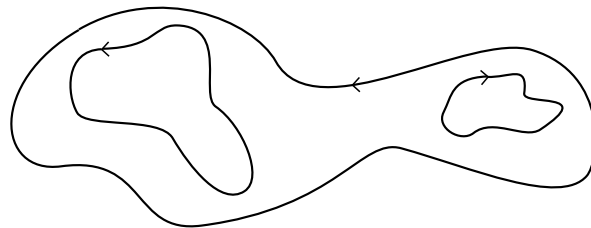
4. Es gilt

$$\int_{\Theta\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \quad (1.4)$$

sowie

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (1.5)$$

5. Das komplexe Kurvenintegral kann in natürlicher Weise auch für sogenannte Ketten von Kurven, d.h. für endliche Familien von Kurven, definiert werden, siehe Abbildung 1.1.



**Abbildung 1.1:** Beispiel für eine Kette von geschlossenen und orientierten Wegen. Das Kurvenintegral über einer Kette ist die Summe der Wegintegrale über die Einzelwege.

**Lemma 17** (Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung). *Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$  eine Kurve und besitzt  $f$  auf  $U$  eine Stammfunktion — d.h. gilt  $f = F'$  im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit auf ganz  $U$  — so gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

*Beweis.* Für stetig differenzierbare Kurven  $\gamma$  folgt dies aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralsrechnung

$$f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)),$$

und für stückweise stetig differenzierbare Kurven mit einem einfachen Kompositionsargument.  $\square$

**Bemerkung.**

1.  $f(z) = 1/z$  besitzt keine Stammfunktion auf  $D_r(0)$ . (Wir werden später sehen, dass es aber eine Stammfunktion auf jeder Kugel gibt, die den Nullpunkt nicht enthält).
2. Für jedes  $k \neq -1$  und jede geschlossene Kurve  $\gamma$  mit  $\text{sp } \gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\int_{\gamma} z^k dz = 0,$$

denn für jedes ganzzahlige  $k \neq -1$  existiert auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Stammfunktion  $F(z) = z^{k+1}/(1+k)$ .

3. Die Funktion  $f$  sei auf dem Kreis  $D_r(z_0)$  durch eine Potenzreihe gegeben. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow D_r(0)$ . Dies gilt weil die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  auf ihrem Konvergenzkreis die Stammfunktion  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+1} / (k+1)$  besitzt (siehe Theorem 13).

## 1.6 Die Windungszahl als Kurvenintegral

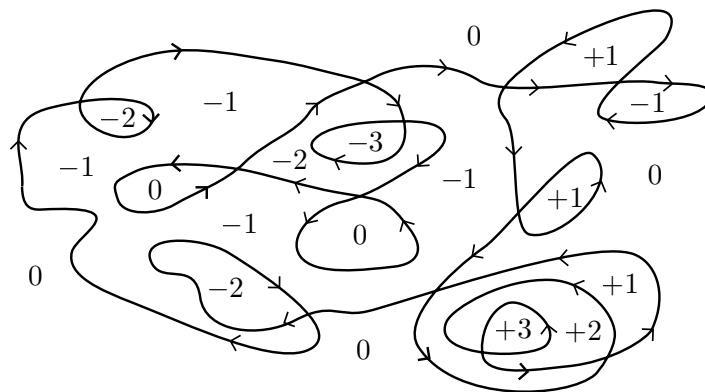


Abbildung 1.2: Beispiel für die Windungszahl aus Theorem 18.

**Theorem 18** (Existenz einer Windungszahl). Sei  $\gamma$  eine geschlossene (aber nicht notwendig einfache) Kurve in  $\mathbb{C}$ . Dann ist die durch

$$\text{Ind}_{\gamma}(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \zeta}$$

wohldefinierte Funktion  $\text{Ind}_{\gamma} : \mathbb{C} \setminus \text{sp } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{sp } \gamma$  und nimmt nur ganzzahlige Werte an.

*Beweis. Wertebereich:* Sei zunächst  $\gamma$  stetig differenzierbar und  $\zeta \notin \text{sp } \gamma$  fixiert. Wir definieren die Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  durch das (reelle, aber komplexwertige) Integral

$$\phi(t) := \exp \left( \int_a^t \frac{\dot{\gamma}(s) ds}{\gamma(s) - \zeta} \right)$$

und berechnen

$$\dot{\phi}(t) = \phi(t) \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - \zeta}.$$

Insbesondere gilt nach komplexer Quotienten- und Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \frac{\phi(t)}{\gamma(t) - \zeta} = \frac{\dot{\phi}(t)(\gamma(t) - \zeta) - \phi(t)\dot{\gamma}(t)}{(\gamma(t) - \zeta)^2} = 0,$$

und deswegen auch

$$\phi(b) = \frac{\gamma(b) - \zeta}{\gamma(a) - \zeta} \phi(a) = 1,$$

wobei wir  $\phi(a) = 1$  und  $\gamma(b) = \gamma(a) \neq \zeta$  benutzt haben. Wir erhalten damit (siehe Serie 1, Aufgabe 3)

$$\exp(2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(\zeta)) = \phi(b) = 1 \quad \text{d.h.} \quad \operatorname{Ind}_\gamma(\zeta) \in \mathbb{Z}.$$

Der Fall stückweise stetig differenzierbarer Wege  $\gamma$  kann durch einfache Zerlegungs- und Kompositionargumente analog behandelt werden.

Stetigkeit und Abklingen: Sei  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} \gamma$  eine Folge mit  $\zeta_n \rightarrow \zeta_\infty \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp} \gamma$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta_n) - \operatorname{Ind}_\gamma(\zeta_\infty)| &= \left| \int_\gamma \frac{\zeta_n - \zeta_\infty}{(z - \zeta_n)(z - \zeta_\infty)} dz \right| \\ &\leq (\operatorname{len} \gamma) |\zeta_n - \zeta_\infty| \sup_{z \in \operatorname{sp} \gamma} \frac{1}{|z - \zeta_n| |z - \zeta_\infty|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\inf_{z \in \operatorname{sp} \gamma} \inf_{n \in \mathbb{N}} |z - \zeta_n| |z - \zeta_\infty| > 0$$

nach Konstruktion wegen der Abgeschlossenheit von  $\operatorname{sp} \gamma$  gilt. Insbesondere ist die Funktion  $\operatorname{Ind}_\gamma$  stetig in ihrem Argument  $\zeta$ . Da sie aber nur diskrete Werte annimmt, muss sie nach einem bekannten Standardargument (siehe Ana II) konstant auf jeder Zusammenhangskomponente des Definitionsbereiches sein. Schließlich gilt

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta)| \leq \frac{\operatorname{len} \gamma}{\operatorname{dist} \{\zeta, \operatorname{sp} \gamma\}} \xrightarrow{|\zeta| \rightarrow \infty} 0$$

weil  $\operatorname{sp} \gamma$  eine beschränkte Menge ist, wobei

$$\operatorname{dist} \{\zeta, \operatorname{sp} \gamma\} := \inf \{|z - \zeta| : z \in \operatorname{sp} \gamma\}$$

den positiven Abstand von  $\zeta$  zu  $\operatorname{sp} \gamma$  bezeichnet.  $\square$

Die Größe  $\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta)$  heißt Windungszahl (oder Umlaufzahl oder Index) von  $\gamma$  bzgl.  $\zeta$ . Sie misst, wie oft  $\gamma$  um  $\zeta$  herumläuft. Das dem wirklich so ist, zeigt das folgende Resultat.

**Lemma 19** (Spezielle Formel für die Windungszahl). *Für festes  $\zeta \in \mathbb{C}$  sei die geschlossene Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch*

$$\gamma(t) = \zeta + r(t) \exp(i\theta(t)),$$

wobei  $r$  und  $\theta$  zwei stetig differenzierbare und reellwertige Funktionen auf  $[a, b]$  sind mit

$$r(a) = r(b), \quad \theta(b) - \theta(a) = 2\pi l \text{ für ein } l \in \mathbb{Z}, \quad r(t) > 0 \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Dann gilt

$$\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta) = l,$$

d.h.  $\operatorname{Ind}_\gamma(\zeta)$  hängt nur von  $\theta(b) - \theta(a)$  ab.

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

# Kapitel 2

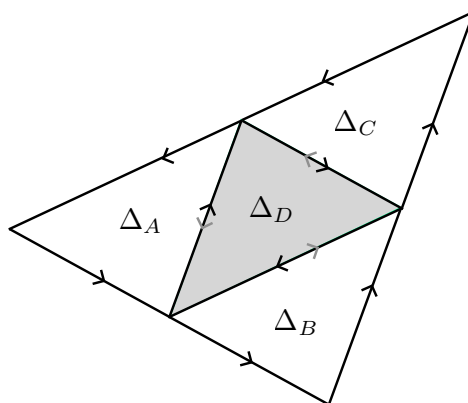
## Der Cauchysche Integralsatz und Folgerungen

### 2.1 Der Integralsatz auf Sterngebieten

Im folgenden bezeichnen wir für gegebene  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  die offene Menge

$$\Delta_{z_1, z_2, z_3} := \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i z_i : 0 < \lambda_i < 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \right\}$$

als das Dreieck mit den Eckpunkten  $z_i$ . Das entsprechende elementargeometrische Objekt ist dann entweder der Rand  $\partial\Delta_{z_1, z_2, z_3}$  (eindimensional) oder der Abschluss  $\overline{\Delta_{z_1, z_2, z_3}}$  (zweidimensional).



**Abbildung 2.1:** Jedes Dreieck  $\Delta$  kann mit Hilfe der Seitenmittelpunkte aller Kanten in vier kongruente Teildreiecke zerlegt werden, die jeweils den halben Umfang und ein Viertel der Fläche besitzen.

**Satz 20** (Lemma von Goursat<sup>1</sup>). *Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Menge,  $\Delta$  ein Dreieck mit  $\overline{\Delta} \subset U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0,$$

wobei  $\partial\Delta$  hier für einen Weg steht, der den Rand des Dreiecks  $\Delta$  genau einmal in positiver Orientierung durchläuft.

<sup>1</sup>Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936), französischer Mathematiker.

*Beweis. Abschätzung des Integrals:* Für jedes  $\zeta \in U$  existiert — siehe Lemma 5 — ein stetiges Taylor-Restglied  $r : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + r(z)(z - \zeta) \quad \text{mit} \quad |r(z)| \xrightarrow{z \rightarrow \zeta} 0.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz &= \left( f(\zeta) - \zeta f'(\zeta) \right) \int_{\partial\Delta} 1 \, dz + f'(\zeta) \int_{\partial\Delta} z \, dz + \int_{\partial\Delta} r(z)(z - \zeta) \, dz \\ &= \int_{\partial\Delta} r(z)(z - \zeta) \, dz \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass sowohl 1 als auch  $z$  als Funktion in  $z$  eine Stammfunktion auf ganz  $\mathbb{C}$  besitzen (nämlich  $z$  und  $\frac{1}{2}z^2$ ) und dass deshalb die entsprechenden Kurvenintegrale verschwinden (siehe Lemma 17). Insgesamt ergibt sich damit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz \right| \leq \text{len}(\partial\Delta) \sup_{z \in \partial\Delta} (|r(z)| |z - \zeta|) \leq \text{len}(\partial\Delta)^2 \sup_{z \in \partial\Delta} |r(z)|,$$

und werden nun zeigen, dass diese Abschätzung letztlich schon die Behauptung liefert.

*Sukzessive Zerlegung des Dreiecks:* Wie in Abbildung 2.1 dargestellt, zerlegen wir  $\Delta$  in vier kongruente Teildreiecke. Durch Wahl elementarer Parametrisierungen aller Teilstrecken in Abbildung 2.1 verifizieren wir die Identität

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = \int_{\partial\Delta_A} f(z) \, dz + \int_{\partial\Delta_B} f(z) \, dz + \int_{\partial\Delta_C} f(z) \, dz + \int_{\partial\Delta_D} f(z) \, dz,$$

wobei sich die Beiträge über die inneren Kanten gerade aufheben, da jede dieser inneren Kanten genau zweimal, aber jeweils einmal mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Wir setzen nun  $\Delta_0 := \Delta$  und wählen  $\Delta_1$  aus  $\{\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D\}$ , so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) \, dz \right| = \max_{i \in \{A, B, C, D\}} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z) \, dz \right|,$$

und erhalten

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) \, dz \right| \leq \sum_{i \in \{A, B, C, D\}} \left| \int_{\partial\Delta_i} f(z) \, dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) \, dz \right|.$$

Durch Iteration der Konstruktionsvorschrift  $\Delta_0 \rightsquigarrow \Delta_1$  können wir rekursiv eine Folge

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

von Dreiecken konstruieren, so dass

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) \, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) \, dz \right|$$

und

$$\text{area}(\partial\Delta_n) = \frac{1}{4^n} \text{area}(\partial\Delta), \quad \text{len}(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n} \text{len}(\partial\Delta),$$

wobei alle Dreiecke  $\Delta_n$  zueinander ähnlich sind (im elementargeometrischen Sinne).

Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ : Nach dem zweidimensionalen Analogon zum Intervallschachtelungsprinzip (siehe Ana II, auch Cantorsches Durchschnittsprinzip genannt) gibt es genau ein  $\zeta \in \overline{\Delta}$  mit

$$\{\zeta\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\Delta}_n,$$

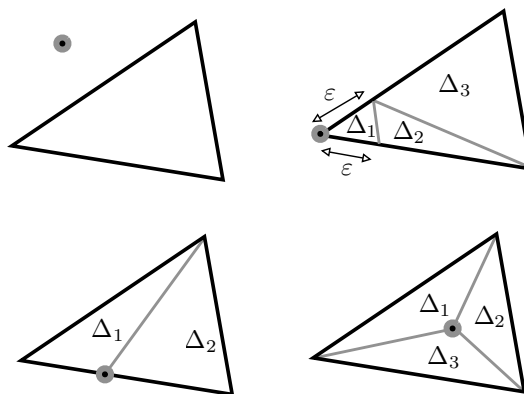
und nach Beweisschritt 1 gilt damit auch die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \text{len}(\partial\Delta_n)^2 \sup_{z \in \partial\Delta_n} |r(z)| \leq c_n \text{len}(\partial\Delta)^2, \quad c_n := \sup_{z \in \overline{\Delta}_n} |r(z)|$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert schließlich die Behauptung, da die Stetigkeit des Restgliedes  $r$  die Konvergenz  $c_n \rightarrow 0$  garantiert.  $\square$

Satz 20 gilt sinngemäß auch für jede Parametrisierung des geometrischen Dreiecks, d.h. auch für solche, die das Dreieck mehrmals oder in negativer Richtung durchlaufen. Dies folgt aus einfachen Kompositionsargumenten, siehe die Formeln (1.4) und (1.5).

Die Aussage von Goursat kann wie folgt verbessert werden.



**Abbildung 2.2:** Die vier Fälle im Beweis von Lemma 21: Durch geschickte Zerlegung des Dreiecks  $\Delta$  kann die Behauptung mit dem Goursatschen Satz 20 bewiesen werden.

**Lemma 21** (Variante des Satzes von Goursat). *Satz 20 gilt auch, wenn es einen Punkt  $\zeta \in U$  gibt, so dass  $f$  nur holomorph auf  $U \setminus \{\zeta\}$ , aber immer noch stetig in  $\zeta$  ist.*

*Beweis. Fall 1:  $\zeta \notin \overline{\Delta}$* : Wir verkleinern  $U$ , d.h. wir betrachten eine offene Menge  $\tilde{U}$  mit  $\overline{\Delta} \subset \tilde{U} \subset U \setminus \{\zeta\}$  und benutzen Satz 20 auf  $\tilde{U}$ .

*Fall 2:  $\zeta$  ist Eckpunkt von  $\overline{\Delta}$* . Wir wählen  $\varepsilon > 0$  beliebig und zerlegen  $\Delta$  wie in Abbildung 2.2 dargestellt. Dann gilt

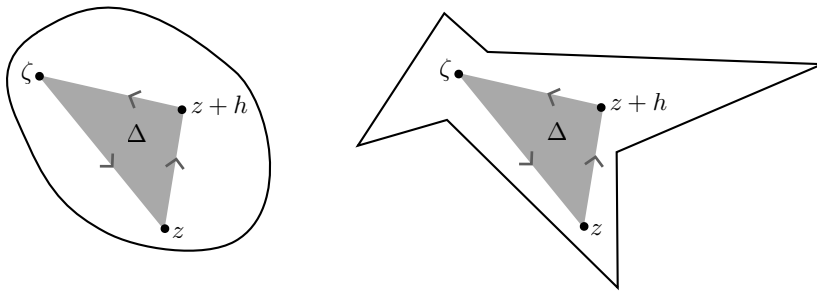
$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Delta_i} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz$$

da die Wegintegrale über  $\partial\Delta_2$  und  $\partial\Delta_3$  wie bereits im ersten Beweisschritt gezeigt — d.h. wegen Satz 20 — verschwinden. Außerdem gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \leq \text{len}(\partial\Delta_1) \sup_{z \in \overline{\Delta_1}} |f(z)| \leq C\varepsilon,$$

für eine geeignete Konstante  $C$ , die von  $\zeta$  und  $f$ , aber nicht von  $\varepsilon$  abhängt. Die Behauptung folgt nun durch Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Fall 3 und 4:  $\zeta$  liegt auf einer Randkante bzw. im Inneren von  $\overline{\Delta}$ .* Jeder Fall kann auf Fall 2 zurückgeführt werden, siehe wieder Abbildung 2.2.  $\square$



**Abbildung 2.3:** Auf einem sternförmigen Gebiet  $U$  kann für jede holomorphe Funktion eine entsprechende Stammfunktion durch Wegintegration entlang von Strecken konstruiert werden, siehe den Beweis von Satz 23.

**Definition 22** (Sternförmiges Mengen). *Eine Menge  $U \subset \mathbb{C}$  heißt sternförmig bzgl.  $\zeta \in U$ , falls für jedes  $z \in U$  auch die Verbindungsstrecke  $[\zeta, z]$  zu  $U$  gehört. Die Menge  $U$  heißt sternförmig oder Sterngebiet, falls ein solches  $\zeta$  existiert.*

Beachte, dass es sowohl offene als auch abgeschlossene Sterngebiete gibt.

**Beispiel.**

1. Jede konvexe Menge  $U$  (offen oder abgeschlossen) ist sternförmig bzgl. jedes  $\zeta \in U$ .
2. Für jedes feste  $\phi_* \in \mathbb{R}$  ist die offene geschlitzte Ebene  $U = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\phi_*} : r \geq 0\}$  sternförmig bzgl. jedes Punktes  $\zeta = s \exp(i\phi_* + i\pi)$  mit  $s > 0$ .
3. Für jede stetige Funktion  $\varrho : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$  mit  $\varrho(0) = \varrho(2\pi)$  ist die offene Menge  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho(\arg z)\}$  sternförmig bzgl.  $\zeta = 0$ .

Ein sehr wichtige Frage ist betrifft die Existenz von Stammfunktionen. Wir werden nur ein erstes hinreichendes Kriterium kennenlernen, das wir später verallgemeinern werden (siehe Satz 52).

**Satz 23** (Existenz einer Stammfunktion mittels Wegintegral). *Sei  $U$  ein offenes Sterngebiet bzgl.  $\zeta \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$



für jedes Dreieck  $\Delta$  mit  $\overline{\Delta} \subset U$  gilt. Dann wird durch

$$F(z) = \int_{[\zeta, z]} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z},$$

eine Stammfunktion zu  $f$  definiert, d.h. es gilt  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in U$ .

*Beweis.* Für festes  $z \in U \setminus \{\zeta\}$  und hinreichend kleines  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  liegt wegen der Offenheit von  $U$  die Verbindungsstrecke  $[z, z+h]$  auch in  $U$  und die Sterneigenschaft impliziert, dass auch der Abschluss des Dreiecks  $\Delta = \Delta_{\zeta, z, z+h}$  ganz in  $U$  liegt (siehe Abbildung 2.3). Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Delta} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z} \\ &= \int_{[\zeta, z]} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z} + \int_{[z, z+h]} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z} + \int_{[z+h, \zeta]} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z} \\ &= F(z) + \int_{[z, z+h]} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z} - F(z+h). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| -f(z) + h^{-1} \int_{[z, z+h]} f(\tilde{z}) \, d\tilde{z} \right| \\ &= h^{-1} \left| \int_{[z, z+h]} (f(\tilde{z}) - f(z)) \, d\tilde{z} \right| \\ &\leq h^{-1} \operatorname{len}([z, z+h]) \sup_{\tilde{z} \in \overline{D}_{|h|}(z)} |f(\tilde{z}) - f(z)| \\ &\leq h^{-1} \operatorname{len}([z, z+h]) \sup_{\tilde{z} \in \overline{D}_{|h|}(z)} |f(\tilde{z}) - f(z)| \\ &= \sup_{\tilde{z} \in \overline{D}_{|h|}(z)} |f(\tilde{z}) - f(z)|, \end{aligned}$$

wobei wir die Formel  $\int_{[z, z+h]} 1 \, d\tilde{z} = h$  benutzt haben. Der Limes  $h \rightarrow 0$  liefert die Differenzierbarkeit von  $F$  in  $z$  mit  $F'(z) = f(z)$ , eben weil die rechte Seite wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $z$  verschwindet. Analog folgt aus

$$\left| \frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} - f(\zeta) \right| = h^{-1} \left| \int_{[\zeta, \zeta+h]} (f(\tilde{z}) - f(\zeta)) \, d\tilde{z} \right| \leq \sup_{\tilde{z} \in \overline{D}_{|h|}(\zeta)} |f(\tilde{z}) - f(\zeta)|$$

auch  $F'(\zeta) = f(\zeta)$ . □

Wir beweisen nun ein klassisches Resultat der Funktionentheorie.

**Folgerung 24** (Satz von Cauchy auf Sterngebieten). *Auf einem offenen Sterngebiet  $U$  besitzt jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion und es gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 20, Satz 23 und Lemma 17  $\square$

Wie wollen erwähnen, dass der Satz von Cauchy (jede holomorphe Funktion besitzt Stammfunktion und das Wegintegral verschwindet längs jedes geschlossenen Weges) nicht nur auf Sterngebieten, sondern ganz allgemein auf jeder *einfach-zusammenhängen offenen Menge* gilt, d.h. auf jeder Menge, die keine Löcher besitzt. Es gilt aber zum Beispiel nicht auf Kreisringen und nicht auf der punktierten komplexen Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , denn dort ist die Funktion  $f(z) = 1/z$  zwar holomorph, aber es gilt  $\int_{\sigma_{1,1}(0)} f(z) dz \neq 0$ . Wir werden diese Frage weiter unten ausführlicher studieren.

**Folgerung 25** (Variante des Cauchyschen Satzes auf konvexen Mengen). *Seien  $U$  eine offene und konvexe Menge,  $\zeta \in U$  ein Punkt und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die stetig auf  $U$  und holomorph auf  $U \setminus \{\zeta\}$  ist. Dann besitzt  $f$  auf  $U$  eine Stammfunktion und es gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ .

*Beweis.* Da  $U$  sternförmig bzgl.  $\zeta$  ist, folgt die Behauptung aus Lemma 21 und Satz 23.  $\square$

## 2.2 Die Cauchysche Integralformel

**Satz 26** (Cauchy-Formel, Version 1). *Seien  $U$  eine offene und konvexe Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, und  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  Weg. Dann gilt*

$$f(\zeta) \operatorname{Ind}_{\gamma}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

für jedes  $\zeta \notin \operatorname{sp} \gamma$ .

*Beweis.* Wir fixieren  $\zeta \notin \operatorname{sp} \gamma$  und definieren eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} & \text{für } z \in U \setminus \{\zeta\}, \\ f'(\zeta) & \text{für } z = \zeta. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nach dem Quotientenkriterium holomorph auf  $U \setminus \{\zeta\}$  und stetig in ganz  $U$ . Folgerung 25 liefert deshalb

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - 2\pi i f(\zeta) \operatorname{Ind}_{\gamma}(\zeta)$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 27** (Cauchy-Formel, Version 2). *Seien  $U$  offen, und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r,1}(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

für jedes  $\zeta \in U$  und jeden Radius  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$ .

Meist schreibt meist etwas salopp

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

wobei dann immer stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die Kreislinie  $\partial D_r(\zeta)$  genau einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird.

**Satz 28** (Holomorphe Funktionen sind analytisch). *Jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $U$  kann lokal als Potenzreihe dargestellt werden. Genauer gesagt, für jedes  $\zeta \in U$  und jeden Radius  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$  gilt die Reihendarstellung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k \quad \text{für alle } z \in D_r(\zeta),$$

wobei die Koeffizienten die verallgemeinerte Cauchy-Formel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z}$$

erfüllen. Insbesondere ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (bzgl. des Arguments  $z$ ) nicht kleiner als  $r$ .

*Beweis.* Wir fixieren  $\zeta$  und  $r$  wie angegeben und betrachten einen beliebigen Punkt  $z \in D_r(\zeta)$ . Die Cauchy-Formel — siehe Satz 26 — impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z}$$

und außerdem gilt (analog zum Holomorphiebeweis der Stieltjes-Transformierten)

$$\frac{1}{\tilde{z} - z} = \frac{1}{(\tilde{z} - \zeta) - (z - \zeta)} = \frac{1}{\tilde{z} - \zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta}} = \frac{1}{\tilde{z} - \zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right)^k.$$

Wir bemerken nun, dass die Reihe auf der rechten Seite wegen

$$\left| \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right| = \frac{|z - \zeta|}{r} < 1$$

als Funktion in  $\tilde{z} \in \partial D_r(\zeta)$  gleichmäßig konvergiert. Insbesondere gilt für die Reihenreste

$$\left| \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} \sum_{k=K}^{\infty} \left( \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right)^k d\tilde{z} \right| \leq C \sum_{k=K}^{\infty} \left( \frac{|z - \zeta|}{r} \right)^k \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

und wir können daher die Reihenbildung bzgl.  $k \in \mathbb{N}$  und die Wegintegration bzgl.  $\tilde{z}$  miteinander vertauschen. Mit anderen Worten: Es gilt

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - \zeta} \left( \frac{z - \zeta}{\tilde{z} - \zeta} \right)^k d\tilde{z} = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$$

für jedes  $z \in D_r(\zeta)$ . Die untere Abschätzung für den Konvergenzradius folgt aus dem Cauchy-Hadamard-Theorem 12.  $\square$

**Folgerung 29** (Holomorphe Funktionen sind unendlich glatt). *Jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $U$  besitzt unendlich viele Ableitungen (im Sinne der komplexen Differenzierbarkeit) und es gilt*

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z}$$

für alle  $\zeta \in U$  und alle  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 28 und den Eigenschaften von Potenzreihen (siehe Theorem 13 sowie die anschließende Bemerkung).  $\square$

## 2.3 Lokaler Struktursatz und Holomorphiekriterien

Wir fassen die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts wie folgt zusammen.

**Theorem 30** (Lokale Charakterisierung holomorpher Funktionen, Satz von Taylor). *Seien  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann existieren für jedes  $\zeta \in U$  Koeffizienten  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ , so dass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$$

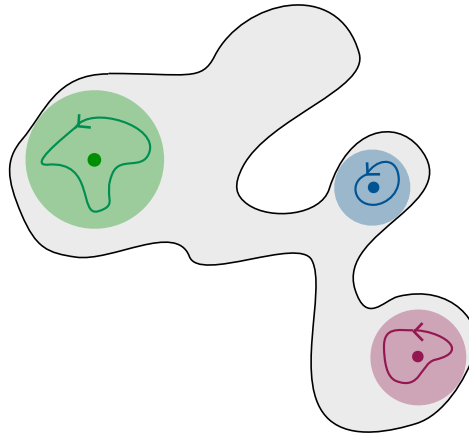
auf  $D_{\text{dist}\{\zeta, \partial U\}}(\zeta)$  — d.h. auf der größten offenen Kreisscheibe um  $\zeta$  in  $U$ , siehe Abbildung 2.4 — im Sinne absolut und lokal gleichmäßig konvergierender Potenzreihen gilt. Außerdem haben wir

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z}$$

für jeden Radius  $0 < r < \text{dist}(\zeta, \partial U) := \inf_{z \in \partial U} |z - \zeta|$ .

*Beweis.* Sei  $\zeta \in U$  fixiert und  $V := D_{r_{\max}}(\zeta)$  mit  $r_{\max} := \text{dist}\{\zeta, \partial U\}$  die maximale Kreisscheibe. Nach Satz 28 und Folgerung 29 — angewendet auf  $f$  und die Menge  $V$  — gilt dann

$$k! \alpha_k = f^{(k)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z}$$



**Abbildung 2.4:** Illustration zum Struktursatz — siehe Theorem 30 und die anschließende Bemerkung — mit drei verschiedenen Wahlen von  $\zeta$ , den dazugehörigen maximalen Kreisscheiben und jeweils einem Beispiel für einen zulässigen Weg  $\gamma$ .

für jeden Radius  $0 < r < r_{\max}$ . Mit anderen Worten: Die Koeffizienten  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  hängen zwar von  $f$  und  $\zeta$ , aber nicht von  $r$  ab. Aus Satz 28 folgt außerdem die punktweise Konvergenz der Potenzreihe für jedes  $z \in V$  und das Cauchy-Hadamard-Theorem 12 impliziert, dass der Konvergenzradius mindestens so groß wie  $r_{\max}$  ist, sowie die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe in  $\tilde{U}$ .  $\square$

**Bemerkung.** Man kann leicht zeigen, dass man in Satz 28 sowie Folgerung 29 die Kreislinien vom Radius  $r$  um  $\zeta$  durch jeden Weg ersetzen kann, der den Punkt  $\zeta$  genau einmal in positiver Richtung umläuft. Insbesondere können die lokalen Koeffizienten Theorem 30 auch durch die Formel

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \zeta)^{k+1}} d\tilde{z} = \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^{(k)}(\tilde{z})}{\tilde{z} - \zeta} d\tilde{z}$$

berechnet werden können, wobei  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  einen beliebigen geschlossenen Weg in  $D_{r_{\max}}(\zeta)$  mit  $\text{Ind}_{\gamma}(\zeta) = 1$  bezeichnet.

**Beispiel.** Seien  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f(z) = 1/z$  und  $\zeta \neq 0$  beliebig. Dann gilt

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} = \frac{(-1)^k}{\zeta^{k+1}}$$

und damit

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\zeta^{k+1}} (z - \zeta)^k \quad \text{für alle } z \in D_{|\zeta|}(\zeta),$$

wobei  $|\zeta| = \text{dist}\{\zeta, \partial U\}$  der Konvergenzradius der Reihe ist.

**Lemma 31** (Satz von Morera<sup>2</sup>). Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion auf der offenen Menge  $U$ . Dann ist  $f$  genau dann holomorph, wenn

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

für jedes Dreieck  $\Delta$  mit  $\bar{\Delta} \in U$  gilt.

<sup>2</sup>Giacinto Morera (1856–1909), italienischer Ingenieur und Mathematiker.

*Beweis.* Die Hinrichtung ist gerade der Goursatsche Satz 21. Für die Rückrichtung wählen wir  $\zeta \in U$  beliebig sowie einen Radius  $r > 0$ , so dass  $\overline{D}_r(\zeta) \in U$ . Da  $D_r(\zeta)$  sternförmig bzgl  $\zeta$  ist, liefert Korollar 24 die Existenz einer Stammfunktion  $F$  auf dieser Kugel und Korollar 29 garantiert, dass  $f = F'$  auf der Kugel und damit auch im Punkt  $\zeta$  differenzierbar ist. Da  $\zeta$  beliebig war, folgt die Holomorphie von  $f$  auf ganz  $U$ .  $\square$

**Satz 32** (Konvergenzsatz von Weierstraß<sup>3</sup>). *Sei  $U$  offen und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die lokal gleichmäßig gegen  $f_\infty : U \rightarrow \mathbb{C}$  konvergieren. Dann ist  $f_\infty$  holomorph und  $f_n^k$  konvergiert für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  lokal gleichmäßig gegen  $f_\infty^{(k)}$ .*

*Beweis.* Da für jeden Weg das entsprechende Wegintegral stetig bzgl. der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Integranden ist, folgt die Holomorphie aus Lemma 31 und die Konvergenz der Ableitungen ergibt sich aus der lokalen Potenzreihendarstellung sowie der verallgemeinerten Cauchy-Formel, siehe Theorem 30.  $\square$

**Lemma 33** (Nützliches Hilfsresultat). *Sei  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ist  $f$  außerhalb einer diskreten<sup>4</sup> Menge  $M \subset U$  holomorph, so ist  $f$  schon holomorph auf ganz  $U$ .*

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

**Satz 34** (Holomorphiekriterien). *Für jede Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf der offenen Menge  $U$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $f$  ist holomorph in  $U$ ,
2.  $f$  ist reell-differenzierbar in  $U$  und erfüllt in jedem Punkt aus  $U$  die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen aus Theorem 6,
3.  $f$  ist in  $U$  analytisch, d.h. für jedes  $\zeta \in U$  existiert eine offene Kreisscheibe  $D_r(\zeta) \subset U$ , so dass  $f$  auf dieser Kreisscheibe als Potenzreihe geschrieben werden kann.
4.  $f$  besitzt lokale Stammfunktionen, d.h. für jedes  $\zeta$  existieren eine offene Kreisscheibe  $D_r(\zeta) \subset U$  sowie eine Funktion  $F : D_r(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in D_r(\zeta)$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

## 2.4 Die Cauchysche Ungleichung

**Satz 35** (Cauchy-Ungleichung). *Sei  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$|f^{(k)}(\zeta)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z)|$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ , alle  $\zeta \in U$  und jeden Radius  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$ .

<sup>3</sup>Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), deutscher Mathematiker.

<sup>4</sup>Eine Menge  $M \subset U$  heißt diskret in  $U$ , falls jeder echte Häufungspunkt von  $M$  nicht zu  $U$  gehört. Alternativ kann die Diskretheit von  $M$  wie folgt charakterisiert werden: Für jedes  $\zeta \in M$  existiert ein Radius  $r$ , so dass  $D_r(\zeta) \cap M = \zeta$ .

*Beweis.* Nach Folgerung 29 und der Standardabschätzung für Wegintegrale gilt

$$|f^{(k)}(\zeta)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \text{len}(\partial D_r(\zeta)) \max_{z \in \partial D_r(\zeta)} \frac{|f(z)|}{|z-\zeta|^{k+1}}$$

und die Behauptung folgt sofort.  $\square$

Eng verwandt mit der Cauchy'schen Formel bzw. Ungleichung ist die sogenannte Mittelwerteigenschaft. Diese kann — im Gegensatz zur Holomorphie — sehr leicht auf höhere Raumdimensionen verallgemeinert werden.

**Lemma 36** (Mittelwerteigenschaft). *Sei  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + r e^{i\theta}) d\theta$$

für jede Kugel  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$ , d.h.  $f(\zeta)$  gleicht dem sphärischen Mittel von  $f$  über den Rand der Kugel vom Radius  $r$  mit Mittelpunkt  $\zeta$ .

*Beweis.* Die Behauptung ist nur eine Umformulierung der Cauchy-Formel, siehe Folgerung 27.  $\square$

Aus der Cauchy'schen Ungleichung bzw. der Mittelwerteigenschaft können die folgenden Aussagen abgeleitet werden.

**Folgerung 37** (Schwaches Maximumprinzip). *Unter den Voraussetzungen des Satzes 35 gilt*

$$|f(\zeta)| \leq \max_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z)|$$

**Lemma 38** (Satz von Liouville). *Jede holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist entweder konstant oder unbeschränkt.*

*Beweis.* Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit

$$M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty.$$

Die Cauchysche Ungleichung bzgl.  $D_r(z)$  liefert dann

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere gilt  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und damit auch

$$f(\zeta) = f(0) + \int_{[0, \zeta]} f'(\zeta) d\zeta = f(0)$$

für alle  $\zeta \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Lemma 39** (ein Nullstellenkriterium, *Minimal Modulus Principle*). Seien  $U$  offen,  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit

$$|f(\zeta)| < \min_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z)| .$$

Dann besitzt  $f$  eine Nullstelle in  $D_r(\zeta)$ .

*Beweis.* Angenommen, die Behauptung ist falsch, d.h. es gilt  $|f(z)| > 0$  für alle  $z \in D_r(\zeta)$ . Nach Voraussetzung gilt außerdem  $|f(z)| > 0$  für alle  $z \in \partial D_r(\zeta)$  und die Stetigkeit von  $f$  sowie die Kompaktheit von  $\overline{D}_r(\zeta)$  implizieren zunächst

$$\min_{z \in \overline{D}_r(\zeta)} |f(z)| > 0$$

und anschließend die Existenz einer offenen Menge  $V$ , so dass

$$\overline{D}_r(\zeta) \subset V \subseteq U \quad \text{und} \quad |f(z)| \neq 0 \quad \text{für alle } z \in V .$$

Insbesondere wird durch

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

eine auf  $V$  holomorphe Funktion definiert, und das Maximumprinzip — angewendet auf  $g$  und  $V$  — liefert

$$\frac{1}{|f(\zeta)|} = |g(\zeta)| \leq \max_{z \in \partial D_r(\zeta)} |g(z)| = \frac{1}{\min_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z)|} .$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

**Folgerung 40** (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes komplexe Polynom vom Grad  $K > 0$  besitzt — bei richtiger Zählung — genau  $K$  Nullstellen.

*Beweis.* Funktionentheoretischer Teil: Für ein Polynom  $p$  mit

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_K z^K, \quad \alpha_K \neq 0$$

gilt nach Dreiecksungleichung

$$|p(z)| \geq |z|^K \left( |\alpha_K| - \frac{|\alpha_{K-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|\alpha_0|}{|z|^K} \right)$$

und damit

$$\min_{\partial D_r(0)} |p(z)| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty > |\alpha_0| = |p(0)| .$$

Wählen wir nun  $r$  endlich aber hinreichend groß, so sind die Voraussetzungen von Lemma 39 mit  $\zeta = 0$  erfüllt, d.h.  $p$  besitzt eine Nullstelle in  $D_r(0)$ .

Arithmetischer Teil: Wir haben nun gezeigt, dass jedes Polynom  $p$  vom Grade  $K$  mindestens eine Nullstelle  $\zeta$  besitzt. Durch einen elementaren Beweis kann nun gezeigt werden, dass

$$p(z) = q(z)(z - \zeta)$$

für ein Polynom vom Grade  $K - 1$  gilt, dass aber — wie im ersten Beweisschritt gezeigt — für  $K > 1$  auch mindestens eine Nullstelle besitzen muss. Die Behauptung folgt nun induktiv. □



## 2.5 Nullstellensatz und Identitätssatz

**Lemma 41** (Charakterisierung einer Nullstelle). *Für eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $U$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $f$  besitzt in  $\zeta \in U$  eine Nullstelle der Ordnung  $K$ , d.h. es gilt

$$f(\zeta) = f'(\zeta) = \dots f^{(K-1)}(\zeta) = 0, \quad f^{(K-1)}(\zeta) \neq 0.$$

2. Die ersten  $N$  Taylor-Koeffizienten von  $f$  verschwinden in  $\zeta$ , d.h.

$$f(z) = \alpha_K(z - \zeta)^K + \alpha_{K+1}(z - \zeta)^{K+1} \dots, \quad \alpha_K \neq 0$$

gilt auf einer Kreisscheibe  $D_r(\zeta) \subset U$  um  $\zeta$ .

3. Die Funktion  $g$  mit  $g(z) = f(z)/(z - \zeta)^K$  ist holomorph auf einer Kreisscheibe um  $\zeta$  und erfüllt  $g(\zeta) \neq 0$ .

*Beweis.* Man zeigt leicht (1)  $\implies$  (2)  $\implies$  (3)  $\implies$  (1) mit Hilfe von des Struktursatzes Theorem 30.  $\square$

**Satz 42** (Identitätssatz, Version 1). *Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf der offenen und zusammenhängenden<sup>5</sup> Menge  $U$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $f$  verschwindet identisch auf  $U$ ,
2.  $f$  besitzt eine Nullstelle der Ordnung  $\infty$ , d.h. es existiert  $\zeta \in U$  mit  $f^{(k)}(\zeta) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,
3. die Nullstellenmenge

$$N_f := \{z \in U : f(z) = 0\},$$

besitzt einen echten Häufungspunkt<sup>6</sup> in  $U$ .

*Beweis.* Die Implikationen (1)  $\implies$  (2) ist trivial und (2)  $\implies$  (3) gilt weil nach dem Struktursatz Theorem 30  $N_f$  mindestens eine offene Kreisscheibe enthält.

(3)  $\implies$  (2): Nach Voraussetzung existieren eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und ein Punkt  $\zeta \in U$ , so dass  $z_n \rightarrow \zeta$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie  $f(z_n) = 0$  und  $z_n \neq \zeta$  für alle  $n$ . Außerdem gibt es nach Theorem 30 eine offene Kreisscheibe  $V = D_r(\zeta)$ , so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k \quad \text{für alle } z \in V$$

und wir zeigen nun durch Induktion über  $K$ , dass

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{K-1} = 0$$

<sup>5</sup> $U \subset \mathbb{C}$  heißt zusammenhängend, wenn es außer  $\emptyset$  und  $U$  keine Teilmengen von  $U$  gibt, die offen und abgeschlossen bzgl. der Relativtopologie in  $U$  ist. Alternativ kann der Zusammenhang von  $U$  als Wegzusammenhang charakterisiert werden: zu je zwei Punkten  $\zeta_1, \zeta_2$  gibt es einen stetigen Verbindungsweg, dessen Spur vollständig in  $U$  enthalten ist.

<sup>6</sup>Wir nennen  $z \in \mathbb{C}$  einen echten Häufungspunkt der Menge  $N \subset \mathbb{C}$ , wenn es eine approximierende Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N$  gibt, so dass  $z_n \rightarrow z$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $z_n \neq z$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Beachte, dass  $z$  nicht unbedingt in  $N$ , aber immer im Abschluß  $\overline{N}$  liegt.

gilt. Der Induktionsanfang mit  $K = 1$  folgt via  $\alpha_0 = f(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  aus der Stetigkeit von  $f$ , und im Induktionsschritt  $K \rightsquigarrow K + 1$  argumentieren wir wie folgt: Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - \alpha_K(z - \zeta)^K}{(z - \zeta)^{K+1}} = \alpha_{K+1} + \alpha_{K+2}(z - \zeta) + \dots$$

ist auf der Kreisscheibe  $V$  wohldefiniert und holomorph und nach Konstruktion gilt

$$0 = \frac{f(z_n)}{(z_n - \zeta)^K} = \alpha_K + (z_n - \zeta)g(z_n)$$

für alle hinreichend großen  $n$ . Der Limes  $n \rightarrow \infty$  liefert nun  $\alpha_K = 0$ , und damit den Beweis des Induktionsschrittes. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass  $\zeta$  eine Nullstelle der Ordnung  $\infty$  ist.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Wir betrachten die nach Voraussetzung nichtleere Menge

$$N_* = \{\zeta \in U : f^k(\zeta) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Diese ist — weil sowohl  $f$  als auch jede Ableitung  $f^k$  stetig ist — abgeschlossen unter punktwiser Konvergenz in  $U$ . Andererseits ist  $N_*$  auch offen, denn für jedes  $\zeta \in N_*$  existiert eine Kugel  $D_r(\zeta) \subset U$ , auf der die holomorphe Funktion  $f$  als Potenzreihe dargestellt werden kann, und wegen  $\zeta \in N_*$  müssen alle Taylor Koeffizienten verschwinden, d.h.  $f$  verschwindet identisch auf  $D_r(\zeta)$ . Es gilt also  $f^{(k)}(z)$  für alle  $z \in D_r(\zeta)$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ , d.h.  $D_r(\zeta) \subset N_*$ . Wir haben damit gezeigt, dass  $N_*$  eine nichtleere Teilmenge von  $U$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Da  $U$  zusammenhängend ist, gilt  $U = N_*$ .  $\square$

Wird Satz 42 auf die Differenz zweier holomorpher Funktionen angewendet, ergibt sich das folgende Resultat.

**Folgerung 43** (Identitätssatz, Version 2). *Seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  zwei holomorphe Funktionen auf einer offenen und zusammenhängenden Menge  $U$ , so dass die Menge*

$$N_{f-g} = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$$

*einen echten Häufungspunkt in  $U$  besitzt. Dann sind  $f$  und  $g$  identisch, d.h.  $N_{f-g} = U$ .*

Die üblichen Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen, also zum Beispiel

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

können im Komplexen zum einen mit Hilfe der Reihendarstellungen von  $\sin$  und  $\cos$  nachgerechnet werden, aber zum anderen auch wie folgt mit Hilfe des Identitätssatzes aus den entsprechenden Gesetzen im Reellen abgeleitet werden: Sei zunächst  $\beta \in \mathbb{R}$  fixiert. Dann sind sowohl die linke als auch die rechte Seite holomorph im Argument  $\alpha \in \mathbb{C}$  und darüberhinaus auch identisch für  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Mit Folgerung 43 gilt dann das Additionstheorem für jedes  $\alpha \in \mathbb{C}$  und das festgehaltene  $\beta \in \mathbb{R}$ . Im zweiten Schritt fixieren wir  $\alpha \in \mathbb{C}$  beliebig und zeigen analog, dass die Formel sogar für alle  $\beta \in \mathbb{C}$  gelten muss.

Das nächste Resultat erlaubt es, die Anzahl der Nullstellen einer holomorphen Funktion innerhalb einer Kreisscheibe zu berechnen. Wir werden später sehen, dass dies eigentlich ein Spezialfall eines allgemeineres *Argumentsprinzips* ist.

**Satz 44** (Anzahl der Nullstellen). *Seien  $U$  offen mit  $\overline{D_r(\zeta)} \subset U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, die auf  $\partial D_r(\zeta)$  keine Nullstelle besitzt. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl der Nullstellen von } f \text{ in } D_r(\zeta),$$

wobei jede Nullstelle gemäß ihrer Ordnung gezählt wird.

*Beweis.* Die Nullstellen in  $D_r(\zeta)$  und ihre Ordnungen seien mit  $z_1, \dots, z_N$  und  $m_1, \dots, m_N$  bezeichnet, wobei wir benutzt haben, dass  $f$  nur endliche Nullstellen in  $D_r(\zeta)$  besitzen kann (andernfalls würde die Nullstellenmenge von  $f$  mindestens einen echten Häufungspunkt in  $D_r(\zeta)$  besitzen und Satz 42 würde via  $f \equiv 0$  einen Widerspruch zur Voraussetzung liefern).

Sukzessives Abspalten von Monomen: Wir setzen  $f_0 := f$ , definieren  $f_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f_1(z) := \frac{f(z)}{(z - z_1)^{m_1}}$$

und bemerken, dass  $f_1$  holomorph auf  $U \setminus \{z_1\}$  ist. Nach dem Strukturtheorem 30 und Lemma 41 ist  $f_1$  aber sogar holomorph in ganz  $U$ , denn lokal um  $z_1$  existieren Koeffizienten  $\alpha_{k,1}$ , so dass

$$f_0(z) = \sum_{k=m_1}^{\infty} \alpha_{k,1} (z - z_1)^k, \quad f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+m_1,1} (z - z_1)^k.$$

Außerdem gilt  $f_1(z_1) \neq 0$  und  $f_1(z_2) = \dots = f_1(z_N) = 0$ . Durch Iteration der Vorschrift  $f_0 \rightsquigarrow f_1$  finden wir schließlich eine holomorphe Funktion  $f_N =: g$  auf  $U$ , so dass

$$f(z) := (z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_N)^{m_N} \cdot g(z),$$

wobei  $g$  nach Konstruktion auf  $\overline{D_r(\zeta)}$  keine Nullstelle besitzt und damit auch nicht auf einer (leicht) größeren und offenen Kreisscheibe  $D_s(\zeta)$  mit  $s > r$  und  $s - r$  hinreichend klein.

Wegintegral: Nach Konstruktion gilt nun

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{z - z_n}$$

wobei  $g'/g$  holomorph auf dem offenen Sterngebiet  $D_s(\zeta)$  ist. Deshalb — siehe auch Lemma 17 — gilt

$$\int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 + \sum_{n=1}^N m_n \int_{\partial D_r(\zeta)} \frac{dz}{z - z_n} = 2\pi i \sum_{n=1}^N m_n \text{Ind}_{\partial D_r(\zeta)} z_n,$$

und dies liefert via  $\text{Ind}_{\partial D_r(\zeta)} z_n = 1$  die Behauptung. □

## 2.6 Gebietstreue und Maximumsprinzip

**Satz 45** (Gebietstreue, *Open Mapping Theorem*). Sei  $U$  offen und zusammenhängend und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht-konstant. Dann ist die Bildmenge  $f(U)$  auch offen und zusammenhängend.

*Beweis. Offenheit:* Sei  $\zeta \in U$  gegeben. Nach dem Identitätssatz 42 existiert ein Radius  $r > 0$ , so dass die holomorphe Funktion  $\tilde{f} = f - f(\zeta)$  neben  $\zeta$  keine weitere Nullstelle in  $\overline{D}_r(\zeta)$  besitzt. In der Tat: wenn es kein solches  $r$  geben würde, wäre  $\zeta$  ein echter Häufungspunkt der Nullstellenmenge  $N_{\tilde{f}}$  und  $f$  wäre konstant). Insbesondere gilt also

$$0 < \min_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z) - f(\zeta)| =: 3\varepsilon.$$

Wir zeigen nun, dass jedes  $w \in D_\varepsilon(f(\zeta))$  schon in  $f(U)$  enthalten ist, d.h. dass  $f(\zeta)$  in der Tat ein innerer Punkt von  $f(U)$  ist. Dazu bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \min_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z) - w| &\geq \min_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z) - f(\zeta)| - |f(\zeta) - w| \\ &\geq 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon \geq |f(\zeta) - w|. \end{aligned}$$

Das Nullstellenkriterium Lemma 39 angewendet auf die Funktion  $f - w$  impliziert nun  $w \in f(D_r(\zeta)) \subset f(U)$ .

*Zusammenhang:*  $f(U)$  ist als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge selbst zusammenhängend (siehe Ana II).  $\square$

**Folgerung 46** (Kriterien für Konstantheit). Sei  $U$  offen und zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

1.  $f$  ist konstant,
2.  $\operatorname{Re} f$  ist konstant,
3.  $\operatorname{Im} f$  ist konstant,
4.  $|f|$  ist konstant,

*Beweis.* Die erste Bedingung impliziert offensichtlich alle anderen. Jeder dieser anderen Bedingungen impliziert, dass  $f(U)$  nicht offen ist, und damit nach Satz 45, dass  $f$  konstant ist.  $\square$

**Folgerung 47** (Starkes Maximum-Prinzip, *Maximal Modulus Principle*). Sei  $U$  offen und zusammenhängend und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht-konstant. Dann gilt

$$|f(\zeta)| < \max_{z \in \overline{D}_r(\zeta)} |f(z)| = \max_{z \in \partial D_r(\zeta)} |f(z)|$$

für alle  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$ , und  $|f|$  besitzt insbesondere kein lokales Maximum in  $U$ . Ist darüber hinaus  $U$  beschränkt und  $f$  stetig bis zum Rand von  $U$ , so gilt

$$f(\zeta) < \sup_{z \in U} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$$

für alle  $\zeta \in U$ .

*Beweis.* Für jedes  $\zeta \in U$  ist  $f(\zeta)$  nach Satz 45 — angewendet auf die Funktion  $f$  und die Menge  $D_r(\zeta)$  — ein innerer Punkt von  $f(D_r(\zeta))$  und deshalb existiert mindestens ein Punkt  $\tilde{\zeta} \in D_r(\zeta)$  mit  $|f(\tilde{\zeta})| > |f(\zeta)|$ . Dies impliziert alle Behauptungen.  $\square$

**Satz 48** (Inverse holomorpher Funktionen sind glatt). *Sei  $U$  offen und zusammenhängend, und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und injektiv. Dann ist  $f'$  nullstellenfrei, d.h.*

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in U.$$

*Insbesondere ist die Umkehrabbildung  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  holomorph auf  $f(U)$  mit nullstellenfreier Ableitung.*

*Beweis. Stetigkeit der Inversen:* Die Abbildung  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  ist wegen der Injektivität von  $f$  im mengentheoretischen Sinne wohldefiniert. Darüber hinaus ist das Urbild jeder offenen Menge  $V \subset U$  unter  $f^{-1}$  gerade  $f(V)$  und damit nach Satz 45 offen, d.h.  $f^{-1}$  ist nicht nur wohldefiniert, sondern auch stetig (nach Ana II).

*Gleichung für die Ableitungen:* Wir betrachten nun die Menge

$$N := N_{f'} = \{z \in U : f'(z) = 0\}$$

und bemerken — mit exakt demselben Beweis wie im Reellen — dass  $f^{-1}$  auf  $f(U) \setminus f(N)$  differenzierbar ist, wobei

$$(f^{-1})'(f(z)) \cdot f'(z) = 1$$

für alle  $z \in U \setminus N$ .

*Globale Holomorphie:* Nach dem Identitätssatz 42 besitzt  $N$  keine echten Häufungspunkte in  $U$  (andernfalls würde  $f'$  identisch verschwinden und  $f$  wäre, ebenfalls nach Identitätssatz, konstant und damit nicht injektiv) und dies impliziert, dass  $f(N_{f'})$  keine echten Häufungspunkte in  $f(U)$  besitzen kann (wieder Ana II). Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $f^{-1}$  auf der offenen Menge  $f(U)$  stetig und außerhalb der diskreten Menge  $f(N)$  holomorph ist. Lemma 33 garantiert nun, dass  $f^{-1}$  schon auf ganz  $f(U)$  holomorph ist und damit muss die obige Formel wirklich für alle  $z \in U$  gelten. Insbesondere kann weder  $f'$  noch  $(f^{-1})'$  eine Nullstelle besitzen.  $\square$

**Bemerkung.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gegeben. Dann gibt es im Komplexen keine offene Umgebung von 0, auf der das Monom  $m_n(z) = z^n$  injektiv ist. Insbesondere hat — wie man leicht nachrechnet bzw. wie wir unten sehen werden — jedes  $z \in D_r(0)$  genau  $n$ -Urbilder unter  $m_n$ .*

## 2.7 Logarithmus und Allgemeine Potenzen

Wie man leicht nachrechnet (Übungsaufgabe), besitzt die Gleichung

$$\exp(\zeta) = z \neq 0$$

für jedes gegebene  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mehrere Lösungen  $\zeta \in \mathbb{C}$ , nämlich die Lösungsmenge

$$\left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \log |z| + i \arg(z) + i2\pi k \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \right\},$$

d.h. es kann keine wohldefinierte komplexe Logarithmusfunktion auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  geben. Wir wollen diese Problematik im folgenden genauer — und insbesondere im Hinblick auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit — untersuchen.<sup>7</sup>

**Definition 49** (Logarithmus und Argument). Sei  $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  offen und zusammenhängend. Eine stetige Funktion  $L : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Zweig des komplexen Logarithmus (oder Logarithmusfunktion), falls

$$z = \exp(L(z))$$

für alle  $z \in U$ . Eine stetige Funktion  $A : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Zweig des komplexen Arguments (oder Argumentfunktion), falls

$$z = |z| \exp(iA(z))$$

für alle  $z \in U$ .

**Lemma 50** (Logarithmen und Arguments). Sei  $U$  wie in Definition 49. Dann existiert genau dann eine Logarithmusfunktion  $L$  auf  $U$ , wenn es auch eine Argumentfunktion  $A$  auf  $U$  gibt, und in jeden Fall gilt

$$L(z) = \log(|z|) + iA(z) \quad \text{bzw.} \quad A(z) = \frac{L(z) - \log|z|}{i}$$

für alle  $z \in U$ , wobei  $\log$  der natürliche Logarithmus im Reellen ist. Darüber hinaus ist jede Logarithmusfunktion holomorph mit

$$L'(z) = 1/z \quad \text{für alle } z \in U,$$

und für jede weitere Logarithmusfunktion  $\tilde{L}$  auf  $U$  gibt es genau eine Konstante  $k \in \mathbb{Z}$ , so dass  $L(z) - \tilde{L}(z) = i2\pi k$  für alle  $z \in U$ .

*Beweis.* Teil 1: Die Umrechnungsformeln können einfach nachgerechnet werden (siehe Übungsaufgabe). Insbesondere ist  $L$  dann und nur dann stetig, wenn  $A$  stetig ist.

Teil 2: Für festes  $z_* \in U$  und jedes  $z \in U$  mit  $z \neq z_*$  gilt

$$\frac{L(z) - L(z_*)}{z - z_*} = \frac{w - w_*}{\exp(w) - \exp(w_*)},$$

mit  $w := L(z)$  und  $w_* := L(z_*)$ . Für  $z \rightarrow z_*$  folgt  $w \rightarrow w_*$  aus der Stetigkeit von  $L$  und die Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion liefert via

$$\frac{L(z) - L(z_*)}{z - z_*} \xrightarrow{z \rightarrow z_*} \frac{1}{\exp(w_*)} = \frac{1}{z_*}$$

die gewünschten Aussagen zu  $L'$ .

Teil 3: Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem ersten Teil und der Tatsache, dass jede stetige Funktion auf einer zusammenhängenden Menge, die nur Werten in der diskreten Menge  $i2\pi\mathbb{Z}$  annimmt, konstant sein muss (Ana II).  $\square$

**Satz 51** (Existenz von Logarithmen). Für jede offene und zusammenhängende Teilmenge  $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

<sup>7</sup>Eine alternative Herangehensweise ist es, den Logarithmus als mehrdeutige Abbildung zu betrachten, dessen Graph eine sogenannte *Riemannsche Fläche* bzw. eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Für eine erste Einführung siehe WIKIPEDIA.

1. Auf  $U$  existiert ein Zweig des Logarithmus.
2. Es gibt auf  $U$  eine Stammfunktion zu  $z \mapsto 1/z$ .
3. Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  gilt  $\text{Ind}_\gamma(0) = 0$ .

*Beweis.* 1.  $\Rightarrow$  2.: Die Behauptung folgt aus Lemma 50.

2.  $\Rightarrow$  1.: Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion zu  $z \mapsto 1/z$  auf  $U$ . Dann ist  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) := z \exp(-F(z)) \quad \text{für alle } z \in U,$$

holomorph auf  $U$  und auf Grund der Produkt- und Kettenregel gilt

$$g'(z) := \exp(-F(z))(1 - zF'(z)) = 0 \quad \text{für alle } z \in U.$$

Nach dem Identitätssatz ist die Funktion  $g$  konstant, d.h.  $g(z) = \text{const} = \exp(c)$  für alle  $z \in U$  und eine geeignet gewählte Konstante  $c \in \mathbb{C}$ . Damit ist  $L$  mit  $L(z) = F(z) + c$  ein Zweig des Logarithmus.

2.  $\Rightarrow$  3.: Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  wieder Stammfunktion zu  $z \mapsto 1/z$  auf  $U$ . Dann gilt

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{dz}{z} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

wegen  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

3.  $\Rightarrow$  2.: Wir fixieren  $\zeta_* \in U$  und erinnern uns, dass jede zusammenhängende Menge auch wegzusammenhängend ist, d.h. für jedes  $\zeta \in U$  gibt es — siehe Abbildung 2.5 — einen Verbindungsweg  $\gamma_\zeta : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $\gamma_\zeta(0) = \zeta_*$  und  $\gamma_\zeta(1) = \zeta$  (da  $U$  offen ist, gibt es nicht nur einen stetigen, sondern immer auch stetig-differenzierbare Verbindungswege). Wir definieren nun eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(\zeta) = \int_{\gamma_\zeta} \frac{dz}{z},$$

wobei der Wert nicht von der genauen Wahl des Verbindungsweges  $\gamma_\zeta$  abhängt, denn für jeden anderen Weg  $\tilde{\gamma}_\zeta$ , der auch  $\zeta_*$  mit  $\zeta$  verbindet, gilt nach Voraussetzung

$$0 = \int_{\gamma_\zeta \ominus \tilde{\gamma}_\zeta} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_\zeta} \frac{dz}{z} - \int_{\tilde{\gamma}_\zeta} \frac{dz}{z}.$$

Für jedes  $\zeta \in U$  und alle hinreichend kleinen  $h$  gilt nach Voraussetzung

$$0 = \int_{\gamma_\zeta \oplus [\zeta, \zeta+h] \ominus \tilde{\gamma}_{\zeta+h}} \frac{dz}{z},$$

wobei wir benutzt haben, die Verbindungsstrecke  $[\zeta, \zeta+h]$  für kleine  $h$  auch in  $U$  liegt. Damit ergibt sich zunächst

$$F(\zeta+h) - F(\zeta) - \frac{h}{\zeta} = \int_{[\zeta, \zeta+h]} \frac{dz}{z} - \frac{h}{\zeta} = \int_{[\zeta, \zeta+h]} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta} \right) dz = \int_{[\zeta, \zeta+h]} \frac{\zeta - z}{z\zeta} dz$$

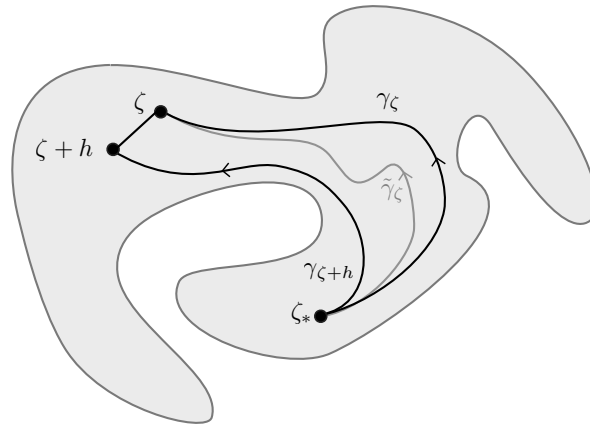
und wegen  $\text{len}([\zeta, \zeta+h]) = |h|$  auch

$$\left| \frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h} - \frac{1}{\zeta} \right| \leq \max_{z \in [\zeta, \zeta+h]} \frac{|\zeta - z|}{|z||\zeta|} dz \leq \frac{|h|}{|\zeta|^2 - |h||\zeta|}.$$

Der Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  liefert  $F'(\zeta) = 1/\zeta$ . □



Mit den Argumenten des letzten Beweisschrittes kann auch das folgende Resultat abgeleitet werden, dass als Verallgemeinerung von Satz 23 betrachtet werden kann.



**Abbildung 2.5:** Illustration des Beweises von Satz 51 bzw. Satz 52.

**Satz 52** (Existenz einer Stammfunktion). Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend, und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, so dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ . Dann ist  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$F(\zeta) = \int_{\gamma_{\zeta}} f(z) dz$$

eine Stammfunktion zu  $f$ , wobei  $\gamma_{\zeta}$  einen beliebigen Verbindungsweg von  $\zeta_*$  nach  $\zeta$  bezeichnet, der in einem ausgezeichneten  $\zeta_* \in U$  beginnt und ganz in  $U$  verläuft.

**Beispiel.** Auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$  wird durch

$$\text{Log}(z) := \int_{[1, z]} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}} = \log |z| + i \text{Arg}(z)$$

mit

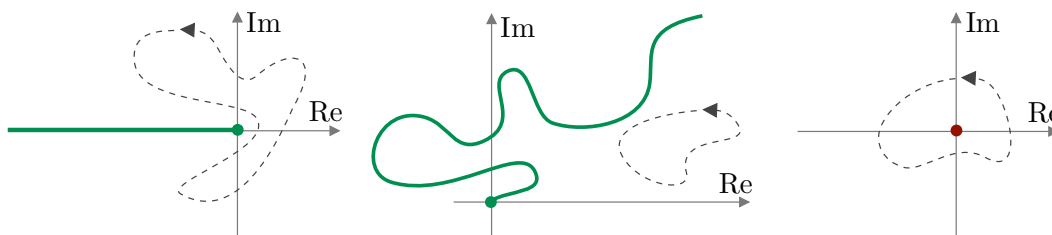
$$(-\pi, +\pi) \ni \text{Arg}(z) := \begin{cases} -\arccos\left(\frac{\text{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{für } \text{Im}(z) < 0, \\ 0 & \text{für } \text{Im}(z) = 0, \\ +\arccos\left(\frac{\text{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{für } \text{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

der sogenannte *Hauptzweig des komplexen Logarithmus* definiert (siehe das erste Beispiel in Abbildung 2.6), wobei  $\arccos : (-1, +1) \rightarrow (0, \pi)$ . Beachte, dass die übliche Funktionalgleichung des Logarithmus nur im Sinne von

$$\text{Log}(z_1 z_2) - \text{Log}(z_1) - \text{Log}(z_2) \in \{-2\pi i, 0, +2\pi i\}.$$

gilt.





**Abbildung 2.6:** Zwei Beispiele (Komplemente der grünen Kurven, wobei die Spur jeder grünen Kurve unbeschränkt ist) für offene Mengen  $U$ , auf denen ein Zweig des Logarithmus und des Arguments existieren, sowie das Standardgegenbeispiel (punktierter Ebene). Die gestrichelten Kurven repräsentieren typische Wege  $\gamma$ , bzgl. derer in Satz 51 die Windungszahl  $\text{Ind}_\gamma(0)$  ausgewertet wird.

**Definition 53** (Allgemeine Potenzen). Sei  $L : U \rightarrow \mathbb{C}$  ein gegebener Zweig des Logarithmus. Dann wird für jedes  $\mu \in \mathbb{C}$  die Funktion

$$U \ni z \mapsto P_{\mu,L}(z) := \exp(\mu L(z))$$

als der entsprechende Zweig der  $\mu$ -ten Potenz bezeichnet.

**Bemerkung.**

1. Die Funktion  $P_{\mu,L}$  ist holomorph auf  $U$  mit

$$P'_{\mu,L}(z) = \exp(\mu L(z))(\mu z^{-1}) = \mu z^{-1} P_{\mu,L}(z) = \mu P_{\mu-1,L}(z)$$

für alle  $z \in U$ . Im Allgemeinen gibt es für jedes gegebene  $U$  abzählbar viele Zweige der Potenzfunktion, aber zwei Zweige unterscheiden sich nur durch einen Faktor  $\exp(2\pi k \mu i)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Für  $\mu = N \in \mathbb{N}$  gibt es wegen

$$P_{N,L}(z) = (\exp(L(z)))^N = z^N$$

aber nur einen Zweig, der auch global auf  $\mathbb{C}$  definiert werden kann.

3. Für  $\mu = 1/N$  mit  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gibt es genau  $N$  verschiedene Zweige der  $N$ -ten Wurzelfunktion, nämlich

$$\zeta_1 \exp(L(z)/N), \quad \dots, \quad \zeta_N \exp(L(z)/N)$$

wobei die  $\zeta_n$ 's gerade die  $N$ -ten Einheitswurzeln aus Abbildung 2.7 sind.

Mit Hilfe von Logarithmen und der Euler-Formel können auch Zweige der Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen definiert werden. Wir wollen hier nicht die allgemeine Theorie entwickeln, sondern uns auf einige Beispiel beschränken.

**Beispiel** (Arcus-Funktionen).

1. Durch

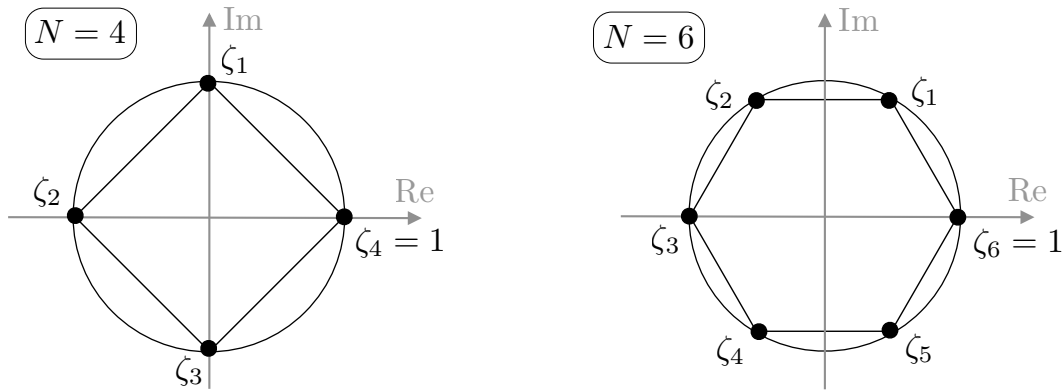
$$z \mapsto -i \text{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

wird ein komplexer Ast der ArcusSinus-Funktion definiert. Wegen  $\cos(z) = \sin(z + \pi/2)$  ergibt das auch einen Ast des ArcusKosinus.

2. Durch

$$z \mapsto -\frac{1}{2}i \text{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

wird ein komplexer Ast der ArcusTangens-Funktion definiert.



**Abbildung 2.7:** Die  $N$  verschiedenen komplexen Lösungen  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  der Gleichung  $\zeta^N = 1$  mit  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  werden als die  $N$ -ten Einheitswurzeln bezeichnet. Sie sind durch  $\zeta_n = e^{2\pi i n/N}$  gegeben und bilden die Ecken eines regulären  $N$ -Ecks auf der Einheitskreislinie.

## 2.8 Die globale Variante des Satzes von Cauchy

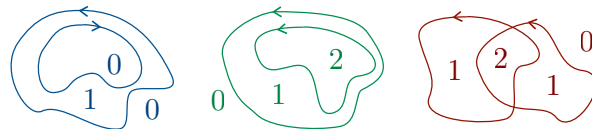
Unter einem Zyklus  $\Gamma$  verstehen wir eine Kette geschlossener Wege, d.h. eine endliche Familie von geschlossenen Wegen, siehe Abbildung 2.8. Für Ketten und Zyklen schreiben wir

$$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}, \quad \int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{n=1}^N \int_{\gamma_n} f(z) dz, \quad \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) := \sum_{n=1}^N \text{Ind}_{\gamma_n}(\zeta)$$

sowie  $\text{sp } \Gamma := \text{sp } \gamma_1 \cup \dots \cup \text{sp } \gamma_N$ , und können via

$$\Gamma \oplus \tilde{\Gamma} := \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} \cup \{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_N\}, \quad \ominus \Gamma := \{\ominus \gamma_1, \dots, \ominus \gamma_N\}, \quad \Gamma \ominus \tilde{\Gamma} := \Gamma \oplus (\ominus \tilde{\Gamma})$$

Zyklen in natürlicher Weise „addieren“ und „subtrahieren“.



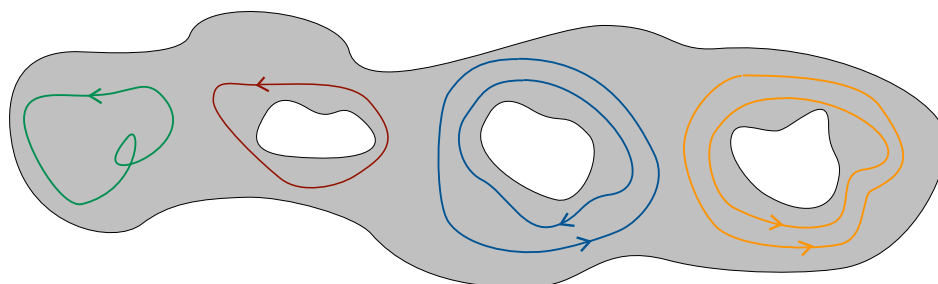
**Abbildung 2.8:** Drei Beispiele für die Windungszahl von Zyklen, die jeweils aus zwei Kurven bestehen.

**Definition 54** (Nullhomologie). Ein Zyklus  $\Gamma$  heißt nullhomolog bzgl. einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$ , falls

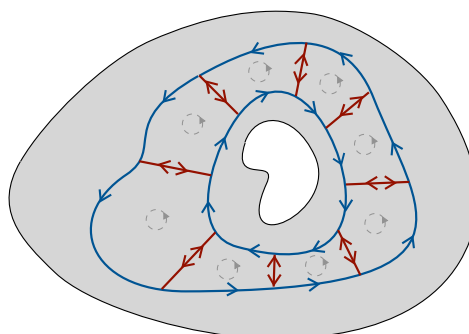
$$\text{sp } \Gamma \subset U \quad \text{und} \quad \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) = 0 \quad \text{für jedes } \zeta \in \mathbb{C} \setminus U.$$

Zwei Zyklen  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  heißen zueinander homolog bzgl.  $U$ , falls der Differenzzyklus  $\Gamma \ominus \tilde{\Gamma}$  nullhomolog ist.

Das Konzept der Nullhomologie von Zyklen erlaubt es uns, den Cauchyschen Integralsatz wie folgt zu verallgemeinern, wobei eine anschauliche Erklärung in den Abbildungen 2.9 und 2.10 gegeben wird.



**Abbildung 2.9:** Zwei Beispiele (grün und blau) und zwei Gegenbeispiele (rot und orange) von nullhomologen Zyklen bzgl. einer Menge  $U$  (grau), siehe Definition 54.



**Abbildung 2.10:** Heuristischer Beweis eines Spezialfalls von Theorem 55: Das Wegintegral einer holomorphen Funktion über den blauen Zyklus muss verschwinden, weil durch geschicktes Einfügen von (vielen) roten Wegstücken das Wegintegral über den blauen Zyklus als (große) Summe von Wegintegralen über die Ränder sternförmiger Gebiete dargestellt werden kann, wobei die Beiträge über die eingefügten Wege sich aufheben. Beachte, dass die Konstruktion nur deshalb funktioniert, weil die Teilwege des blauen Zyklus zum einen entgegengesetzt orientiert sind und zum anderen eine Menge beranden, in dem keine Löcher des Gebietes liegen. Oder anders gesagt: Es ist sehr wichtig, dass der Zyklus nullhomolog im Sinne von Definition 54 ist.

**Theorem 55** (Allgemeiner Cauchy-Satz und allgemeine Cauchy-Formel). *Seien  $U$  offen,  $\Gamma$  nullhomolog bzgl.  $U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$$

sowie

$$f^{(k)}(z) \cdot \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

für jedes  $z \in U \setminus \text{sp } \Gamma$ .

*Beweis.* Hilfsfunktion  $g$ : Wir definieren eine Funktion  $g$  auf dem Kreuzprodukt  $U \times U$  durch

$$g(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } z \neq \zeta, \\ f'(\zeta) & \text{für } z = \zeta \end{cases}$$

und zeigen, dass die Funktion stetig bzgl. beider Variablen  $z, \zeta \in U$  ist. Sei dazu  $(z_*, \zeta_*)$  fixiert. Im Fall von  $z_* \neq \zeta_*$  folgt die Stetigkeit von  $g$  in diesem Punkt direkt aus der

Definition. Im Fall  $z_* = \zeta_*$  betrachten wir Folgen  $(z_n, \zeta_n)$  mit  $z_n \rightarrow z_*$  und  $\zeta_n \rightarrow \zeta_*$  und diskutieren verschiedene Unterfälle. Gelte zunächst  $z_n = \zeta_n$  für alle  $n$ . Dann folgt  $g(z_n, \zeta_n) = f'(\zeta_n) \rightarrow f'(\zeta_*) = g(z_*, \zeta_*)$ , weil  $f'$  nach Folgerung 29 selbst holomorph und damit stetig ist. Im zweiten Unterfall nehmen wir an, dass  $z_n \neq \zeta_n$  für alle  $n$  gilt, und eine einfache Rechnung zeigt

$$g(z_n, \zeta_n) - g(z_*, \zeta_*) = \frac{f(z_n) - f(\zeta_n)}{z_n - \zeta_n} - f'(\zeta_*) = \frac{1}{\zeta_n - z_n} \int_{[z_n, \zeta_n]} (f'(z) - f'(\zeta_*)) dz.$$

Für gegebenes  $\varepsilon > 0$  gilt  $[z_n, \zeta_n] \subset D_\varepsilon(\zeta_*)$  nach Konstruktion für fast alle  $n$ , und die Standardabschätzung für Wegintegrale liefert

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |g(z_n, \zeta_n) - g(z_*, \zeta_*)| \leq \sup_{z \in D_\varepsilon(\zeta_*)} |f'(z)|.$$

Da  $f'$  stetig ist und  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n, \zeta_n) = g(z_*, \zeta_*)$$

nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Wir haben damit die gewünschte Konvergenz in zwei Unterfällen des Falles  $z_* = \zeta_*$  gezeigt. Mit einem einfachen Teilfolgen-Argument können alle anderen Unterfälle auf diese zurückführen werden und wir haben insgesamt die Stetigkeit von  $G$  bewiesen.

Hilfsfunktion  $\psi_1$ : Wir betrachten die Menge

$$V := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{sp } \Gamma : \text{Ind}_\Gamma(z) = 0\} = \text{Ind}_\Gamma^{-1}\left((-1/2, +1/2)\right),$$

und bemerken, dass  $V$  ist als Urbild des offenen Intervalls  $(-1/2, +1/2)$  unter der stetigen Abbildung  $\text{Ind}_\Gamma : \mathbb{C} \setminus \text{sp } \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  offen ist (siehe Theorem 18). Wir wissen außerdem (siehe Übungsaufgabe zu Funktionen vom Cauchy-Typ), dass durch

$$\psi_1(z) := \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

eine holomorphe Funktion auf  $V$  definiert wird ( $\psi_1$  ist sogar holomorph auf der größeren Menge  $\mathbb{C} \setminus \text{sp } \Gamma$ , aber wir betrachten sie nur auf  $V$ ).

Hilfsfunktion  $\psi_2$ : Wir führen desweiteren eine Funktion  $\psi_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\psi_2(z) := \int_\Gamma g(z, \zeta) d\zeta$$

ein und zeigen, dass  $\psi_2$  holomorph auf ganz  $U$  ist. Dazu wählen wir ein beliebiges Dreieck  $\Delta$  mit  $\bar{\Delta} \subset U$  und bemerken nach Umschreiben der Wegintegrale als reelle Intervall-Integrale, dass

$$\int_{\partial\Delta} \psi_2(z) dz = \int_{\partial\Delta} \int_\Gamma g(z, \zeta) d\zeta dz = \int_\Gamma \int_{\partial\Delta} g(z, \zeta) dz d\zeta$$

auf Grund des Satzes von Fubini<sup>8</sup> und wegen der Stetigkeit von  $g$  gilt. Für jedes feste  $\zeta \in U$  ist die Funktion  $z \mapsto g(z, \zeta)$  holomorph in  $U \setminus \{\zeta\}$  sowie stetig im Punkt  $\zeta$ ,

<sup>8</sup>Guido Fubini (1879–1943), italienischer Mathematiker.

und deshalb gilt  $\int_{\partial\Delta} g(z, \zeta) dz = 0$  nach Folgerung 25. (Wir hatten dasselbe Argument schon im Beweis von Satz 26 benutzt). Insbesondere gilt

$$\int_{\partial\Delta} \psi_2(z) dz = 0$$

für jedes zugelassene Dreieck  $\Delta$ , und der Satz von Morera — siehe Lemma 31 — impliziert, dass  $\psi_2$  in der Tat holomorph auf  $U$  ist.

Konsequenz der Nullhomologie von  $\Gamma$  Aus der Voraussetzung folgt

$$\mathbb{C} \setminus U \subset V \quad \text{bzw.} \quad U \cup V = \mathbb{C}$$

und nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} \psi_2(z) &= \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) \\ &= \psi_1(z) \end{aligned} \quad \text{für alle } z \in U \cap V.$$

Insbesondere gibt es genau eine holomorphe Funktion  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$\psi(z) = \psi_1(z) \quad \text{für } z \in V \quad \text{und} \quad \psi(z) = \psi_2(z) \quad \text{für } z \in U.$$

Für alle  $z$  außerhalb einer großen Kugel um 0 gilt  $z \in V$  und damit

$$|\psi(z)| = |\psi_1(z)| \leq \frac{\text{len}(\Gamma) \max_{\zeta \in \text{sp} \Gamma} |f(\zeta)|}{\text{dist}\{z, \text{sp} \Gamma\}} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. Funktion  $\psi$  ist beschränkt und verschwindet sogar im Unendlichen. Der Satz von Liouville — siehe Lemma 38 — impliziert, dass  $\psi$  identisch verschwindet, und deshalb erhalten wir

$$0 = \psi_2(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z)$$

für alle  $z \in U$ . Das ist gerade die Cauchy-Formel für  $f$  und die Varianten für  $f^{(k)}$  folgen nach Differentiation bzgl.  $z$  bzw. analog zum Beweis von Satz 28.

Verschwinden des Wegintegrals: Sei  $z \in U \setminus \text{sp} \Gamma$  beliebig und  $\tilde{f}_z(\zeta) := (\zeta - z)f(\zeta)$ . Die Behauptung folgt nun aus der soeben bewiesenen Cauchy-Formel für  $\tilde{f}_z$ , ausgewertet im Punkt  $z = \zeta$ .  $\square$

**Bemerkung.** Theorem 55 kann im Falle von  $U = \mathbb{C}$ ,  $f(\zeta) \equiv 1$  auf jeden Zyklus  $\Gamma$  und alle  $z \notin \text{sp} \Gamma$  angewendet werden. Dies liefert zum einen

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma}(z)$$

sowie

$$\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^k} = 0 \quad \text{für } k = 2, 3, \dots$$

Wir werden weiter unten sehen, dass diese Formeln der Schlüssel zum sogenannten Residuentheorem sind. Außerdem gilt stets  $\int_{\Gamma} (\zeta - z)^k d\zeta = 0$  für  $k = 0, 1, \dots$  wegen der Holomorphie von Polynomen, und deshalb können wir ganz allgemein

$$\int_{\Gamma} (\zeta - z)^k d\zeta = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $z \notin \operatorname{sp} \Gamma$  und beliebigen  $k \in \mathbb{Z}$  schreiben. Dies ist gerade das verallgemeinerte Fundamentalintegral der komplexen Analysis bzgl. eines beliebigen Zyklus. Für den Spezialfall von Kreiswegen siehe auch das Beispiel zur Definition 16.

Eine spezielle Folgerung von Theorem 55 ist das folgende Resultat, das sehr viele Anwendungen besitzt. Insbesondere spezifiziert es, unter welchen Voraussetzungen das Wegintegral über einen gegebenen Zyklus als Wegintegral über einen Ersatzzyklus berechnet werden kann.

**Folgerung 56** (Äquivalenz von Wegintegralen). Seien  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz$$

für alle zueinander homologen Zyklen  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$ , d.h. sofern  $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \operatorname{Ind}_{\tilde{\Gamma}}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus U$ .

*Beweis.* Theorem 55 angewendet auf  $\Gamma \ominus \tilde{\Gamma}$ . □

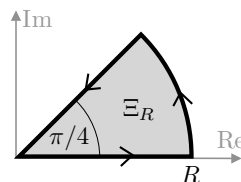
**Anwendung** (Berechnung der Fresnel<sup>9</sup>-Integrale durch komplexe Wegintegration). Die nichttrivialen Formeln<sup>10</sup>

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

betreffen zwar reelle Integrale, aber können im Komplexen relativ leicht wie folgt abgeleitet werden. Wir betrachten die holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = \exp(iz^2)$$

sowie den Rand des Achtelsegments  $\Xi_R$  des Kreises von Radius  $R$ .



Dann gilt nach dem Satz von Cauchy — siehe etwa Theorem 55 mit  $U = \mathbb{C}$  und  $\operatorname{sp} \Gamma = \partial \Xi_R$  —

$$0 = \int_{\partial \Xi_R} f(z) dz = \int_{[0, R]} f(z) dz - \int_{[0, R e^{i\pi/4}]} f(z) dz + \int_{\partial \Xi_R \cap \partial D_R(0)} f(z) dz$$

<sup>9</sup>Augustin Jean Fresnel (1788–1827), französischer Physiker und Ingenieur.

<sup>10</sup>Zur Bedeutung dieser Integrale siehe WIKIPEDIA.

und einfache Rechnung zeigt

$$\int_{[0, R e^{i\pi/4}]} f(z) dz = e^{i\pi/4} \int_0^R \exp(-t^2) dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = (1+i) \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Xi_R \cap \partial D_R(0)} f(z) dz \right| &= \left| iR \int_0^{\pi/4} \exp(iR^2 \exp(2i\theta)) \exp(i\theta) d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \sin(2\theta)) d\theta \leq R \int_0^{\pi/4} \exp\left(-R^2 \frac{4\theta}{\pi}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - \exp(-R^2)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

sowie

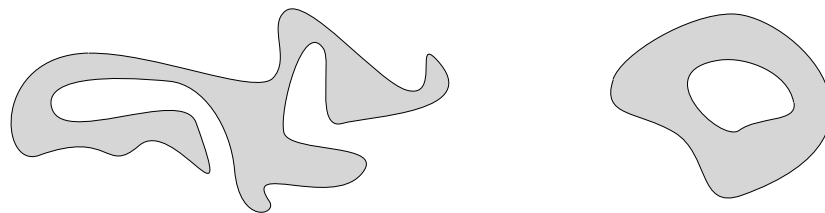
$$\int_{[0, R]} f(z) dz = \int_0^R \cos(t^2) dt + i \int_0^R \sin(t^2) dt$$

und die Behauptung folgt unmittelbar. Oder anders gesagt: Man berechnet die Fresnel-Integrale nicht direkt als Wegintegral über den Strahl  $[0, \infty)$ , sondern ersatzweise über den gedrehten Strahl  $e^{i\pi/4}[0, \infty)$ .

## 2.9 Einfach zusammenhängende Mengen

**Definition 57** (einfacher Zusammenhang). *Ein offene und zusammenhängende Menge  $U \in \mathbb{C}$  heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg (und damit jeder Zyklus) in  $U$  nullhomolog im Sinne von Definition 54 ist.*

Anschaulich ist klar, dass eine offene Menge  $U$  nur dann einfach zusammenhängend ist, wenn sie keine Löcher aufweist, siehe Abbildung 2.11.



**Abbildung 2.11:** Beispiel und Gegenbeispiel für eine einfach zusammenhängende Menge.

**Theorem 58** (Satz von Cauchy und einfach zusammenhängende Mengen). *Die gegebene Menge  $U \subset \mathbb{C}$  sei offen und zusammenhängend. Ist  $U$  auch einfach zusammenhängend, so besitzt jede holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion auf  $U$  und es gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$ . Ist umgekehrt  $U$  nicht einfach zusammenhängend, so gibt es eine holomorphe Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die keine Stammfunktion auf  $U$  besitzt und für die  $\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0$  entlang eines geeignet gewählten geschlossenen Weges gilt.

*Beweis.* Der erste Teil folgt aus Theorem 55 und Satz 52. Im zweiten Teil existiert nach Voraussetzung ein Weg  $\gamma$  sowie ein Punkt  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus U$  mit  $\text{Ind}_{\gamma}(\zeta) \neq 0$ , und die Behauptung folgt mit  $f(z) = 1/(z - \zeta)$  und dem Weg  $\gamma$ .  $\square$

**Folgerung 59** (Zur Existenz eines Logarithmus). Sei  $U$  eine einfach zusammenhängende Menge, die nicht die 0 enthält. Dann existiert auf  $U$  ein Zweig des Logarithmus und damit eine Stammfunktion zum Monom  $m_{-1}$  mit  $m_{-1}(z) = z^{-1}$ .

*Beweis.*  $m_{-1}$  ist holomorph auf  $U$  und besitzt nach Theorem 58 eine Stammfunktion. Satz 51 liefert dann die Existenz einer Logarithmusfunktion auf  $U$ .  $\square$

**Folgerung 60** (Logarithmus von Funktionen). Sei  $U$  einfach zusammenhängend und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe und nullstellenfreie Funktion. Dann existiert eine holomorphe Funktion  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = \exp(\phi(z))$$

für alle  $z \in U$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

**Folgerung 61** (Potenzen von Funktionen). Seien  $U$  und  $f$  wie in Folgerung 60 und sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gegeben. Dann existiert eine holomorphe Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

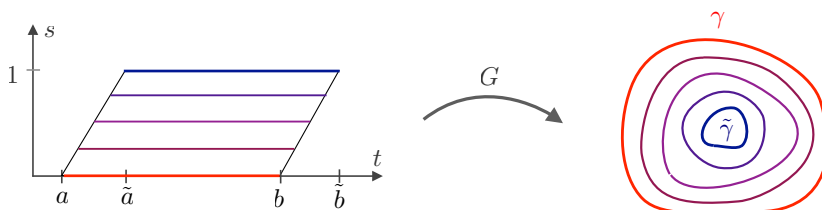
$$f(z) = \phi(z)^n$$

für alle  $z \in U$ .

*Beweis.* Wir wählen  $\phi$  wie in Folgerung 60 und setzen  $\psi(z) := \exp(\phi(z)/n)$ .  $\square$

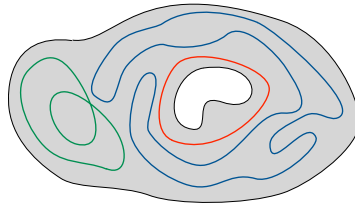
Wir werden abschließend ein weitere Definition von einfach-zusammenhängenden Mengen einführen. Für unsere Zwecke (Kurven in offenen Teilmengen der komplexen Ebene) sind beide Definitionen nicht nur äquivalent, sondern beide sind auch sehr intuitiv und können in aller Regel in konkreten Anwendungen einfach überprüft werden. Die zweite, topologische Definition kann aber sehr leicht verallgemeinert werden (zum Beispiel im Kontext von Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension) wohingegen die erste sehr eng mit dem Konzept der Windungszahl planarer Kurven verbunden ist.

Wir präzisieren zunächst, wie sie stetige Deformation von geschlossenen Kurven mathematisch gefasst werden kann, siehe Abbildungen 2.12 and 2.13.



**Abbildung 2.12:** Eine Homotopie zwischen zwei Kurven.





**Abbildung 2.13:** Zwei Beispiele (grün und blau) sowie ein Gegenbeispiel (rot) für einen nullhomotopen Weg in eine Menge  $U$  (grau) mit einem Loch.

**Definition 62** (Homotopie von geschlossenen Wegen). Sei  $U$  offen und zusammenhängend. Zwei geschlossene Wege  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  und  $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow U$  heißen zueinander homotop, falls es eine stetige Homotopieabbildung  $H : \Omega \rightarrow U$  auf dem Viereck

$$\Omega := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 1, (1-s)a + s\tilde{a} \leq t \leq (1-s)b + s\tilde{b}\}$$

gibt, so dass

1.  $H(s, \cdot)$  ist für jedes feste  $s \in [0, 1]$  geschlossener Weg in  $U$ ,
2.  $H(0, \cdot) = \gamma$ ,
3.  $H(1, \cdot) = \tilde{\gamma}$ .

Ein geschlossener Weg  $\gamma$  heißt nullhomotop, falls er homotop zu einem konstanten Weg ist.

**Satz 63** (Äquivalente Charakterisierung einfach-zusammenhängender Mengen). Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Dann ist  $U$  genau dann einfach zusammenhängend im Sinne von Definition 57, wenn jeder geschlossene Weg in  $U$  nullhomotop ist.

*Beweis.* Es sei auf die Literatur verwiesen. □



# Kapitel 3

## Singularitäten und Residuen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir viele Eigenschaften über holomorphe Funktionen abgeleitet und dabei oftmals die wirklich wesentliche Eigenschaft benutzt, dass holomorphe Funktionen auf offenen Kreisscheiben in eine Potenzreihe entwickelt werden können. Wir werden nun einen Schritt weiter gehen und weitere wichtige Eigenschaften holomorpher Funktionen kennenlernen indem nun zusätzlich das lokale Verhalten auf offenen Kreisringen bzw. auf punktierte Kreisscheiben charakterisieren. Im Folgenden schreiben wir

$$A_{r_1, r_2}(m) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - m| < r_2\}, \quad \bar{A}_{r_1, r_2}(m) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - m| \leq r_2\}$$

und wollen, sofern es nicht explizit anders vereinbart wird, immer stillschweigend  $0 < r_1 < r_2 < \infty$  annehmen. Beachte, dass  $\dot{D}_r(m) = A_{0, r}(m)$ .

**Definition 64** (Laurent<sup>1</sup>-Reihe). *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$$

wird Laurent-Reihe im Entwicklungspunkt  $\zeta$  und mit den Koeffizienten  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  genannt. Diese Reihe konvergiert — als Funktion in  $z$  betrachtet — genau dann, wenn sowohl der Hauptteil der Reihe<sup>2</sup>  $\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_k (z - \zeta)^k$  als auch der Nebenteil der Reihe<sup>3</sup>  $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$  konvergieren, wobei Konvergenz in jedem der üblichen Sinne verstanden werden kann (also punktweise oder absolut und punktweise oder lokal gleichmäßig oder ..).

### 3.1 Holomorphe Funktionen auf Kreisringen

Wir beweisen zunächst das wesentliche technische Resultat in diesem Abschnitt und verweisen auf Abbildung 3.2 zur Illustration.

**Lemma 65** (Zerlegungssatz). *Für jede holomorphe Funktion  $f : A_{r_1, r_2}(m) \rightarrow \mathbb{C}$  existieren holomorphe Funktionen*

$$f_P : \mathbb{C} \setminus \bar{D}_{r_1}(m) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f_S : D_{r_2}(m) \rightarrow \mathbb{C},$$

<sup>1</sup>Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), französischer Mathematiker.

<sup>2</sup>‘principal part’

<sup>3</sup>‘secondary part’

so dass

$$f(\zeta) = f_P(\zeta) + f_S(\zeta) \quad \text{für alle } \zeta \in A_{r_1, r_2}.$$

Insbesondere gibt es genau eine solche Zerlegung, so dass  $f_P(\zeta) \rightarrow 0$  für  $|\zeta| \rightarrow \infty$  gilt, und für diese nennen wir  $f_P$  bzw.  $f_S$  den Hauptteil von  $f$  bzw. den Nebenteil von  $f$ .

*Beweis.* O.B.d.A. können wir  $m = 0$  annehmen.

Hilfsfunktionen: Für jedes  $\varrho \in (r_1, r_2)$  wird — siehe Übungsaufgaben — durch

$$f_\varrho(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varrho(0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

eine holomorphe Funktion  $f_\varrho$  vom Cauchy-Typ auf der Menge  $\mathbb{C} \setminus \partial D_\varrho(0)$  definiert, und es gilt

$$|f_\varrho(\zeta)| \leq \varrho \sup_{z \in \partial D_\varrho} \frac{|f(z)|}{|z - \zeta|} \xrightarrow{|\zeta| \rightarrow \infty} 0$$

nach Standardabschätzung. Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass Theorem 55 für jede Wahl von

$$A_{\varrho_1, \varrho_2} \subset A_{r_1, r_2} \quad \text{mit} \quad r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$$

die Formeln

$$f_{\varrho_2}(\zeta) - f_{\varrho_1}(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{für } r_1 < |\zeta| < \varrho_1, \\ f(\zeta) & \text{für } \varrho_1 < |\zeta| < \varrho_2, \\ 0 & \text{für } \varrho_2 < |\zeta| < r_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

impliziert, weil der Rand von  $A_{\varrho_1, \varrho_2}$  durch einen nullhomologen Zyklus parametrisiert werden kann, siehe Abbildung 3.1.

Definition des Haupt- und Nebenteiles: Für gegebenes  $\zeta \in A_{r_1, \infty}(0)$  bzw.  $\zeta \in A_{0, r_2}(0)$  definieren wir

$$f_P(\zeta) := -f_{\varrho_1}(\zeta) \quad \text{mit} \quad r_1 < \varrho_1 < |\zeta|$$

bzw.

$$f_S(\zeta) := +f_{\varrho_2}(\zeta) \quad \text{mit} \quad |\zeta| < \varrho_2 < r_2,$$

wobei der Wert von  $f_P(\zeta)$  bzw.  $f_S(\zeta)$  *nicht* von der konkreten Wahl des Radius  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  abhängt (dies folgt unmittelbar aus (3.1)). Diese Funktionen besitzen nach Konstruktion die gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit: Seien  $\tilde{f}_P$  und  $\tilde{f}_S$  zwei weitere Funktionen mit den geforderten Eigenschaften. Dann wird durch

$$g(\zeta) := f_P(\zeta) - \tilde{f}_P(\zeta) \quad \text{für} \quad |\zeta| > r_1$$

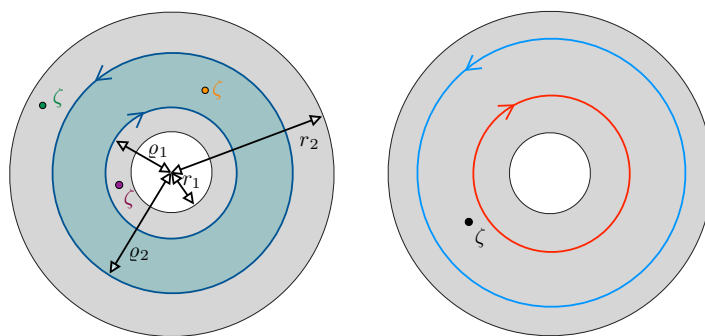
sowie

$$g(\zeta) := \tilde{f}_S(\zeta) - f_S(\zeta) \quad \text{für} \quad |\zeta| < r_2$$

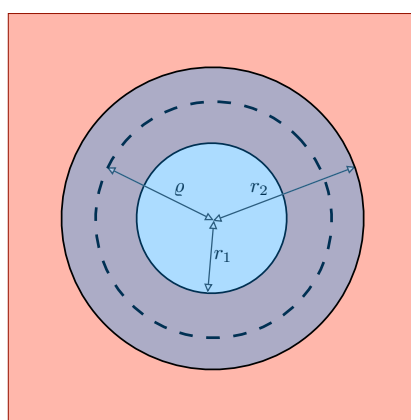
wegen

$$f_P(\zeta) - \tilde{f}_P(\zeta) = \tilde{f}_S(\zeta) - f_S(\zeta) \quad \text{für} \quad r_1 < |\zeta| < r_2$$

in sinnvoller Weise eine Funktion  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert. Diese ist nach Konstruktion holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  mit  $g(\zeta) \rightarrow 0$  für  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Insbesondere ist  $g$  beschränkt und der Satz von Liouville impliziert, dass  $g$  konstant. Als Konstante kommt aber nur 0 in Frage, und damit haben wir  $f_P = \tilde{f}_P$  sowie  $f_S = \tilde{f}_S$  gezeigt.  $\square$



**Abbildung 3.1:** Zum Beweis des Zerlegungslemmas 65. *Links*, Herleitung der Formel (3.1): Der (blaue) Rand des (grünen) Kreisringes  $A_{\varrho_1, \varrho_2}(m)$  kann in natürlicher Weise als Zyklus interpretiert werden, der nullhomolog bzgl. des (grauen) Kreisringes  $A_{r_1, r_2}(m)$  ist. Die farbigen Punkte markieren die drei möglichen Lagen von  $\zeta$ . *Rechts*, Die Werte  $f_P(\zeta)$  bzw.  $f_S(\zeta)$  werden mit Hilfe des roten bzw. blauen Kreisweges definiert.



**Abbildung 3.2:** Gemäß Lemma 65 kann jede auf einem Kreisring (lila) holomorphe Funktion in eindeutiger Weise in einen Haupt- und einen Nebenteil zerlegt werden, die jeweils holomorph auf der Außenkugel  $A_{r_1, \infty}(m)$  (rot) bzw. der Innenkugel  $D_{r_2}(m)$  (blau) sind. Theorem 66 garantiert dann die Existenz einer entsprechenden Laurent-Reihe auf dem Kreisring (lila).

Wir können nun das Hauptresultat über holomorphe Funktionen auf Kreisringen ableiten.

**Theorem 66** (Laurent-Entwicklung und lokaler Struktursatz auf Kreisringen). *Jede holomorphe Funktion  $f$  auf dem Kreisring  $A_{r_1, r_2}(m)$  kann als Laurent-Reihe geschrieben werden, d.h. es gilt*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k (z - m)^k$$

mit

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varrho(m)} \frac{f(z)}{(z - m)^{k+1}} dz \quad (3.2)$$

für alle  $\zeta \in A_{r_1, r_2}(m)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  und jedes  $r_1 < \varrho < r_2$ . Insbesondere konvergieren der Hauptteil bzw. Nebenteil der Reihe absolut und lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_1}(m)$  bzw.  $D_{r_2}(0)$  gegen den Haupt- bzw. Nebenteil von  $f$  im Sinne von Lemma 65.

*Beweis.* Wir nehmen wieder o.B.d.A.  $m = 0$  an und benutzen die Notationen des Beweises von Lemma 65.

Reihendarstellung des Nebenteils: Die Funktion  $f_S$  ist nach Konstruktion holomorph auf  $D_{r_2}(0)$  holomorph und kann dort nach dem lokalen Struktursatz — siehe Theorem 30 — als absolut und lokal gleichmäßig konvergente Potenzreihe dargestellt werden. Insbesondere gilt

$$f_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_S^k(0)}{k!} z^k$$

und wir werden unten zeigen, dass der  $k$ -te Koeffizienten dieser Potenzreihe gerade  $\alpha_k$  aus der Behauptung ist.

Reihendarstellung des Hauptteils: Wir definieren durch

$$g_P(z) := \begin{cases} f_P(1/z) & \text{für } 0 < |z| < 1/r_1, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

eine Funktion  $g_P$  auf der punktierten Kreisscheibe  $D_{1/r_1}(0)$ , die nach Konstruktion holomorph auf  $D_{1/r_1}(0) \setminus \{0\}$  ist und wegen  $g_P(z) \rightarrow 0 = g_P(0)$  für  $z \rightarrow 0$  stetig in 0 ist. Nach Lemma 33 ist dann  $g_P$  aber schon holomorph auf ganz  $D_{1/r_1}(0)$  und kann dort via

$$g_P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_P^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

als lokal gleichmäßig konvergente Potenzreihe dargestellt werden. Auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r_1}(0)$  ergibt sich damit

$$f_P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_P^{(k)}(0)}{k!} z^{-k},$$

wobei die Reihe lokal gleichmäßig bzgl.  $z$  konvergiert.

Formeln für die Koeffizienten: Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass  $f$  als Laurent-Reihe geschrieben werden kann, wobei die Koeffizienten  $\alpha_k$  zunächst durch Ableitungen von  $f_S$  und  $g_P$  im Nullpunkt gegeben sind, d.h.

$$\alpha_{+k} = \frac{f_S^k(0)}{k!} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \quad \text{und} \quad \alpha_{-k} = \frac{g_P^k(0)}{k!} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

Wir werden nun abschließend zeigen, dass diese Koeffizienten  $\alpha_k$  alternativ auch durch die Cauchy-Formeln (3.2) berechnet werden können. Dazu fixieren wir  $\varrho \in (r_1, r_2)$  und schreiben

$$z^{-n-1} f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^{k-n-1}$$

für jedes  $z \in \partial D_\varrho(0)$ . Nach Wegintegration (siehe die Beispiele zu Definition 14) erhalten wir

$$\int_{\partial D_\varrho(0)} z^{-n-1} f(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \int_{\partial D_\varrho(0)} z^{k-n-1} dz = 2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k^n = 2\pi i \alpha_n$$

mit Kronecker-Delta<sup>4</sup>, wobei wir benutzt haben, dass die Reihenbildung mit der Wegintegration wegen der bereits bewiesenen lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihen vertauscht werden darf.  $\square$

<sup>4</sup>Es gilt  $\delta_k^n = 1$  für  $n = k$  und  $\delta_n^k = 0$  für  $n \neq k$ .

**Beispiel.** *Die Funktion*

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathbf{i})^2}$$

ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, \mathbf{i}\}$  wohldefiniert und holomorph, und besitzt nach Theorem 66 auf den Kreisringen  $A_{0,1}(0)$  und  $A_{1,\infty}(0)$  jeweils eine Darstellung als Laurent-Reihe. Im Prinzip können diese wie in den verallgemeinerten Cauchy-Formel (3.2) durch Wegintegrale berechnet werden, aber wir können in diesem Beispiel viel eleganter argumentieren:

Auf  $A_{0,1}(0)$  gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\mathbf{i}}\right)^2} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n \\ &= \left(-\frac{1}{z}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \mathbf{i}^{-k+1} z^k\right) \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass mit  $(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  auch  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = (1-q)^{-2}$  für alle  $q \in D_1(0)$  gilt.

Auf  $A_{1,\infty}(0)$  ergibt sich dann mit ähnlichen Rechnungen

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{i}}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\mathbf{i}}{z}\right)^n = \sum_{k=-\infty}^{-3} (-k-2) \mathbf{i}^{k+3} z^k.$$

## 3.2 Intermezzo: Fourier-Reihen periodischer Funktionen

Als eine vielleicht überraschende Anwendung von Laurent-Reihen wollen die Fourier-Reihe für Funktionen einführen, die holomorph und periodisch sind. Dazu betrachten wir für gegebene Parameter  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  den Streifen

$$S = \{z \in \mathbb{C} : a_1 < \operatorname{Im}(z/\lambda) < a_2\}$$

sowie holomorphe Funktionen  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  die  $\lambda$ -periodisch sind, d.h.

$$f(z + \lambda) = f(z) \quad \text{für alle } z \in S.$$

Die in diesem Abschnitt wesentliche Beobachtung ist, dass die Abbildung  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

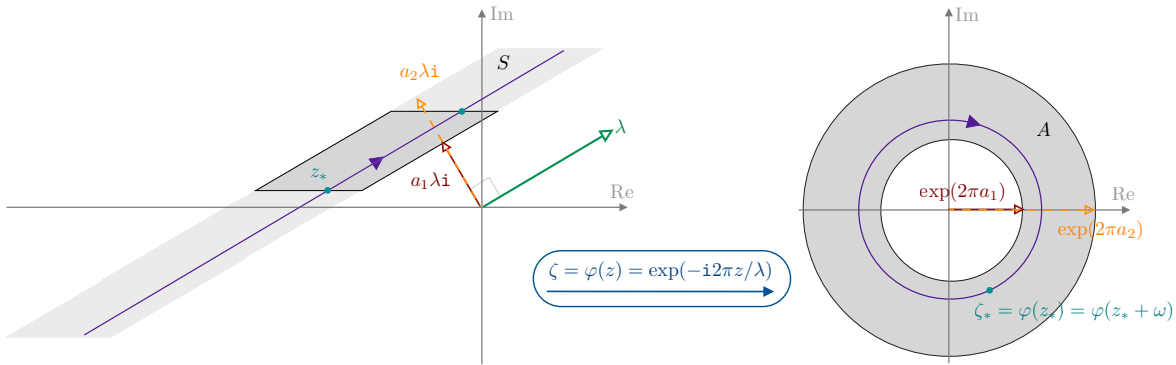
$$\varphi(z) = \exp(-\mathbf{i}2\pi z/\lambda)$$

den Streifen  $S$  surjektiv auf den Kreisring

$$A = A_{r_1, r_2}(0), \quad r_i = \exp(2\pi a_i)$$

abbildet, siehe Abbildung 3.3, wobei  $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$  dann und nur dann gilt, wenn  $z_2 - z_1 \in \lambda\mathbb{Z}$ . Insbesondere entspricht jeder holomorphen und  $\omega$ -periodische Funktion  $f$  auf  $S$  genau eine holomorphe Funktion  $g$  auf  $A$ , so dass

$$g(\varphi(z)) = f(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$



**Abbildung 3.3:** Die Fourier-Reihe einer  $\lambda$ -periodischen Funktion  $f$  auf dem Streifen  $S$  kann durch die Laurent-Reihe der Funktion  $g$  auf dem Ring  $A$  berechnet werden.

und umgekehrt kann für eine gegebene holomorphe Funktion  $g$  auf  $A$  durch diese Formel eine holomorphe und  $\omega$ -periodische Funktion  $f$  auf  $S$  definiert werden. Nach Theorem 66 kann  $g$  auf  $A$  als Laurent-Reihe

$$g(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \zeta^k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_{r,-1}(0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

mit  $r_1 < r < r_2$  geschrieben werden, wobei  $\sigma_{r,-1}(0)$  wie oben den Kreisweg von Radius  $r$  bezeichnet, der 0 genau einmal im Uhrzeigersinn — d.h. mit mathematisch negativer Orientierung — durchläuft. Werden die Laurent-Reihendarstellung für  $g$  sowie die entsprechenden Wegintegrale für die Koeffizienten  $\alpha_k$  via  $\zeta = \varphi(z)$  durch Ausdrücke in  $f$  und  $z$  ersetzt, ergibt sich das folgende Resultat.

**Theorem 67** (Fourier-Reihen<sup>5</sup> periodischer Funktionen im Komplexen). *Mit den oben eingeführten Notationen gilt: Die holomorphe und  $\lambda$ -periodische Funktion  $f$  kann auf den Streifen  $S$  als*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{-i2\pi kz/\lambda} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \lambda^{-1} \int_{[z_*, z_* + \lambda]} f(z) e^{+i2\pi kz/\lambda} dz,$$

geschrieben werden, wobei  $z_* \in S$  beliebig gewählt werden kann und die Reihe lokal gleichmäßig auf  $S$  konvergiert.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Ein wichtiger Spezialfall von Theorem 67 ergibt sich, wenn  $\lambda$  reell gewählt wird.

**Folgerung 68** (Spezialfall der Fourier-Reihen im Reellen). *Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\lambda$ -periodische Funktion mit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , die zu einer  $\lambda$ -periodischen und holomorphen Funktion  $f : \mathbb{R} \times i[a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $a_1 < 0 < a_2$  fortgesetzt werden kann. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{-i2\pi kx/\lambda} \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \lambda^{-1} \int_0^\lambda f(x) e^{+i2\pi kx/\lambda} dx \in \mathbb{C}$$

im Sinne lokal gleichmäßig konvergenter Reihen auf  $\mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>In der Literatur gibt es verschiedene Definitionen von Fourier-Reihen, die sich aber nur unwesentlich in der Wahl gewisser Konstanten oder Vorzeichen unterscheiden und letztlich alle äquivalent sind.



Zur Vollständigkeit sei angemerkt, dass reelle Fourier-Reihen auch für periodische Funktionen auf  $\mathbb{R}$  definiert werden können, die nicht holomorph auf einem Streifen fortgesetzt werden können (zum Beispiel, weil sie nur stückweise stetig sind). In diesem Fall kann die Fourier-Reihe aber nicht als transformierte Variante einer Laurent-Reihe betrachtet werden.

### 3.3 Singularitäten und Polstellen

Wir wollen in diesem Abschnitt isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen genauer studieren.

**Definition 69** (isolierte Singularität). *Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann heißt jeder isolierte Punkt von  $\mathbb{C} \setminus U$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Insbesondere gibt es für jede isolierte Singularität  $\zeta$  von  $f$  einen (kleinen) Radius  $r > 0$ , so dass  $f$  holomorph auf  $\dot{D}_r(\zeta)$  ist.*

Salopp kann man sagen: Die *isolierten* Singularitäten von  $f$  sind gerade die Ein-Punkt-Löcher des Definitionsbereiches  $U$ .

**Beispiel** (Drei prototypische Fälle). *Die folgenden Funktionen auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  sind aus ganz verschiedenen Gründen im Ursprung nicht definiert.*

#### 1. Die Funktion

$$f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

*erfüllt  $f_1(z) \rightarrow 1$  für  $z \rightarrow 0$  und besitzt daher keine echte, sondern nur eine sogenannte hebbare Singularität.*

#### 2. Die Funktion

$$f_2(z) = \frac{\exp(z)}{z} = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$$

*verhält sich für  $z \rightarrow 0$  im wesentlichen wie die Funktion  $z \rightarrow 1/z$  und besitzt daher bei 0 eine sogenannte Polstelle der Ordnung 1.*

#### 3. Die Funktion

$$f_3(z) = \exp(1/z) = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{z^k}{(-k)!}$$

*verhält sich für  $z \rightarrow 0$  sehr irregulär und besitzt eine sogenannte wesentliche Singularität bzw. eine Polstelle der Ordnung  $\infty$*

Um die Unterschiede in diesen Beispielen herauszuarbeiten, benötigen wir das folgende Hilfsresultat. Dazu erinnern wir, dass

$$\dot{D}_r(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \zeta| < r\} = D_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} = A_{0,r}(\zeta)$$

die punktierte Kreisscheibe vom Radius  $r$  um dem Mittelpunkt  $\zeta$  bezeichnet.

**Lemma 70** (Weierstraßscher Hebbarkeitssatz). *Seien  $V$  offen,  $\zeta \in V$  und  $f : V \setminus \{\zeta\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *Es existiert  $r > 0$  mit  $D_r(\zeta) \subset V$ , so dass  $f$  auf  $\dot{D}_r(\zeta)$  beschränkt ist.*
2. *Die Funktion  $f$  besitzt eine holomorphe Fortsetzung  $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\tilde{f}(z) = f(z)$  für alle  $z \in V \setminus \zeta$ .*

*Beweis.* Die Behauptung 2.  $\Rightarrow$  1. ist trivial und o.B.d.A. können wir  $\zeta = 0$  annehmen.

1.  $\Rightarrow$  2.: Wir definieren  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(z) = \begin{cases} z^2 f(z) & \text{für } z \in U \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

und bemerken, dass  $g$  offensichtlich holomorph auf  $V \setminus \{0\}$  ist. Die Beschränktheit von  $f$  in 0 impliziert außerdem

$$\frac{g(z) - g(0)}{z} = z f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0,$$

d.h.  $g$  ist holomorph in ganz  $V$  und erfüllt  $g'(0) = g(0) = 0$ . Nach dem lokalen Struktursatz aus Theorem 30 existiert  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(0) \subset V$  sowie Koeffizienten  $(\alpha)_{k \geq 2}$  so dass

$$g(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \dots \quad \text{für alle } z \in D_r(0).$$

Die Funktion  $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 z + \dots & \text{für } z \in D_r(0), \\ g(z)/z^2 & \text{für } z \in U \setminus \overline{D}_r(0), \end{cases}$$

ist nun nach Konstruktion eine holomorphe Fortsetzung von  $f$  auf  $V$ . □

Wir sind nun in der Lage, den Hauptsatz dieses Abschnittes abzuleiten.

**Theorem 71** (Klassifikationssatz für isolierte Singularitäten). *Seien  $V$  offen,  $\zeta \in V$  und  $f : V \setminus \{\zeta\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle auf.*

1. (1) Hebbare Singularität, kein Pol: *Die Funktion  $f$  kann holomorph auf  $V$  fortgesetzt werden.*
2. (2) Polstelle der Ordnung  $K$ : *Es existieren  $K \in \mathbb{N}$  sowie Koeffizienten  $\beta_1, \dots, \beta_K$  mit  $\beta_K \neq 0$ , so dass  $f - \sum_{k=1}^K \beta_k (z - \zeta)^{-k}$  holomorph auf  $V$  fortgesetzt werden kann.*
3. (3) Wesentliche Singularität, Polstelle der Ordnung  $\infty$ : *Für jede Kugel  $D_r(\zeta) \subset V$  liegt  $f(\dot{D}_r(\zeta))$  dicht in  $\mathbb{C}$ .*

*Pole der Ordnung 1 bzw. 2 werden auch einfach bzw. zweifach genannt.*

*Beweis.* Falls das Szenario (3) nicht eintritt, gibt es ein  $\eta \in \mathbb{C}$  sowie einen Radius  $r > 0$  und ein  $\delta > 0$  mit

$$|f(z) - \eta| > \delta \quad \text{für alle } z \in \dot{D}_r(\zeta).$$

Insbesondere ist die Funktion  $g : \dot{D}_r(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \eta}$$

beschränkt und kann daher nach dem Weierstraßschen Hebbarkeitssatz zu einer holomorphen Funktion auf  $\tilde{g} : D_r(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt werden. Im Falle von  $\tilde{g}(\zeta) \neq 0$  bleibt  $f(z) = \eta + 1/g(z)$  für  $z \rightarrow \zeta$  beschränkt, d.h. es tritt Szenario (1) ein. Besitzt  $\tilde{g}$  jedoch eine Nullstelle der Ordnung  $K$ , so gibt es nach dem Nullstellenlemma 41 und dem Strukturtheorem 30 einen Radius  $s$  mit  $0 < s < r$ , so dass die Abbildung  $z \mapsto \tilde{g}(z)/(z - \zeta)^K$  auf  $D_s(\zeta)$  holomorph ist und im Punkt  $\zeta$  einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Wird der Radius  $s$  gegebenenfalls verkleinert, können wir erreichen, dass die Funktion  $\tilde{h}$  mit

$$\tilde{h}(z) := \frac{(z - \zeta)^K}{\tilde{g}(z)} = \left( \frac{\tilde{g}(z)}{(z - \zeta)^K} \right)^{-1} \neq 0$$

auf der Kugel  $D_s(\zeta)$  wohldefiniert, holomorph und als Potenzreihe darstellbar ist. Mit anderen Worten: es gilt

$$\tilde{h}(z) = \gamma_0 + \gamma_1(z - \zeta) + \dots + \gamma_K(z - \zeta)^K + \dots$$

für alle  $z \in D_s(\zeta)$  mit gewissen Taylor-Koeffizienten  $\gamma_k$ , wobei  $\gamma_0 \neq 0$ . Durch Umstellen erhalten wir

$$f(z) - w = \frac{1}{\tilde{g}(z)} = (z - \zeta)^{-K} \left( \gamma_0 + \gamma_1(z - \zeta) + \dots \right) \quad \text{für alle } \dot{D}_s(\zeta),$$

d.h. es gilt das zweite Szenario mit  $\beta_K = \gamma_0, \dots, \beta_1 = \gamma_{K-1}$ . □

Theorem 71 kann natürlich auch auf Kreisscheiben angewendet werden.

**Folgerung 72** (Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen). *Auf der punktierten Kreisscheibe  $\dot{D}_r(\zeta)$  sei die holomorphe Funktion  $f$  gegeben durch*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k (z - \zeta)^k.$$

Dann besitzt  $f$  in  $\zeta$

- (1') genau dann eine hebbare Singularität, wenn  $\alpha_k = 0$  für alle  $k < 0$ ,
- (2') genau dann eine Polstelle der Ordnung  $K$ , wenn  $\alpha_{-K} \neq 0$  und  $\alpha_k = 0$  für alle  $k < -K$ ,
- (3') genau dann eine wesentliche Singularität, wenn es eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $k_n \rightarrow -\infty$  gibt, so dass  $\alpha_{k_n} \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Nach Theorem 66 kann jede holomorphe Funktion  $f$  in der Nähe einer isolierten Singularität  $\zeta$  — genauer gesagt: auf einer punktierten Kreisscheibe um  $\zeta$  — als Laurent-Reihe dargestellt werden. Insbesondere kann Folgerung 72 als lokale Variante von Theorem 71 betrachtet werden und wir können die folgenden Notation einführen.

**Definition 73** (Ordnung einer Singularität oder eines Punktes). Seien  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und sei  $\zeta$  eine isolierte Singularität von  $f$ , so dass  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k (z - \zeta)^k$  für  $z \in \dot{D}_r(\zeta)$  und alle hinreichend kleinen  $r > 0$ . Dann nennen wir

$$\text{Ord}_\zeta(f) := \min \{K \in \mathbb{Z} : \alpha_K \neq 0\} = \max \{K \in \mathbb{Z} : \alpha_k = 0 \text{ für alle } k < K\}$$

die Ordnung von  $f$  in  $\zeta$ . Diese wird analog auch für jeden Punkt  $\zeta \in U$  definiert, wobei  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k (z - \zeta)^k$  mit  $0 = \alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \dots$  dann im Sinne einer Taylor-Reihe zu verstehen ist.

### Beispiel.

#### 1. Die Funktion

$$f(z) = z^5 - z^6 \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}$$

gilt offensichtlich  $\text{Ord}_0(f) = 5$ ,  $\text{Ord}_1(f) = 1$  und  $\text{Ord}_\zeta(f) = 0$  für  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Ganz allgemein gilt für jedes  $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ : es gilt  $\text{Ord}_\zeta(f) = +K$  genau dann, wenn  $f$  besitzt in  $\zeta$  genau eine  $K$ -fache Nullstelle besitzt, d.h. wenn

$$0 = f^{(0)}(z) = f^{(1)}(\zeta) = \dots = f^{(K-1)}(\zeta).$$

#### 2. Für

$$f(z) = \frac{z \exp(z)}{(z-2)^2(z-1)} \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$$

gilt  $\text{Ord}_2(f) = -2$ ,  $\text{Ord}_1(f) = -1$ ,  $\text{Ord}_0(f) = +1$  und  $\text{Ord}_\zeta(f) = 0$  für  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ . Beachte den Vorzeichenwechsel in der Sprechweise:  $f$  besitzt in  $\zeta$  genau dann eine Polstelle der Ordnung  $+K$ , wenn  $\text{Ord}_\zeta(f) = -K$ .

3. Es gilt  $\text{Ord}_\zeta(0) = +\infty$  für die triviale Funktion  $f \equiv 0$ .

4. Für eine wesentliche Singularität  $\zeta$  von  $f$  ergibt sich  $\text{Ord}_\zeta(f) = -\infty$ .

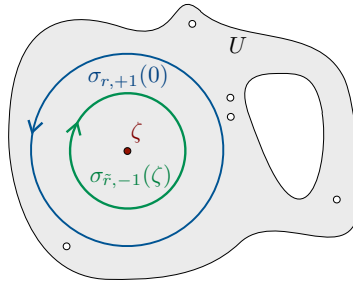
## 3.4 Der Residuensatz

Wir sind nun bereit, den für das Hauptresultat dieses Kapitels zentralen Begriff einzuführen.

**Definition 74** (Residuum). Seien  $U$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\zeta$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann wird

$$\text{Res}_\zeta(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(\zeta)} f(z) dz \quad (3.3)$$

das Residuum von  $f$  in  $\zeta$  genannt, wobei der Radius  $r > 0$  so klein gewählt werden muss, dass die punktierte abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{D}_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} \subset U$ .



**Abbildung 3.4:** Zur Radiusunabhängigkeit des Residuums in Definition 74. Beachte, dass die isolierte Singularität  $\zeta$  ein Einpunkt-Loch des Definitionsbereiches  $U$  ist.

**Bemerkung.**

1. Der Wert des Residuums in (3.3) hängt nicht von der Wahl des Radius  $r$  ab (solange  $\overline{D}_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} \in U$  gilt, d.h. solange  $\overline{D}_r(\zeta)$  neben  $\zeta$  keine weiteren Löcher des Definitionsbereiches  $U$  enthält). Denn ist  $\tilde{r}$  eine andere mögliche Wahl (o.B.d.A. können wir  $0 < \tilde{r} < r$  annehmen), so kann der Rand der Kreisscheibe  $A_{\tilde{r},r}(\zeta)$  via

$$\Gamma := \sigma_{r,+1}(\zeta) \oplus \sigma_{r,-1}(\zeta)$$

als nullhomologer Zyklus  $\Gamma$  in  $U$  betrachtet werden (siehe Abbildung 3.4 bzw. Beispiel zu 14). Theorem 30 garantiert nun, dass  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  und damit

$$0 = \int_{\sigma_{r,+1} \oplus \sigma_{\tilde{r},-1}(\zeta)} f(z) dz = \int_{\partial_r D(\zeta)} f(z) dz - \int_{\partial_{\tilde{r}} D(\zeta)} f(z) dz.$$

2. Ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$$

die lokale Laurent-Entwicklung von  $f$  in der Nähe von  $\zeta$ , so ergibt sich

$$\text{Res}_{\zeta}(f) = \alpha_{-1}$$

mit Hilfe des Fundamentalintegrals der komplexen Analysis. Insbesondere gilt  $\text{Res}_{\zeta}(f) = 0$  für jede hebbare Singularität.

3. Die vorangegangene Bemerkung liefert auch

$$\text{Res}_{\zeta}(f) = \lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta) f(z)$$

sofern  $\text{Ord}_{\zeta}(f) \geq -1$ .

4. Für  $f(z) = p(z)/q(z)$  with  $\text{Ord}_{\zeta}(p) \geq 0$  und  $\text{Ord}_{\zeta}(q) = 1$  gilt

$$\text{Res}_{\zeta}(f) = \frac{p(\zeta)}{q'(\zeta)}.$$

Die folgt, weil mit  $p(z) = \beta_0 + \beta_1(z - \zeta) + \dots$  sowie  $q(z) = \gamma_1(z - \zeta) + \gamma_2(z - \zeta)^2 + \dots$  und  $\gamma_1 \neq 0$  schon  $\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta) f(z) = \beta_0/\gamma_1$ .

5. Es gilt stets

$$\operatorname{Res}_\zeta(f'/f) = \operatorname{Ord}_\zeta(f)$$

sofern die rechte Seite endlich ist.

6. Ist  $\zeta$  ein Punkt des Definitionsbereiches  $U$ , so setzt man

$$\operatorname{Res}_\zeta(f) := 0$$

und der Cauchysche Integralsatz garantiert auch in diesem Fall die Gültigkeit von (74) für alle  $r$  mit  $\dot{D}_r(\zeta) \subset U$ .

### Beispiel.

1. Die Funktion

$$f(z) := \frac{\exp(iz)}{z^2 + 1}$$

besitzt wegen  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$  in  $\pm i$  jeweils eine isolierte Singularität der Ordnung  $-1$  bzw. einen Pol der Ordnung  $+1$ . Damit gilt

$$\operatorname{Res}_{\pm i}(f) = \lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i)f(z) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{\exp(iz)}{z \pm i} = \mp \frac{1}{2} e^{\mp 1} i.$$

In allen anderen Punkten  $\zeta \neq \pm i$  ergibt sich  $\operatorname{Res}_\zeta(f) = 0$ .

2. Die Kotangensfunktion

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

besitzt in jedem Punkt  $\zeta \in \pi\mathbb{Z}$  jeweils einen Pol der Ordnung 1 und es gilt

$$\operatorname{Res}_{m\pi}(\cot) = \lim_{z \rightarrow m\pi} \frac{\cos(m\pi)}{\cos(m\pi)} = 1.$$

Für  $\zeta \notin \pi\mathbb{Z}$  erhalten wir  $\operatorname{Res}_\zeta(\cot) = 0$ .

3. Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$$

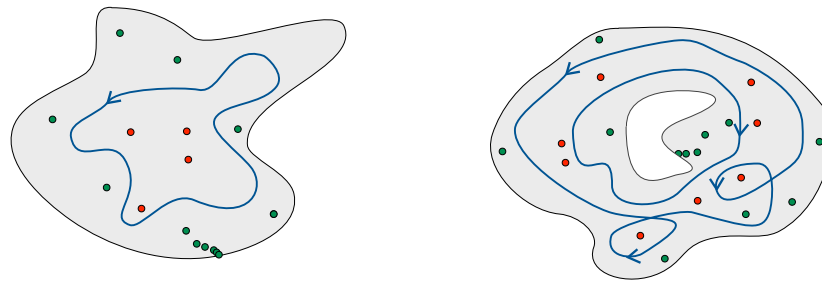
besitzt in  $\pm i$  jeweils einen Pol der Ordnung 3. Um die entsprechenden Residuen auch in diesem Fall zu berechnen, schreiben wir

$$g_\pm(z) := (z \mp i)^3 f(z) = \frac{1}{(z \pm i)^3}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\pm i}(f) &= \operatorname{Res}_{\pm i} \left( \frac{1}{(z \mp i)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_\pm^{(k)}(\pm i)}{k!} (z \mp i)^k \right) \\ &= \frac{g_\pm^{(2)}(\pm i)}{2!} = \frac{12}{2(\pm 2i)^5} = \mp \frac{3i}{16}. \end{aligned}$$

Eine ähnliche Strategie kann in jedem Pol höherer Ordnung angewendet werden.



**Abbildung 3.5:** Zwei Beispiele für den Residuensatz Theorem 75 mit grauer Menge  $V$  und blauem, nullhomologen Zyklus  $\Gamma$ : Die markierten Punkte repräsentieren die isolierten Singularitäten der Funktion  $f$ , wobei die Residuen der grünen Punkte im Gegensatz zu denen der roten wegen verschwindender Windungszahl keinen Beitrag zum Wegintegral von  $f$  über  $\Gamma$  liefern.

Das folgende Resultat ist in Abbildung 3.5 illustriert und kann als Hauptsatz dieses Kapitels sowie als eine der zentralen Aussagen der gesamten Komplexen Analysis betrachtet werden.

**Theorem 75** (Cauchyscher Residuensatz). *Seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  offen mit  $U \subset V$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so dass  $V \setminus U$  nur aus isolierten Singularitäten von  $f$  besteht.<sup>6</sup> Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in U \setminus V} \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) \text{Res}_{\zeta}(f) \quad (3.4)$$

für jeden Zyklus  $\Gamma$  in  $U$ , der nullhomolog bzgl.  $V$  ist, wobei in der Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Terme von Null verschieden sind.

*Beweis. Häufungspunkte von isolierten Singularitäten:* Sei  $(\zeta_n)_n \subset V \setminus U$  eine Folge, die für  $n \rightarrow \infty$  gegen einen Grenzwert  $\zeta_{\infty} \in \mathbb{C}$  konvergiert und für die  $\zeta_n \neq \zeta_{\infty}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann kann  $\zeta_{\infty}$  nach Voraussetzung kein Punkt aus  $V \setminus U$  sein, da diese Menge ja nur aus isolierten Punkten der Menge  $\mathbb{C} \setminus U$  besteht. Außerdem kann  $\zeta_{\infty}$  kein Punkt aus der offenen Menge  $U$  sein, da diese dann auch eine kleine Kreisscheibe um  $\zeta_{\infty}$  enthalten müsste, in der dann aber kein  $\zeta_n$  liegen kann. Mit anderen Worten:  $f$  kann durchaus unendlich viele isolierte Singularitäten besitzen, aber diese können sich nicht in  $V$ , sondern nur am Rand von  $V$  häufen. Da das Bild eines jeden Zyklus  $\Gamma$  in  $V$  kompakt ist, gibt es nur endlich viele Singularitäten  $\zeta \in V \setminus U$  mit  $\text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) \neq 0$ .

*Anwendung der Cauchyschen Integralformel:* Nach diesen Vorüberlegungen ist klar, dass es für jeden fixierten nullhomologen Zyklus  $\Gamma$  nur endlich viele Singularitäten  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  von  $f$  gibt, für die  $\text{Ind}_{\Gamma}(\zeta_n) \neq 0$  gilt. In der Nähe von  $\zeta_n$  kann  $f$  in eine Laurent-Reihe entwickelt werden, d.h. es gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{n,k} (z - \zeta_n)^k \quad \text{für alle } z \in \dot{D}_{r_n}(\zeta_n)$$

für geeignete Radien  $r_n$  und geeignete Koeffizienten  $(\alpha_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}}$ . Nach Lemma 65 ist für jedes  $n = 1 \dots N$  der Hauptteil  $h_n$  dieser Laurent-Reihe mit

$$h_n(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_{n,k} (z - \zeta_n)^k$$

<sup>6</sup>Man sagt meist: „ $f$  ist in  $V$  holomorph bis auf isolierte Singularitäten“ und führt den Definitionsbereich  $U$  gar nicht explizit ein.

holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_n\}$ , und dies impliziert, dass die Funktion  $g$  mit

$$g(z) := \sum_{n=1}^N h_n(z) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_{n,k} (z - \zeta_n)^k$$

holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$  ist. Sei nun  $n_* = 1 \dots N$  beliebig fixiert. Für  $z \in U$  schreiben wir nun

$$f(z) - g(z) = f(z) - h_{n_*}(z) - \sum_{n \in \{1 \dots N\} \setminus \{n_*\}} h_n(z)$$

und bemerken, dass die rechte Seite dieser Gleichung holomorph im Punkt  $\zeta_{n_*}$  ist. Insbesondere besitzt  $f - g$  eine hebbare Singularität in  $\zeta_{n_*}$ , und weil  $n_*$  beliebig war, kann  $f - g$  zu einer holomorphen Funktion auf

$$W := U \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$$

fortgesetzt werden. Außerdem ist der Zyklus  $\Gamma$  auch nullhomolog bzgl.  $W$ , denn das Komplement von  $W$  enthält neben dem Komplement von  $V$  nur die Singularitäten von  $f$ , für die  $\text{Ind}_\Gamma(\zeta) = 0$  gilt. Damit kann Theorem 55 bzgl. der Menge  $W$  und bzgl. der Fortsetzung von  $f - g$  angewendet werden und stellt sicher, dass

$$0 = \int_{\Gamma} (f(z) - g(z)) dz.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} h_n(z) dz = \sum_{n=1}^N \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha_{n,k} \int_{\Gamma} (z - \zeta_n)^k dz,$$

wobei die Reihenbildung bzgl.  $k$  und die Wegintegration bzgl.  $z \in \text{sp } \Gamma$  vertauscht werden dürfen, da die Reihendarstellung von  $h_n$  lokal gleichmäßig in  $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_n\}$  konvergiert. Theorem 55 — diesmal angewendet auf die Menge  $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_n\}$  und konstante Funktion 1, siehe auch die Bemerkung zu Theorem 55 — liefert schließlich

$$\int_{\Gamma} (z - \zeta_n)^{-1} dz = 2\pi i \text{Ind}_\Gamma(\zeta_n), \quad \int_{\Gamma} (z - \zeta_n)^k dz = 0 \quad \text{für } k = -2, -3, \dots$$

und damit die Behauptung. □

**Bemerkung.** Wegen  $\text{Res}_\zeta(f) = 0$  für alle  $\zeta \in U$  kann die Formel (3.4) kann auch als

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in V} \text{Ind}_\Gamma(\zeta) \text{Res}_\zeta(f)$$

geschrieben werden, wobei die formal überabzählbare Summe auf der rechten Seite nur über die endliche vielen von Null verschwindende Summanden zu bilden ist. Im Residuentheorem ist also — neben der Holomorphie von  $f$  — vor allem wichtig, dass

1.  $\Gamma$  nullhomolog bzgl.  $V$  ist,



2. jeder Punkt von  $V$  entweder zum Definitionsbereich  $U$  von  $f$  gehört oder isolierte Singularität von  $f$  ist,
3.  $\text{sp } \Gamma$  keine Singularität von  $f$  enthält,
4. die residuale Summe nur über die Punkte  $\zeta \in V$  gebildet wird, für die  $\text{Ind}_\Gamma(\zeta) \neq 0$  und  $\text{Res}_\zeta(f) \neq 0$ .

**Bemerkung.** Das Residuentheorem enthält die folgenden Spezialfälle:

1. Ist  $f$  holomorph auf ganz  $V$ , so reduziert sich (3.4) zu

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0$$

und damit auf den Satz von Cauchy.

2. Gilt  $f(z) = g(z)/(z - \zeta)^{m+1}$  für  $z \neq \zeta \in V \setminus \text{sp } \Gamma$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und eine auf ganz  $V$  holomorphe Funktion  $g$ , so erhalten wir aus den lokalen Entwicklungen

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(\zeta)}{k!} (z - \zeta)^k \quad \text{bzw.} \quad f(z) = \sum_{k=-m-1}^{\infty} \frac{g^{k+m+1}(\zeta)}{(m+k+1)!} (z - \zeta)^k$$

kombiniert mit (3.4) die Identität

$$\int_{\Gamma} \frac{g(z)}{(z - \zeta)^{m+1}} \, dz = 2\pi i \frac{g^{(m)}(\zeta)}{m!} \text{Ind}_\Gamma(\zeta)$$

und damit die verallgemeinerte Cauchy-Formel für  $g$ .

3. Mit  $V = \mathbb{C}$ ,  $f(z) = (z - \zeta)^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  und  $\zeta \notin \text{sp } \Gamma$  liefert (3.4) wieder das verallgemeinerte Fundamentalintegral der komplexen Analysis (siehe Bemerkung zu Theorem 55).
4. Die Formel (3.2) aus Theorem 66 für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung sowie Satz 44 über die Anzahl von Nullstellen können auch aus dem Residuentheorem abgeleitet werden (Übungsaufgabe bzw. siehe weiter unten).

Beachte, dass in all diesen Formeln  $\Gamma$  nullhomolog bzgl.  $V$  sein muss. Hinreichend dafür ist natürlich der einfache Zusammenhang von  $V$ , siehe Definition 57.

## 3.5 Residuensatz und reelle Integrale

Eine sehr nützliche Anwendung des Residuentheorems ist die Berechnung reeller Integrale durch Argumente im Komplexen. Die entsprechende Theorie kann hier allerdings nur ansatzweise durch die Untersuchung einiger Integralklassen entwickelt werden.

**Lemma 76** (Integral rationaler Funktionen in  $\cos(t)$  und  $\sin(t)$ ). Seien  $P$  und  $Q$  Polynome in den zwei Variablen  $(x_1, x_2)$ , so dass  $Q$  keine Nullstelle auf der Kreislinie  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  besitzt. Mit

$$f(z) := \frac{1}{iz} \cdot \frac{P\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)}{Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)}$$

gilt dann

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))} dt = 2\pi i \sum_{\zeta \in D_1(0)} \operatorname{Res}_\zeta(f),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite nur endlich viele von Null verschiedene Summanden besitzt.

*Beweis.* Wegen

$$\cos(t) = \frac{e^{+it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{+it} - e^{-it}}{2i}$$

ergibt sich mittels der Substitution

$$z = \gamma(t) = e^{it}, \quad dz = iz dt$$

die Formel

$$Q(\cos(t), \sin(t)) = Q\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) = Q\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) =: q(z)$$

sowie das Analogon mit  $P$  und  $p$  statt  $Q$  und  $q$ . Nach Voraussetzung besitzt  $f$  keinen Pol in  $\partial D_1(0)$  und für jede Nullstelle  $\zeta$  von  $q$  in  $D_1(0)$  gilt  $\operatorname{Ind}_{\sigma_{1,1}(0)}(\zeta) = +1$ , d.h. die positiv orientierte Standard-Parametrisierung von  $\partial D_1(0)$  umkreist jede Nullstelle  $\zeta$  genau einmal und entgegen dem Uhrzeigersinn. Nach Theorem 75 mit  $V = \mathbb{C}$  gilt nun

$$2\pi i \sum_{\zeta \in D_1(0)} \operatorname{Res}_\zeta(f) = \int_{\partial D_1(0)} \frac{p(z) dz}{q(z) iz} = \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))} dt$$

auf Grund der Definition von  $f$  und des Wegintegrals. □

**Beispiel.** Für  $\mu > 1$  bzw.  $\mu < -1$  und mit  $z = e^{it}$  gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \cos(t)} = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{\mu + \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{\zeta \in D_1(0)} \operatorname{Res}_\zeta(f),$$

wobei die Funktion  $f$  mit

$$f(z) = -\frac{2i}{z^2 + 2\mu z + 1} = -\frac{2i}{(z - \zeta_-)(z - \zeta_+)}, \quad \zeta_\pm = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$$

die beiden einfachen Polstellen  $\zeta_\pm$  in  $D_1(0)$  besitzt, von denen  $\zeta_+$  innerhalb und  $\zeta_-$  außerhalb von  $D_1(0)$  liegt. Wegen

$$\operatorname{Res}_{\zeta_+}(f) = \lim_{z \rightarrow \zeta_+} (z - \zeta_+)f(z) = -\frac{2i}{\zeta_+ - \zeta_-} = -\frac{i}{\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

erhalten wir schließlich

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\mu + \cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

Beachte, dass diese Formel nicht für  $-1 < \mu < +1$  gilt.

Eine zweite wichtige Klasse von reellen Integralformeln kann wir folgt abgeleitet werden.

**Lemma 77** (Uneigentliches Integral gewisser rationaler Funktionen in  $\mathbb{R}$ ). *Seien  $p$  und  $q$  Polynome mit<sup>7</sup>  $\deg(q) \geq 2 + \deg(p)$ , wobei  $q$  keine reelle Nullstelle besitzt. Dann gilt*

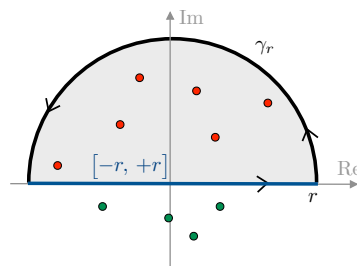
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(\zeta) > 0} \operatorname{Res}_{\zeta}(f)$$

für  $f := p/q$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung und Theorem 75 gilt

$$\int_{[-r, +r]} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(\zeta) > 0} \operatorname{Res}_{\zeta}(f),$$

wobei der Radius  $0 < r < \infty$  so groß gewählt ist, dass alle Nullstellen von  $q$  und damit alle Singularitäten von  $f$  in  $D_r(0)$  enthalten sind, und wobei die Integrationswege wie folgt gegeben sind:



Die Voraussetzungen an  $p$  und  $q$  garantieren

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{C}{|z|^2}$$

für eine Konstante  $C$ , und die Standardabschätzung für Wegintegrale liefert

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \pi r \frac{C}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Darüberhinaus gilt

$$\int_{[-r, +r]} f(z) dz = \int_{-r}^{+r} f(x) dx \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

und die Behauptung folgt unmittelbar. □

**Beispiel.** Die Pole von

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4}$$

<sup>7</sup>Die Größe  $\deg(p)$  bezeichnet den Grad des Polynoms  $p$ .

sind alle einfach und durch

$$\zeta_1 = e^{i\pi/4}, \quad \zeta_2 = e^{i\pi 3/4}, \quad \zeta_3 = e^{i\pi 5/4}, \quad \zeta_4 = e^{i\pi 7/4}$$

gegeben, wobei nur  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  in der oberen Halbebene liegen. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta_1}(f) &= \lim_{z \rightarrow \zeta_1} (z - \zeta_1) f(z) = \frac{\zeta_1^2}{(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_1 - \zeta_4)} \\ &= \frac{e^{+i\pi 2/4}}{(e^{i\pi 1/4} - e^{i\pi 3/4}) \cdot (e^{i\pi 1/4} - e^{i\pi 5/4}) \cdot (e^{i\pi 1/4} - e^{i\pi 7/4})} \\ &= \frac{e^{-i\pi 1/4}}{(1 - i) \cdot (2) \cdot (1 + i)} = \frac{e^{-i\pi 1/4}}{4} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta_2}(f) &= \frac{\zeta_2^2}{(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_4)} \\ &= \frac{e^{+i\pi 6/4}}{(e^{i\pi 3/4} - e^{i\pi 1/4}) \cdot (e^{i\pi 3/4} - e^{i\pi 5/4}) \cdot (e^{i\pi 3/4} - e^{i\pi 7/4})} \\ &= \frac{e^{-i\pi 3/4}}{(1 + i) \cdot (1 - i) \cdot (2)} = \frac{e^{-i\pi 3/4}}{4} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\pi 1/4} + e^{-i\pi 3/4}}{4} = \frac{2\pi i}{4} \cdot \left( -\frac{i-1}{\sqrt{2}} - \frac{i+1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Für praktische Zwecke ist auch die folgende Verallgemeinerung von Lemma 77 nützlich.

**Lemma 78** (Jordan-Lemma). *Seien  $p$  und  $q$  Polynome mit  $\deg(q) \geq 1 + \deg(p)$ , wobei  $q$  keine reelle Nullstelle besitzt, und sei  $\kappa \neq 0$  ein fester reeller Parameter. Mit*

$$f_\kappa(z) := \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\kappa z}$$

gilt dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\kappa(x) dx = 2\pi i \operatorname{sgn}(\kappa) \sum_{\operatorname{sgn}(\kappa) \operatorname{Im}(\zeta) > 0} \operatorname{Res}_\zeta(f_\kappa), \quad (3.5)$$

d.h. für  $\kappa > 0$  bzw.  $\kappa < 0$  wird nur über die Residuen in der oberen bzw. unteren Halbebene summiert.

*Beweis.* Aus Symmetriegründen reicht es, den Beweis für  $\kappa > 0$  zu führen. Nach dem Residuentheorem 75 gilt

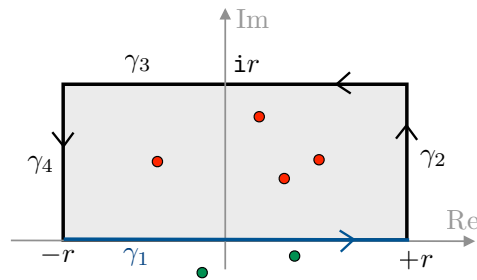
$$\sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} f_\kappa(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(\zeta) > 0} \operatorname{Res}_\zeta(f_\kappa)$$

mit den geradem Wegstücken

$$\gamma_1 := [-r, +r], \quad \gamma_2 := [+r, +r + ir]$$

und

$$\gamma_3 := [+r + ir, -r + ir], \quad \gamma_4 := [-r + ir, -r].$$



Hierbei sei der reelle Parameter  $0 < r < \infty$  so gewählt, dass alle Nullstellen von  $q$  — und damit alle Singularitäten von  $f_\kappa$  — entweder im Inneren des Rechtecks mit den vier Eckpunkten

$$-r, \quad +r, \quad +r + ir, \quad -r + ir$$

oder in der unteren Halbebene enthalten sind. Die Standardabschätzung für Wegintegrale liefert

$$\left| \int_{\gamma_3} f_\kappa(z) dz \right| \leq 2r \cdot Cr^{-1} e^{-\kappa r},$$

wobei wir das Abklinggesetz  $|p(z)/q(z)| \leq C/|z|$  benutzt haben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f_\kappa(z) dz \right| &= \left| \int_0^r \frac{p(r+it)}{q(r+it)} e^{i\kappa r - \kappa t} i dt \right| \\ &\leq \int_0^r \left| \frac{p(r+it)}{q(r+it)} \right| e^{-\kappa t} dt \leq \frac{c}{r} \int_0^r e^{-\kappa t} dt \leq \frac{C}{r\kappa} \end{aligned}$$

und analog beweisen wir

$$\left| \int_{\gamma_4} f_\kappa(z) dz \right| \leq \frac{C}{r\kappa}.$$

Die Behauptung folgt durch Kombination aller Teilformeln und nach Grenzübergang  $r \rightarrow \infty$ .  $\square$

### Bemerkung.

1. Das reelle Integral in (3.5) existiert ggf. nur im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals. Im Fall von  $\deg q \geq 2 + \deg p$  gibt es jedoch kein solches Problem, denn es gilt  $|f_\kappa(x)| \leq C/x^2$  für  $|x| \rightarrow \infty$  und  $f_\kappa$  ist deshalb im Lebesgueschen Sinne auf  $\mathbb{R}$  integrierbar.
2. Es gibt Varianten des Jordan-Lemmas, in denen die rationale Funktion  $p/q$  durch eine hinreichend reguläre holomorphe Funktion ersetzt werden kann.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Anwendung des Jordan-Lemmas 78. Für jede hinreichend gute<sup>8</sup> Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Fourier-Transformierte  $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

<sup>8</sup>Wir können im Rahmen dieser Vorlesung nicht untersuchen, was genau „hinreichend gut“ meint. Die Fourier-Transformierte  $\hat{g}$  existiert aber für eine sehr große Klasse von Funktionen  $g$  und sogar für eine große Klasse von Distributionen  $g$ .

formal durch

$$\hat{g}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{+i\kappa x} dx$$

gegeben<sup>9</sup>. Die Fourier-Transformation spielt eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik und der Physik, denn sie beschreibt mittels der Inversionsformel

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\kappa) e^{-i\kappa x} d\kappa$$

dass jede Funktion  $g$  in der Ortsvariablen  $x$  als unendliche Superposition ebener Wellen dargestellt werden kann, wobei die Wellenzahl  $\kappa$  die zu  $x$  konjugierte Impulsvariable ist und  $\hat{g}(\kappa)$  gerade den Anteil der ebene Welle  $x \mapsto e^{-i\kappa x}$  an  $g$  quantifiziert.<sup>10</sup>

**Beispiel.** Für

$$g(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

kann die Fourier-Transformierte explizit wie folgt berechnet werden. Für  $\kappa > 0$  besitzt die Funktion

$$f_{\kappa}(z) = \frac{2e^{+i\kappa z}}{1+z^2}$$

wegen  $1+z^2 = (z-i)(z+i)$  auf der oberen Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  nur den einfachen Pol  $+i$ , dessen Residuum zu

$$\text{Res}_{+i}(f_{\kappa}) = \lim_{z \rightarrow +i} (z-i)f_{\kappa}(z) = \lim_{z \rightarrow +i} \frac{2e^{+i\kappa z}}{z+i} = +\frac{e^{-\kappa}}{i}$$

berechnet werden kann, und analog gilt für  $\kappa < 0$  die Formel

$$\text{Res}_{-i}(f_{\kappa}) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f_{\kappa}(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2e^{+i\kappa z}}{z-i} = -\frac{e^{+\kappa}}{i}.$$

Das Jordan-Lemma 78 garantiert schließlich

$$\hat{g}(\kappa) = \frac{2\pi i}{2\pi} \text{sgn}(\kappa) \text{Res}_{\text{sgn}(\kappa)i}(f_{\kappa}) = e^{-|\kappa|}$$

zunächst für jedes  $\kappa \neq 0$ , aber für  $\kappa = 0$  gilt diese Formel auch wegen der reellen Integralidentität  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2 \arctan(+\infty) - 2 \arctan(-\infty) = 2\pi$ . (Wir könnten zur Berechnung dieses Integrals natürlich auch Lemma 77 bemühen).

### 3.6 Das Argumentprinzip

Eine wichtige Anwendung des Residuensatzes ist die folgende Verallgemeinerung von Satz 44.

<sup>9</sup>Es gibt mehrere Varianten der Fourier-Transformation mit unterschiedlichen Vorfaktoren vor dem Integral und unterschiedlichen Vorzeichenwahlen für das Argument der Exponentialfunktion.

<sup>10</sup>In der Quantenmechanik entspricht die Dualität zwischen  $g$  und  $\hat{g}$  dem Dualismus von Teilchen und Wellen.

**Theorem 79** (Argumentprinzip). *Seien  $U, V \subset \mathbb{C}$  offen mit  $U \subset V$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so dass  $V \setminus U$  nur aus isolierten Polstellen von  $f$  besteht und  $f$  auf keiner Zusammenhangskomponente von  $U$  verschwindet.<sup>11</sup> Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in V} \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) \text{Ord}_{\zeta}(f) \quad (3.6)$$

für jeden Zyklus  $\Gamma$  in  $U$ , der nullhomolog bzgl.  $V$  ist, wobei die Summe auf der rechten Seite effektiv nur über Null- und Polstellen gebildet wird.

*Beweis. Vorüberlegung:* Wie Beweis von Theorem 75 zeigen wird, dass es nur endliche viele Polstellen  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  von  $f$  mit  $\text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) \neq 0$  gibt. Analog folgt, dass die vielleicht unendlich vielen Nullstellen von  $f$  sich nur am Rand von  $U$  häufen können (andernfalls würde der Identitätssatz einen Widerspruch zur Voraussetzung liefern) und dass daher nur endliche viele Nullstellen  $\xi_1, \dots, \xi_M$  von  $f$  mit  $\text{Ind}_{\Gamma}(\xi)_m \neq 0$  gibt. Für jeden Punkt  $\zeta \in V$ , der weder Null- noch Polstelle ist, gilt  $\text{Ord}_{\zeta}(f) = 0$  und wir schließen, dass in der formal überabzählbaren Summe auf der rechten Seite nur die Polstellen  $\zeta_n$  und die Nullstellen  $\zeta_m$  einen nichtverschwindenden Beitrag liefern.

Beitrag der Polstelle  $\zeta_n$ : Auf jeder hinreichend kleinen punktierten Kreisscheibe  $\dot{D}_r(\zeta_n)$  gilt nach Theorem 66 die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=K_n}^{\infty} \alpha_{n,k} (z - \zeta_n)^k, \quad \alpha_{n,K_n} \neq 0, \quad K_n := \text{Ord}_{\zeta_n}(f) < 0$$

und eine direkte Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{K_n \alpha_{n,K_n} (z - \zeta_n)^{K_n-1} + (K_n + 1) \alpha_{n,K_n+1} (z - \zeta_n)^{K_n} + \dots}{\alpha_{n,K_n} (z - \zeta_n)^{K_n} + \alpha_{n,K_n+1} (z - \zeta_n)^{K_n+1} + \dots} \\ &= \frac{1}{z - \zeta_n} \cdot \frac{K_n \alpha_{n,K_n} + (K_n + 1) \alpha_{n,K_n+1} (z - \zeta_n) + \dots}{\alpha_{n,K_n} + \alpha_{n,K_n+1} (z - \zeta_n) + \dots} \\ &= \frac{g_n(z)}{z - \zeta_n} \end{aligned}$$

für eine holomorphe Funktion  $g_n$  mit  $g_n(\zeta) = K_n$ . Insbesondere kann

$$\text{Res}_{\zeta_n} \left( \frac{f'}{f} \right) = K_n$$

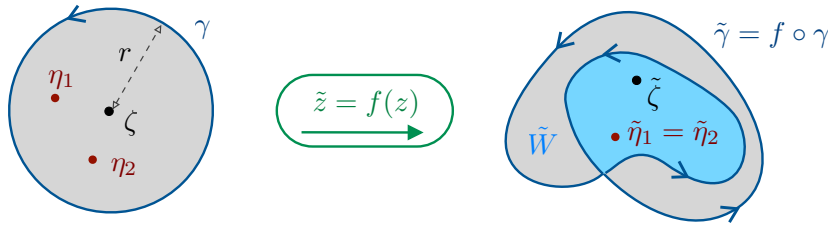
direkt abgelesen werden.

Beitrag der Nullstelle  $\xi_m$ : Mit exakt denselben Argumenten können wir

$$\text{Res}_{\xi_m} \left( \frac{f'}{f} \right) = \text{Ord}_{\xi_m}(f)$$

zeigen, und die Behauptung folgt aus Theorem 75 angewendet auf  $f'/f$ , wobei wir benutzt haben, dass die Menge der Singularitäten von  $f'/f$  gerade aus den Singularitäten und den Nullstellen von  $f$  besteht.  $\square$

<sup>11</sup>Im Gegensatz zum Residuensatz werden hier Punkte  $\zeta \in V$  mit  $\text{Ord}_{\zeta}(f) = \pm\infty$  ausgeschlossen.



**Abbildung 3.6:** Zur geometrischen Bedeutung des Argumentprinzips bzw. des Beweises von Proposition 81, dargestellt für einen Punkt  $\zeta$  der Vielfachheit 2. Der blau gefärbte Bereich repräsentiert die Menge  $\tilde{W}$ .

Der Name *Argumentprinzip* erklärt sich wie folgt. Ist  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, so folgt für eine Nullstelle  $\zeta \in U$  mit Hilfe der Koordinaten-Transformation  $\tilde{z} = f(z)$  und  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$  auch

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}} = \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(0).$$

Oder anders gesagt: die linke Seite in (3.6) gibt an, wie oft die mittels  $z \mapsto \tilde{z} = f(z)$  transformierte Kurve  $\tilde{\gamma}$  um die 0 läuft bzw. um viele Vielfache von  $2\pi$  sich das komplexe Argument — also der Winkel in den üblichen Polarkoordinaten — dabei ändert (siehe Abbildung 3.6). Diese geometrische Idee hinter dem Argumentprinzip kann auch benutzt werden, um die sogenannte Vielfachheit von Punkten genauer zu charakterisieren.

**Definition 80** (Vielfachheit). Seien  $U$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann heißt  $\zeta$  ein Punkt der Vielfachheit  $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  bzgl.  $f$ , falls  $\zeta$  eine  $K$ -fache Nullstelle von  $f - f(\zeta)$  ist, d.h. wenn  $\text{Ord}_{\zeta}(f - f(\zeta)) = K$ . Man sagt auch:  $f$  nimmt in  $\zeta$  den Wert  $f(\zeta)$  mit Vielfachheit  $K$  an.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass  $f$  in der Nähe eines Punktes mit Vielfachheit  $K$  als

$$f(z) = f(\zeta) + \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k$$

geschrieben werden kann, und dass nur bei Nullstellen Vielfachheit und Ordnung dasselbe sind. Das zentrale Beispiel in diesem Zusammenhang ist  $f(z) = c + z^K$  mit  $c \in \mathbb{C}$  beliebig: Der Punkt 0 besitzt offensichtlich die Vielfachheit  $K$ , aber jeder andere Punkt  $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$  erfüllt  $f'(\zeta) \neq 0$  und ist damit ein Punkt der Vielfachheit 1. Diese Beobachtung kann wie folgt verallgemeinert werden.

**Satz 81** (Lokales Verhalten und Vielfachheit). Seien  $U$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\zeta \in U$  ein Punkt der Vielfachheit  $K \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es einen Radius  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$  sowie eine offene Menge  $\tilde{W}$  mit  $f(\zeta) =: \tilde{\zeta} \in \tilde{W} \subset f(D_r(\zeta))$ , so dass es zu jedem Punkt  $\tilde{\eta} \in \tilde{W} \setminus \{\tilde{\zeta}\}$  genau  $K$  verschiedene Punkte  $\eta_1, \dots, \eta_K \in D_r(\zeta)$  gibt, in denen  $f$  den Wert  $\tilde{\eta}$  mit Vielfachheit 1 annimmt.

*Beweis.* Teil 1: Wir wählen  $r > 0$  so klein, dass zum einen  $D_{2r}(\zeta) \subset U$  gilt und zum anderen sowohl  $f$  als auch  $f'$  jeweils keine Nullstelle in  $\dot{D}_{2r}(\zeta)$  besitzen. Dies gelingt immer, denn andernfalls wäre  $f$  nach dem Identitätssatz konstant auf der Zusammenhangskomponente von  $\zeta$  und es würde  $K = \text{Ord}_{\zeta}(f) = +\infty$  gelten. Außerdem sei



$\gamma = \sigma_{r+1}(\zeta)$  die natürliche Parametrisierung von  $\partial D_r(\zeta)$  und  $\tilde{W}$  sei die Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus f(\partial D_r(\zeta))$ , in der  $\tilde{\zeta}$  liegt; siehe Abbildung 3.6.

*Teil 2:* Für jedes festgehaltene  $\tilde{\eta} \in \tilde{W}$  mit  $\tilde{\eta} \neq \tilde{\zeta}$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in D_r(\zeta) : f(\eta) = \tilde{\eta}} \text{Ord}_\eta(f - \tilde{\eta}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - \tilde{\eta}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z} - \tilde{\eta}} \\ &= \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\eta}) \end{aligned}$$

wegen Theorem 79, angewendet auf  $f - \tilde{\eta}$  als Funktion auf der Menge  $D_{2r}(0)$  sowie den Einweg-Zyklus  $\tilde{\gamma}$ . Die Eigenschaften der Windungszahl — siehe Theorem 18 garantieren nun

$$\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\eta}) = \text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\zeta})$$

eben weil  $\tilde{\eta}$  und  $\tilde{\zeta}$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \text{sp } \tilde{\gamma}$  liegen. Andererseits garantieren Theorem 79 und unsere Wahl von  $r$  auch

$$\text{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\zeta}) = \sum_{\eta \in D_r(\zeta) : f(\eta) = \tilde{\zeta}} \text{Ord}_\eta(f - \tilde{\zeta}) = \text{Ord}_\zeta(f - \tilde{\zeta}) = K$$

und wir erhalten

$$\sum_{\eta \in D_r(\zeta) : f(\eta) = \tilde{\eta}} \text{Ord}_\eta(f - \tilde{\eta}) = K.$$

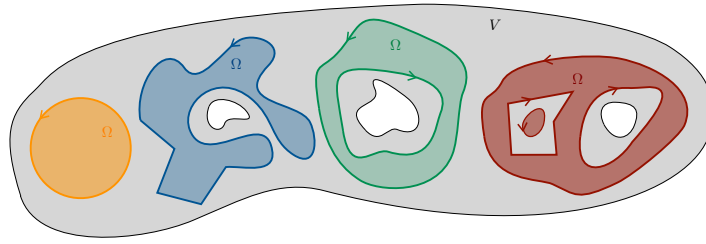
Andererseits müssen wegen der Nullstellenfreiheit von  $f'$  in  $\dot{D}_r(\zeta)$  alle Nullstellen von  $f - \tilde{\eta}$  einfach sein, d.h. es gilt  $\text{Ord}_\eta(f - \tilde{\eta}) = 1$  für alle in Frage kommenden Werte von  $\eta$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

### Bemerkung.

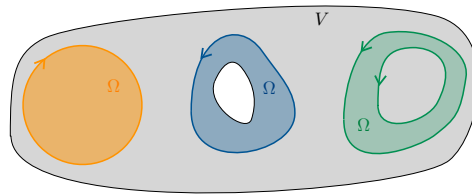
1. Satz 81 impliziert, dass  $f(\zeta)$  ein innerer Punkt von  $f(U)$  ist. Der Satz 45 über die Gebietstreue kann daher auch aus dem Residuensatz abgeleitet werden.
2. Der Beweis von Satz 81 garantiert für den Fall  $K = 1$  die folgende Variante des Umkehrsatzes: Besitzt  $\zeta$  die Vielfachheit 1 — d.h. gilt  $f'(\zeta) \neq 0$  — so ist  $f$  lokal invertierbar, d.h. es existiert  $f^{-1}$  zumindest auf der Menge  $\tilde{W}$ . Man kann dann leicht zeigen (Übungsaufgabe), dass  $f^{-1}$  auf ihrem Definitionsbereich holomorph sein muss.
3. Wir werden später noch eine andere Sicht auf die Vielfachheit liefern und zeigen, dass es lokale um jeden Punkt  $\zeta$  mit Vielfachheit  $K$  eine biholomorphe Koordinatentransformation  $z \mapsto \bar{z} = g(z)$  gibt, so dass die transformierte Abbildung  $\bar{f} = g \circ f \circ g^{-1}$  als

$$f(\bar{z}) = c_0 + c_1(\bar{z} - \bar{\zeta})^K$$

geschrieben werden kann.



**Abbildung 3.7:** Vier Beispiele für Randzyklen im Sinne von Definition 82 mit jeweils eingefärbter Menge  $\Omega$ , wobei  $\Omega$  im roten Beispiel nicht zusammenhängend ist. Wichtig ist, dass jeder Punkt aus  $\Omega$  genau einmal von  $\Gamma$  entgegen dem Uhrzeigersinn umrundet wird, und dass in allen Punkt aus  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$  die Umlaufzahlen aller Teilwege sich insgesamt aufheben. Insbesondere ist  $\Gamma$  immer nullhomolog bzgl.  $V$  und Löcher von  $V$  spielen nur insofern eine Rolle, als dass in ihnen  $f$  nicht definiert sein muss.



**Abbildung 3.8:** Drei Gegenbeispiele für Randzyklen.

### 3.7 Randzyklen und Vereinfachungen

Wir wollen die bisher abgeleiteten Resultate in einem für sehr viele Anwendungen wichtigen Spezialfall anwenden, in dem die Integrationswege durch die Ränder geometrischer Gebiete gegeben sind, siehe die Abbildungen 3.7 und 3.8.

**Definition 82** (Randzyklus). Seien  $V$  und  $\Omega$  offene Mengen mit  $\bar{\Omega} \subset V$ . Ein Zyklus  $\Gamma$  in  $V$  heißt Randzyklus von  $\Omega$ , falls

$$\text{sp } \Gamma = \partial\Omega, \quad \text{Ind}_z(\Gamma) = 1 \quad \text{für } z \in \Omega, \quad \text{Ind}_z(\Gamma) = 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}.$$

Inbesondere ist  $\Gamma$  immer nullhomolog bzgl.  $V$  und der Residuensatz liefert

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in \Omega} \text{Res}_{\zeta}(f)$$

für jede Funktion  $f$ , die bis auf isolierte Singularitäten holomorph auf  $V$  ist und deren Singularitäten nicht in  $\text{sp } \Gamma$  liegen.

Die Menge  $\Omega$  in Definition 82 ist im Allgemeinen das geometrische Objekt unseres Interesses, wohingegen die Menge  $V$  im wesentlichen nur kodiert, dass die betrachtete Funktion nicht nur auf  $\Omega$ , sondern noch in einer offenen Umgebung von  $\bar{\Omega}$  holomorph bis auf isolierte Singularitäten ist.

**Folgerung 83** (verallgemeinerte Laurent-Cauchy-Formeln für Randzyklen). Seien  $V$ ,  $\Omega$  und  $\Gamma$  wie in Definition 82 und sei  $f$  holomorph auf  $V \setminus \{\zeta\}$  mit  $\zeta \in \Omega$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz$$

für alle  $z \in D_r(\zeta)$  und jeden hinreichend kleinen Radius  $r > 0$  mit  $D_r(\zeta) \subset \Omega$ . Ist  $f$  darüberhinaus auch holomorph in  $\zeta$ , so gilt natürlich auch  $\alpha_k = f^{(k)}(\zeta)/k!$ .

*Beweis.* Für festes  $\zeta \in \Omega$  folgt die Existenz der behaupteten lokalen Reihendarstellung entweder aus Theorem 66 (im Falle das  $\zeta$  Singularität von  $f$  ist) oder aus Theorem 30 (falls  $f$  holomorph in  $\zeta$  ist, wobei dann automatisch  $0 = \alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \dots$  gilt) und es bleibt nur die Formel für die Koeffizienten  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  zu zeigen. Für beliebiges  $m \in \mathbb{Z}$  wird durch

$$g_m(z) := \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{m+1}}$$

eine holomorphe Funktion  $g_m$  auf  $V \setminus \{\zeta\}$  definiert, und eine einfache Rechnung mit

$$g_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^{k-m-1} \quad \text{für } z \in D_r(\zeta)$$

liefert  $\text{Res}_\zeta(g_m) = \alpha_m$ . Der Residuensatz angewendet auf  $\gamma_m$  liefert nun

$$\int_{\Gamma} g_m(z) dz = 2\pi i \alpha_m$$

und damit die Formel für  $\alpha_m$ . □

**Folgerung 84** (Zahl der Nullstellen und Pole). *Mit den Notationen von Definition 82 gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\zeta \text{ ist Nullstelle in } \Omega} \text{Ord}_\zeta(f) + \sum_{\zeta \text{ ist Polstelle in } \Omega} \text{Ord}_\zeta(f),$$

sofern es keine Null- oder Polstellen der Ordnung  $\pm\infty$  gibt.

*Beweis.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus Theorem 79. □

Eine weitere und oftmals nützliche Anwendung des Argumentprinzips und bzw. des Residuensatzes ist das folgende Resultat.

**Satz 85** (Satz von Rouché). *Mit den Notationen von Definition 82 gilt. Sind  $f$  und  $g$  zwei holomorphe Funktionen auf  $V$ , so dass*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \text{sp } \gamma,$$

so haben  $f$  und  $g$  in  $\Omega$  dieselbe Anzahl von Nullstellen in  $\Omega$ , sofern diese mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.

*Beweis.* Für jeden reellen Parameter  $\lambda \in [0, 1]$  betrachten wir die Funktion

$$h_\lambda = g + \lambda(f - g) = \lambda f + (1 - \lambda)g,$$

die auf  $V$  holomorph ist. Außerdem gilt nach Voraussetzung

$$0 \leq |g(z) - h_\lambda(z)| = |\lambda| |g(z) - f(z)| \leq |g(z) - f(z)| < |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \text{sp } \gamma$$

und in Kombination mit der Kompaktheit von  $\text{sp } \gamma$  sowie der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  erhalten wir

$$\min_{z \in \text{sp } \gamma} |g(z)| > 0, \quad \min_{z \in \text{sp } \gamma} |h_\lambda(z)| > 0,$$

wobei wir auch  $|h_\lambda(z)| \geq |g(z)| - |\lambda| |g(z) - f(z)| > 0$  benutzt haben. Insbesondere ist

$$n_\lambda := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)} dz$$

wohl-definiert und hängt darüberhinaus stetig von  $\lambda$  ab. Nach Theorem 79 ist  $n_\lambda$  aber gerade die Anzahl der Nullstellen von  $h_\lambda$  in  $\Omega$  und damit insbesondere eine natürliche Zahl. Jede stetige Abbildung  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$  muss aber konstant sein, und dies liefert die Behauptung.  $\square$

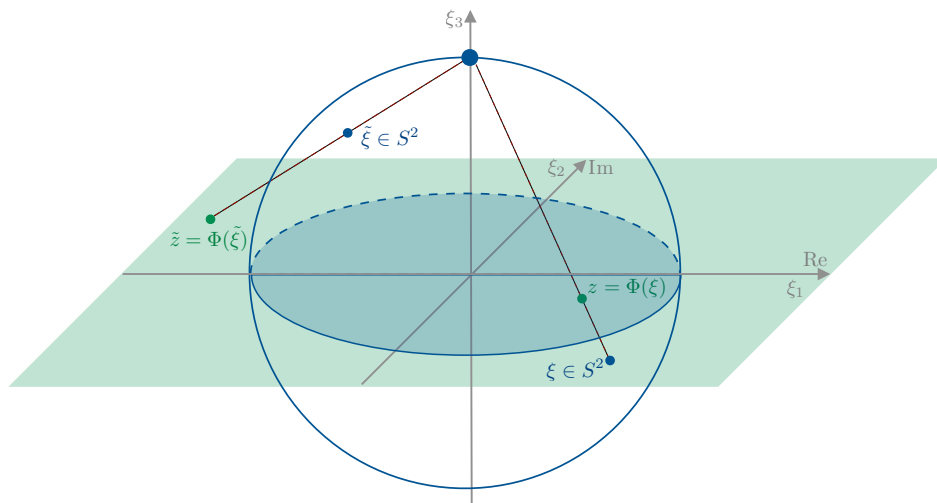
Der Satz von Rouché erlaubt es oftmals, die Anzahl der Nullstellen einer gegebenen Funktion  $f$  auf einer gegebenen Menge  $\Omega$  zu berechnen.

**Beispiel.** Wir betrachten

$$f(z) = -z^{45} - 4z + 2, \quad \Omega = D_1(0), \quad g(z) = 4z + 2$$

und bemerken für jedes  $z$  mit  $|z| = 1$ , dass  $|f(z) - g(z)| = 1 < 2 \leq |g(z)|$ . Deshalb besitzt  $f$  in  $D_1(0)$  genauso viele Nullstellen wie  $g$ , also eine.

### 3.8 Riemannsche Sphäre und meromorphe Funktionen



**Abbildung 3.9:** Die stereographische Projektion  $\Phi$ , die die Südhalbkugel auf  $D_1(0)$ , die Nordhalbkugel auf  $\{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$  und den Äquator auf  $\partial D_1(0)$  abbildet. Insbesondere vermittelt  $\Phi$  einen Homöomorphismus zwischen  $\hat{\mathbb{C}}$  und  $S^2$ .

Die um einen einzigen „unendlich fernen Punkt“ erweiterte Zahlenebene, das ist die Menge

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

wird auch Riemannsche Sphäre — oder Riemannsche Zahlenkugel oder Erweiterte Zahlenebene — genannt, wobei die Bezeichnung „Sphäre“ dadurch motiviert wird, dass  $\hat{\mathbb{C}}$  das Bild der euklidischen Einheitskugel

$$S^2 := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

unter der stereographischen Projektion

$$\xi \in S^2 \quad \mapsto \quad \Phi(\xi) := \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3} \in \hat{\mathbb{C}} \quad (3.7)$$

ist, wobei — siehe Abbildung 3.9 — der *Nordpol*  $(0, 0, 1)$  auf den Punkt  $\infty$ , der *Südpol*  $(0, 0, -1)$  auf  $0$  und jeder *Äquatorialpunkt*  $(\cos(t), \sin(t), 0)$  auf  $e^{it}$  abgebildet wird. Insbesondere gibt es in  $\hat{\mathbb{C}}$  nur *einen* unendlich fernen Punkt, wohingegen im Reellen meist zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  unterschieden wird.

**Die Topologie der Riemannschen Sphäre** Auf  $\hat{\mathbb{C}}$  kann nun mit Hilfe der stereographischen Projektion  $\Phi$  in natürlicher Weise der folgende *Umgebungsbegriff* eingeführt werden:

1. Eine Menge  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  heißt offene Umgebung von  $z \in \mathbb{C}$ , wenn sie eine offene Kreisscheibe  $D_r(z)$  mit  $r > 0$  enthält.
2. Eine Menge  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  heißt offene Umgebung von  $\infty$ , wenn sie den Punkt  $\infty$  sowie das Komplement einer abgeschlossenen Kugel  $\overline{D}_R(0)$  mit  $R > 0$  enthält.<sup>12</sup>

Dadurch wird  $\hat{\mathbb{C}}$  in natürlicher Weise ein *topologischer Raum*<sup>13</sup>, in dem die Konvergenz von Folgen und damit die Stetigkeit von Funktionen wohldefiniert sind. Insbesondere konvergiert eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{\mathbb{C}}$  gegen  $z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ , wenn jede offene Umgebung von  $z_\infty$  fast alle Folgenglieder von  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  enthält, und eine Funktion  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  heißt stetig in einem Punkt  $z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ , falls  $z_n \rightarrow z_\infty$  schon  $f(z_n) \rightarrow f(z_\infty)$  impliziert.

Die Konvergenz und die Stetigkeit in  $\hat{\mathbb{C}}$  sind sehr intuitiv und man kann aus den obigen Definitionen leicht die folgenden Aussagen ableiten, wobei  $|\infty| = +\infty$  vereinbart sei:

1.  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{\mathbb{C}}$  konvergiert genau dann gegen  $z_\infty \neq \infty$ , wenn  $z_n \in \mathbb{C}$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $|z_n - z_\infty| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow +\infty$ .
2.  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{\mathbb{C}}$  konvergiert genau dann gegen  $\infty$ , wenn  $|z_n| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow +\infty$ .
3.  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ist genau dann stetig in  $z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  mit  $f(z_\infty) \neq +\infty$ , falls  $|f(z_n) - f(z_\infty)| \rightarrow 0$  für jede Folge mit  $z_n \rightarrow z_\infty$ .
4.  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ist genau dann stetig in  $z_\infty \in \hat{\mathbb{C}}$  mit  $f(z_\infty) = \infty$ , falls  $|f(z_n)| \rightarrow +\infty$  für jede Folge mit  $z_n \rightarrow z_\infty$ .

Außerdem kann  $\hat{\mathbb{C}}$  auch als *Einpunkt-Kompaktifizierung* von  $\mathbb{C}$  betrachtet werden, wobei die obigen Definitionen implizieren, dass  $\hat{\mathbb{C}}$  sowohl im Überdeckungssinne als auch im Teilfolgensenne kompakt ist (Übungsaufgabe).

**Pole und Singularitäten bei  $\infty$**  Ist eine Funktion  $f$  auf dem Komplement einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{D}_r(0)$  definiert, so nennen wir  $f$  holomorph in  $\infty$ , sofern die Abbildung

$$\zeta \mapsto f_\#(\zeta) := f(1/\zeta)$$

<sup>12</sup>Man kann diese Definition auch so verstehen: Die offenen Kreisscheiben mit Mittelpunkt  $\infty$  sind gerade die Komplemente von abgeschlossenen Kreisscheiben mit Mittelpunkt  $0$ .

<sup>13</sup>Für die formale Definition eines topologischen Raumes sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

im Punkt  $\zeta = 0$  differenzierbar ist und schreiben in konsistenter Weise

$$f'(\infty) = - \lim_{\zeta \rightarrow 0} f'_{\#}(\zeta) \zeta^2.$$

Analog kann man die Konzepte *Nullstelle* und *Singularität* auf den unendlich fernen Punkt übertragen. Insbesondere besitzt das Monom  $m_k(z) = z^k = (1/z)^{-k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  in  $\infty$  eine Polstelle der Ordnung  $k$  und für  $k \in -\mathbb{N}$  eine Nullstelle der Ordnung  $-k$ .

Man kann auf  $\hat{\mathbb{C}}$  in natürlicher Weise eine Analogon zur Holomorphie einführen, dass auch isolierte Polstellen zulässt.

**Definition 86** (meromorphe Funktionen). *Eine Funktion  $f : V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  auf einer offenen und zusammenhängenden Menge  $V \subset \hat{\mathbb{C}}$  heißt meromorph<sup>14</sup>, falls*

1.  $f$  stetig auf  $V$  ist,
2. das Urbild  $P_f := f^{-1}(\infty)$  eine diskrete Teilmenge von  $V$  ist,
3.  $f$  holomorph auf  $V \setminus P_f$  ist.

**Bemerkung.**

1. Die Stetigkeit von  $f$  impliziert, dass jedes  $\zeta \in P_f$  Polstelle von  $f$  ist, da andernfalls nicht  $f(z_n) \rightarrow \infty$  für  $z_n \rightarrow \zeta$  gelten kann (siehe Theorem 71 über das lokale Verhalten in der Nähe wesentlicher Singularitäten).
2. Man definiert üblicherweise  $N_f := f^{-1}(0)$ , d.h.  $N_f$  ist die Nullstellenmenge von  $f$ . Diese ist nach dem Identitätssatz 42 auch diskrete Teilmenge von  $V$ , sofern  $f$  nicht identisch verschwindet, d.h. sofern  $f$  nicht gerade die Nullfunktion ist.
3. Ist  $p$  ein nicht-konstantes Polynom, so sind  $p$  und  $1/p$  meromorph auf  $\hat{\mathbb{C}}$  mit  $P_p = \{\infty\}$  sowie  $P_{1/p} = N_p$  und  $N_{1/p} = \{\infty\}$ .
4. Sind  $g$  und  $h$  zwei holomorphe und nicht identisch verschwindende Funktionen auf  $V$  mit  $N_g \cap N_h = \emptyset$ , so ist  $f = g/h$  meromorph auf  $V$  mit  $P_f = N_h$  und  $N_f = N_g$ . Gibt es Punkte  $\zeta \in N_g \cap N_h$ , so kann aus den Ordnungen  $\text{Ord}_{\zeta}(g)$  und  $\text{Ord}_{\zeta}(h)$  leicht abgelesen werden, ob  $\zeta$  aus Sicht von  $f$  eine Nullstelle oder ein Pol oder eine hebbare Singularität ist.
5. Für jeden Punkt  $\zeta \in V$  mit  $\zeta \neq \infty$  existiert nach Theorem 66 eine lokale Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k (z - \zeta)^k \quad \text{mit} \quad K = \text{Ord}_{\zeta}(f) \in \mathbb{Z},$$

die auf der größten punktierten Kreisscheibe  $\dot{D}_r(\zeta)$  konvergiert, die ganz in  $V \setminus P_f$  enthalten ist. Ist  $f$  sogar holomorph in  $\zeta \neq \infty$ , so ist diese Laurent-Reihe eine Taylor-Reihe (d.h.  $\alpha_k = 0$  für  $k < 0$ ) und konvergiert auch in der nicht-punktierten Kreisscheibe  $D_r(\zeta)$ .

<sup>14</sup>Die griechischen Worte *meros* und *holos* meinen *Teil* und *Ganzes*.

6. Im Falle von  $\infty \in V$  existiert die von  $f_{\#}$  induzierte Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k z^{-k} \quad \text{mit } K = \text{Ord}_0(f_{\#}) \in \mathbb{Z},$$

die auf der größten Menge der Bauart  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_r(0)$  („Kreis um  $\infty$ “) konvergiert, die in  $V \setminus P_f$  enthalten ist.

**Eigenschaften meromorpher Funktionen** Wir zeigen zunächst, dass jede meromorphe Funktion lokal wie eine rationale Funktion aussieht.

**Lemma 87** (Lokale Struktur meromorpher Funktionen). *Seien  $V \subset \hat{\mathbb{C}}$  offen und zusammenhängend und  $f : V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  meromorph. Dann gibt es für jedes  $\zeta \in V$  eine offene Umgebung  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  von  $\zeta$ , so dass  $f$  auf  $U$  als Quotient zweier holomorpher Funktionen  $g$  und  $h$  dargestellt werden kann, d.h. es gilt  $f(z) = g(z)/h(z)$  für alle  $z \in U$ .*

*Beweis.* Ist  $\zeta$  kein Pol von  $f$ , so können wir

$$U := V - P_f, \quad g(z) := f(z), \quad h(z) = 1$$

wählen. Ist  $\zeta \neq \infty$  ein Pol der Ordnung  $L > 0$ , so benutzen wir die lokale Laurent-Entwicklung (siehe oben) und setzen  $U := D_r(\zeta)$  sowie

$$g(z) := \alpha_{-L} + \alpha_{-L+1}(z - \zeta) + \alpha_{-L+2}(z - \zeta)^2 + \dots, \quad h(z) := (z - \zeta)^L.$$

Ist  $\infty$  ein Pol von  $f$  der Ordnung  $L > 0$ , so folgt die Behauptung mit  $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_r(0)$  und

$$g(z) := \alpha_{-L} + \alpha_{-L+1}z^{-1} + \alpha_{-L+2}z^{-2} + \dots, \quad h(z) := z^{-L},$$

aus der lokalen Laurent-Entwicklung von  $f_{\#}$  in 0, wobei  $g$  und  $h$  holomorph in  $\infty$  sind eben weil  $g_{\#}$  und  $h_{\#}$  holomorph in 0 sind.  $\square$

Da meromorphe Funktionen lokal wie rationale Funktionen aussehen, können sind nicht nur miteinander addiert oder multipliziert, sondern auch durcheinander dividiert werden, wobei man natürlich durch das Nullelement  $f \equiv 0$  nicht dividieren darf.

**Lemma 88** (Körper der meromorphen Funktionen). *Die Menge der meromorphen Funktionen auf einer offenen und zusammenhängenden Menge<sup>15</sup>  $V$  bilden einen Körper bzgl. der punktweisen Addition und Multiplikation von Funktionen mit Werten in  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

<sup>15</sup>Die Voraussetzung, dass  $V$  zusammenhängend ist, ist insofern wichtig, als dass es andernfalls neben der Nullfunktion weitere Funktionen geben würde, durch die man nicht dividieren könnte, nämlich alle Funktionen die auf einer, aber nicht auf allen Zusammenhangskomponenten verschwinden.





# Kapitel 4

## Biholomorphe Abbildungen

**Definition 89** (Biholomorphe Abbildungen). Seien  $U$  und  $V$  zwei offene Mengen in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Eine Funktion  $F : U \rightarrow V$  heißt biholomorphe Abbildung von  $U$  nach  $V$ <sup>1</sup>, falls sie injektiv und surjektiv ist und falls sowohl  $F$  als auch  $F^{-1}$  meromorph sind. Man sagt auch,  $U$  und  $V$  sind mittels  $F$  biholomorph äquivalent.

**Bemerkung.**

1. Da in jedem Pol der Wert  $\infty$  angenommen wird<sup>2</sup> gilt: Für  $\infty \neq V$  ist jede meromorphe Funktion  $F : U \rightarrow V$  schon holomorph. Außerdem kann eine biholomorphen Abbildung  $F$  nur einen Pol besitzen und ist damit in höchstens einem Punkt nicht differenzierbar; analoges gilt für  $F^{-1}$ .
2. Ist  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und injektiv, so ist  $F$  schon eine biholomorphe Abbildung zwischen  $U$  und  $V := F(U)$ , denn man zeigt leicht (Übungsaufgabe), dass  $F^{-1}$  in jedem Punkt aus  $V$  differenzierbar sein muss.
3. Die biholomorphen Abbildungen von  $U$  nach  $V$  sind gerade die konformen, d.h. die bijektiven Abbildungen von  $U$  nach  $V$ , die winkeltreu und orientierungstreu sind<sup>3</sup>. Dies gilt, weil eine reell-differenzierbare Abbildung in zwei Dimensionen dann und nur dann winkel- und orientierungstreu ist, wenn die Jacobi-Matrix in jedem Punkt eine nicht-verschwindende Drehstreckung beschreibt, d.h. dann und nur dann, wenn in jedem Punkt des Definitionsbereiches die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind.
4. Man nennt eine holomorphe Funktion  $f$  lokal biholomorph in einem Punkt  $z$ , wenn es offene Umgebungen  $U$  von  $z$  und  $V$  von  $f(z)$  gibt, so dass  $f$  die Menge  $U$  bijektiv auf  $V$  abbildet. Dies gilt genau dann<sup>4</sup>, wenn  $f'(z) \neq 0$ .

**Beispiel.**

1. Die Cayley<sup>5</sup>-Transformation

$$C(z) = \mathbf{i} \frac{1+z}{1-z} \quad \text{mit} \quad C^{-1}(z) = \frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}} \quad (4.1)$$

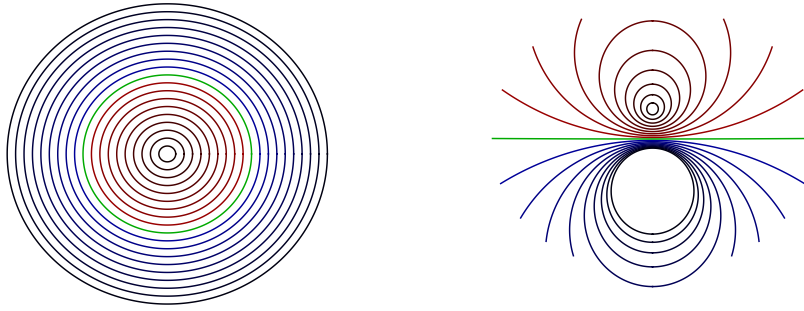
<sup>1</sup>Die Bezeichnung *bimeromorph* wäre etwas natürlicher, wird aber nicht verwendet.

<sup>2</sup>In den Übungsaufgaben wurde bewiesen: Besitzt  $F$  in  $\zeta$  einen Pol der Ordnung  $K$ , so gilt  $|F(z)| \geq c|z-\zeta|^{-K}$  für  $z \approx \zeta$  und damit  $F(z) \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow \zeta$

<sup>3</sup>Konforme Abbildungen können in allen Dimensionen definiert werden, wohingegen das Konzept der Biholomorphie nur in Dimensionen zwei erklärt ist.

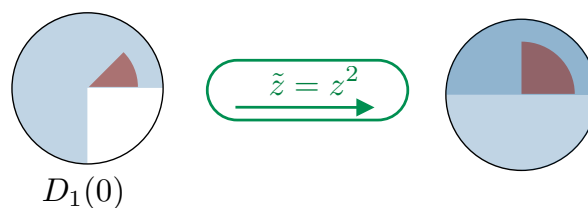
<sup>4</sup>( $\Rightarrow$ ) folgt aus Satz 81; ( $\Leftarrow$ ) kann aus dem Umkehrsatz abgeleitet werden.

<sup>5</sup>Arthur Cayley (1821–1895), britischer Mathematiker.



**Abbildung 4.1:** Die Caley-Transformation (4.1) bildet das linke Bild auf das rechte ab, wobei der Punkt 1 auf  $\infty$  geschickt wird. Der grüne Kreis bzw. die grüne Gerade repräsentieren die Einheitskreislinie bzw. die reelle Achse.

- bildet den Einheitskreis biholomorph auf die obere Halbebene ab, siehe Abbildung 4.1.
2. Die Exponentialfunktion bildet für jedes  $\zeta \in \mathbb{C}$  den Streifen  $\zeta + \mathbb{R} + i(-\pi, \pi)$  biholomorph auf die geschlitzte Ebene  $\{z \in \mathbb{C} : e^z \notin (-\infty, 0]\}$  ab. Insbesondere ist  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  zwar nicht biholomorph (weil nicht injektiv), aber in jedem Punkt  $\zeta \in \mathbb{C}$  lokal biholomorph.
  3.  $\mathbb{C}$  und  $\hat{\mathbb{C}}$  sind jeweils nicht biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe, weil jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow D_1(0)$  offensichtlich beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant und damit nicht injektiv ist. Außerdem sind  $\hat{\mathbb{C}}$  und  $\mathbb{C}$  nicht biholomorph äquivalent, weil die eine Menge kompakt, die andere aber nicht kompakt ist.<sup>6</sup>
  4. Das Monom  $z \mapsto z^k$  ist für  $k > 1$  im Punkt 0 weder lokal biholomorph noch winkeltreu, siehe Abbildung 4.2. Analoges gilt für jede holomorphe Funktion und jeden Punkt  $\zeta$ , dessen Vielfachheit im Sinne von Definition 80 größer als 1 ist. Siehe dazu Satz 81.



**Abbildung 4.2:** Eine holomorphe Abbildung kann in der Nähe einer mehrfachen Nullstelle weder bijektiv noch winkeltreu sein.

## 4.1 Möbius-Transformationen

In diesem Abschnitt wollen wir sehr spezielle meromorphe Funktionen untersuchen.

<sup>6</sup>Ganz allgemein gilt: Das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt.

**Definition 90** (Möbius<sup>7</sup>-Transformation). Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  gegebene Parameter mit  $ad - bc \neq 0$ . Dann wird die durch

$$T_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

definierte Abbildung  $T_{a,b,c,d} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  die Möbius-Transformation — oder gebrochen lineare oder homographische Transformation — mit diesen Parameter genannt.

**Beispiel.**

1.  $T_{1,b,0,1}$  ist die Verschiebung um  $b$ , d.h. die Abbildung  $z \mapsto z + b$ .
2.  $T_{a,0,0,1}$  ist die Drehstreckung um  $a$ , d.h. die Abbildung  $z \mapsto az$ .
3.  $T_{0,1,1,0}$  ist die sogenannte Normalinversion, d.h. die Abbildung  $z \mapsto 1/z$ . Diese kann als Superposition der Spiegelung am Einheitskreis<sup>8</sup> und der Spiegelung an der reellen Achse verstanden werden.

**Bemerkung.** Seien  $a, b, c, d$  gegeben mit  $ad - bc \neq 0$  und sei  $T = T_{a,b,c,d}$ .

1. Es gilt:  $a = 0$  impliziert  $b \neq 0 \neq c$ ;  $c = 0$  impliziert  $d \neq 0 \neq a$ .
2.  $T$  ist meromorph mit  $T(\infty) = a/c$ ,  $T(-d/c) = \infty$ ,  $T(-b/a) = 0$ .
3. Für  $a = 0$  gilt  $N_T = \emptyset$ , sonst  $N_T = \{-b/a\}$ . Analog zeigen wir  $P_T = \emptyset$  für  $c = 0$  und  $P_T = \{-d/c\}$  sonst.

Wir können die Parameter einer Möbius-Transformation als Elemente der invertierbaren Matrix

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det L \neq 0.$$

auffassen und schreiben oftmals  $T_L$  statt  $T_{a,b,c,d}$ , wobei die Abbildungen zu  $L$  und  $\lambda L$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  gleich sind. Die Einführung der Parameter-Matrix  $L$  ist durch das folgende Resultat motiviert.

**Lemma 91** (Möbius-Gruppe<sup>9</sup>). Die Menge aller Möbius-Transformation ist eine Gruppe bzgl. der Superposition von Funktionen und es gilt

$$T_L \circ T_{\tilde{L}} = T_{L \cdot \tilde{L}}, \quad (4.2)$$

wobei  $L \cdot \tilde{L}$  im Sinne der üblichen Matrizenmultiplikation zu verstehen ist. Außerdem kann jede Möbius-Transformation als Superposition von Verschiebungen, Drehstreckungen und der Normalinversion geschrieben werden.

<sup>7</sup>August Ferdinand Möbius (1790–1868), deutscher Mathematiker und Astronom.

<sup>8</sup>Die elementargeometrische Spiegelung am Kreis  $\partial D_r(m)$  ist die Abbildung

$$z \mapsto m + r^2 \left( \overline{z - m} \right)^{-1}$$

und damit nicht holomorph, sondern anti-holomorph. Eine Inversion im Sinne der Funktionentheorie ist im Allgemeinen die Superposition einer Spiegelung am Kreis und einer Spiegelung an einer Achse.

<sup>9</sup>Für die Algebraiker: Die Möbius-Gruppe ist isomorph zur projektiven linearen Gruppe  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ .

*Beweis.* Die Formel (4.2) kann einfach nachgerechnet werden und impliziert die behauptete Gruppeneigenschaft mit neutralem Element  $T_{1,0,0,1} = \text{id}$ . Desweiteren beschreibt die Abbildungskette

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d}$$

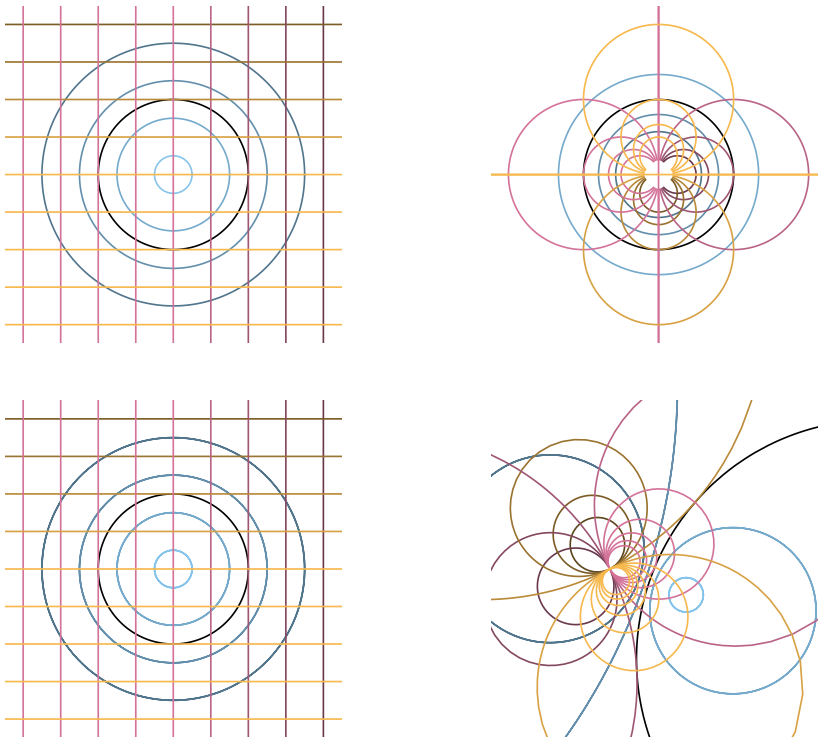
gerade eine mögliche Zerlegung der Möbius-Transformation  $T_{a,b,c,d}$  in die Elementarbausteine.  $\square$

Lemma 91 impliziert insbesondere, dass jede Möbius-Transformation die Riemannsche Sphäre *bijektiv* auf sich abbildet. Insbesondere gilt

$$T_L \circ T_{L^{-1}} = T_{L^{-1}} \circ T_L = T_1 = \text{Id},$$

wobei 1 die Einheitsmatrix ist, bzw.  $T_{a,b,c,d}^{-1} = T_{d,-b,-c,a}$ . Wir werden weiter unten sehen, dass die Möbiustransformationen gerade die *Automorphismen* von  $\hat{\mathbb{C}}$  sind.

Wir leiten nun eine wesentliche geometrische Eigenschaft aller Möbius-Transformationen her, die sehr eng mit der Konformität zusammenhängt, und verweisen auf Abbildung 4.3 für zwei konkrete Beispiele. In diesem Zusammenhang betrachten wir *Kreise* und *affine Geraden* in  $\mathbb{C}$  als Kreisgeraden in  $\hat{\mathbb{C}}$  (oder Möbius-Kreis), wobei eine Gerade als ein Kreis interpretiert wird, der durch  $\infty$  läuft.<sup>10</sup>



**Abbildung 4.3:** Oben: Die Normalinversion  $z \mapsto 1/z$  bildet das linke Bild in das rechte ab, wobei der Einheitskreis schwarz markiert ist. Unten: Weiteres Beispiel für eine Möbiustransformation.

<sup>10</sup>Diese Sprechweise ist letztlich dadurch motiviert, dass jeder Kreis in der euklidischen Sphäre  $S^2$  unter der stereographischen Projektion (3.7) entweder auf einen echten Kreis in  $\mathbb{C}$  oder eine affine Gerade durch  $\infty$  projiziert wird. Dabei besteht in der Sphäre  $S^2$  der Kreis mit Radius  $r < \pi$  und Mittelpunkt  $m \in S^2$  aus allen Punkten der Sphäre, die zu  $m$  den geodätischen Abstand  $r$  besitzen.

**Lemma 92** (Kreiserhaltung). *Jede Möbius-Transformation überführt Kreisgeraden auf Kreisgeraden.*<sup>11</sup>

*Beweis.* Auf Grund des zweiten Teils von Lemma 91 reicht es, die Behauptung für Verschiebungen, Drehstreckungen und die Normalinversion zu beweisen. Dazu bemerken wir, dass jeder Kreis und jede Gerade durch eine Gleichung der Bauart

$$\delta_1 z \bar{z} + \eta z + \bar{\eta} \bar{z} + \delta_2 = 0 \quad \text{mit Parametern } \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \eta \in \mathbb{C} \text{ mit } \eta \bar{\eta} \geq \delta_1 \delta_2$$

beschrieben werden kann, und dass umgekehrt die Lösungsmenge einer solchen Gleichung entweder eine Gerade ( $\delta_1 = 0$ ) oder ein Kreis ( $\delta_1 \neq 0$ ) ist. Diese Klasse quadratischer Gleichungen in der Variablen  $z \in \mathbb{C}$  ist aber invariant unter den Transformationen

$$z \mapsto az + b, \quad z \mapsto 1/z,$$

sofern die Parameter der Gleichung jeweils angepasst werden.  $\square$

**Lemma 93** (Andere Beschreibung von Möbius-Transformationen). *Seien  $(z_1, z_2, z_3)$  und  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  zwei gegebene Tripel paarweise verschiedener Elemente aus  $\hat{\mathbb{C}}$ . Dann existiert genau eine Möbius-Transformation  $T$ , so dass  $f(z_j) = \zeta_j$  für  $j = 1, 2, 3$ .*

*Beweis.* Spezialfall  $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 1$  und  $\zeta_3 = \infty$ : Unter der Zusatzannahme  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  müssen die Parameter  $a, b, c, d$  der gesuchten Möbius-Transformation offensichtlich den linearen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} z_1 & 1 & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & -z_2 & -1 \\ 0 & 0 & z_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genügen, und weil die Matrix auf der linken Seite den Rang 3 hat, gibt es einen eindimensionalen und nichttrivialen Lösungsraum

$$a = \lambda \tilde{a}, \quad b = \lambda \tilde{b}, \quad c = \lambda \tilde{c}, \quad d = \lambda \tilde{d}$$

und man zeigt leicht durch Widerspruch, dass  $ad - bc \neq 0$ . Da jede Wahl von  $\lambda \neq 0$  dieselbe Möbius-Transformation liefert, haben wir sowohl die behauptete Existenz als auch die behauptete Eindeutigkeit gezeigt. Diese Abbildung kann sogar explizit durch das Doppelverhältnis der vier Punkte  $z, z_1, z_2, z_3$ , d.h. durch

$$T(z) = \frac{\frac{z - z_1}{z - z_3}}{\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}} \quad (4.3)$$

ausgedrückt werden. Mit einfachen Modifikationen der Argumente können schließlich auch die Fälle mit  $z_j = 0$  oder  $z_j = \infty$  behandelt werden.

Allgemeiner Fall: Wie bereits gezeigt, gibt es eindeutige Möbius-Transformationen  $S$  und  $R$  mit

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{S} (0, 1, \infty), \quad (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \xrightarrow{R} (0, 1, \infty).$$

Für jede Möbius-Transformation  $T$ , die  $(z_1, z_2, z_3)$  auf  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  abbildet, gilt damit  $R \circ T = S$  und Lemma 91 impliziert  $T = R^{-1}S$ .  $\square$

<sup>11</sup>Das Bild einer Geraden kann also ein Kreis oder eine Gerade sein. Analog für Kreise.

**Bemerkung.** Für ein gegebenes Tripel  $(z_1, z_2, z_3)$  paarweise verschiedene Punkte  $z_j \in \hat{\mathbb{C}}$  gibt es genau eine Kreisgerade, die durch diese Punkte geht<sup>12</sup>. Dieser wird unter der Abbildung (4.3) auf die reelle Achse abgebildet, denn dies ist die einzige Kreisgerade durch die drei Punkte  $0 = T(z_1)$ ,  $1 = T(z_2)$  und  $\infty = T(z_3)$  läuft. Man kann auch nachrechnen, dass das Doppelverhältnis invariant unter Möbius-Transformationen ist.

Man kann mit elementaren geometrischen Argumenten zeigen, dass jede Abbildung von  $\hat{\mathbb{C}}$  in sich, die Kreisgeraden auf Kreisgeraden abbildet und die Orientierung erhält, schon Möbius-Transformation sein muss. Wir wollen schließlich auch erwähnen, dass Möbius-Transformationen auch eine sehr faszinierende dynamische Eigenschaften bzgl. der diskreten Orbits

$$z_0 \mapsto z_1 = T(z_0) \mapsto z_2 = T(z_1) \mapsto \dots,$$

besitzen (siehe Abbildung 4.4), wobei zwei via

$$\tilde{T} = S \circ T \circ S^{-1} \quad \text{für eine Möbius-Transformation } S$$

konjugierte Abbildungen  $T$  und  $\tilde{T}$  im wesentlichen dieselbe Dynamik erzeugen. Wir können hier die entsprechende Theorie nicht entwickeln<sup>13</sup>, sondern wollen nur erwähnen, dass die Konjugationsklassen aus dynamischer Sicht wie folgt klassifiziert werden können:

Name	Fixpunkte	Normalform von $L$	einfachstes Beispiel
parabolisch	1 entartet	$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z \mapsto z + b$
elliptisch [zirkulär]	2 neutral	$\begin{pmatrix} e^{+i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ [ $\omega = \pm\pi/2$ ]	$z \mapsto \zeta z$ mit $ \zeta  = 1$ [ $\zeta = -1$ ]
loxodromisch [hyperbolisch]	1 stab., 1 instab.	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ mit $ \lambda  \neq 1$ [ $\lambda \in \mathbb{R}$ ]	$z \mapsto \zeta z$ mit $ \zeta  \neq 1$ [ $\zeta \in \mathbb{R}$ ]

## 4.2 Automorphismen

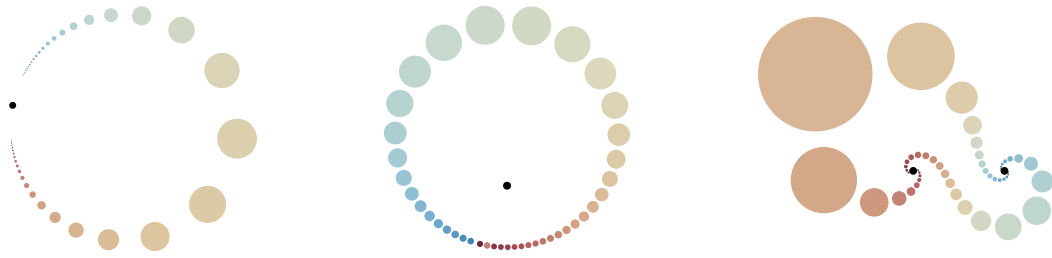
**Definition 94** (Automorphismen einer Menge). Für jede offene Menge  $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  heißt

$$\text{Aut}(U) := \{F : U \rightarrow U : F \text{ ist biholomorph}\}$$

die Automorphismengruppe von  $U$ , die in natürlicher Weise eine multiplikative Gruppe bzgl. der Superposition von Abbildungen ist.

<sup>12</sup>Diese Kreisgerade ist genau dann eine Gerade, wenn das Dreieck  $\Delta$  mit den Ecken  $z_1, z_2, z_3$  entartet. Das passiert insbesondere dann, wenn einer der drei Punkte  $z_j$  der unendlich ferne Punkt ist. Ist  $\Delta$  nicht entartet, so ist die Kreisgerade der Umkreis von  $\Delta$ .

<sup>13</sup>siehe zum Beispiel D. MUMFORD, C. SERIES, D. WRIGHT: *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2001.



**Abbildung 4.4:** Beispiele für Kreis-Orbits bei parabolischen, elliptischen und loxodromische Transformationen, wobei die schwarzen Punkte Fixpunkte repräsentieren.

Wir wollen nun vier wichtige Automorphismengruppen explizit berechnen bzw. angeben, nämlich für die Ebene, die Riemannsche Sphäre, die Kreisscheibe und die Halbebene. Insbesondere zeigen wir, dass jede dieser Automorphismengruppen eine Untergruppe der Möbiusgruppe ist.

**Satz 95** (Automorphismen der Ebene). *Jeder Automorphismus von  $\mathbb{C}$  ist eine affine Abbildung der Bauart  $z \mapsto \alpha z + \beta$  mit  $\alpha \neq 0$  und umgekehrt.*

*Beweis.* Es ist nur die Hinrichtung zu zeigen. Dazu bemerken wir zunächst, dass nach Theorem 30 eine festgehaltene biholomorphe Funktion  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  als Taylor-Reihe

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

mit Konvergenzradius  $+\infty$  geschrieben werden kann, wobei natürlich mindestens ein  $\alpha_k$  nicht verschwindet. Dies impliziert die Laurent-Entwicklung

$$F_{\#}(\zeta) = F(1/\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k} \quad \text{für } \zeta \neq 0,$$

mit konstantem Nebenteil und wir werden nun deren Verhalten für  $\zeta \rightarrow 0$  untersuchen. Da  $f(D_1(0))$  nach Satz 45 eine offene und nichtleere Menge ist — und weil  $F$  bijektiv ist — kann die Menge

$$\begin{aligned} F_{\#}(\dot{D}_1(0)) &= \{F_{\#}(\zeta) : 0 < |\zeta| < 1\} = \{F(z) : 1 < |z| < \infty\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{F(z) : 0 < |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C} \setminus F(D_1(0)) \end{aligned}$$

nicht dicht in  $\mathbb{C}$  liegen. Der Klassifikationssatz für Singularitäten — siehe Theorem 71 — garantiert daher, dass  $F_{\#}$  in 0 keine wesentliche Singularität, sondern nur einen Pol oder eine hebbare Singularität besitzt. Insbesondere existiert ein  $K \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\alpha_K \neq 0, \quad \alpha_k = 0 \quad \text{für } k > K,$$

und wir haben damit gezeigt, dass  $F$  ein Polynom vom Grade  $K$  ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra sind aber nur die Polynome ersten Grades bijektiv.  $\square$

Auf Grund des unendlich fernen Punktes ist die Automorphismengruppe von  $\hat{\mathbb{C}}$  umfangreicher als die von  $\mathbb{C}$ .

**Satz 96** (Automorphismen der Sphäre). *Jeder Automorphismus von  $\hat{\mathbb{C}}$  ist eine Möbius-Transformation wie in Definition 90 und umgekehrt.*

*Beweis.* Es ist wieder nur zu zeigen, dass jeder Automorphismus  $F$  von  $\hat{\mathbb{C}}$  schon Möbius-Transformation ist. Im Falle von  $F(\infty) = \infty$  ist  $F$  auch Automorphismus von  $\mathbb{C}$  und Satz 95 garantiert, dass  $F$  sogar affin ist. Im Fall von  $\zeta := F(\infty) \neq \infty$  betrachten wir die Abbildung  $G : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  mit

$$G(z) = \frac{1}{F(z) - \zeta},$$

die nach Konstruktion auch Automorphismus von  $\hat{\mathbb{C}}$  ist, wobei  $G^{-1}(z) = F^{-1}(\zeta + z^{-1})$ . Insbesondere gilt  $G(\infty) = \infty$  sowie  $F(z) \neq \infty$  für  $z \neq \infty$ , d.h.  $F$  ist auch Automorphismus von  $\mathbb{C}$ . Satz 95 liefert daher  $G(z) = \alpha z + \beta$  bzw.

$$F(z) = \zeta + \frac{1}{G(z)} = \zeta + \frac{1}{\alpha z + \beta} = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit  $a = \zeta\alpha$ ,  $b = \zeta\beta + 1$ ,  $c = \alpha$ ,  $d = \beta$ . □

Die Charakterisierung aller Automorphismen der Einheitskreisscheibe beruht auf der Erkenntnis, dass jede Abbildung von  $D_1(0)$  in sich in einem gewissen Sinne nicht-expansiv sein muss.

**Lemma 97** (Lemma von Schwarz<sup>14</sup>). *Sei  $f : D_1(0) \rightarrow D_1(0)$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in D_1(0) \quad \text{sowie} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

*Gilt darüber hinaus  $|f(z)| = |z|$  für ein  $z \in D_1(0)$  oder  $|f'(0)| = 1$ , so ist  $f$  eine Drehung, d.h.  $f(z) = e^{i\phi}z$  für alle  $z \in D_1(0)$  und einen Drehwinkel  $\phi \in \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Die Funktion  $g : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} \quad \text{für } z \neq 0, \quad g(0) := f'(0)$$

ist offensichtlich holomorph auf der punktierten Kreisscheibe  $\dot{D}_1(0)$  und darüber hinaus auch stetig im Punkt 0. Lemma 33 garantiert daher, dass  $g$  sogar holomorph auf  $D_1(0)$  ist. Ist nun  $z \in D_1(0)$  ein beliebiger Punkt und  $r$  ein Radius mit  $|z| < r < 1$ , so liefert das Maximum-Prinzip aus Folgerung 47 — angewendet auf die Funktion  $g$  und die Menge  $D_r(0)$  — die Abschätzung

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta| \leq r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

für alle  $z \in D_1(0)$ . Der Limes  $r \rightarrow 1$  etabliert die gewünschte Ungleichung sowohl für  $z \neq 0$  als auch für  $z = 0$ . Gilt nun  $|g(z)| = 1$  für ein  $z \in D_1(0)$ , so nimmt  $g$  sein Maximum im Inneren an, und das Maximum-Prinzip in Folgerung 47 garantiert sogar, dass  $g$  konstant ist, wobei die Konstante Norm 1 besitzt und deshalb als  $e^{i\phi}$  mit  $\phi \in \mathbb{R}$  geschrieben werden kann. □

**Satz 98** (Automorphismen der Kreisscheibe). *Jeder Automorphismus von  $D_1(0)$  ist eine Möbius-Transformation  $F$  der Bauart*

$$F(z) = e^{i\phi} \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z} \tag{4.4}$$

*mit Parametern  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta \in D_1(0)$  und umgekehrt. Insbesondere bildet jeder Automorphismus den Rand  $\partial D_1(0)$  in sich ab.*

<sup>14</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), deutscher Mathematiker.



*Beweis. Rückrichtung:* Die Funktion  $F$  in (4.4) ist für jede zulässige Wahl der Parameter  $\zeta$  und  $\phi$  wegen  $|1 - \bar{\zeta}z| \geq 1 - |\zeta||z| > 0$  als Abbildung von  $D_1(0)$  nach  $\mathbb{C}$  wohldefiniert und holomorph. Durch direkte Rechnungen verifizieren wir die Formel

$$|F(z)|^2 = \frac{z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta} - \bar{\zeta}z - \zeta\bar{z}}{1 + z\bar{z}\zeta\bar{\zeta} - \bar{\zeta}z - \zeta\bar{z}},$$

und schließen mit Hilfe der Umformungen

$$|F(z)|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 + |\zeta|^2 < 1 + |z|^2|\zeta|^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2),$$

dass  $F(z) \in D_1(0)$  wegen  $z, \zeta \in D_1(0)$ . Außerdem impliziert  $|z| = 1$  schon  $|F(z)| = 1$ . Wir haben damit gezeigt, dass die Möbius-Transformation  $F$  die Kreisscheibe  $D_1(0)$  wirklich holomorph in sich abbildet und dass der Rand  $\partial D_1(0)$  dabei auch in sich abgebildet wird. Darüber hinaus kann die inverse Möbius-Transformation mit Hilfe von Lemma 91 zu

$$F^{-1}(z) = \frac{z + e^{i\phi}\zeta}{e^{i\phi} + \bar{\zeta}z} = e^{i\psi} \frac{z - \xi}{1 - \bar{\xi}z}$$

berechnet werden, wobei  $\psi := -\phi \in \mathbb{R}$  und  $\xi := -e^{i\phi}\zeta \in D_1(0)$ . Unsere bisherigen Argumente können analog — d.h. mit  $\psi$  und  $\xi$  statt  $\phi$  und  $\zeta$  — auch auf  $F^{-1}$  angewendet werden und implizieren, dass auch  $F^{-1}$  die Kreisscheibe  $D_1(0)$  holomorph in sich abbildet. Damit ist bewiesen, dass sowohl  $F$  als auch  $F^{-1}$  die Kreisscheibe  $D_1(0)$  wirklich injektiv und surjektiv auf sich abbilden.

*Hinrichtung:* Seien  $G$  ein gegebener Automorphismus von  $D_1(0)$  und  $F$  wie oben mit  $\phi = 0$  und  $\zeta = G(0)$ . Dann ist die Möbius-Transformation  $H := F \circ G$  auch ein Automorphismus von  $D_1(0)$  mit  $H(0) = 0$  und das Schwarzsche Lemma 97 liefert zunächst

$$|H(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |H^{-1}(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in D_1(0).$$

Da die zweite Ungleichung auch im Punkt  $H(z)$  ausgewertet werden kann, gilt damit auch

$$|H(z)| \leq |z| = |H^{-1}(H(z))| \leq |H(z)|$$

für alle  $z \in D_1(0)$ , und Lemma 97 impliziert sogar

$$H(z) = e^{i\psi}z$$

für alle  $z \in D_1(0)$  und  $\psi \in \mathbb{R}$  geeignet. Insgesamt — und weil  $F^{-1}$  mit Lemma 91 berechnet werden kann — erhalten wir

$$G(z) = F^{-1}(H(z)) = F^{-1}(e^{i\psi}z) = \frac{e^{i\psi}z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}e^{i\psi}z} = e^{i\psi} \frac{z - \xi}{1 - \bar{\xi}z}$$

mit  $\xi := -e^{-i\psi}\zeta$  und damit die Behauptung.  $\square$

Die Automorphismen der Kreisscheibe können auch benutzt werden, um die Automorphismen der Halbebene zu bestimmen, da beide Mengen biholomorph äquivalent sind.

**Satz 99** (Automorphismen der Halbebene). *Die Automorphismen der oberen Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  sind gerade die Möbius-Transformationen mit reellen Parametern  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $ab - cd > 0$ .*

*Beweis.* Satz 98 und Lemma 91 implizieren, dass jeder Automorphismus  $F$  der Halbebene wirklich Möbius-Transformation ist und als

$$F = C \circ G \circ C^{-1}$$

geschrieben werden kann, wobei  $C$  die Cayley-Transformation (4.1) bezeichnet und  $G$  ein Automorphismus der Kreisscheibe wie in (4.4) ist. Diese Identität kann nun — siehe (4.2) — in die Matrizenformel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i & +i \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{+i\psi} & \eta \\ \bar{\eta} & e^{-i\psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & +1 \end{pmatrix}$$

übersetzt werden, wobei wir benutzt haben, dass die mittlere Matrix auf der rechten Seite via

$$e^{+i\phi} = e^{+i2\psi}, \quad \zeta = -\eta e^{+i\psi}$$

die Abbildung  $G$  beschreibt. Eine direkte Rechnung zeigt nun

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (+\eta + \bar{\eta} + e^{-i\psi} + e^{+i\psi}) & i \cdot (+\eta - \bar{\eta} + e^{-i\psi} - e^{+i\psi}) \\ i \cdot (+\eta - \bar{\eta} - e^{-i\psi} + e^{+i\psi}) & 1 \cdot (-\eta - \bar{\eta} + e^{-i\psi} + e^{+i\psi}) \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} +\operatorname{Re}(\eta) + \cos(\psi) & -\operatorname{Im}(\eta) + \sin(\psi) \\ -\operatorname{Im}(\eta) - \sin(\psi) & -\operatorname{Re}(\eta) + \cos(\psi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wir schließen, dass die Parameter der Möbius-Transformation  $F$  wirklich reell gewählt werden können. Außerdem gilt

$$ad - bc = 4(\cos(\psi)^2 - \operatorname{Re}(\eta)^2) + 4(\sin(\psi)^2 - \operatorname{Im}(\eta)^2) = 4(1 - |\eta|^2) > 0$$

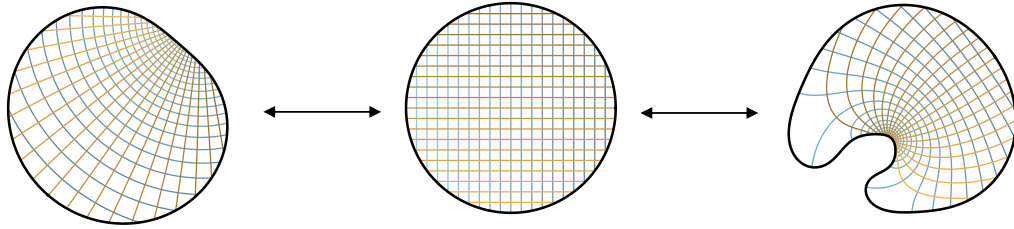
wegen  $|\eta| = |\zeta| < 1$ . □

### 4.3 Der Riemannsche Abbildungssatz

Wir werden in diesem Abschnitt den Riemannschen Abbildungssatz beweisen. Dieser Meilenstein der komplexen Analysis garantiert, dass jede *einfach zusammenhängende* und *echte* Teilmenge von  $\mathbb{C}$  biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abgebildet werden kann, siehe Abbildung 4.5, und damit, dass alle einfach zusammenhängenden Mengen aus funktionentheoretischer Sicht äquivalent sind. Dies ist eine sehr bemerkenswerte Aussage, denn der Rand einer einfach zusammenhängenden Menge (die per Definition bei uns immer offen ist) kann sehr kompliziert aussehen und sogar eine fraktale Geometrie aufweisen.<sup>15</sup>

Wir überlegen uns zunächst, dass nur einfach zusammenhängende Mengen biholomorph auf die Kreisscheibe abgebildet werden können.

<sup>15</sup>Ein Beispiel ist die Kochsche Schneeflocke; siehe etwa WIKIPEDIA.



**Abbildung 4.5:** Zwei Beispiele (*links* und *rechts*) für offen Mengen, die biholomorph äquivalent zur offenen Kreisscheibe sind. Insbesondere kann jede dieser Mengen bijektiv und *winkeltreu* auf die Kreisscheibe abgebildet werden. Lemma 100 und der Riemannsche Abbildungssatz in Theorem 105 und garantieren, dass eine offene und zusammenhängende Menge genau dann biholomorph äquivalent zur Kreisscheibe ist, wenn sie einfach zusammenhängend ist.

**Lemma 100** (Einfacher Zusammenhang ist biholomorphe Invariante). *Die Mengen  $U$  und  $V$  aus  $\mathbb{C}$  seien biholomorph äquivalent, d.h. es gibt eine biholomorphe Abbildung  $F : U \rightarrow V$ . Dann ist  $U$  genau dann einfach zusammenhängend, wenn  $V$  dies ist.*

*Beweis.* Sei  $U$  einfach zusammenhängend,  $\delta$  ein geschlossener Weg in  $V$  und  $\zeta_*$  ein gegebener Punkt in  $\mathbb{C} \setminus V$ . Dann entspricht  $\delta$  genau einem Weg  $\gamma = F^{-1} \circ \delta$  und mit den Substitutionen

$$\zeta = \delta(t) = F(\gamma(t)) = F(z)$$

erhalten wir

$$\text{Ind}_\delta(\zeta_*) = \int_\delta \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_*} = \int_a^b \frac{\dot{\delta}(t) dt}{\delta(t) - \zeta_*} = \int_a^b \frac{F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt}{F(\gamma(t)) - \zeta_*} = \int_\gamma \frac{F'(z) dz}{F(z) - \zeta_*}.$$

Der Integrand im Wegintegral auf der rechten Seite ist nach Konstruktion holomorph in  $U$  (es gilt  $F(z) \neq \zeta_*$  für alle  $z \in U$ ) und Theorem 58 liefert  $\text{Ind}_\delta(\zeta_*) = 0$ , eben weil  $U$  einfach zusammenhängend ist. Damit haben wir gezeigt, dass jeder geschlossene Weg  $\delta$  nullhomolog bzgl.  $V$  ist, d.h.  $V$  ist in der Tat einfach zusammenhängend. Der Beweis der Rückrichtung ist vollkommen analog.  $\square$

Wir werden nun vier Hilfsresultate ableiten, die im Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes eine wichtige Rolle spielen. Das erste stellt dabei sicher, dass wir später nur noch einfach zusammenhängende Teilmengen der Kreisscheibe betrachten müssen.

**Satz 101** (Satz von Carathéodory<sup>16</sup> und Koebe<sup>17</sup>). *Sei  $U$  eine offene, nichtleere und einfach zusammenhängende<sup>18</sup> Menge in  $\mathbb{C}$ , die nicht den Punkt 0 enthält. Dann existiert eine holomorphe und injektive Funktion  $F$  auf  $U$ , die Werte in  $D_1(0)$  annimmt und einen gegebenen Punkt  $\zeta \in U$  auf 0 abbildet.*

*Beweis.* Vorüberlegung: Nach Folgerung 60 existiert auf  $U$  ein Zweig des Logarithmus, d.h. eine holomorphe Abbildung  $L : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp(L(z)) = z$  für alle  $z \in U$ . Damit ist  $R := \frac{1}{2}L$  ein Zweig des Wurzelfunktion<sup>19</sup>, denn es gilt

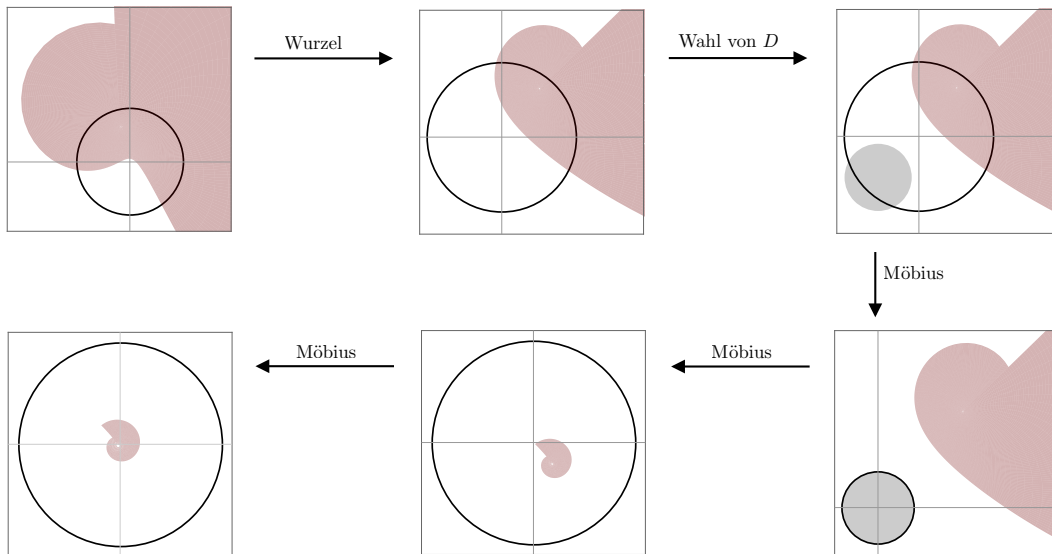
$$R(z)^2 = \exp(L(z)) = z \quad \text{für alle } z \in U.$$

<sup>16</sup>Constantin Carathéodory (1873–1950), griechisch-deutscher Mathematiker.

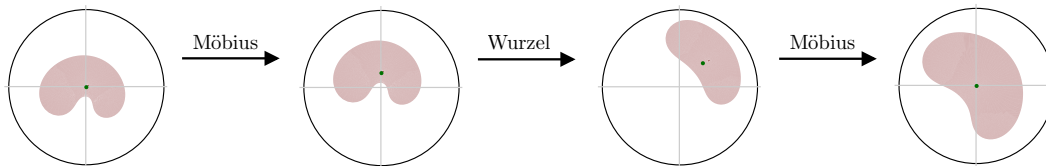
<sup>17</sup>Paul Koebe (1882–1945), deutscher Mathematiker

<sup>18</sup>Siehe Definition 54 und Satz 63 für die zwei Arten, einfachen Zusammenhang zu beschreiben.

<sup>19</sup>Wir könnten alternativ auch  $R := -\frac{1}{2}L$  definieren.



**Abbildung 4.6:** Darstellung der einzelnen Transformationschritte im Beweis von Satz 101 für eine unbeschränkte Menge  $U$  (rot dargestellt). Die schwarze Kreislinie repräsentiert den Einheitskreis und illustriert die Größe und Lage des jeweils dargestellten Bereichs. Der erste Transformationsschritt mit dem Ast der Wurzelfunktion könnte für die konkrete Menge  $U$  weggelassen werden, ist aber zum Beispiel sehr wichtig, falls  $U$  eine geschlitzte Ebene ist. Eine beschränkte Menge  $U$  kann sogar allein durch Verschieben und Skalieren holomorph und injektiv auf eine Teilmenge der Einheitskreisscheibe, die die 0 enthält, abgebildet werden.



**Abbildung 4.7:** Konstruktion der expandierenden Abbildung im Beweis von Satz 102, wobei die Größenzunahme der roten Menge — hier leicht übertrieben dargestellt — punktwise im Sinne von (4.6) zu verstehen ist.

Insbesondere ergibt sich die Implikation

$$R(z_1) = \pm R(z_2) \implies z_1 = z_2, \tag{4.5}$$

d.h. die holomorphe Funktion  $R$  ist injektiv auf  $U$  und nimmt dort auch keine zwei Werte mit unterschiedlichem Vorzeichen an.

*Konstruktion von  $F$ :* Die Menge  $R(U)$  ist nach Satz 45 offen und enthält damit mindestens eine offene Kreisscheibe  $K$  mit  $\overline{K} \subset R(U)$ , die 0 nicht enthält<sup>20</sup>, und wir setzen  $D := -K$ . Mit der Implikation (4.5) folgt, dass die Kreisscheibe  $\overline{D}$  vollständig in  $\mathbb{C} \setminus R(U)$  enthalten ist und wir können nun eine Superposition  $T$  aus einer Verschiebung und einer Streckung wählen, so dass  $T(D) = D_1(0)$ . Ist  $N$  schließlich die Normalinversion, d.h..  $N(z) = 1/z$ , so bildet  $G := N \circ T \circ R$  die Menge  $U$  holomorph und injektiv (aber nicht surjektiv) in  $D_1(0)$  ab. Für gegebenes  $\zeta \in U$  sei schließlich

$$H(z) := \frac{z - G(\zeta)}{1 - \overline{G(\zeta)}z}$$

<sup>20</sup>Zunächst existiert eine offene Kreisscheibe  $D_r(\zeta) \subset R(U)$ , aber anschließend können wir  $K := D_{r/2}(\zeta)$  wählen.

der Automorphismus von  $D_1(0)$ , der  $G(\zeta)$  auf 0 abbildet, siehe Satz 98. Dann besitzt die Abbildung  $F := H \circ G$  alle gewünschten Eigenschaften; siehe auch Abbildung 4.6.  $\square$

Die Idee, einen Ast der Wurzelfunktion zu benutzen ist sehr mächtig und übrigens auch gerade das Teilargument, dass nur auf einfach zusammenhängenden Mengen richtig ist (im Allgemeinen gibt es eben auf einer Menge  $U$  keine holomorphe Wurzelfunktion bzw. keinen holomorphen Logarithmus). Mit derselben Idee können wir auch das zweite Hilfsresultat ableiten, dass als Gegenstück zum Lemma von Schwarz verstanden werden kann und garantiert, dass echte Teilmengen von  $D_1(0)$  biholomorph vergrößert werden können.

**Satz 102** (Existenz einer expansiven Abbildung). *Sei  $V$  eine offene und einfach-zusammenhängende Teilmenge von  $D_1(0)$ , die zwar 0, aber mindestens einen Punkt  $\zeta \in D_1(0)$  nicht enthält. Dann existiert eine holomorphe und injektive Abbildung  $F : V \rightarrow D_1(0)$ , so dass*

$$F(0) = 0, \quad |F'(0)| > 1 \quad \text{und} \quad |F(z)| > |z| \quad (4.6)$$

für alle  $z \in V \setminus \{0\}$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es ein  $\zeta \in D_1(0) \setminus V$  und die Menge

$$U := G(V) \quad \text{mit} \quad G(z) := \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z}$$

ist Teilmenge von  $D_1(0) \setminus \{0\}$ , da  $G$  nach Satz 98 die Kreisscheibe  $D_1(0)$  biholomorph in sich abbildet. Außerdem ist  $U$  nach Satz 45 und auch offen und zusammenhängend und mit Lemma 100 sogar einfach zusammenhängend. Damit existiert — analog zum ersten Schritt im Beweis von Satz 101 — ein Ast  $R : U \rightarrow \mathbb{C}$  der Wurzelfunktion und wir definieren

$$F := H \circ R \circ G \quad \text{mit} \quad H(z) = \frac{z - R(-\zeta)}{1 - \overline{R(-\zeta)}z}$$

als Abbildung von  $V$  nach  $D_1(0)$ ; siehe Abbildung 4.7 für ein Beispiel. Da die Möbiustransformationen  $G$  und  $H$  nach Satz 98 die Kreisscheibe  $D_1(0)$  biholomorph auf sich abbilden, bildet  $F$  die Menge  $V$  holomorph und injektiv (aber nicht surjektiv) nach  $D_1(0)$  ab, wobei

$$F(0) = H(R(G(0))) = H(R(-\zeta)) = 0$$

nach Konstruktion sichergestellt ist. Außerdem gilt

$$P(F(z)) = z \quad \text{mit} \quad P(z) := G^{-1}\left((H^{-1}(z))^2\right) \quad \text{für alle } z \in V \quad (4.7)$$

und damit

$$P'(0)F'(0) = 1$$

nach Differentiation von (4.7)<sub>1</sub> bzgl.  $z$  und Auswertung in  $z = 0$ . Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass  $P$  zu einem sogar auf ganz  $D_1(0)$  definiert ist und nur Werte in  $D_1(0)$  annimmt, und zum anderen aber wegen der involvierten zweiten Potenz nicht injektiv und damit insbesondere keine Drehung ist. Insbesondere kann das Schwarzsche Lemma 97 auf  $P$  (aber nicht auf  $F$ ) angewendet werden und liefert

$$|P'(0)| < 1 \quad \text{sowie} \quad |P(z)| < |z| \quad \text{für alle } z \in D_1(0) \setminus \{0\}.$$

In Kombination mit (4.7) folgt nun die Behauptung.  $\square$

Das dritte Hilfsresultat ist rein analytischer Natur und etabliert eine Kompaktheitskriterium für Mengen holomorpher Funktionen.

**Satz 103** (Satz von Montel<sup>21</sup>). *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$ , so dass*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in K} |f_n(z)| < \infty$$

*für jede kompakte Menge  $K \subset U$  gilt. Dann gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $n_j \rightarrow \infty$  sowie eine holomorphe Funktion  $f_\infty : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Folge  $(f_{n_j}^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}$  für  $j \rightarrow \infty$  lokal gleichmäßig gegen  $f_\infty^{(k)}$  konvergiert.*

*Beweis.* Sei  $K$  eine beliebige kompakte Menge mit  $K \subset U$ . Dann existiert ein  $r > 0$ , so dass  $r$ -Umgebung von  $K$ , also die Menge

$$K_r := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \text{dist}(\zeta, K) = \min_{z \in K} |z - \zeta| \leq r \right\}$$

auch noch zu  $U$  gehört. Nach der Cauchyschen Ungleichung aus Satz 35 gilt nun

$$|f'_n(z)| \leq \frac{\max_{\zeta \in \partial D_r(z)} |f_n(\zeta)|}{r} \quad \text{für alle } z \in K \text{ und alle } n \in \mathbb{N},$$

und in Kombination mit der Voraussetzung — ausgewertet bzgl. der Menge  $K_r$  — erhalten wir

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in K} |f'_n(z)| \leq r^{-1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\zeta \in K_r} |f_n(\zeta)| < \infty.$$

Insbesondere ist nicht nur die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sondern auch die Folge der entsprechenden Ableitungen  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $K$  uniform beschränkt und dies impliziert die gleichgradige Stetigkeit von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $K$ . Nach dem Satz von Arzelá-Ascoli<sup>22</sup> und weil  $K$  beliebig war existiert nun eine Folge  $(n_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  sowie eine stetige Funktion  $f_\infty : U \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen  $f_\infty$  konvergiert. Der Weierstraß'sche Konvergenzsatz 32 garantiert nun sowohl die Holomorphie von  $f_\infty$  als auch die Konvergenz aller Ableitungen.  $\square$

Unser viertes Hilfsresultat garantiert unter anderem, dass nichttriviale Limits injektiver holomorpher Funktionen selbst schon injektiv sein müssen.

**Satz 104** (Satz von Hurwitz<sup>23</sup>). *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen auf  $U$ , die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe und nicht-konstante Funktion  $f_\infty$  auf  $U$  konvergieren. Dann existiert für jedes  $\zeta \in U$  eine Folge  $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass*

$$\zeta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta \quad \text{und} \quad f(\zeta_n) = f(\zeta) \quad \text{für fast alle } n.$$

*Insbesondere ist  $f_\infty$  injektiv, sofern fast alle  $f_n$  injektiv sind.*

<sup>21</sup>Paul Antoine Aristide Montel (1876–1975), französischer Mathematiker.

<sup>22</sup>Dieser Satz formuliert ganz allgemein Kompaktheitskriterien für stetige Funktionen auf lokale kompakten Räumen und wird üblicherweise in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder Topologie bewiesen.

<sup>23</sup>Adolf Hurwitz (1859–1919), deutscher Mathematiker.

*Beweis.* Sei  $\zeta \in U$  fixiert und gelte o.B.d.A.  $f_\infty(\zeta) = 0$ . Nach dem Identitätssatz — siehe Folgerung 43 — existiert ein Radius  $r > 0$  mit  $\overline{D}_r(\zeta) \subset U$ , so dass  $\zeta$  die einzige Nullstelle von  $f_\infty$  in  $\overline{D}_r(\zeta)$  ist. Insbesondere gilt

$$0 = |f_\infty(\zeta)| < \min_{z \in \overline{D}_r(\zeta)} |f_\infty(z)|$$

und die lokale gleichmäßige Konvergenz impliziert, dass

$$|f_n(\zeta)| < \min_{z \in \overline{D}_r(\zeta)} |f_n(z)|$$

für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Für jedes dieser  $n$  existiert nach Lemma 39 eine Nullstelle  $\zeta_n \in D_r(\zeta)$  (für die anderen, höchstens endlich vielen,  $n$  setzen wir zum Beispiel  $\zeta_n := \zeta$ ). Dann gilt schon  $\zeta_n \rightarrow \zeta$  für  $n \rightarrow \infty$ , denn andernfalls gäbe es mindestens einen Häufungspunkt  $\zeta_\infty \in \overline{D}_r(\zeta)$  mit  $\zeta_\infty \neq \zeta$ , und für diesen würde wegen  $f_n(\zeta_n) = 0$  auch

$$\begin{aligned} |f_\infty(\zeta_\infty)| &\leq |f_\infty(\zeta_\infty) - f_\infty(\zeta_n)| + |f_\infty(\zeta_n) - f_n(\zeta_n)| \\ &\leq |f_\infty(\zeta_\infty) - f_\infty(\zeta_n)| + \max_{z \in \overline{D}_r(\zeta)} |f_n(z) - f_\infty(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Wahl von  $r$  gelten. Damit ist die erste Behauptung bewiesen und die zweite folgt unmittelbar mit einem einfachen Widerspruchsargument.  $\square$

Wir haben nun die wesentlichen Hilfsmittel an der Hand, um den Riemannschen Abbildungssatz für Teilmengen aus  $\mathbb{C}$  zu beweisen.

**Theorem 105** (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine echte und einfach zusammenhängende Teilmenge<sup>24</sup> von  $\mathbb{C}$  (und damit auch offen und zusammenhängend). Dann ist  $U$  biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe, d.h. es gibt eine Abbildung  $F : U \rightarrow D_1(0)$ , die biholomorph im Sinne von Definition 89 ist. Ist darüber hinaus  $\zeta$  ein gegebener Punkt in  $U$ , so ist  $F$  bereits eindeutig durch die Bedingungen  $F(\zeta) = 0$  und  $F'(\zeta) \in \mathbb{R}_+$  festgelegt.*

*Beweis. Eindeutigkeit:* Sind  $F$  und  $\tilde{F}$  zwei biholomorphe Abbildungen mit  $F(\zeta) = \tilde{F}(\zeta) = 0$  sowie  $F'(\zeta) > 0$  und  $\tilde{F}'(\zeta) > 0$ , so ist  $G := \tilde{F} \circ F^{-1}$  eine Automorphismus von  $D_1(0)$  mit

$$G(0) = \tilde{F}(F^{-1}(0)) = \tilde{F}(\zeta) = 0$$

und

$$G'(0) = \tilde{F}'(F^{-1}(0)) \cdot (F^{-1})'(0) = \tilde{F}'(\zeta) \cdot \frac{1}{F'(\zeta)} \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Satz 98 gibt es aber nur ein  $G \in \text{Aut}(D_1(0))$  mit diesen Eigenschaften, nämlich die Identität und damit gilt schon  $F = \tilde{F}$ , weil ja  $F$  und  $\tilde{F}$  bijektiv sind.

Geometrische Vorüberlegung zur Existenz: Es reicht, die Behauptung für

$$0 \in U \subsetneq D_1(0) \tag{4.8}$$

zu beweisen, denn für  $U = D_1(0)$  ist nichts zu zeigen und allen anderen Fälle können wie folgt auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden:

<sup>24</sup>Insbesondere ist  $U$  als einfach zusammenhängende Menge per Definition offen und zusammenhängend



- (a) Für  $0 \notin U$  und  $U \subsetneq D_1(0)$  können wir  $U$  mit Hilfe einer Möbius-Transformation  $T \in \text{Aut}(D_1(0))$  aus Satz 98 biholomorph auf eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften abbilden, wobei der Parameter  $\zeta$  in (4.4) beliebig aus  $U$  gewählt werden kann.
- (b) Für  $0 \notin U$  und  $U \not\subsetneq D_1(0)$  können wir die gewünschte Situation durch Anwendung einer Abbildung wie in Satz 101 erreichen.
- (c) Für  $0 \in U$  und  $U \not\subsetneq D_1(0)$  gibt es mindestens einen Punkt  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus U$  und nach einer Verschiebung um  $-\zeta$  können wir wie im Fall (b) argumentieren.

Analytische Konstruktion der Abbildung: Für  $U$  wie in (4.8) betrachten wir

$$\Phi := \left\{ \text{holomorphe und injektive Abbildung } F : U \rightarrow D_1(0) \text{ mit } F(0) = 0 \right\}$$

und setzen

$$\mu := \sup_{F \in \Phi} |F'(0)| \in [1, \infty], \quad (4.9)$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\Phi$  mindestens die Identität enthält, so dass  $\mu$  wirklich wohldefiniert ist und nicht kleiner als 1 sein kann. Wir wählen nun eine Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Phi$ , so dass

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} |F'_n(0)|,$$

wegen

$$F_n(z) \in D_1(0) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } z \in U \quad (4.10)$$

gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in U} |F_n(z)| \leq 1.$$

Nach dem Satz von Montel existiert daher eine holomorphe Funktion  $F_\infty : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$1 \leq |F'_\infty(0)| = \mu < \infty, \quad F_\infty(0) = 0, \quad \sup_{z \in U} |F_\infty(z)| \leq 1, \quad (4.11)$$

und der Satz von Hurwitz garantiert zum einen, dass  $F_\infty$  injektiv ist, und zum anderen, dass  $|F_\infty(z)| < 1$  für alle  $z \in U$  gilt, da andernfalls auch  $|F_n(z)| = 1$  für mindestens ein  $z \in U$  und  $n \in \mathbb{N}$  im Widerspruch zu (4.10) gelten würde. Damit ist gezeigt, dass  $F_\infty$  auch zur Menge  $\Phi$  gehört.

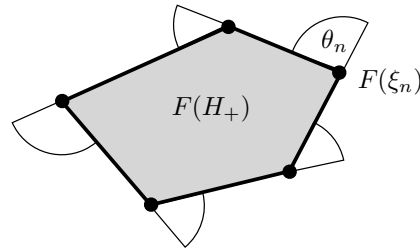
*Nachweis der Surjektivität:* Das Bild von  $U$  unter  $F_\infty$  muss schon ganz  $D_1(0)$  sein, denn andernfalls gäbe es nach Satz 102 eine injektive und holomorphe Abbildung  $H$  von  $F(U)$  nach  $D_1(0)$  mit  $|H'(0)| > 1$ , und dies würde via  $H \circ F_\infty \in \Phi$  und

$$|(H \circ F_\infty)'(0)| = |H'(F_\infty(0))| |F'_\infty(0)| = |H'(0)| \mu > \mu$$

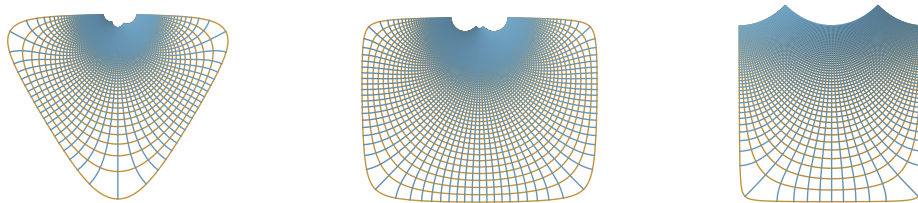
einen Widerspruch zu (4.9) und (4.11)<sub>1</sub>, d.h. zur Wahl von  $\mu$  und zur Konstruktion von  $F_\infty$  liefern. Damit haben wir gezeigt, dass  $F_\infty$  die Menge  $U$  biholomorph auf  $D_1(0)$  abbildet.  $\square$

Der Beweis von Theorem 105 ist nicht konstruktiv und so stellt sich die Frage, ob bzw. wie für eine gegebene Menge  $U$  eine biholomorphe Abbildung zwischen  $D_1(0)$  und  $U$  konstruiert werden kann. Wir können hier diese Frage nicht erschöpfend untersuchen, wollen aber zwei klassische und wichtige Ansätze diskutieren.





**Abbildung 4.8:** Mit den Schwarz-Christoffel-Transformationen (4.12) kann die obere Halbebene biholomorph auf das Innere eines Polygons abgebildet werden. Die reelle Achse wird dabei in sehr singulärer Weise auf den Rand des Polygons abgebildet und die auftretenden Wegintegrale können im Allgemeinen nur approximativ berechnet werden, siehe auch Abbildung 4.9.



**Abbildung 4.9:** Numerische Approximationen von Schwarz-Christoffel-Transformationen. Das dritte Beispiel entspricht dem Grenzfall (4.13), d.h. einem entarteten Dreieck mit Eckpunkt  $\infty$  und zwei rechten Winkeln.

**Polygonale Gebiete** Für  $N \in \mathbb{N}$  seien  $\xi_1, \dots, \xi_N$  gegebene und paarweise verschiedene Punkte auf der reellen Achse und  $\theta_1, \dots, \theta_N$  reelle Zahlen mit  $\theta_1 + \dots + \theta_N = 2\pi$ . Dann wird durch

$$F(\zeta) = \eta_1 + \eta_2 \int_{\gamma_\zeta} \frac{dz}{(z - \xi_1)^{\theta_1/\pi} \cdot \dots \cdot (z - \xi_N)^{\theta_N/\pi}} \quad (4.12)$$

eine Funktion  $F$  definiert, die obere Halbebene

$$H_+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

biholomorph auf das Innere eines Polygons transformiert, wobei jedes  $\xi_n$  auf einen Eckpunkt mit Winkelsprung  $\theta_n$  abgebildet wird, siehe die Abbildungen 4.8 und 4.9. Hierbei bezeichnet  $\gamma_\zeta$  einen beliebigen Weg in  $H_+$ , der einen festgehaltenen Punkt  $\zeta_* \in H_+$  mit  $\zeta$  verbindet,  $\eta_1, \eta_2$  sind zwei komplexe Konstanten, und alle Potenzen sind via  $z^\theta = \exp(\theta L(z))$  mit Hilfe eines einmal gewählten Astes  $L : H_+ \rightarrow \mathbb{C}$  des komplexen Logarithmus zu berechnen. Abbildungen der Bauart (4.12) werden Schwarz-Christoffel<sup>25</sup>-Transformationen genannt. Ein einfaches, aber nur als singulärer Grenzwert zu verstehendes Beispiel ergibt sich formal mit

$$N = 3, \quad \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}\pi, \quad \theta_3 = \pi, \quad \xi_1 = -1, \quad \xi_2 = +1, \quad \xi_3 = \infty,$$

denn

$$F(z) = \mathbf{i} \int_{\gamma_\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - 1)^{1/2} \cdot (\zeta + 1)^{1/2}} = \mathbf{i} \operatorname{arcosh}(z) \quad (4.13)$$

bildet  $H_+$  in einen halbunendlichen Streifen ab.

<sup>25</sup>Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), deutscher Mathematiker.

**Glatt berandete Gebiete** Ist  $U$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes und glatt berandetes Gebiet in  $\mathbb{C}$ , so kann eine biholomorphe Abbildung  $F$  von  $U$  nach  $D_1(0)$  wie folgt durch die Lösung einer partiellen Differentialgleichung bestimmt werden: Wir nehmen o.B.d.A.

$$0 \in U, \quad F(0) = 0, \quad F'(0) \in \mathbb{R}_+$$

an und beginnen mit dem Ansatz

$$F(z) = z \exp(G(z)).$$

Mit den Identifikationen

$$z = x + iy, \quad G(z) = A(x, y) + iB(x, y), \quad \mathbb{C} \supset U \simeq V \subset \mathbb{R}^2$$

sind  $A$  und  $B$  harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta A(x, y) = \Delta B(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in V$$

für den kartesischen Laplace-Operator  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ , wobei  $U$  und  $V$  dasselbe geometrische Objekt — nur einmal als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und einmal als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  — beschreiben. Die Randbedingung

$$|F(z)| = 1 \quad \text{für } z \in \partial U$$

beschreibt, dass  $F$  den Rand von  $U$  auf den Rand von  $D_1(0)$  abbilden soll, und kann auf Grund unseres Ansatzes als

$$A(x, y) = \log \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \text{für } (x, y) \in \partial V$$

geschrieben werden. Insbesondere ist die Funktion  $A : V \rightarrow \mathbb{R}$  als Lösung eines inhomogenen Dirichlet<sup>26</sup>-Problems nicht nur eindeutig bestimmt, sondern kann (zumindest approximativ) auch konstruiert werden. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$(\partial_x B(x, y), \partial_y B(x, y)) = (-\partial_y A(x, y), \partial_x A(x, y))$$

kann nun zunächst  $G'$  punktweise aus

$$G'(z) = \begin{pmatrix} +\partial_x A(x, y) & +\partial_y A(x, y) \\ -\partial_y A(x, y) & +\partial_x A(x, y) \end{pmatrix}$$

berechnet werden und anschließend – siehe Satz 52 sowie Abbildung 2.5 – ergibt sich  $G$  durch komplexe Wegintegration, wobei wir auch  $\text{Im}(G(0)) = 0$  vorschreiben dürfen (der Realteil  $\text{Re}(G(0)) = A(0)$  ist schon festgelegt). Dies liefert schließlich eine holomorphe Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ , und die Randbedingung sowie das Maximum-Prinzip aus Folgerung 47 garantieren, dass  $F$  die Menge  $U$  in eine Teilmenge von  $D_1(0)$  abbildet. Außerdem folgt

$$F'(0) = \exp(G(0)) = \exp(A(0)) \in \mathbb{R}_+,$$

<sup>26</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), deutscher Mathematiker.

d.h. 0 ist eine einfache Nullstelle von  $F$ , und wegen unseres Ansatzes ist 0 auch die einzige Nullstelle von  $F$ .

Es bleibt zu zeigen, dass die so konstruierte Funktion  $F$  wirklich eine Bijektion zwischen  $U$  und  $D_1(0)$  vermittelt und damit genau die von Theorem 105 in eindeutiger, aber nicht konstruktiver Weise gelieferte Abbildung ist. Dazu wählen wir eine glatte Parametrisierung  $\gamma$  von  $\partial U$ , die den Rand von  $U$  genau einmal und entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft, sowie einen beliebigen Punkt  $\zeta_* \in D_1(0)$ . Mit  $\zeta = F(z)$  gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F'(z) dz}{F(z) - \zeta_*} = \frac{1}{2\pi i} \int_{F \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_*} = \text{Ind}_{F \circ \gamma}(\zeta_*),$$

und im Spezialfall  $\zeta_* = 0$  erhalten wir

$$\text{Ind}_{F \circ \gamma}(0) = 1$$

aus dem Residuensatz in Theorem 75, eben weil  $F(0) = 0 \neq F'(0)$  garantiert, dass 0 eine einfache Polstelle von  $z \mapsto F'(z)/F(z)$  ist, deren Residuum den Wert +1 annimmt, und weil es auch keine weiteren Singularitäten gibt, da 0 die einzige Nullstelle von  $F$  ist. Nun ist zum einen  $F \circ \gamma$  ein geschlossener Weg in  $\partial D_1(0)$  und zum anderen zeigt Theorem 18, dass die Windungszahl bzgl.  $F \circ \gamma$  konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\text{sp}(F \circ \gamma)$  ist. Es folgt, dass  $F \circ \gamma$  die Einheitskreislinie genau einmal und mit positiver Orientierung durchläuft, und dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F'(z) dz}{F(z) - \zeta_*} = 1$$

für alle  $\zeta_* \in D_1(0)$  gilt. Folgerung 84 impliziert daher, dass die Funktion  $z \mapsto F(z) - \zeta_*$  für jedes  $\zeta_*$  genau eine und einfache Nullstelle in  $U$  besitzt. Insbesondere besitzt die Gleichung  $F(z) = \zeta_*$  für jedes  $\zeta_* \in D_1(0)$  immer eine eindeutige Lösung  $z \in U$  und wir haben damit gezeigt, dass  $F$  die Menge  $U$  wirklich injektiv und surjektiv auf  $D_1(0)$  abbildet.

Die soeben beschriebene Konstruktion von  $F$  folgt übrigens dem von Riemann ursprünglich verwendeten Argument. Wir wollen auch betonen, dass der in Theorem 105 gegebene Beweis keinerlei Randargumente benutzt und damit auch dann gilt, wenn  $\partial U$  nicht glatt, sondern zum Beispiel fraktal ist.

**Der Abbildungssatz auf der Riemannschen Sphäre** Wir wollen schließlich eine im wesentlichen zu Theorem 105 äquivalente Formulierung des Riemannschen Abbildungssatzes auf  $\hat{\mathbb{C}}$  angeben.

**Definition 106** (Verallgemeinerung von Definition 57). *Eine offene und zusammenhängende Menge  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  heißt einfach zusammenhängend, wenn entweder  $U = \hat{\mathbb{C}}$  gilt oder  $U$  biholomorph äquivalent zu einer einfach zusammenhängenden Menge  $V \subset \mathbb{C}$  ist.<sup>27</sup>*

**Folgerung 107** (Variante des Abbildungssatzes). *Jede einfach zusammenhängende Menge  $U \in \hat{\mathbb{C}}$  ist biholomorph äquivalent zu entweder*

<sup>27</sup>Gilt  $\infty \notin U$ , so sind wegen Lemma 100 die Definitionen 57 und 106 äquivalent. Im Fall von  $\infty \in U$  mit  $U \neq \hat{\mathbb{C}}$  kann leicht gezeigt werden, dass  $U$  genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn es eine Möbius-Transformation  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  gibt, so dass  $T(U)$  einfach zusammenhängend in  $\mathbb{C}$  ist.

- (a) der Sphäre  $\hat{\mathbb{C}}$ , oder
- (b) der Ebene  $\mathbb{C}$ , oder
- (c) der Kreisscheibe  $D_1(0)$  bzw. zur Halbebene  $H_+$ .

Dabei gilt (c) genau dann, wenn  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  mindestens zwei Elemente besitzt.

*Beweis.* Enthält  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  mindestens zwei verschiedene Punkte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  aus  $\hat{\mathbb{C}}$ , so gibt es nach Lemma 93 eine Möbuis-Transformation  $T$  mit  $T(\zeta_1) = 0$  und  $T(\zeta_2) = \infty$ . Das Bild  $T(U)$  ist nun wegen Theorem 105 biholomorph äquivalent zu  $D_1(0)$ , wobei letztere durch die Caley-Transformation (4.1) biholomorph auf die Halbebene  $H_+$  abgebildet wird, d.h. es gilt (c). Besteht  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  aus nur einem Punkt  $\zeta$ , wählen wir eine Möbius-Transformation  $T$  mit  $T(\zeta) = \infty$  und die Behauptung (b) folgt nach Satz 96 wegen  $T(U) = \mathbb{C}$ . Ist schließlich  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  die leere Menge, so gilt trivialerweise (a).  $\square$