



Prof. Dr. Michael Herrmann
Technische Universität Braunschweig
Mathematik – Institut iPDE
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

Skript der Vorlesung
Analysis 1
für die Studiengänge der Mathematik und der Physik
im Wintersemester 2021/22

Version vom 2. Oktober 2022

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Griechisches Alphabet

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>	<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
α	A	alpha	a	ν	N	ny	n
β	B	beta	b	ξ	Ξ	xi	x
γ	Γ	gamma	g	o	O	omikron	ö
δ	Δ	delta	d	π	Π	pi	p
ε, ϵ	E	epsilon	ë	ϱ, ρ	P	rho	r
ζ	Z	zeta	z	σ	Σ	sigma	s
η	H	eta	ē	τ	T	tau	t
θ, ϑ	Θ	theta	th	υ	Υ	upsilon	y
ι	I	iota	i	φ, ϕ	Φ	phi	ph, f
κ	K	kappa	k	χ	X	chi	ch
λ	Λ	lambda	l	ψ	Ψ	psi	ps
μ	M	my	m	ω	Ω	omega	ō

Literatur

Es gibt viele sehr gute Lehrbücher zur Analysis, zum Beispiel:

[For] OTTO FORSTER: *Analysis 1*
7. Auflage, Vieweg 2004

[Heu] HARRO HEUSER: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*
12. Auflage, Teubner 1990

[Hil] STEFAN HILDEBRANDT: *Analysis 1*
Springer 2002

[Koe] KONRAD KÖNIGSBERGER: *Analysis 1*
6. Auflage, Springer 2004

Anmerkungen

Bei der Ausarbeitung dieses Skriptes hat der Autor die gelisteten Werke regelmäßig konsultiert und dabei viele Beweisstrategien, Präsentationsideen und Beispiele übernommen. Er hat sich darüber hinaus von anderen Quellen sowie den Vorlesungsskripten von Helga Baum (Humboldt-Universität zu Berlin), Martin Brokate/Johannes Zimmer (Technische Universität München), Dirk Lorenz (Technische Universität Braunschweig) und Barbara Niethammer (Universität Bonn) inspirieren lassen. Viele Bilder, Beispiele und Erklärungen wurden auch aus eigenen Ausarbeitungen zu früheren Vorlesungen übernommen.

Der Autor dankt den Studierenden des Kurses, die durch ihre Fragen, Kommentare und Hinweise dieses Skript verbessert haben. Ein besonderer Dank geht an Katia Kleine und Dirk Janßen für das regelmäßige und sehr sorgfältige Korrekturlesen sowie an Harald Löwe für die vielen inhaltlichen Anregungen.

Inhaltsverzeichnis

1	Natürliche Zahlen	5
1.1	Vollständige Induktion und Schubfachprinzip	5
1.2	Grundlagen der Kombinatorik	8
1.3	Primzahlen*	18
2	Axiome der reellen Zahlen	21
2.1	Algebraische Körperstruktur	21
2.2	Ordnungsrelation und Anordnungsaxiome	26
2.3	Vollständigkeitsaxiom	31
3	Eigenschaften reeller Zahlen	37
3.1	Einige Grundbegriffe	37
3.2	Suprema und Infima	39
3.3	Einige Ungleichungen*	42
4	Komplexe Zahlen	45
5	Zahlenfolgen	53
5.1	Definition und Konvergenz	53
5.2	Mehr über Konvergenz	58
5.3	Teilfolgen und Häufungspunkte	69
5.4	Cauchy-Folgen und Vollständigkeit	76
6	Reihen	83
6.1	Definition und Beispiele	83
6.2	Exkurs über Dezimalzahlen*	89
6.3	Konvergenzkriterien	91
6.4	Absolute Konvergenz	94
7	Potenzreihen	103
7.1	Definition und Hauptsatz	103
7.2	Reihen \exp , \sin , \cos	109
7.3	Eigenschaften der komplexen Exponentialreihe	113
8	Stetigkeit	119
8.1	Definition und Beispiele	119
8.2	Stetigkeit und Konvergenz	122
8.3	weiterführende Betrachtungen*	126
8.4	Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen	131
8.5	Mehr über Konvergenz bei Funktionen	136
8.6	Monotonie und Umkehrfunktion	138

8.7	Exponential und Logarithmus im Reellen	141
8.8	Trigonometrische Funktionen im Reellen	145
8.9	Polardarstellung komplexer Zahlen	147
9	Differenzierbarkeit	153
9.1	Definition und Beispiele	153
9.2	Rechenregeln für Ableitungen	159
9.3	Mehr über Ableitungen	164
9.4	Mittelwertsatz und Folgerungen	170
9.5	Satz von Taylor	178
9.6	Landau-Symbole und Taylor-Approximation*	187
10	Integrierbarkeit	191
10.1	Definition und Eigenschaften des Integrals	191
10.2	Fundamentalsatz der Analysis	203
10.3	Integration durch Substitution	209
10.4	Integration durch Partialbruchzerlegung	216
10.5	Prinzip von Cavalieri für Rotationskörper	223
10.6	Uneigentliche Integrale	227
11	Funktionenfolgen	235
11.1	Beispiele und punktweise Konvergenz	235
11.2	gleichmäßige Konvergenz	239
11.3	Fourier-Reihen	245
Anhang		261

Kapitel 1

Natürliche Zahlen

Vorlesungswoche 01

Vorbemerkung In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Bemerkung Ob 0 eine natürliche Zahl ist oder nicht, ist eine Frage der Konvention bzw. des Kontextes und wird von verschiedenen Autoren unterschiedlich beantwortet. Bei uns ist 0 keine natürliche Zahl und wir schreiben

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

für die um 0 erweiterte Menge der natürlichen Zahlen. Die Zahl 0 gehört aber immer zu

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

der Menge der ganzen Zahlen.

1.1 Vollständige Induktion und Schubfachprinzip

Vorbemerkung Wir stellen zwei wichtige Beweisprinzipien vor, die jeweils einfach zu verstehen, aber gleichzeitig auch ausgesprochen mächtig sind.

Prinzip (vollständige Induktion) Eine Behauptung der Form

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_*$ gilt die Aussage $A(n)$.

kann durch folgende zwei Schritte bewiesen werden:

1. Induktionsanfang ($n = n_*$): Wir zeigen $A(n_*)$.
2. Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$): Wir beweisen die Implikation

$$A(n) \implies A(n + 1),$$

d.h. wir folgern aus der Gültigkeit von $A(n)$ (Induktionsvoraussetzung) die Gültigkeit von $A(n + 1)$ (Induktionsbehauptung).


$$\xrightarrow{\text{IA}} A(1) \xrightarrow{\text{IS}} A(2) \xrightarrow{\text{IS}} A(3) \xrightarrow{\text{IS}} A(4) \xrightarrow{\text{IS}} \dots$$

Abbildung Darstellung des Beweisprinzips der vollständigen Induktion mit $n_* = 1$.

Beispiel Wir wollen die Formel

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion mit $n_* = 1$ beweisen.¹

Induktionsanfang ($n = 1$): Einfache Rechnungen liefern $\sum_{j=1}^1 j^3 = 1^3 = 1$ (linke Seite der Gleichung) sowie $\frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2 = 1$ (rechte Seite der Gleichung) und damit die Gültigkeit der Formel für $n = 1$.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$):

Voraussetzung: $\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Behauptung: $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j^3 &= \left(\sum_{j=1}^n j^3 \right) + (n+1)^3 && \text{(Aufspalten der Summe)} \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) && \text{(Ausklammern)} \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) && \text{(Umformen)} \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 && \text{(binomische Formel)} \end{aligned}$$

□

Beispiel Wir wollen den mathematischen Satz

Die Zahl $2^{3n} - 1$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

durch vollständige Induktion mit $n_* = 1$ beweisen.

Induktionsanfang ($n = 1$): $2^3 - 1 = 7$ ist offensichtlich durch 7 teilbar.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$):

Zu zeigen: Wenn $2^{3n} - 1$ durch 7 teilbar ist, so ist auch $2^{3(n+1)} - 1$ durch 7 teilbar.

Beweis:

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} - 1 &= 8 \cdot 2^{3n} - 1 && \text{(Potenzgesetze)} \\ &= 8 \cdot (2^{3n} - 1 + 1) - 1 && \text{ („nahrhafte Null“)} \\ &= 8 \cdot (2^{3n} - 1) + 7 && \text{(Umformen)} \\ &= 8 \cdot (7 \cdot m) + 7 && \text{(nach Ind.-Voraussetzung für ein } m \in \mathbb{N}\text{)} \\ &= 7 \cdot (8 \cdot m + 1) && \text{(Umformen)} \end{aligned}$$

□

¹ \sum ist das mathematische Summenzeichen, d.h. es gilt

$$\sum_{j=1}^n j^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3.$$

Prinzip (Schubfachprinzip) Werden n Objekte auf k Boxen (oder Schubfächer) verteilt, so gilt:

1. Ist $n > k$, so gibt es mindestens eine Box mit zwei (oder mehr) Objekten.
2. Ist $n < k$, so bleibt mindestens eine Box leer.

Bemerkungen

1. Im Fall $n = k$ können wir im Allgemeinen nur sagen, dass es mindestens eine Box geben wird, die eine Kugel (oder mehr) enthält. Diese Aussage ist aber trivial, denn sie ist immer — d.h. für alle denkbaren Werte von $n, k \in \mathbb{N}$ — richtig.
2. Wir können den ersten Teil des Prinzips auch wie folgt verschärfen: In mindestens einer Box gibt es mindestens $\lceil n/k \rceil$ Objekte.²
Beispiel: Wenn 5 Objekte auf 2 Boxen verteilt werden, so enthält mindestens eine dieser Boxen 3 Objekte (oder mehr). Wenn wir 10 Objekte auf 3 Boxen verteilen, so wird es wenigstens eine Box geben, die mindestens 4 Objekte enthält.
3. Den zweiten Teil könnten wir auch genauer formulieren: Es bleiben mindestens $k - n$ Boxen leer.

Beispiele

1. In einer Gruppe von 13 Personen haben mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag. Bei 25 Personen sind es mindestens drei.
2. Wir beweisen die folgende Aussage:

Sind 12 paarweise verschiedene natürliche Zahlen zwischen 1 und 100 gegeben, so gibt es mindestens zwei unter ihnen mit der folgenden Eigenschaft: Ihre positive Differenz besteht aus zwei gleichen Ziffern.

Beweis: Wir führen zunächst geeignete Boxen ein. Bei der Division durch 11 können die Reste $0, 1, 2, \dots, 9, 10$ auftreten und diese Restklassen definieren 11 Boxen, in die wir nun jede der 12 gegebenen Zahlen nach ihrem Divisionsrest einsortieren. In mindestens einer Box liegen dann mindestens zwei Zahlen, sagen wir in der Box k liegen die Zahlen n_1 und n_2 , wobei wir mit n_1 die kleinere und mit n_2 die größere Zahl bezeichnen wollen. Dann ist die Zahl $n_2 - n_1$ größer als 0, aber nicht größer als $100 - 1 = 99$. Sie muss darüber hinaus durch 11 teilbar sein (da ja n_1 und n_2 denselben Rest bei Division durch 11 lassen, nämlich k). Insbesondere gilt

$$n_2 - n_1 \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

und es folgt die Behauptung. □

²Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer als oder gleich x ist, wohingegen $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner als oder gleich x ist. Oder anders gesagt: $\lceil x \rceil$ bzw. $\lfloor x \rfloor$ entsteht aus x durch Aufrunden bzw. Abrunden, wobei man bei $x < 0$ besonders aufpassen muss. So gilt zum Beispiel $\lceil 2 \rceil = \lfloor 2 \rfloor = 2$ und $\lceil \frac{5}{4} \rceil = 2$, $\lfloor \frac{5}{4} \rfloor = 1$, aber $\lceil -1.3 \rceil = -1$, $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$.

1.2 Grundlagen der Kombinatorik

Vorbemerkung Die Kombinatorik ist die Lehre vom Abzählen und spielt eine sehr wichtige Rolle in der Diskreten Mathematik sowie in der Stochastik. Wir diskutieren in diesem Abschnitt die typischen Grundprobleme und leiten für *Permutationen*, *Variationen* und *Kombinationen* (jeweils *mit* oder *ohne Wiederholung*) die zugrunde liegende Formel her.

Definition Die Zahl

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

wird Fakultät von n genannt.³

Bemerkungen

1. Es gilt $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ und $5! = 120$.
2. Eine andere Schreibweise⁴ ist $n! = \prod_{j=1}^n j$.
3. Man setzt $0! := 1$, da sich dies als ausgesprochen praktisch erweisen wird.
4. Wir werden später die Γ -Funktion kennen lernen, mit der man die Fakultät für sehr viele (aber nicht für alle) reelle oder gar komplexe Zahlen sinnvoll definieren kann.

Permutationen ohne Wiederholung Sollen n unterscheidbare Objekte in einer Reihe angeordnet werden, so gibt es genau

$n!$ Möglichkeiten.

Beweis Für die erste Position kommt jedes der n Objekte in Frage, für die zweite aber nur jedes der $n - 1$ verbliebenen Objekte. Für die dritte Position gibt es dann nur $n - 2$ Möglichkeiten und durch Fortsetzung dieses Arguments erhalten wir schließlich die gewünschte Formel. \square

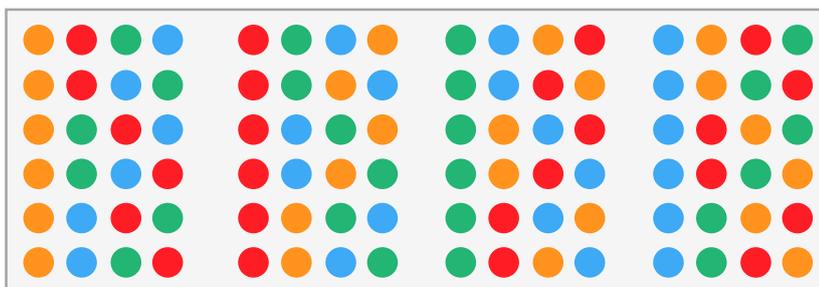


Abbildung Permutationen ohne Wiederholung: Es gibt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, vier verschiedene Kugeln in einer Reihe anzuordnen.

³In dieser Vorlesung benutzen wir das Zeichen „:=“ für eine *definierende* Gleichung, d.h. wenn rechts die Definition des Terms auf der linken Seite steht. Man könnte aber auch „=“ schreiben.

⁴ \prod ist das Produktzeichen und wird analog zum Summenzeichen \sum verwendet.

Permutationen mit Wiederholung Sind von den n Objekten genau k identisch, so gibt es genau

$$\frac{n!}{k!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}_{n-k \text{ Faktoren}} \quad \text{Möglichkeiten}$$

der Anordnung. Gibt es sogar m Gruppen aus k_1, \dots, k_m jeweils identischen Elementen, so existieren

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Beweis *Teil 1*: Wenn die k identischen Objekte unterscheidbar wären, so gäbe es insgesamt $n!$ Möglichkeiten der Anordnung. Von diesen können aber jeweils $k!$ viele nicht von einander unterschieden werden. Siehe dazu auch die Erklärungen im folgenden Bild. *Teil 2*: Übungsaufgabe. \square

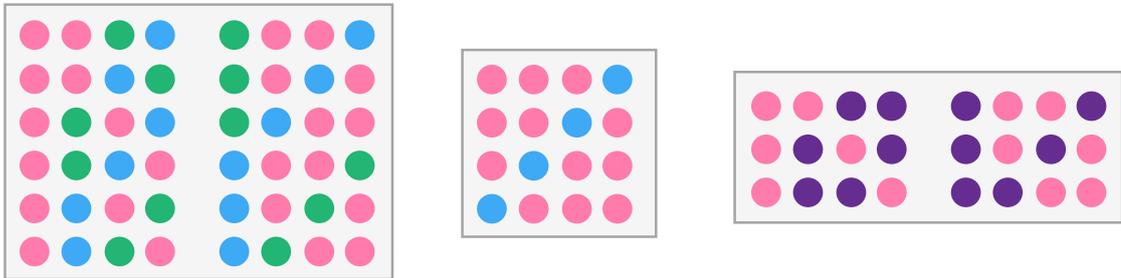


Abbildung Permutationen mit Wiederholung. *Links*: Färben wir in der vorherigen Abbildung die orange und die rote Kugel jeweils rosa, so wird jede Anordnung zweimal gezählt und es ergeben sich insgesamt $12=4!/2!$ verschiedene Möglichkeiten, zwei rosane, eine blaue und eine grüne Kugel anzuordnen. *Mitte*: Wird zusätzlich auch die grüne Kugel rosa gefärbt, so reduziert sich die Anzahl der Möglichkeiten auf $4=4!/3!$. Beachte, dass es dann $6=3!$ Möglichkeiten gibt, die 3 rosa Kugeln wieder den Farben Orange, Rot und Grün zuzuordnen. *Rechts*: Werden die orange und die rote sowie die grüne und die blaue Kugel miteinander identifiziert, so ergeben sich $6 = 4!/(2! \cdot 2!)$ Möglichkeiten, zwei Paare jeweils gleichfarbiger Kugeln anzuordnen.

Variation mit Wiederholung Wir wollen k nummerierte Plätze mit jeweils einem von n unterscheidbaren Objekten füllen, wobei jedes Objekt mehrmals platziert werden darf. Da es für jeden Platz genau n Möglichkeiten gibt, das zu platzierende Objekt zu wählen, existieren genau

$$n^k = \underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Anwendungen

1. Aus n Buchstaben können n^k verschiedene Worte der Länge k gebildet werden.

Beispiel: Es gibt $8 = 2^3$ Worte der Länge 3, die nur die Buchstaben A und B enthalten, nämlich

AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB.

Beispiel: Für ein Alphabet mit 3 Buchstaben existieren $9 = 3^2$ Worte der Länge 2, nämlich

AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.

2. Eine endliche Menge M bestehend aus n Elementen besitzt 2^n verschiedene Teilmengen, denn wir können jede Teilmenge dadurch beschreiben, dass wir für jedes Element von M angeben, ob es dazugehört oder nicht. Jede Teilmenge von M wird also durch genau n binäre Entscheidungen charakterisiert. Oder anders gesagt: Jede Teilmenge von M entspricht genau einem Wort der Länge n , das man aus den Buchstaben 0 (für Nein) und 1 (für Ja) bilden kann.

Beispiel: Die Menge $M = \{x_1, x_2, x_3\}$ besitzt die 8 Teilmengen

$$\{\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\},$$

die den dreiziffrigen Binärzahlen

$$000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111$$

entsprechen. Die erste Teilmenge in der Liste ist natürlich die leere Menge und wird oftmals als \emptyset geschrieben.

Ausblick*: Die Menge aller Teilmengen von \mathbb{N} entspricht in natürlicher Weise der Menge aller halb-unendlichen Zahlenfolgen, die man aus den Ziffern 0 und 1 bilden kann. Diese ist gleichmächtig zu \mathbb{R} , der Menge der reellen Zahlen und damit deutlich größer als \mathbb{N} selbst.⁵ Die Menge aller Teilmengen von \mathbb{R} kann mit der Menge aller Funktionen identifiziert werden, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Die Mächtigkeit dieser Menge ist wieder deutlich größer als die von \mathbb{R} .

Variation ohne Wiederholung Wir wollen wieder n unterscheidbare Objekte auf k nummerierte Plätze verteilen, aber diesmal darf jedes Objekt höchstens einmal gewählt werden. Unter dieser Nebenbedingung muss $k \leq n$ gelten und es existieren genau

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Anwendungen

1. Wir wollen zwei unserer vier Freunde A, B, C, D fragen, ob Sie uns beim Umzug helfen können. Dann sind

$$AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC$$

die $4!/2! = 4 \cdot 3 = 12$ möglichen Varianten unserer Telefonliste.

2. Bei der Lotterie 6 aus 49 gibt es

$$\frac{49!}{43!} = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$$

also ca. 10 Milliarden mögliche Ziehungen. Für die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit ist diese Zahl aber nicht relevant, da es am Ende egal ist, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen wurden.

⁵Das ist gerade die Quintessenz des *Zweiten Cantorschen Diagonalarguments*, siehe WIKIPEDIA.

Definition Für zwei natürliche Zahlen k und n mit $1 \leq k < n$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

als der Binomialkoeffizient von n und k bezeichnet.

Bemerkungen

1. Man spricht auch verkürzend von „ n über k “.
2. Es gilt offensichtlich

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

und man kann auch leicht

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j}$$

zeigen (bzw. in konkreten Beispielen sofort nachrechnen). So gilt etwa

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} &= \frac{1 \cdot \dots \cdot n}{(1) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1))} = \frac{n}{1}, \\ \binom{n}{2} &= \frac{1 \cdot \dots \cdot n}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2))} = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \\ \binom{n}{3} &= \frac{1 \cdot \dots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-3))} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \end{aligned}$$

wobei wir immer benutzt haben, dass sich viele Faktoren im Zähler und im Nenner gegenseitig wegekürzen und wir die Reihenfolge der verbleibenden Faktoren ändern dürfen. Oder anders gesagt: $\binom{n}{k}$ kann als Quotient von k absteigenden Faktoren im Zähler (beginnend mit n) und k aufsteigenden Faktoren im Nenner (beginnend mit 1) ausgedrückt werden.

3. Wir setzen

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{n} := 1$$

sowie $\binom{0}{0} := 1$, wobei dies wegen $0! = 1$ konsistent mit der obigen Definition ist.

4. Der Binomialkoeffizient ist immer eine natürliche Zahl, niemals eine gebrochene Zahl. Dies ergibt sich zum Beispiel aus der kombinatorischen Interpretation.

Kombinationen ohne Wiederholung Aus n unterscheidbaren Objekten wählen wir k Stück aus, wobei letztere paarweise verschieden sein sollen und die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt. Dann gibt es genau

$$\binom{n}{k} \text{ Möglichkeiten.}$$

Beweis Wir hatten schon gesehen, dass es $n!/(n-k)!$ viele Möglichkeiten gibt, mit n Objekten k nummerierte Plätze zu füllen. Da es $k!$ Möglichkeiten gibt, k Plätze zu nummerieren, entsprechen jeweils $k!$ verschiedene Platzierungen einer Auswahl. \square

Anwendungen

1. Aus einer Urne mit einer roten, einer grünen und einer blauen Kugel ziehen wir nacheinander zwei Kugeln, wobei wir diese jeweils *nicht* zurücklegen. Dann gibt es

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$$

mögliche Farbkombinationen der gezogenen Kugeln, nämlich rot-grün, rot-blau, und grün-blau. Den Fall mit Zurücklegen diskutieren wir weiter unten.

2. Eine Menge mit n Elementen besitzt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k -elementige Teilmengen.

Beispiel: Für $M = \{x_1, x_2, x_3\}$ ergibt sich

k	$\binom{n}{k}$	Teilmengen
0	$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1$	$\{\}$
1	$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$	$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}$
2	$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$	$\{x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\}$
3	$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

Bemerkung: Die Formel

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

folgt sofort aus der Teilmengeninterpretation von Kombinationen ohne Wiederholung und Variationen mit Wiederholung. Alternativ ergibt sie sich als Spezialfall der binomischen Formel für $(1+1)^n$ (siehe dazu weiter unten).

3. Bei 6 aus 49 gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10\,068\,347\,520}{720} = 13\,983\,816,$$

mögliche Gewinnkombinationen, wobei wir diese Zahl auch wie folgt interpretieren können: Die Anzahl der möglichen Ziehungen (Zähler) wird durch $6! = 720$ geteilt, wobei der Nenner gerade die Anzahl der denkbaren Reihenfolgen angibt, in denen die 6 Ergebniszahlen gezogen wurden. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für sechs Richtige beträgt also ungefähr 0.000007 Prozent.⁶

⁶Bei Dezimalzahlen verwenden wir in dieser Vorlesung *Punkt* statt *Komma*.

Kombinationen mit Wiederholung Wir wollen wieder aus n unterscheidbaren Objekten k Stück auswählen, wollen aber diesmal zulassen, dass einzelne Objekte mehrmals gewählt werden. In diesem Fall gibt es genau

$$\binom{n+k-1}{k} \text{ Möglichkeiten.}$$

Beweis Die Herleitung dieser alles andere als offensichtlichen Formel gelingt durch eine geschickte Umformulierung des Problems, die im folgenden Bild erklärt wird. \square

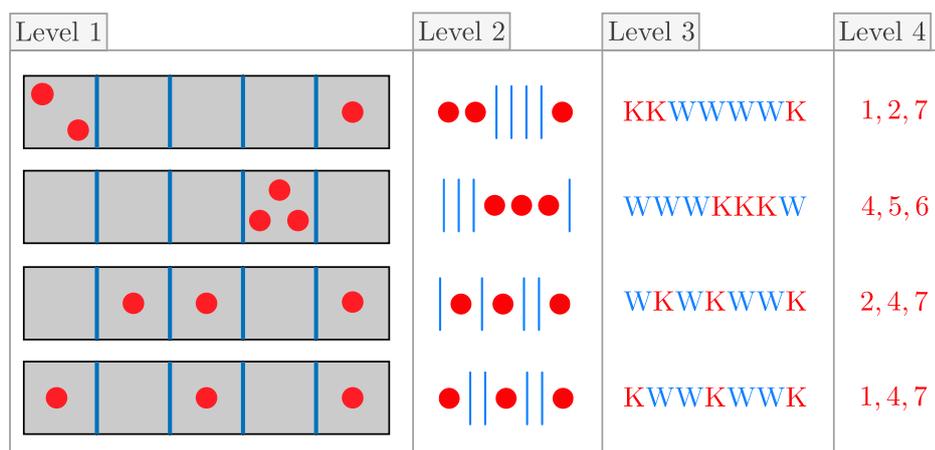


Abbildung Zur Herleitung der Formel für Kombinationen mit Wiederholung durch fortschreitende Abstraktion, dargestellt für $n = 5$ und $k = 3$. *Level 1*: Jedes der gegebenen n Objekte repräsentieren wir durch eine Box, wobei wir die n Boxen waagrecht nebeneinander stellen. Anstatt nun k mal ein Objekt mit Wiederholung auszuwählen, können wir alternativ auch k Kugeln auf die n Boxen verteilen, wobei m Kugeln in der j -ten Box meint, dass das j -te Objekt genau m mal ausgewählt wird. Dargestellt sind hier nur 4 der insgesamt vielen Möglichkeiten. *Level 2*: Anstatt die k Kugeln auf die n Boxen zu verteilen, können wir mit einem Punkt-Strich-Code auch angeben, wie die Kugel durch die $n - 1$ Trennwände zwischen den Boxen separiert werden. *Level 3*: Jeder Punkt-Strich-Code entspricht in eindeutiger Weise einem Wort der Länge $(n - 1) + k$, das nur aus den Buchstaben K (für Kugel) und W (für Wand) besteht, wobei W genau $n - 1$ mal und K genau k mal vorkommt. *Level 4*: Jedes Wort aus Level 3 ist eindeutig durch die Angabe der k Positionen des Buchstabens K festgelegt, da ja auf den anderen Positionen ein W stehen muss. *Konklusion*: Die gesuchte Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung ist gerade die Anzahl der Möglichkeiten, aus den Zahlen $1, 2, \dots, n - 1 + k$ genau k verschiedene (d.h. ohne Wiederholung) auszuwählen. Diese Anzahl ist aber $\binom{n+k-1}{k}$ bzw. $\binom{7}{3} = 35$ im konkreten Fall. Beachte, dass die Farbkodierung (rot und blau) redundant ist und auch wegfallen könnte.

Anwendungen

- Wir ziehen wieder zweimal eine Kugel aus der oben beschriebenen Urne, wollen aber diesmal nach jeder Ziehung die Kugel wieder zurücklegen. Dann gibt es

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

mögliche Farbkombinationen, nämlich neben rot-grün, rot-blau, und grün-blau nun auch noch rot-rot, grün-grün und blau-blau.

- Werden aus einer handelsüblichen Tüte Gummibärchen mit 6 verschiedenen Sorten insgesamt 6 Stück entnommen, so ergeben sich

$$\binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{6} = 462$$

denkbare Ergebnisse⁷, sofern die Reihenfolge der Auswahl nicht berücksichtigt wird (Kombinationen mit Wiederholung). Mit Berücksichtigung der Reihenfolge (Variation mit Wiederholung) gibt es hingegen $6^6 = 46\,656$ Möglichkeiten.

Bemerkung: Wir ziehen eigentlich die Sorten und nicht die Bärchen. Insbesondere ist die genaue Anzahl der letzteren gar nicht wichtig.

3. Werden drei gleiche Würfel gleichzeitig geworfen, so gibt es

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

mögliche Augenkombinationen.

Binomischer Lehrsatz Die binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

gilt für alle reellen Zahlen x, y und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $x^0 = 1$ und $y^0 = 1$ vereinbart sei. Die drei wichtigen Spezialfälle

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

und

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

entsprechen $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$.

Beweis Teil 1: Wir zeigen zunächst das Hilfsresultat

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

indem wir mithilfe von $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ und $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1)!$ die rechte Seite wie folgt schrittweise in die linke umformen:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{n+1}{(k+1) \cdot (n-k)} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

⁷Diese Möglichkeiten sind natürlich nicht alle gleich wahrscheinlich, denn wir werden relativ selten sechsmal dieselbe Sorte ziehen.

Dabei haben wir am Ende wieder einfache Rechenregeln für Fakultäten benutzt.

Teil 2: Wir beweisen die binomische Formel durch vollständige Induktion mit $n_* = 1$, wobei der Induktionsanfang wegen $(x + y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$ fast trivial ist. Im Induktionsschritt benutzen wir die binomische Formel mit n , um die entsprechende Aussage mit $n + 1$ statt n abzuleiten. Dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y) \cdot (x + y)^n = (x + y) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \right) \\ &= \left(x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k \right) + \left(y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \right), \end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Umformung den Summanden für $k = 0$ bzw. für $k = n$ separat geschrieben haben (beachte die veränderten Summationsgrenzen in den beiden Summenzeichen). Der Trick besteht nun darin, eine sogenannte Indexverschiebung im ersten Summenzeichen durchzuführen, indem wir $k = \tilde{k} + 1$ substituieren. Das ergibt

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k = \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \binom{n}{\tilde{k}+1} x^{n-\tilde{k}} y^{\tilde{k}+1},$$

und anschließend können wir wieder k statt \tilde{k} schreiben. Insgesamt erhalten wir die Formel⁸

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^{n-k} y^{k+1},$$

und nach Einsetzen und Umgruppierung der Terme das Zwischenergebnis

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) x^{n-k} y^{k+1} \right) + y^{n+1},$$

das wir wegen des Hilfsresultats auch als

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} x^{n-k} y^{k+1} \right) + y^{n+1}$$

schreiben können. Es gilt aber auch⁹

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

⁸Wahrscheinlich misstrauen Sie zunächst dem Argument mit der Indexverschiebung (das geht am Anfang allen so). Sie können aber die Gültigkeit der Formel leicht einsehen, indem Sie für konkrete Wahlen von n das Summenzeichen auf beiden Seiten auflösen, d.h. die Summanden explizit schreiben. Mit etwas Übung und Erfahrung werden Sie später selbst Indexverschiebungen in Summen fehlerfrei durchführen.

⁹Diese Formel beruht wieder auf einer Indexverschiebung. Wenn wir zum Beispiel den ersten bzw. letzten Summanden auf der linken Seite ($k = 0$ bzw. $k = n - 1$) sowie den ersten bzw. letzten Summanden auf der rechten Seite ($k = 1$ bzw. $k = n$) betrachten, so steht dort jeweils $\binom{n+1}{1} x^n y^1$ bzw. $\binom{n+1}{n} x^1 y^n$.

und damit

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \right) + y^{n+1}.$$

Durch Hineinziehen der separierten Summanden in das Summenzeichen — beachte wieder die veränderten Summationsgrenzen sowie $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ — erhalten wir schließlich

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

Das ist aber gerade die binomische Formel mit $n + 1$ statt n und der Induktionsschritt ist damit etabliert. □

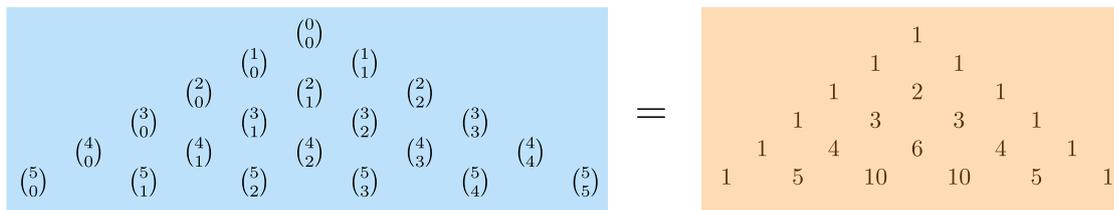


Abbildung Die Binomialkoeffizienten – bzw. die Vorfaktoren im Binomischen Lehrsatz – können als Pascalsches Dreieck (Definition bzw. Zahlenwerte in Blau bzw. Gelb) dargestellt werden, wobei die (eigentlich unendlich vielen) Zeilen den Werten von n entsprechen. Das Hilfsresultat im Beweis impliziert, dass jede Zahl im Inneren die Summe der beiden schräg oberhalb stehenden Zahlen ist.

Bemerkung Man kann die binomische Formel auch ohne Induktion beweisen und direkt mit kombinatorischen Argumenten herleiten. Wenn wir etwa für $n = 4$ die Klammern in

$$(x + y)^4 = (x + y) (x + y) (x + y) (x + y)$$

ausmultiplizieren, so treffen k Faktoren y immer auf $4 - k$ Faktoren x , wobei in Abhängigkeit von k verschiedene Reihenfolgen zu berücksichtigen sind. Für $k = 1$ bzw. $k = 2$ ergibt sich zum Beispiel

$$x x x y + x x y x + x y x x + y x x x = 4 x^3 y = \binom{4}{1} x^{4-1} y^1$$

bzw.

$$x x y y + x y x y + x y y x + y x x y + y x y x + y y x x = 6 x^2 y^2 = \binom{4}{2} x^{4-2} y^2,$$

wobei der Binomialkoeffizient $\binom{4}{k}$ gerade die Anzahl der Möglichkeiten beschreibt, die Variable y k -mal in einem Produkt von 4 Faktoren zu platzieren. Beachte auch, dass $\binom{4}{4-k}$, also die Anzahl der Platzierungsmöglichkeiten für x , denselben Wert annimmt.

Geburtstagsparadoxon* Wir wollen die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass in einer Klasse aus n Schülern mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, wobei wir der Einfachheit halber davon ausgehen, dass es keine Schaltjahre gibt und dass alle 365 Tage gleich wahrscheinlich sind. Insgesamt gibt es

$$G_n = 365^n$$

mögliche Verteilungen der Geburtstage auf die Schüler, wobei in

$$C_n = \underbrace{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}_{n \text{ Faktoren}}$$

Fällen alle Schüler jeweils an einem anderen Tag Geburtstag haben (dies entspricht dem Komplementärereignis). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_n kann nun für jedes n mittels

$$p_n = \frac{G_n - C_n}{G_n} = 1 - \prod_{j=1}^n \frac{365 - j}{365}$$

berechnet¹⁰ werden.

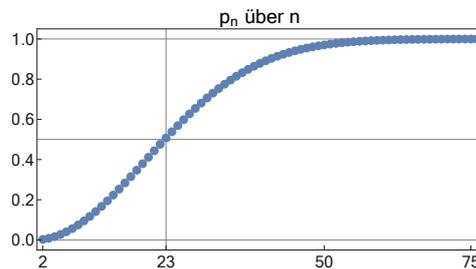


Abbildung Das Geburtstagsparadoxon meint das Folgende: Bei einer Klassengröße von $n = 23$ Schülern ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Kinder am selben Tag Geburtstag feiern, bereits größer als 50%. Bei $n = 50$ beträgt sie schon 97% und für $n > 90$ können wir mit fast absoluter Sicherheit davon ausgehen, dass es zwei solche Kinder gibt.

¹⁰Den mittleren Teil der Doppelformel sollten Sie nicht auf einem Taschenrechner oder Computer verwenden, da sowohl der Zähler als auch der Nenner mit wachsendem n sehr schnell sehr groß werden und außerhalb des zulässigen Zahlenbereichs liegen können. So gilt zum Beispiel $G_{20} \approx 1.8 \cdot 10^{51}$ und $G_{50} \approx 1.3 \cdot 10^{128}$. Die Zahlen auf der rechten Seite sind hingegen wesentlich harmloser.

1.3 Primzahlen*

Erinnerung Jede Primzahl ist nur durch 1 und sich selbst teilbar und die Liste aller Primzahlen beginnt mit

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots$$

Die Zahl 1 ist keine Primzahl.¹¹

Theorem (Primfaktorzerlegung) Jede natürliche Zahl $n \neq 1$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben. Insbesondere existieren für jedes $n \geq 2$ eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, k Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k mit $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sowie k Exponenten $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, sodass

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}.$$

Diese Darstellung ist eindeutig und jede der Primzahlen p_i wird Primfaktor von n genannt.

Beispiele

$$8 = 2^3, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 7 = 7, \quad 99 = 3^2 \cdot 11$$

Beweis Existenz: Wir führen einen *indirekten Beweis*, d.h. wir werden aus der *Antithese* einen Widerspruch ableiten. Wir nehmen also an, dass nicht jede natürliche Zahl $n > 1$ als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann. Wir betrachten nun die *kleinste* natürliche Zahl ohne Primfaktorzerlegung und nennen sie n_* . Die Zahl n_* kann selbst keine Primzahl sein, denn dann hätte sie ja eine triviale Primfaktorzerlegung mit $k = 1$, $p_1 = n_*$ und $r_1 = 1$. Also besitzt n_* echte Teiler und kann als $n_* = n_1 n_2$ mit $1 < n_1 < n_*$ und $1 < n_2 < n_*$ geschrieben werden. Nun müssen aber sowohl n_1 als auch n_2 jeweils eine Primfaktorzerlegung besitzen, da andernfalls n_* im obigen Auswahlargument nicht die kleinste Zahl hätte sein können. Da sowohl n_1 als auch n_2 Produkt von Primzahlen ist, können wir aber auch $n_* = n_1 n_2$ als Produkt von Primzahlen schreiben. Wir haben damit einen Widerspruch erzeugt und schließen, dass unsere Annahme oben falsch war. Jede natürliche Zahl $n \neq 1$ besitzt also eine Primfaktorzerlegung.

Eindeutigkeit: Wir argumentieren wieder indirekt und nehmen an, dass es Zahlen mit mehr als einer Primfaktorzerlegung gibt. Die davon kleinste bezeichnen wir wieder mit n_* . Dann gilt

$$n_* = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \quad \text{sowie} \quad n_* = q_1^{s_1} \cdot q_2^{s_2} \cdot \dots \cdot q_l^{s_l},$$

wobei diese Formeln zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen von n_* repräsentieren. Das Produkt auf der rechten Seite der ersten Formel muss nun durch die Primzahl q_1 teilbar sein und das geht nur, wenn eine der Primzahlen p_1, \dots, p_k selbst q_1 ist. Im einfachsten Fall gilt $p_1 = q_1$ und für $n_{\#} = n_*/q_1$ erhalten wir nach Division die zwei Primfaktorzerlegungen

$$n_{\#} = p_1^{r_1-1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \quad \text{sowie} \quad n_{\#} = q_1^{s_1-1} \cdot q_2^{s_2} \cdot \dots \cdot q_l^{s_l},$$

¹¹Das ist aber keine Erkenntnis, sondern nur eine nützliche Festlegung.

was einen Widerspruch zur minimalen Wahl von n_* darstellt. In den Fällen $p_2 = q_1, \dots, p_k = q_1$ können wir analog argumentieren und haben insgesamt gezeigt, dass es für jede Zahl $n \neq 1$ nur eine Primfaktorzerlegung geben kann.¹² \square

Theorem Es gibt unendlich viele Primzahlen.¹³

Beweis Wir führen wieder einen indirekten Beweis und nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existieren nur endlich viele Primzahlen, wobei wir deren Anzahl mit k und die Primzahlen mit q_1, \dots, q_k bezeichnen wollen. Wir betrachten außerdem

$$n := q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k + 1,$$

und bemerken, dass n bei Division durch jede der Zahlen q_1, \dots, q_k den Rest 1 lässt und damit kein Vielfaches einer dieser Zahlen sein kann. Insbesondere kann keiner der Primfaktoren von n in $\{q_1, \dots, q_k\}$ enthalten sein und es müsste daher mindestens eine weitere Primzahl geben. Das ist aber ein Widerspruch zur Wahl von k (als die Anzahl aller Primzahlen) und wir schließen, dass unsere Annahme falsch gewesen sein muss. \square

Ausblick Primzahlsatz Bezeichnen wir mit $p(n)$ die Anzahl aller Primzahlen, die kleiner als oder gleich n sind, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n) \ln(n)}{n} = 1$$

d.h. für große n gibt es ungefähr $n/\ln(n)$ viele Primzahlen zwischen 1 und n , wobei \ln der natürliche Logarithmus ist. Einen Beweis dieses bemerkenswerten Resultats können wir aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht geben.¹⁴

Definition Für $n, m \in \mathbb{N}$ nennt man

$$\text{kgV}(n, m) := \min \{k \in \mathbb{N} : k \text{ ist Vielfaches von } n \text{ und } m\}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m und

$$\text{ggT}(n, m) := \max \{k \in \mathbb{N} : k \text{ teilt } n \text{ und } m\}$$

den größten gemeinsamen Teiler von n und m .

¹²Sowohl im Existenz- als auch im Eindeutigkeitsenteil des Beweises haben wir eine Argumentation verwendet, die manchmal das *Prinzip des kleinsten Verbrechers* genannt wird. Für Aussagen über natürliche Zahlen gilt salopp gesprochen: Wenn es keinen kleinsten Verbrecher geben kann, so können Verbrecher überhaupt nicht existieren.

¹³Diese Erkenntnis besaßen schon die Alten Griechen. Die analoge Frage, ob die Liste der *Primzahlzwillinge*

$$3 \text{ und } 5, \quad 5 \text{ und } 7, \quad 11 \text{ und } 13, \quad \dots, \quad 3167 \text{ und } 3169, \quad \dots$$

endlich oder unendlich viele Paare umfasst, konnte trotz intensiver zahlentheoretischer Forschungen bisher noch nicht beantwortet werden.

¹⁴Die *Riemannsche Vermutung* ist ein noch ungelöstes *Millenniumproblem* der Mathematik und betrifft die Frage, ob bzw. wie man die Näherungsformel im Primzahlsatz verbessern kann.

Beispiel

$$\text{kgV}(2, 8) = 8, \quad \text{kgV}(3, 13) = 39 \quad \text{kgV}(6, 9) = 18$$

$$\text{ggT}(5, 7) = 1, \quad \text{ggT}(3, 9) = 3 \quad \text{ggT}(6, 15) = 3$$

Bemerkung Sind die Primzahlzerlegungen von n und m bekannt, so können $\text{kgV}(n, m)$ und $\text{ggT}(n, m)$ leicht berechnet werden, indem man für alle auftretenden Primfaktoren den minimalen bzw. maximalen Exponenten bestimmt. Für

$$n = 525 = 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1, \quad m = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

müssen wir zum Beispiel die Primzahlen 2, 3, 5 und 7 berücksichtigen und erhalten

$$\text{kgV}(525, 180) = 2^{\max\{0,2\}} \cdot 3^{\max\{1,2\}} \cdot 5^{\max\{2,1\}} \cdot 7^{\max\{1,0\}} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300$$

sowie

$$\text{ggT}(525, 180) = 2^{\min\{0,2\}} \cdot 3^{\min\{1,2\}} \cdot 5^{\min\{2,1\}} \cdot 7^{\min\{1,0\}} = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15.$$

Insbesondere können wir mit Hilfe der Primfaktorzerlegungen von n und m und wegen

$$\min\{a, b\} + \max\{a, b\} = a + b$$

leicht die Formel

$$\text{kgV}(n, m) \cdot \text{ggT}(n, m) = n \cdot m$$

ableiten. Bei großen Zahlen ist es allerdings nicht einfach, die Primfaktorzerlegung zu berechnen.

Bemerkung Der größte gemeinsame Teiler kann auch mittels des *Euklidischen Algorithmus* durch fortgesetzte Division mit Rest berechnet werden. Für $n = 3054$ und $m = 1002$ berechnen wir zum Beispiel:

$$3054 = 3 \cdot 1002 + 48 \quad (\text{Wie oft passt } 1002 \text{ in } 3054?)$$

$$1002 = 20 \cdot 48 + 42 \quad (\text{Wie oft passt } 48 \text{ in } 1002?)$$

$$48 = 1 \cdot 42 + 6 \quad (\text{Wie oft passt } 42 \text{ in } 48?)$$

$$42 = 7 \cdot 6 + 0 \quad (\text{Wie oft passt } 6 \text{ in } 42?)$$

Fertig wegen Rest 0!

Es gilt nun $\text{ggT}(3054, 1002) = 6$, woraus auch

$$\text{kgV}(3054, 1002) = \frac{3054 \cdot 1002}{6} = 510\,018$$

folgt.

Kapitel 2

Axiome der reellen Zahlen

Vorlesungswoche 02

Vorbemerkung In diesem Kapitel formulieren wir

1. die Körperaxiome (A.1) – (A.4), (M.1) – (M.4) und (D) ,
2. die Anordnungsaxiome (O.1) – (O.3),
3. das Vollständigkeitsaxiom (V)

für die reellen Zahlen, wobei man die Rolle und Bedeutung der Axiome verschieden interpretieren kann. Bei einer ersten Lektüre können Sie sich auf den Standpunkt stellen, dass wir die reellen Zahlen ja bereits aus der Schule kennen. Dann fassen die Axiome lediglich die wichtigsten Eigenschaften der reellen Zahlen zusammen.

Der springende Punkt ist jedoch, dass die reellen Zahlen in der modernen Mathematik dadurch **definiert** werden, dass die Gültigkeit der genannten Axiome postuliert wird.¹ Die Axiome bilden also das Fundament, auf dem die **gesamte** Mathematische Analysis aufgebaut ist und aus dem **alle** ihre Theoreme durch logisches Schließen abgeleitet werden können. Dies sollte Ihr Fokus bei der zweiten und dritten Lektüre sein.

Dieses Kapitel ist wahrscheinlich der abstrakteste und unanschaulichste Teil des gesamten Skriptes. Es steht aber am Anfang der Analysis und bildet die Grundlage aller noch folgenden Kapitel, die sich konkreteren (aber immer noch mathematischen) Fragen widmen werden.

Notationen Im folgenden bezeichnen wir mit \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen und schreiben \mathbb{Q} für die Menge der rationalen Zahlen.

2.1 Algebraische Körperstruktur

Körperaxiome Auf \mathbb{R} existieren eine Addition (geschrieben als $x + y$) sowie eine Multiplikation (geschrieben als $x \cdot y$), sodass die folgenden Rechenregeln gelten²:

¹Beim axiomatischen Aufbau der Mathematik wird also nicht festgelegt, was die reellen Zahlen *sind*, sondern nur welche abstrakten Eigenschaften sie haben. Diese indirekte Art der Definition hat sich als sehr sinnvoll und mächtig erwiesen.

²Die Addition ist eine zweistellige Rechenoperation und kann als Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet werden, wobei das Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf $x + y \in \mathbb{R}$ abgebildet wird. Dabei werden x und y *Summanden*

1. Kommutativgesetze: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(A.1) \quad x + y = y + x, \quad (M.1) \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

d.h. wir dürfen zwei Summanden bzw. zwei Faktoren miteinander vertauschen.

2. Assoziativgesetze: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(A.2) \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad (M.2) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

d.h. wir dürfen die Reihenfolge der Summen- und Produktbildung vertauschen.

3. Existenz neutraler Elemente: Es existiert $0 \in \mathbb{R}$ (die sogenannte Null) sowie $1 \in \mathbb{R}$ (die sogenannte Eins), sodass

$$(A.3) \quad x + 0 = x, \quad (M.3) \quad x \cdot 1 = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Außerdem gilt $0 \neq 1$.

4. Existenz inverser Elemente: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $-x \in \mathbb{R}$ mit

$$(A.4) \quad x + (-x) = 0$$

und im Fall von $x \neq 0$ existiert außerdem ein $x^{-1} \in \mathbb{R}$, sodass

$$(M.4) \quad x \cdot x^{-1} = 1$$

gilt.

5. Distributivgesetz: Es gilt

$$(D) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Klarstellung und Ausblick

1. Wir sagen in den Körperaxiomen nicht, was die reellen Zahlen sind oder wie die Addition und die Multiplikation im Detail funktionieren. Wir beschreiben bzw. postulieren lediglich, dass beim Operieren mit reellen Zahlen gewisse Spielregeln gelten.

2. Wir werden im Fortgang dieses Kurses sehen, dass aus den Körperaxiomen (und den noch folgenden Axiomen) alle Eigenschaften der reellen Zahlen in rigoroser Weise abgeleitet werden können. Wir werden zum Beispiel beweisen, dass man jede reelle Zahl als Dezimalzahl — mit endlich vielen Vorkomma- und vielleicht unendlich vielen Nachkommastellen — schreiben kann und dass die in der Schule vermittelten Rechenalgorithmen wirklich richtig sind.

genannt und $x + y$ heißt die *Summe* von x und y . Analoge Bemerkungen für die Multiplikation. Für die allgemeine Theorie algebraischer Körper verweisen wir auf die Vorlesung *Lineare Algebra*.

3. Ausgehend von den Axiomen der reellen Zahlen werden wir im weiteren Verlauf dieser Vorlesung die Mathematische Analysis schrittweise aufbauen und unter anderem den Differentiations- und Integrationsbegriff systematisch entwickeln. Wir werden dabei die Gültigkeit der Axiome nicht hinterfragen, sondern sie als gegeben betrachten. Das bedeutet zum Beispiel, dass der am Ende des Semesters hergeleitete *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* wie folgt zu verstehen ist: *Wenn* die Axiome der reellen Zahlen richtig sind, *dann* sind Differentiation und Integration zueinander inverse Operationen.
4. Wir können in dieser Vorlesung nicht die Sinnhaftigkeit der Axiome untersuchen. Insbesondere werden wir die folgenden Fragenkomplexe nicht weiter diskutieren:
 - (–) *Existenz*: Gibt es sowas wie die reellen Zahlen überhaupt? Oder implizieren die oben gelisteten Rechenregeln einen logischen Widerspruch und können gar nicht gleichzeitig oder zumindest nicht immer gelten?
 - (–) *Eindeutigkeit*: In welchem Sinne sind die reellen Zahlen eindeutig durch die Axiome festgelegt? Oder kann es mehrere, echt unterschiedliche Versionen der reellen Zahlen geben?
 - (–) *Relevanz*: Sind die reellen Zahlen wirklich „real“ oder handelt es sich um Hirngespinnste, die lediglich in unseren Gedanken existieren und nichts mit der wirklichen Welt zu tun haben?
5. Das Existenzproblem wird in der modernen Mathematik dadurch gelöst, dass man – ausgehend von einem anderen, elementarerem Axiomensystem — die reellen Zahlen *konstruiert*. Zum Beispiel tauchen die natürlichen Zahlen in der Mengenlehre als Mächtigkeiten von Mengen auf. In einem ersten Schritt kann man sich dann überlegen, dass es auch die ganzen Zahlen geben muss, aus denen in einem dritten und vierten Schritt zunächst die rationalen und anschließend die reellen Zahlen gewonnen werden, wobei jeweils nur logisch einwandfreie Schlüsse und Konstruktionen angewendet werden. Am Ende können wir — etwas vereinfacht gesprochen — sagen: *Wenn* es Mengen gibt, *dann* muss es auch die reellen Zahlen geben.
6. Der Schlüssel zum Eindeutigkeitsproblem ist das Konzept der *Isomorphie*, das – vereinfacht und analogiehaft gesprochen – wie folgt verstanden werden kann: Zwei verschiedene Versionen der reellen Zahlen verhalten sich zueinander wie „rote Zahlen“ zu „grünen Zahlen“. Alle Rechnungen und Beweise, die wir mit einem roten Stift notiert haben, können wir anschließend nochmal mit grüner Tinte abschreiben. Dadurch ändert sich aber nur die Form, nicht der Inhalt.
7. Die Frage nach der Relevanz ist natürlich wichtig, aber sie ist von eher philosophischer Natur und kann innerhalb der Mathematik nicht beantwortet werden. Wir können jedoch mit absoluter Sicherheit sagen: Reelle Zahlen sind ungeheuer nützlich bei der Beschreibung der physikalischen, technischen, biologischen und sozialen Welt. Sie spielen eine herausragende Rolle in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Bemerkungen

1. Bei Produkten lassen wir oftmals das Multiplikationszeichen weg und schreiben xy statt $x \cdot y$.

2. Die Subtraktion wird via

$$x - y := x + (-y)$$

eingeführt.

3. Die Division ist durch

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$$

gegeben, wobei $y \neq 0$ gelten muss und der Quotient manchmal auch als x/y oder $x : y$ geschrieben wird.

4. Achtung: Wir dürfen in einem Körper **niemals** durch 0 teilen.

Lemma (erste Folgerung aus den Körperaxiomen)

1. Eindeutigkeit der neutralen Elemente: 0 und 1 sind eindeutig festgelegt.
2. Eindeutigkeit der inversen Elemente: Für jedes $x \neq 0$ sind $-x$ und x^{-1} eindeutig durch ihre Eigenschaften bestimmt.
3. Spezielle inverse Elemente: Es gilt $-0 = 0$ und $1^{-1} = 1$.
4. Doppelte Inversion ist Identität: Es gilt

$$-(-x) = x \quad (x^{-1})^{-1} = x,$$

für jedes $x \neq 0$.

5. Spezielle Inversionsformeln: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$-(x + y) = (-x) + (-y), \quad (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

wobei bei der zweiten Formel $x \neq 0$ und $y \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Beweis Wir zeigen immer nur die Aussage bzgl. der Addition. Das multiplikative Gegenstück ergibt sich jeweils analog. Teil 1: Nehmen wir an, es gäbe neben 0 noch ein weiteres neutrales Element, sagen wir $\tilde{0}$. Dann gilt $x + 0 = x$ sowie $x + \tilde{0} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn wir die erste Gleichung für $x = \tilde{0}$ und die zweite mit $x = 0$ auswerten, so erhalten mit $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ sowie $0 + \tilde{0} = 0$. Da aber $\tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0}$ nach **(A.1)** gilt, folgt $\tilde{0} = 0$ und damit die Behauptung. Teil 2: Sei \tilde{x} invers zu x , d.h. $0 = x + \tilde{x}$. Wir addieren $-x$ auf beiden Seiten und erhalten via

$$-x = (-x) + (x + \tilde{x}) \stackrel{\text{(A.2)}}{=} ((-x) + x) + \tilde{x} \stackrel{\text{(A.4)}}{=} 0 + \tilde{x} \stackrel{\text{(A.1)}}{=} \tilde{x} + 0 \stackrel{\text{(A.3)}}{=} \tilde{x}$$

das gewünschte Ergebnis. Teil 3: Wir setzen $x = 0$ in **(A.3)** und erhalten $0 + 0 = 0$. Damit ist 0 zu sich selbst invers und aus dem zweiten Teil folgt $-0 = 0$. Teil 4: Es gilt

$$(-x) + x \stackrel{\text{(A.1)}}{=} x + (-x) \stackrel{\text{(A.4)}}{=} 0,$$

d.h. x ist neben $-(-x)$ auch invers zu $-x$. Die Behauptung folgt nun aus dem zweiten Teil. Teil 5: Wir berechnen

$$(x + y) + ((-x) + (-y)) \stackrel{\text{(A.1), (A.2)}}{=} (x + (-x)) + (y + (-y)) \stackrel{\text{(A.3)}}{=} 0 + 0 = 0,$$

d.h. $(-x) + (-y)$ ist invers zu $x + y$. □

Bemerkung Hier und bei allen anderen Resultaten in diesem Kapitel gilt: Die Schwierigkeit besteht nicht darin, die Gültigkeit der Behauptungen einzusehen, sondern sich zu überlegen, dass bzw. wie diese aus den Axiomen abgeleitet werden können.

Lemma (zweite Folgerung aus den Körperaxiomen)

1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot x = 0$ sowie $x \cdot 0 = 0$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt.

Beweis Teil 1: Die Formel $0 = 0+0$ ist ein Spezialfall von (A.1) und in Kombination mit (D) ergibt sich

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Nach Addition von $-(0 \cdot x)$ auf linken und der rechten Seite erhalten wir $0 = 0 \cdot x$, wobei dann auch $x \cdot 0 = 0$ aus (A.1) folgt. Teil 2: Hier haben wir zwei Implikationen zu zeigen. *Rückrichtung*: Wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt, so folgt $x \cdot y = 0$ aus dem ersten Teil. *Hinrichtung*: Wir nehmen an, dass $x \cdot y = 0$ gilt und wollen nun zeigen, dass $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Im Fall von $x = 0$ sind wir direkt fertig. Andernfalls existiert x^{-1} nach (M.4) und es gilt

$$y \stackrel{\text{(M.3)}}{=} 1 \cdot y \stackrel{\text{(M.4)}}{=} (x \cdot x^{-1}) \cdot y \stackrel{\text{(M.2)}}{=} x^{-1} \cdot (x \cdot y) \stackrel{\text{Annahme}}{=} x^{-1} \cdot 0 \stackrel{\text{Teil 1}}{=} 0.$$

Insgesamt haben wir im zweiten Teil die behauptete logische Äquivalenz hergeleitet. \square

Bemerkung Alle anderen bekannten Rechenregeln der Addition und Multiplikation können auch aus den Körperaxiomen abgeleitet werden, zum Beispiel

$$(-1) \cdot x = -x, \quad (-x)^{-1} = -x^{-1}$$

oder

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Siehe dazu auch die Übungen und Hausaufgaben.

Lemma (dritte Folgerung aus den Körperaxiomen)

1. Lösung additiver Gleichungen: Für gegebene $a, b \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $a + x = b$.
2. Lösung multiplikativer Gleichungen: Für gegebene $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $a \cdot x = b$.

Beweis Teil 1: Die Gleichung besitzt mindestens eine Lösung, nämlich

$$x = b - a = b + (-a),$$

denn die Axiome der Addition implizieren

$$a + (b + (-a)) \stackrel{\text{(A.1)}}{=} a + ((-a) + b) \stackrel{\text{(A.2)}}{=} (a + (-a)) + b \stackrel{\text{(A.4)}}{=} 0 + b \stackrel{\text{(A.1)}}{=} b + 0 \stackrel{\text{(A.3)}}{=} b.$$

Sei nun x irgendeine Lösung, d.h. gelte $a + x = b$. Durch Addition von $-a$ auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir $(a + x) + (-a) = b + (-a)$, wobei die linke Seite wegen

$$(a + x) + (-a) \stackrel{\text{(A.1)}}{=} (x + a) + (-a) \stackrel{\text{(A.2)}}{=} x + (a + (-a)) \stackrel{\text{(A.4)}}{=} x + 0 \stackrel{\text{(A.3)}}{=} x$$

gerade x ist. Wir haben damit gezeigt, dass die oben angegebene Lösung wirklich die einzige ist.³ Teil 2: Hier argumentieren wir ganz analog. \square

2.2 Ordnungsrelation und Anordnungsaxiome

Axiome der Anordnung Auf \mathbb{R} gibt es eine Positivitätsrelation, die als $x > 0$ geschrieben wird und für die die folgenden Aussagen gelten.⁴

1. Trichotomie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der drei Bedingungen⁵

$$\text{(O.1)} \quad x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0$$

erfüllt.

2. Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation: Die beiden Implikationen

$$\text{(O.2)} \quad x > 0 \wedge y > 0 \implies x + y > 0$$

sowie

$$\text{(O.3)} \quad x > 0 \wedge y > 0 \implies x \cdot y > 0$$

sind für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lemma (erste Folgerung aus den Anordnungsaxiomen) Für jedes $x \neq 0$ gilt

$$x \cdot x > 0$$

sowie die Implikation $x > 0 \implies x^{-1} > 0$.

³Wir könnten den Beweis auch mit der Formelkette

$$\begin{aligned} a + x = b &\iff (a + x) + (-a) = b + (-a) \\ &\iff (x + a) + (-a) = b + (-a) \\ &\iff x + (a + (-a)) = b + (-a) \\ &\iff x + 0 = b + (-a) \\ &\iff x = b + (-a) \\ &\iff x = b - a \end{aligned}$$

führen und die entsprechenden Erklärungen unter bzw. über die Pfeile schreiben. Alle Erfahrung zeigt aber: Lange Formelketten sind sehr schwer zu verstehen und darüber hinaus äußerst fehleranfällig. Gerade am Anfang des Mathestudiums sollten Sie niemals nur Formeln, sondern immer auch Worte benutzen.

⁴Die Formel $x > y$ repräsentiert die zweistellige Ordnungsrelation in \mathbb{R} , die zu der einstelligen Positivitätsrelation gehört. Das allgemeine Konzept einer k -stelligen Relation auf einer Menge wird in der Vorlesung *Lineare Algebra* diskutiert und in der Mathematik sehr häufig verwendet.

⁵Die Zeichen \wedge bzw. \vee repräsentieren das logische UND bzw. ODER.

Beweis *Teil 1*: Nach Voraussetzung und **(O.1)** reicht es, die beiden Fälle $x > 0$ und $-x > 0$ zu studieren. Für $x > 0$ liefert **(O.3)** direkt $x^2 = x \cdot x > 0$. Für $-x > 0$ können wir wieder **(O.3)** benutzen, aber diesmal in Form von $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$.
Teil 2: Angenommen, die behauptete Implikation wäre falsch. Dann gibt es ein $x > 0$, für das nach **(O.1)** entweder $x^{-1} = 0$ oder $-x^{-1} > 0$ gilt. Im Fall $x^{-1} = 0$ implizieren die Körperaxiome sowie ihre Folgerungen die Formel $1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$, die aber wegen **(O.1)** im Widerspruch zu $1 > 0$ steht (wobei sich letzteres mit $x = 1$ und wegen $1 = 1 \cdot 1$ aus dem ersten Teil des Beweises ergibt). Also muss $-x^{-1} > 0$ gelten. Da die Körperaxiome die Formel $-1 = x \cdot (-x^{-1})$ implizieren, schließen wir mit **(O.3)**, dass $-1 > 0$ gilt. Das ist aber wegen $1 > 0$ wieder ein Widerspruch zu **(O.1)**. Unsere Antithese muss also falsch gewesen sein. \square

Korollar Für jedes $x \neq 0$ gilt sogar die Äquivalenz $x > 0 \iff x^{-1} > 0$.

Beweis Das Lemma gilt nicht nur für $x \neq 0$, sondern sinngemäß auch für x^{-1} und liefert $x^{-1} > 0 \implies (x^{-1})^{-1} > 0$. Das ist aber wegen $(x^{-1})^{-1} = x$ gerade die Rückrichtung der behaupteten Äquivalenz. \square

Definitionen und Sprechweisen

1. $x > y$ meint „ x größer als y “ und ist eine Kurzschreibweise für $x - y > 0$
2. $x < y$ meint „ x kleiner als y “ und ist gleichbedeutend mit $y - x > 0$
3. $x \geq y$ meint „ x größer als oder gleich y “ bzw. $(x > y) \vee (x = y)$
4. $x \leq y$ meint „ x kleiner als oder gleich y “ bzw. $(x < y) \vee (x = y)$
5. x heißt positiv bzw. nichtnegativ, falls $x > 0$ bzw. $x \geq 0$
6. x heißt negativ bzw. nichtpositiv, falls $x < 0$ bzw. $x \leq 0$

Bemerkung Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Bedingungen

$$x > y, \quad x = y, \quad y > x.$$

Diese Trichotomie der reellen Ordnungsrelation ergibt sich aus den Definitionen, sofern **(O.1)** für $x - y$ (anstelle von x) ausgewertet wird.

Schreibweise In der Praxis benutzt man häufig konsistente Doppelungleichungen. Zum Beispiel sind

$$x \leq y < z \quad \text{bzw.} \quad x \geq y \geq z$$

kompakte Notationen für $(x \leq y) \wedge (y < z)$ bzw. $(x \geq y) \wedge (y \geq z)$.

Hinweis: In einem Beweis sollten Sie immer die Teilungleichungen separat herleiten.

Achtung: Wir schreiben **niemals** inkonsistente Doppelungleichungen wie $x \geq y < z$ oder $0 < 2 > 1$, da diese den Leser nur verwirren.

Lemma (zweite Folgerung aus den Anordnungsaxiomen) Es gelten die folgenden Implikationen.

1. Transitivität: $x > y \wedge y > z \implies x > z$
2. Addition mit beliebiger Zahl: $x > y \implies x + z > y + z$
3. Multiplikation mit positiver Zahl: $x > y \wedge z > 0 \implies xz > yz$
4. Multiplikation mit negativer Zahl: $x > y \wedge z < 0 \implies xz < yz$
5. Additive Inverse: $x > y \implies -x < -y$
6. Positive multiplikative Inverse: $x > y > 0 \implies 0 < x^{-1} < y^{-1}$
7. Negative multiplikative Inverse: $x < y < 0 \implies 0 > x^{-1} > y^{-1}$

Hierbei sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig.

Beweis Teil 1: Unter den Voraussetzungen $x > y$ und $y > z$ gilt $x - y > 0$ sowie $y - z > 0$. Mit **(O.2)** erhalten wir $(x - y) + (y - z) > 0$ und nach den Rechenregeln der Addition schließlich $x - z > 0$, was gerade $x > z$ meint.⁶ Teil 2: Mit $x > y$ ergibt sich $x - y > 0$ und wegen $(x + z) - (y + z) = x - y$ erhalten wir $x + z > y + z$, wobei wir einmal die Rechenregeln der Addition und zweimal die obigen Definitionen benutzt haben. Teil 3: Aus $x > y$ folgt $x - y > 0$ und wenn auch $z > 0$ gilt, so liefert **(O.2)** die Ungleichung $(x - y) \cdot z > 0$. Nach Auslösen der Klammer ergibt sich $x \cdot z - y \cdot z > 0$, was schließlich als $x \cdot z > y \cdot z$ geschrieben werden kann. Teil 4: Es gelte $x > y$ sowie $z < 0$, wobei letzteres $-z > 0$ liefert. Die (bereits bewiesene) Implikation im dritten Teil (mit $-z$ anstelle von z) garantiert $x \cdot (-z) > y \cdot (-z)$ und damit auch $x \cdot (-z) - y \cdot (-z) > 0$. Durch einfache Umformungen der linken Seite (d.h. wir wenden die Körperaxiome an) erhalten wir $y \cdot z - x \cdot z > 0$ und damit $y \cdot z > x \cdot z$ bzw. $x \cdot z < y \cdot z$. Teil 5: Aus $x > y$ folgt $-x < -y$ nach Multiplikation mit -1 (das haben wir eben in Teil 4 bewiesen). Teil 6: Es gelte $x > y$ sowie $y > 0$, wobei die Transitivität auch $x > 0$ sicherstellt und das vorherige Lemma $x^{-1} > 0$ sowie $y^{-1} > 0$ garantiert. Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung $x > y$ zuerst mit x^{-1} und anschließend mit y^{-1} und erhalten in Verbindung mit der im 3. Teil bewiesenen Implikation zunächst $1 > x^{-1} \cdot y$ und dann $y^{-1} > x^{-1}$. Durch Kombination mit $x^{-1} > 0$ folgt nun die gewünschte Doppelungleichung. Teil 7: Wir verwenden die soeben bewiesene Implikation mit $-x$ und $-y$ anstelle von x und y und benutzen außerdem, dass die Körperaxiome die Formeln $(-x)^{-1} = -x^{-1}$ und $(-y)^{-1} = -y^{-1}$ implizieren. \square

Achtung Der 3. und 4. Teil des Lemmas zeigen: Multiplizieren wir die zwei Seiten einer Ungleichung mit einer reellen Zahl, so müssen wir immer deren Vorzeichen berücksichtigen, denn bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich das Relationszeichen gerade um.⁷

⁶Die Anhänger rein symbolischer Beweise würden unsere Argumentation als

$$x > y \wedge y > z \implies x - y > 0 \wedge y - z > 0 \implies (x - y) + (y - z) > 0 \implies x - z > 0 \implies x > z$$

schreiben, und im Prinzip spricht auch nichts gegen diese Notationsform (sofern über jedem Pfeil eine Erklärung angegeben wird). Sie sollten aber nicht die Implikationspfeile (\implies) ungeprüft durch Äquivalenzpfeile (\iff) ersetzen. Sehen Sie, an welcher Stelle hier dieser klassische Anfängerfehler Unsinn produziert?

⁷Ein einfaches Schulbeispiel ist: Aus $+2 > -1$ folgt zum einen $(+3) \cdot (+2) > (+3) \cdot (-1)$, zum anderen aber auch $(-2) \cdot (+2) < (-2) \cdot (-1)$.

Lemma (dritte Folgerung aus den Anordnungsaxiomen) Die Implikationen

1. Ungleichungen und Summen: $x_1 > y_1 \wedge x_2 > y_2 \implies x_1 + x_2 > y_1 + y_2$
2. Ungleichungen und Produkte: $x_1 > y_1 > 0 \wedge x_2 > y_2 > 0 \implies x_1 \cdot x_2 > y_1 \cdot y_2$

gelten für beliebige $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis Teil 1: Die Gültigkeit der Implikation ergibt sich via

$$x_1 + x_2 \underset{\text{weil } x_1 > y_1}{>} y_1 + x_2 \underset{\text{weil } x_2 > y_2}{>} y_1 + y_2$$

aus dem 2. Teil des vorangegangenen Lemmas. Teil 2: Hier argumentieren wir analog mit

$$x_1 \cdot x_2 \underset{\text{weil } x_1 > y_1 > 0 \text{ und } x_2 > 0}{>} y_1 \cdot x_2 \underset{\text{weil } x_2 > y_2 > 0 \text{ und } y_1 > 0}{>} y_1 \cdot y_2,$$

wobei wir diesmal den 3. Teil des Lemmas verwendet haben. □

Zusammenspiel von Körper- und Anordnungsaxiomen

\mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q} als Teilmengen von \mathbb{R} Wir können mittels

$$2 := 1 + 1, \quad 3 := 2 + 1 = 1 + 1 + 1, \quad 4 := 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1, \quad \dots$$

die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen auffassen.⁸ Auch die negativen ganzen Zahlen

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad \dots$$

gehören zu \mathbb{R} (wobei zum Beispiel -2 bzgl. der Addition invers zu 2 ist). Schließlich finden wir mit

$$\mathbb{Q} = \{m \cdot n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-m \cdot n^{-1} : m, n \in \mathbb{N}\}$$

auch die rationalen Zahlen in \mathbb{R}

Theorem (Anordnung der natürlichen Zahlen) Es gilt $n > n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots$$

Insbesondere ist jede natürliche Zahl positiv.

Beweis Wir argumentieren induktiv. Zunächst bemerken wir, dass $0 < 1 = 1 \cdot 1$ ein Spezialfall der ersten Folgerung aus den Anordnungsaxiomen ist. Aufgrund der zweiten Folgerung aus den Anordnungsaxiomen können wir 1 auf beiden Seiten der Ungleichung addieren und erhalten $1 + 0 < 1 + 1$, was aber gerade $1 < 2$ meint. Durch nochmalige Addition von 1 ergibt sich $1 + 1 < 1 + 2$ und damit $2 < 3$. Die behauptete Ungleichungskette folgt nun durch Iteration dieses Arguments. □

⁸Sie sind vielleicht enttäuscht, aber $1 + 1 = 2$ ist gar kein Theorem, sondern die Definition von 2 .

Bemerkungen

1. Analog zum Beweis können wir auch

$$0 > -1 > -2 > -3 > -4 \dots$$

zeigen und dies impliziert

$$-m \cdot n^{-1} < 0 < m \cdot n^{-1}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

2. In einem algebraischen Körper der Charakteristik n gilt $n = 0$ im Sinne von

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ Summanden}} = 0.$$

In der Analysis kann dies wegen der Anordnungsaxiome nicht passieren. Siehe auch den Satz von Archimedes weiter unten.

Körperaxiome und Potenzen Mithilfe der Axiome der Multiplikation können für jedes $x \neq 0$ via

$$x^2 := x \cdot x, \quad x^3 := x \cdot x \cdot x, \dots$$

und

$$x^{-2} := x^{-1} \cdot x^{-1}, \quad x^{-3} := x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}, \dots$$

die seine Potenzen *ganzzahligem* Exponenten berechnet werden, wobei wir außerdem immer

$$x^0 := 1$$

setzen.⁹ Die Implikationen

$$x > 0 \quad \implies \quad x^k > 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

und

$$x < 0 \quad \implies \quad x^k > 0 \text{ für gerade } k \in \mathbb{Z}, \text{ aber } x^k < 0 \text{ für ungerade } k \in \mathbb{Z}$$

können mit vollständiger Induktion und unter Verwendung der Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen bewiesen werden.

Achtung: Potenzen mit nicht-ganzzahligen Exponenten (zum Beispiel zweite oder dritte Wurzeln) sind komplizierter und werden erst später diskutiert.

⁹Die Zahl 0^0 kann im Reellen nicht in sinnvoller Weise definiert werden: Wir werden später sehen, dass zum einen $\lim_{x \searrow 0} 0^x = 0$ und zum anderen $\lim_{x \searrow 0} x^0 = 1$ gilt.

2.3 Vollständigkeitsaxiom

Vorbemerkung Salopp gesprochen garantiert das Vollständigkeitsaxiom, dass \mathbb{R} keine „Lücken“ aufweist. Es gibt in der Literatur vier verschiedene Formulierungen, nämlich

1. **(V₁)** Dedekindsches Schnittaxiom,
2. **(V₂)** Supremumsprinzip,
3. **(V₃)** Intervallschachtelungsprinzip,
4. **(V₄)** Konvergenz aller Cauchy-Folgen.

Alle vier Varianten sind paarweise äquivalent und jede kann als Vollständigkeitsaxiom verwendet werden, wobei die jeweils anderen dann als Theorem abgeleitet werden können. In dieser Vorlesung benutzen wir das Schnittaxiom und diskutieren die anderen Formulierungen erst später.

Ausblick

1. Es wird sich zeigen, dass \mathbb{Q} zwar den Körper- und den Anordnungsaxiomen genügt, dass aber das Vollständigkeitsaxiom nicht erfüllt ist (in keiner seiner Formulierungen).
Heuristik: Die irrationalen Zahlen ($\sqrt{2}$, π , e usw.) sind gerade die „Lücken“ in \mathbb{Q} . Wir werden später verstehen, dass \mathbb{R} gerade die *Vervollständigung* von \mathbb{Q} ist.
2. \mathbb{C} (die Menge der komplexen Zahlen, siehe weiter unten) erfüllt die Körperaxiome sowie die Cauchy-Variante des Vollständigkeitsaxioms, aber es gibt keine sinnvolle Ordnung auf \mathbb{C} (d.h. keine, die den Anordnungsaxiomen genügt).
3. Die Versionen **(V₃)** und **(V₄)** können relativ einfach verallgemeinert werden, da sie keinen expliziten Bezug auf die Ordnungsrelation nehmen. Bei **(V₁)** und **(V₂)** ist das anders.

Definition Ein Dedekindscher Schnitt besteht aus zwei Teilmengen A und B von \mathbb{R} , die den folgenden Aussagen genügen:

1. Es gilt $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$, d.h. A und B sind jeweils nicht leer.
2. Es gilt $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{R}$, d.h. A und B beschreiben eine disjunkte Zerlegung von \mathbb{R} .
3. Es gilt $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$, d.h. — salopp gesprochen — A liegt links von B auf der Zahlengeraden.

Wir nennen $s \in \mathbb{R}$ eine Schnittzahl zu A und B , wenn

$$a \leq s \leq b$$

für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, d.h. (salopp gesprochen) wenn s genau die Grenze zwischen A und B darstellt. Dabei wird s entweder zu A oder zu B gehören.

Vollständigkeitsaxiom in der Formulierung als Schnittaxiom

(V) Jeder Dedekindsche Schnitt besitzt in \mathbb{R} genau eine Schnitzzahl.

Beispiel Für den Schnitt

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ oder } x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}.$$

ist die Schnitzzahl gerade $s = \sqrt{2}$ und gehört damit zu A .¹⁰

Bemerkung: Wir sehen auch an diesem Beispiel, dass es kein Analogon zum Schnittaxiom in \mathbb{Q} geben kann. Die Mengen $A \cap \mathbb{Q}$ und $B \cap \mathbb{Q}$ liefern zwar eine Zerlegung von \mathbb{Q} mit ganz analogen Eigenschaften, aber auf der Grenze liegt eben keine rationale, sondern die irrationale Zahl $\sqrt{2}$, die eine „Lücke“ in \mathbb{Q} repräsentiert.¹¹ Insbesondere gibt es keine Schnitzzahl in \mathbb{Q} .

Theorem (Satz von Archimedes)

1. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > x$.
2. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $0 < 1/n < x$.
3. Sind $x, y \in \mathbb{R}$ beide positiv, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.

Beweis Teil 1: Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, und werden aus dieser Antithese unter Verwendung des Vollständigkeitsaxioms einen Widerspruch ableiten.

Spezieller Dedekindscher Schnitt: Wir betrachten die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > x\},$$

$$B := \{x \in \mathbb{R} : n \leq x \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

und bemerken, dass die Gleichungen $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{R}$ nach Konstruktion erfüllt sind. Aufgrund unserer Annahme gibt es mindestens ein $x \in \mathbb{R}$, das nicht zu A gehört und deshalb ist B nicht leer. Das Theorem über die Anordnung der natürlichen Zahlen garantiert $\mathbb{N} \subset A$ und damit insbesondere auch $A \neq \emptyset$. Weiterhin gilt $a \leq b$ für jedes $a \in A$ und jedes $b \in B$, denn zu jeder Wahl von a und b existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n \leq b$. Wir haben damit gezeigt, dass A und B ein Dedekindscher Schnitt sind und das Vollständigkeitsaxiom liefert eine entsprechende Schnitzzahl $s \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften der Schnitzzahl: Weil s Schnitzzahl ist, gilt $a \leq s$ für alle $a \in A$, und wegen $\mathbb{N} \subset A$ erhalten wir $n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gehört s zu B . Es muss aber auch $s - 1 \in B$ gelten, denn wenn jede natürliche Zahl kleiner als oder gleich s ist, so muss auch $n + 1 \leq s$ und damit $n \leq s - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig sein. Die Schnitzzahleigenschaft von s impliziert außerdem $s \leq b$ für alle $b \in B$ und mit $b = s - 1$ erhalten wir $s \leq s - 1$ bzw. $1 \leq 0$. Das ist gerade der ersehnte Widerspruch, denn es gilt ja $1 > 0$. Unsere Antithese war also falsch. Insbesondere gilt $A = \mathbb{R}$ sowie $B = \emptyset$.

Teil 2: Wegen $x^{-1} \in A$ können wir n so wählen, dass $n > x^{-1}$ erfüllt ist, und $x > 0$

¹⁰Streng genommen können wir dieses Beispiel an dieser Stelle nicht diskutieren, da wir noch nicht die Existenz der reellen Zahl $\sqrt{2}$ aus den Axiomen abgeleitet haben. Siehe dazu das Ende dieses Kapitels.

¹¹Übungsaufgabe: Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, d.h. es keine rationale Zahl $q = m/n$ mit $q \cdot q = 2$ geben kann.

impliziert $x^{-1} > 0$ (zweite Folgerung aus den Anordnungsaxiomen). Mit der dritten Folgerung aus den Anordnungsaxiomen können wir schließlich $1/n < x$ und $0 < 1/n$ ableiten.

Teil 3: Die Behauptung ergibt sich, wenn der erste Teil für y/x (anstelle von x) ausgewertet wird. \square

Bemerkungen

1. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$, nämlich wenn wir ein n_* mit $n_* > x$ gefunden haben, so gilt $n > x$ auch für jedes $n > n_*$.
2. Der zweite Teil des Theorems wird auch *Satz von Eudoxos* genannt und wird sehr oft angewendet. Da die Aussage des Satzes nicht nur für ein n , sondern für alle hinreichend großen gilt, kann man für m gegebene positive reelle Zahlen x_1, \dots, x_m sogar immer ein $n \in \mathbb{N}$ finden, sodass die Abschätzungen

$$0 < \frac{1}{n} < x_1, \quad 0 < \frac{1}{n} < x_2, \quad \dots, \quad 0 < \frac{1}{n} < x_m$$

gleichzeitig erfüllt sind.

3. Übungsaufgabe: Zeigen Sie (mit einem möglichst kurzen Beweis), dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ auch ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $-n < x$.

Theorem (Approximationsatz) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $\xi \in \mathbb{Q}$, sodass $x - \varepsilon < \xi < x + \varepsilon$.

Beweis Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < 1/n < \varepsilon$ nach dem Satz von Eudoxos und betrachten zunächst den Fall $x > 0$. Dann gibt es nach dem Satz von Archimedes ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > nx$. Wir wählen nun die kleinste dieser Zahlen, wobei dann auch $k - 1 \leq nx$ erfüllt sein muss (sonst wäre ja k nicht die kleinste natürliche Zahl mit $k > nx$). Insgesamt ergeben sich nach kleineren Umstellungen und wegen $k \leq k + 1$ die Ungleichungen

$$nx \leq k + 1, \quad k \leq nx + 1.$$

Wir dividieren jeweils durch n und erhalten wegen $1/n < \varepsilon$ für $\xi := k/n \in \mathbb{Q}$ die Abschätzungen

$$x < \xi + \varepsilon, \quad \xi < x + \varepsilon,$$

die beide Teile der gewünschten Doppelungleichung implizieren. Es bleibt der Fall $x \leq 0$ zu diskutieren. Für $x = 0$ können wir einfach $\xi = 0$ setzen. Für $x < 0$ können wir den ersten Teil des Beweises auf die Zahl $-x$ anwenden und erhalten ein $\xi \in \mathbb{Q}$ mit $-x - \varepsilon < \xi$ und $\xi < -x + \varepsilon$. Insbesondere besitzt dann $-\xi$ die gewünschten Eigenschaften. \square

Bemerkungen

1. Wir können $\varepsilon > 0$ als vorgegebene Fehlerschranke interpretieren. Egal wie klein diese auch ist, wir finden zu jedem reellen x ein rationales ξ , sodass der absolute Approximationsfehler $|x - \xi|$ unterhalb der Schranke liegt, wobei $|x - \xi|$ der Abstand von x und ξ ist (siehe dazu weiter unten).
2. Man sagt auch, \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R} .

Wurzeln als spezielle Schnitzzahlen

Vorbemerkung Wir zeigen mit Hilfe der Axiome, dass die Wurzeln positiver reeller Zahlen wohldefiniert sind. Wir beginnen mit einem wichtigen Hilfssatz und werden dann eine Idee benutzen, die wir schon oben im Beispiel kennengelernt hatten.

Lemma (Bernoullische Ungleichung) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Für $x \neq 0$ und $n \neq 1$ gilt sogar die strikte Ungleichung, d.h. wir dürfen dann $>$ statt \geq schreiben.

Beweis Für $x = 0$ ist die Behauptung trivial und für $x \neq 0$ benutzen wir das Prinzip der vollständigen Induktion, wobei der Induktionsanfang mit $n = 1$ ebenfalls trivial ist. Der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x+0,$$

wobei wir $n > 0$ und $x^2 > 0$ benutzt haben. \square

Theorem (Existenz und Eindeutigkeit reeller Wurzeln) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ und $s^k = x$.

Beweis Kandidat für s : Für festes x und $k > 1$ setzen wir

$$A := \{a \in \mathbb{R} : a \leq 0 \text{ oder } a^k \leq x\}, \quad B := \{b \in \mathbb{R} : b > 0 \text{ und } b^k > x\}.$$

Nach Definition gilt $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{R}$ sowie $a < b$ für jede Wahl von $a \in A$ und $b \in B$. Außerdem ist weder A noch B leer (dies folgt aus $0 \in A$ und weil der Satz von Archimedes ein n mit $n^k > n > x$ liefert), d.h. A und B sind ein Dedekindscher Schnitt und es existiert genau eine entsprechende Schnitzzahl $s \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass auch $s^k = x$ gelten muss, indem wir die Fälle $s^k < x$ und $s^k > x$ ausschließen.

Erstes Widerspruchsargument: Angenommen, es gilt $s^k < x$. Der binomische Satz impliziert

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{s^{k-j}}{n^j} = s^k + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{s^{k-j}}{n^{j-1}} \leq s^k + \frac{\xi}{n},$$

wobei

$$\xi := \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} s^{k-j} > 0$$

zwar von s , aber nicht von n abhängt und wir benutzt haben, dass $1/n^{j-1} \leq 1$ für alle $j \geq 1$ gilt. Nach dem Satz von Eudoxos wählen wir $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{x - s^k}{\xi}$$

und schließen via

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^k \leq s^k + \xi \frac{x - s^k}{\xi} = x,$$

dass $s + 1/n$ zu A gehört. Da aber $a \leq s$ für alle $a \in A$ gilt, erhalten wir $s + 1/n \leq s$ und damit einen Widerspruch.

Zweites Widerspruchsargument: Angenommen, es gilt $s^k > x$. Nach dem Satz von Eudoxos können wir $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen, sodass

$$0 < \frac{1}{n} < s, \quad 0 < \frac{1}{n} < \frac{s(s^k - x)}{k s^k}$$

gilt. Zusammen mit der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^k = s^k \left(1 - \frac{1}{n s}\right)^k \geq s^k \left(1 - \frac{k}{n s}\right) > s^k \left(1 - \frac{s^k - x}{s^k}\right) = x,$$

d.h. $s - 1/n$ gehört zur Menge B . Dies impliziert aber $s \leq s - 1/n$ (denn es gilt $s \leq b$ für alle $b \in B$) und wir haben den gesuchten Widerspruch gefunden.

Existenz und Positivität: Wir haben bisher die Existenz von $s \in \mathbb{R}$ mit $s^k = x$ gezeigt. Da $a \leq s$ für alle $a \in A$ gilt, folgt $s \geq 0$ aus $0 \in A$. Andererseits muss auch $s \neq 0$ wegen $x \neq 0$ gelten.

Eindeutigkeit: Sei nun $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ beliebig mit $\tilde{s}^k = x$ und $\tilde{s} > 0$. Nach den Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen muss dann $a \leq \tilde{s}$ für alle $a \in A$ und $b > \tilde{s}$ für alle $b \in B$ gelten, d.h. \tilde{s} ist Schnitzzahl zu A und B . Da es nach dem Vollständigkeitsaxiom aber nur eine solche Schnitzzahl gibt, folgt schließlich $s = \tilde{s}$. \square

Bemerkungen

1. Wir schreiben $s = \sqrt[k]{x}$ und nennen s die k -te reelle Wurzel von x . Im Fall $k = 2$ heißt s auch reelle Quadratwurzel von x und wird als $s = \sqrt{x}$ notiert.
2. Das Theorem deckt nur den Fall $x > 0$ ab, denn für $x < 0$ gibt es keine Wurzeln im Reellen. Wegen $0 \cdot 0 = 0$ setzen wir $\sqrt[k]{0} := 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
3. Die Zahl $s = \sqrt[k]{x}$ ist die einzige Lösung der algebraischen Gleichung $s^k = x$, für die $s \in \mathbb{R}$ und $s > 0$ gilt. Wir werden später lernen, dass es aber weitere Lösungen in der Menge der komplexen Zahlen gibt.
4. Für positive reelle Zahlen folgt aus $x_1 < x_2$ auch $\sqrt[k]{x_1} < \sqrt[k]{x_2}$. In der Tat, aus $\sqrt[k]{x_1} \geq \sqrt[k]{x_2}$ ergibt sich $(\sqrt[k]{x_1})^k \geq (\sqrt[k]{x_2})^k$ wegen **(O.3)** und damit auch $x_1 \geq x_2$, was aber $x_1 < x_2$ widerspricht.

Potenzen mit rationalen Exponenten Für beliebige $m, k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ setzen wir wie üblich

$$x^{m/k} := (\sqrt[k]{x})^m, \quad x^{-m/k} := (\sqrt[k]{x})^{-m}.$$

Diese Definitionen implizieren in Kombination mit den Körperaxiomen die bekannten Rechenregeln

$$x^{p+q} = x^p \cdot x^q, \quad x^{p \cdot q} = (x^p)^q, \quad x^p \cdot y^p = (x \cdot y)^p$$

für beliebige positive $x, y \in \mathbb{R}$ und alle Exponenten $p, q \in \mathbb{Q}$.

Ausblick: Potenzen mit nichtrationalen Exponenten werden wir erst später besprechen, da diese durch Grenzwertbildung gewonnen werden.

Kapitel 3

Eigenschaften reeller Zahlen

Vorlesungswoche 03

3.1 Einige Grundbegriffe

Definition (Betrag und Vorzeichen) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ wird

$$|x| := \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

der Betrag (oder der Absolutbetrag) von $x \in \mathbb{R}$ genannt. Das Vorzeichen (bzw. das Signum) einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird durch

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

definiert und nimmt Werte in $\{-1, 0, +1\}$ an.

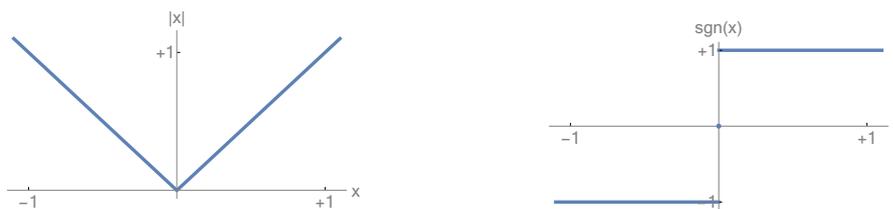


Abbildung Graphen der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ (links) und der Signumsfunktion $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ (rechts).

Bemerkungen

1. Es gilt stets $x = \operatorname{sgn}(x) |x|$.
2. Wir können leicht zeigen, dass die logischen Äquivalenzen

$$|x - y| < \varepsilon \quad \iff \quad x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \quad \iff \quad y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$$

für alle $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ erfüllt sind (Übungsaufgabe). Ein analoges Resultat gilt mit \leq anstelle von $<$.

3. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ kann $|x - y|$ als Abstand von x und y interpretiert werden. Insbesondere können wir (Übungsaufgabe) die folgenden Aussagen ableiten:

- (a) $|x - y| \geq 0$ (wobei $|x - y| = 0$ genau dann gilt, wenn $x = y$)
- (b) $|x - y| = |y - x|$
- (c) $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$ (die sogenannte Dreiecksungleichung)

4. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (wird auch Dreiecksungleichung genannt)
- (b) $|xy| = |x| |y|$
- (c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

5. Oftmals sind die Formeln

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}|x - y|, \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}|x - y|$$

nützlich.

6. Achtung: Es gilt $\sqrt{x^2} = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.¹

Intervalle Für je zwei reelle Zahlen a, b mit $a < b$ definieren wir die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} :

1. offenes Intervall: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. abgeschlossenes Intervall: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
3. halboffene Intervalle:

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Dabei wird $|I| := b - a$ immer die Länge des Intervalls genannt.



Abbildung Schematische Darstellung eines offenen (rot), eines abgeschlossenen (blau) und der zwei Varianten eines halboffenen Intervalls (rosa und lila).

Bemerkung

1. Wir benutzen auch oft die unbeschränkten bzw. halb-unendlichen Intervalle

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

sowie analoge Schreibweisen für $(-\infty, b)$ und $(-\infty, b]$. Beachte aber, dass $-\infty$ und $+\infty$ **keine** reellen Zahlen sind.

¹Die Formel $\sqrt{x^2} = x$ gilt im Allgemeinen **nicht**, sondern nur falls x nichtnegativ ist. Für negative x gilt nämlich $\sqrt{x^2} = -x$.

2. Man schreibt manchmal auch $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, aber **niemals** $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$ oder $\mathbb{Q} = (-\infty, +\infty)$.
3. Im Fall von $a = b$ setzen wir

$$[a, a] := \{a\},$$

d.h. es gibt abgeschlossene (aber keine offenen oder halboffenen) Intervalle der Länge 0.

3.2 Suprema und Infima

Definition (untere und obere Schranken) Sei U eine beliebige, aber nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} . Gilt

$$\xi \leq x \quad \text{für alle } x \in U \quad \text{bzw.} \quad \xi \geq x \quad \text{für alle } x \in U$$

für eine reelle Zahl $\xi \in \mathbb{R}$, so nennen wir diese untere bzw. obere Schranke von U . Ist ξ sogar die größte untere bzw. kleinste obere Schranke von U , so nennen wir ξ das Infimum bzw. das Supremum von U und schreiben $\xi = \inf U$ bzw. $\xi = \sup U$.

Bemerkungen

1. Die Definition des Infimums kann auch wie folgt formuliert werden, wobei dann klarer wird, was der präzise Sinn von *größte untere Schranke* ist: Die reelle Zahl ξ ist genau dann das Infimum der Menge U , wenn ξ eine untere Schranke von U ist und außerdem $\xi \geq \zeta$ für jede andere untere Schranke ζ von U gilt. Analog für das Supremum.
2. Ist ξ eine untere Schranke von U , so ist auch jedes ζ mit $\zeta < \xi$ eine untere Schranke von U . Dies ergibt sich aus der Definition sowie der Transitivität der Ordnungsrelation.
3. Wenn wir eine Formel der Bauart $\xi = \inf U$ beweisen wollen, müssen wir immer die folgenden zwei Teilaussagen begründen:
 - (a) ξ ist untere Schranke von U .
 - (b) Jede untere Schranke von U ist kleiner als oder gleich ξ . Oder alternativ: Jede Zahl größer als ξ kann keine untere Schranke von U sein.
4. Besitzt U keine untere (bzw. keine obere) Schranke, so setzen wir $\inf U = -\infty$ (bzw. $\sup U = +\infty$).
5. In der Definition ist $U = \emptyset$ nicht zugelassen.²

²Die leere Menge ist total entartet: Jede reelle Zahl ist sowohl untere als auch obere Schranke und daher müsste $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$ gelten. Für jede andere Menge $U \subset \mathbb{R}$ gilt aber $\inf U \leq \sup U$, da dann eine untere Schranke niemals größer als eine obere Schranke sein kann.

Beispiele

1. Für das offene Intervall $U := (a, b)$ ist jedes $\xi \leq a$ eine untere Schranke und jedes $\xi \geq b$ eine obere Schranke. Insbesondere gilt $\inf U = a$ und $\sup U = b$.
2. Für das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ sowie die halboffenen Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ gelten dieselben Aussagen.
3. \mathbb{Q} ist eine Teilmenge von \mathbb{R} , die weder eine obere noch eine untere Schranke besitzt.

Sprechweisen

1. Ist das Infimum bzw. das Supremum von U selbst ein Element von U , so nennen wir es das Minimum bzw. das Maximum von U und schreiben meist $\min U$ bzw. $\max U$ anstelle von $\inf U$ bzw. $\sup U$.
2. Wir nennen die Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ nach unten bzw. oben beschränkt, sofern sie mindestens eine untere bzw. obere Schranke besitzt (d.h. wenn $\inf U \neq -\infty$ bzw. $\sup U \neq +\infty$ gilt).
3. U heißt genau dann beschränkt, wenn es sowohl eine untere als auch eine obere Schranke gibt.

Beispiele

1. Für $U := [a, b]$ gilt $a = \min U$ und $b = \max U$. Die Menge $U = (a, b)$ besitzt hingegen weder ein Minimum noch ein Maximum, da sowohl das Infimum als auch das Supremum außerhalb von U liegen.
2. Das halboffene Intervall $[a, b)$ besitzt zwar ein Minimum (nämlich a), aber kein Maximum.
3. \mathbb{N} ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt. Ersteres ergibt sich aus dem Theorem über die Anordnung in \mathbb{N} , letzteres aus dem Satz von Archimedes.
4. Die Menge $U := \{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2 < 5\}$ ist (nach oben und unten) beschränkt, wobei $\inf U = -\sqrt{5}$ und $\sup U = +\sqrt{5}$ gilt. Beachte, dass U kein Intervall ist, sondern dass $U = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \setminus [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ gilt.³
5. Jede endliche Teilmenge besitzt genau ein Minimum und genau ein Maximum, denn durch endlich viele Vergleiche können wir feststellen, welches Element aus U das kleinste und welches das größte ist.

Theorem (Supremumsprinzip) Jede nach oben beschränkte und nichtleere Teilmenge U von \mathbb{R} besitzt genau ein Supremum in \mathbb{R} .

³ $M \setminus N$ ist die Differenzmenge von M und N . Sie besteht aus allen Elementen von M , die nicht in N enthalten sind.

Beweis *Existenz*: Wir betrachten die Mengen

$$B := \{b \in \mathbb{R} : b \text{ ist obere Schranke von } U\}, \quad A := \mathbb{R} \setminus B$$

und bemerken, dass wir im Fall $U \cap B \neq \emptyset$ bereits fertig sind, denn jedes $x \in U \cap B$ ist offensichtlich Maximum von U und damit auch Supremum von U . Wir können also von nun an $U \subset A$ annehmen. Dies impliziert $A \neq \emptyset$ und nach Annahme an U gilt auch $B \neq \emptyset$. Außerdem sind $A \cap B = \emptyset$ sowie $A \cup B = \mathbb{R}$ nach Konstruktion sichergestellt. Nach dem Schnittaxiom existiert nun genau eine Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$. Zum einen gilt $a \leq s$ für alle $a \in A$, d.h. wegen $U \subset A$ ist s obere Schranke von U und damit ein Element von B . Andererseits gilt $s \leq b$ für alle $b \in B$, d.h. s ist die kleinste obere Schranke. *Eindeutigkeit*: Sind s und \tilde{s} zwei Suprema von U , so gilt $s \leq \tilde{s}$, weil \tilde{s} obere Schranke und s kleinste obere Schranke ist. Analog folgt $\tilde{s} \leq s$ und insgesamt $s = \tilde{s}$. \square

Bemerkung

1. Ganz analog kann man ein Infimumsprinzip für nach unten beschränkte Mengen formulieren und beweisen (Übungsaufgabe).
2. Man kann auch das Supremumsprinzip als Vollständigkeitsaxiom verwenden und dann das Schnittaxiom mit dessen Hilfe beweisen.
3. Es gibt wieder kein Analogon in \mathbb{Q} , denn die Menge $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$ ist zwar nach oben beschränkt (zum Beispiel durch die rationale Zahl 2), aber besitzt in \mathbb{Q} eben kein Supremum (da $\sqrt{2}$ irrational ist).

Lemma (Extrema für Teilmengen von \mathbb{Z}) Für jede nach oben (bzw. unten) beschränkte, nichtleere Teilmenge U von \mathbb{Z} existiert ein eindeutiges Maximum (bzw. Minimum).

Beweis Wir zeigen nur die Maximumsversion (die Minimumsversion ergibt sich dann analog) und wollen im Folgenden annehmen, dass U unendlich viele Elemente enthält (für den endlichen Fall siehe die Bemerkung oben). Es existiert eine reelle obere Schranke für U und nach dem Satz von Archimedes auch eine obere Schranke in \mathbb{N} , also ein $\bar{j} \in \mathbb{Z}$ mit $x < \bar{j}$ für alle $x \in U$. Insbesondere gilt dann $j \notin U$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \geq \bar{j}$. Andererseits muss es ein $\underline{j} \in \mathbb{Z}$ mit $\underline{j} < \bar{j}$ und $\underline{j} \in U$ geben, da andernfalls U die leere Menge wäre. Zwischen \underline{j} und \bar{j} gibt es aber nur endlich viele ganze Zahlen, nämlich

$$\underline{j}, \quad \underline{j} + 1, \quad \underline{j} + (1 + 1), \quad \dots, \quad \bar{j} = \underline{j} + \left(\underbrace{1 + \dots + 1}_{\bar{j} - \underline{j} \text{ Summanden}} \right),$$

und daher ist die Menge $\tilde{U} := \{j \in U : \underline{j} \leq j \leq \bar{j}\}$ endlich. Durch endlich viele Vergleiche können wir feststellen, welches der Elemente von \tilde{U} am größten ist, und dieses ist dann offensichtlich das Maximum von U . \square

Bemerkungen

1. Eine vereinfachte Version des Lemmas wird manchmal das Wohlordnungsprinzip genannt: Jede nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} besitzt ein kleinstes Element.
2. Die Aussage des Lemmas ist anschaulich sofort klar, aber wir mussten uns vergewissern, dass dies wirklich aus den Axiomen abgeleitet werden kann.

Lemma (Supremum und Häufungseigenschaft) Besitzt $U \subset \mathbb{R}$ ein Supremum, aber kein Maximum, so existieren zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ *unendlich* viele $x \in U$, für die jeweils $\sup U - \varepsilon < x < \sup U$ gilt.

Beweis *Teil 1*: Nach Voraussetzung ist $\xi := \sup U \in \mathbb{R}$ kein Element von U und es gilt $x < \xi$ für alle $x \in U$. Die Menge

$$V := \{x \in U : x > \xi - \varepsilon\}.$$

ist nicht leer, denn andernfalls wäre $\xi - \varepsilon$ auch eine obere Schranke für U und ξ könnte nicht die kleinste obere Schranke sein. Die Menge V kann aber auch nicht endlich sein, denn sonst besäße sie ein Maximum. Wegen $\max V = \max U < \xi$ würde es also wieder ein obere Schranke geben, die echt kleiner als ξ wäre. Also muss V unendlich viele Elemente besitzen, wobei $\xi - \varepsilon < x < \xi$ nach Konstruktion für jedes $x \in V$ gilt.

Bemerkungen

1. Die Voraussetzungen an U implizieren, dass U selbst eine unendliche Menge ist.
2. Eine analoge Häufungseigenschaft betrifft den Fall, dass U ein Infimum, aber kein Minimum besitzt: Dann gilt $\inf U < x < \inf U + \varepsilon$ für unendlich viele $x \in U$.
3. *Ausblick**: Wir können das Theorem auch wie folgt formulieren und beweisen: Besitzt U ein Supremum, aber kein Maximum, so existiert eine streng monoton wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Elementen von U , die von unten gegen $\xi = \sup U$ konvergieren. Eine solche Folge kann zum Beispiel rekursiv wie folgt gewonnen werden:

(a) Rekursionsanfang ($n = 1$): Wähle $x_1 \in U$ beliebig.

(b) Rekursionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$): Ausgehend von x_n , wähle ein $x_{n+1} \in U$, das zwischen $\frac{1}{2}(x_n + \xi)$ und ξ liegt.⁴

Insbesondere gilt dann

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi = \sup U$$

sowie $|\xi - x_n| \leq |\xi - x_1| 2^{-n}$ nach Konstruktion.

3.3 Einige Ungleichungen*

Vorbemerkung In der Analysis geht es oftmals nicht darum, eine reelle Zahl zu berechnen, sondern sie nach oben oder unten abzuschätzen. Ungleichungen sind dabei ein ganz wesentliches Hilfsmittel.

Lemma (gewichtetes arithmetisches Mittel) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und gegebene positive reelle Zahlen p_1, \dots, p_n gilt

$$\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

⁴Für $x_n < \xi$ liegt $\frac{1}{2}(x_n + \xi)$ genau in der Mitte zwischen x_n und ξ .

Beweis Bezeichnen α bzw. β das Minimum bzw. das Maximum in der Behauptung, so gilt $\alpha \leq x_j \leq \beta$ und damit

$$p_j \alpha \leq p_j x_j \leq p_j \beta \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach Summation erhalten wir

$$(p_1 + \dots + p_n) \alpha \leq p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \leq (p_1 + \dots + p_n) \beta$$

und können schließlich durch $p_1 + \dots + p_n$ teilen. \square

Bemerkung Die Koeffizienten p_1, \dots, p_n werden auch Gewichte genannt. Im Fall von $p_1 = \dots = p_n = 1$ handelt es sich um das übliche arithmetische Mittel.

Theorem (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Es gilt

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Beweis Siehe die Große Übung. \square

Bemerkung Oftmals wird die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2} \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2}$$

angegeben. Alle drei Formulierungen sind aber äquivalent (Übungsaufgabe).

Theorem (Minkowskische Ungleichung) Es gilt

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Beweis O.B.d.A.⁵ können wir

$$L := \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 > 0$$

annehmen, denn andernfalls gilt $L = 0$ und es ist nichts zu zeigen (beachte, dass Quadrate reeller Zahlen immer nichtnegativ sind). Wegen

$$(x_k + y_k)^2 = (x_k + y_k) x_k + (x_k + y_k) y_k$$

⁵Das Akronym o.B.d.A. meint *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* und wird in der Mathematik sehr oft verwendet.

und mit zweimaliger Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} L &= \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) x_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k) y_k \right) \\ &\leq \left(L^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \right) + \left(L^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2} \right) \\ &= L^{1/2} \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nach Division durch $L^{1/2} \neq 0$. □

Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Motivation Man kann \mathbb{R} in sehr natürlicher Weise zu einem größeren Zahlenkörper erweitern, indem man die Existenz einer imaginären Einheit i postuliert, sodass

$$i \cdot i = -1$$

gilt. Auf diese Weise entstehen die *komplexen Zahlen*, die bemerkenswerte Eigenschaften aufweisen und mannigfaltige Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik besitzen.

Definition Eine komplexe Zahl ist ein Paar (x, y) reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, wobei wir meist

$$x + i \cdot y \quad \text{statt} \quad (x, y)$$

schreiben und die Menge aller komplexen Zahlen mit \mathbb{C} bezeichnen. Die Addition bzw. Multiplikation komplexer Zahlen ist durch

$$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) := (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

bzw.

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

gegeben.

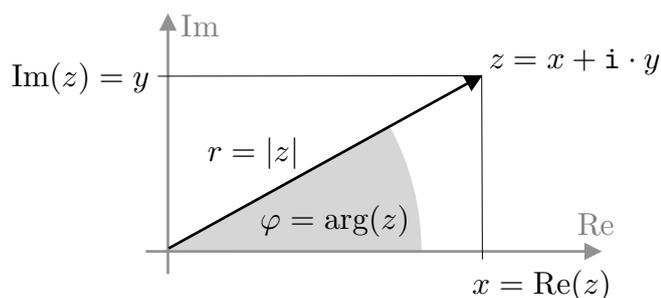


Abbildung Jede komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der Ebene, wobei die horizontale bzw. vertikale Achse den reellen bzw. imaginären Zahlen entspricht. Die Polarkoordinaten r, φ werden wir später einführen.

Theorem (algebraische Struktur) \mathbb{C} ist mit der obigen Definition der Addition und Multiplikation ein Körper, wobei $0 + i \cdot 0$ bzw. $1 + i \cdot 0$ die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation sind. Insbesondere ist für jedes $x + i \cdot y$ die Inverse bzgl. der Addition bzw. der Multiplikation durch

$$(-x) + i \cdot (-y) \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

gegeben, wobei in der letzten Formel $x + i \cdot y \neq 0 + i \cdot 0$ gelten muss.

Beweis Alle Aussagen können einfach nachgerechnet werden, wobei nur die reellen Körperaxiome und die obigen Definitionen angewendet werden. Die Details sind eine Übungsaufgabe. \square

symbolisches Rechnen mit komplexen Zahlen Die Formel der Addition ergibt sich in sehr natürlicher Weise. Mit rein formalen Operationen (Klammern auflösen, Vertauschung von Summanden, Neuklammern) erhalten wir

$$\begin{aligned} (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) &= x_1 + i \cdot y_1 + x_2 + i \cdot y_2 \\ &= x_1 + x_2 + i \cdot y_1 + i \cdot y_2 \\ &= (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2) \end{aligned}$$

als Herleitung der Additionsformel. Für die Multiplikation ergibt sich analog

$$\begin{aligned} (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 + i \cdot y_1 \cdot i \cdot y_2, \\ &= (x_1 \cdot x_2 + i^2 \cdot y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2), \end{aligned}$$

wobei wir i zunächst wie eine freie Variable behandelt haben. Wenn wir nun $i^2 = -1$ einsetzen, erhalten wir gerade das Gesetz der Multiplikation.

Die Formel für die multiplikative Inverse sieht auf den ersten Blick seltsam aus, ergibt sich aber aus der formalen Nebenrechnung

$$\frac{1}{x + i \cdot y} = \frac{1}{x + i \cdot y} \cdot \frac{x - i \cdot y}{x - i \cdot y} = \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2},$$

wobei der erste Schritt gerade der Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners entspricht (siehe dazu weiter unten).

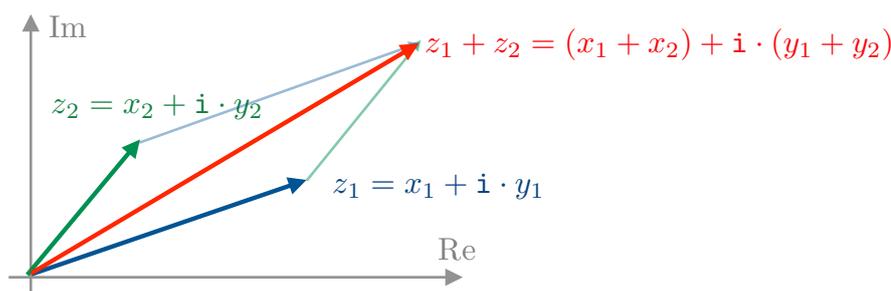


Abbildung Die Addition komplexer Zahlen entspricht gerade der Vektoraddition in der Ebene.

Bemerkungen und Schreibweisen

1. Die obigen Formeln implizieren

$$(x_1 + i \cdot 0) + (x_2 + i \cdot 0) = (x_1 + x_2) + i \cdot 0$$

und

$$(x_1 + i \cdot 0) \cdot (x_2 + i \cdot 0) = (x_1 \cdot x_2) + i \cdot 0$$

Insbesondere verhält sich die Menge $\{x + i \cdot 0 : x \in \mathbb{R}\}$ bzgl. der Rechenoperationen wie die reellen Zahlen. In diesem Sinne können wir \mathbb{R} als Teilmenge von \mathbb{C} auffassen, d.h. es gilt immer $x + i \cdot 0 = x \in \mathbb{R}$.

2. Eine komplexe Zahl der Bauart $0 + i \cdot y$ wird imaginäre Zahl genannt¹, wobei

$$(0 + i \cdot y_1) + (0 + i \cdot y_2) = 0 + i \cdot (y_1 + y_2)$$

und

$$(0 + i \cdot y_1) \cdot (0 + i \cdot y_2) = -y_1 \cdot y_2 + i \cdot 0$$

gilt. Die Summe imaginärer Zahlen ist also wieder imaginär, aber ihr Produkt ist reell.

3. Statt $x + i \cdot y$ schreiben wir auch $x + i y$ oder $x + y i$ und $(-x) + i \cdot (-y)$ kann auch als $-x - i y$ notiert werden. Außerdem sind die Abkürzungen

$$x \text{ für } x + i \cdot 0, \quad i y \text{ für } 0 + i \cdot y, \quad i \text{ für } 0 + i \cdot 1$$

konsistent mit den Rechenregeln.

4. Es gilt

$$i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = -1 + i \cdot 0 = -1,$$

d.h. i ist eine „komplexe Quadratwurzel“ von -1 . Es gibt aber noch eine zweite, nämlich $-i$ (Nachrechnen). Die Frage, wie viele komplexe Lösungen $x + i y$ der Gleichung $(x + i \cdot y)^n = \xi + i v$ es für gegebenes $\xi + i v \in \mathbb{C}$ gibt, werden wir weiter unten genauer diskutieren.

Achtung: Obwohl andere Autoren dies durchaus tun, schreiben wir in dieser Vorlesung **niemals** $\sqrt{-1}$, da damit ja i oder $-i$ gemeint sein könnte. Das Wurzelzeichen benutzen wir ausschließlich bei nichtnegativen reellen Zahlen.

Merkregel Mit komplexen Zahlen können wir sehr einfach und „wie gewohnt“ rechnen. Die einzigen Neuerungen sind die Zahl i sowie die Formel $i^2 = i \cdot i = -1$.

Beispiele: Es gilt $(2 + i) - (1 - 4i) = 1 + 5i$ sowie

$$(2 + i) \cdot (1 - 4i) = 2 - 4i^2 + i - 8i = 6 - 7i$$

¹Früher dachte man, dass i und seine Vielfachen nur in unserer Vorstellung existieren. Heute wissen wir: Die imaginären Zahlen sind genauso „real“ wie die reellen Zahlen und sind zum Beispiel in der Physik wichtig, um elektromagnetische Phänomene zu verstehen und zu beschreiben.

und

$$\frac{2 + i}{1 - 4i} = \frac{2 + i}{1 - 4i} \cdot \frac{1 + 4i}{1 + 4i} = \frac{-2 + 9i}{1^2 + 4^2} = -\frac{2}{17} + \frac{9}{17}i,$$

wobei wir im ersten Schritt der letzten Formel wieder mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert haben (das ist der *Universaltrick* bei der Division). Außerdem gilt

$$\dots, i^{-1} = -i, i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

d.h. die ganzzahligen Potenzen der imaginären Einheit sind 4-periodisch.

Definitionen

1. Wir schreiben

$$\operatorname{Re}(x + i \cdot y) := x, \quad \operatorname{Im}(x + i \cdot y) := y$$

und nennen x bzw. y den Realteil bzw. den Imaginärteil der komplexen Zahl $x + i \cdot y$.

2. Die nichtnegative reelle Zahl

$$|x + i \cdot y| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der Betrag von $x + i \cdot y$.

3. Die komplexe Zahl

$$\overline{x + i \cdot y} := x - i y$$

wird die konjugiert komplexe Zahl zu $x + i \cdot y$ genannt.²

Schreibweise Wir bezeichnen eine komplexe Zahl oftmals mit $z \in \mathbb{C}$ und schreiben dann $|z|$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und \bar{z} für den Betrag, den Realteil, den Imaginärteil und die konjugiert komplexe Zahl.

Lemma (Eigenschaften der komplexen Konjugation) Die Formeln

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$$

bzw.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

gelten für jedes $z \in \mathbb{C}$ bzw. für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Beweis Alle Behauptungen können mit $z = x + i y$ und $\bar{z} = x - i y$ aus den obigen Rechenregeln abgeleitet werden (Übungsaufgabe).

²In der komplexen Zahlenebene liegen $x + i \cdot y$ und $x - i \cdot y$ spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

Lemma (Eigenschaften des Betrages) Es gilt:

1. $|z| > 0$ für $z \neq 0$
2. $|\bar{z}| = |z|$, $|-z| = |z|$, $|\mathbf{i} z| = |z|$
3. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
4. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)
6. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Hierbei sind $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beliebig.

Beweis Die ersten vier Aussagen können direkt nachgerechnet werden, wobei die Details eine Übungsaufgabe sind. Um die fünfte Behauptung zu beweisen, berechnen wir

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

und erhalten mit

$$\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq |z_1 \cdot \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$$

die Abschätzung

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Wenn wir auf der linken bzw. rechten Seite die (reelle) Quadratwurzel ziehen, erhalten wir gerade das gewünschte Ergebnis.³ Die sechste Behauptung ist nur eine Variante der fünften (wir ersetzen z_2 durch $-z_2$ und benutzen $|z_2| = |-z_2|$). \square

Ausblick*: weitere Eigenschaften von \mathbb{C} Wir werden weiter unten sehen, dass \mathbb{C} ein *vollständiger Körper* ist, d.h. dass ein Analogon zum Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen erfüllt ist (in der Formulierung (**V₄**)). Die komplexen Zahlen sind aber *kein* angeordneter Körper, d.h. es gibt auf \mathbb{C} keine Positivitätsrelation, die den Axiomen (**O.1**) – (**O.3**) genügt.⁴

Ganz allgemein kann man sagen: Die reellen und die komplexen Zahlen verhalten sich in einigen Aspekten ganz ähnlich, in anderen aber sehr unterschiedlich.

³Die reelle Wurzel ist monoton, d.h. für alle nichtnegativen $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ gilt die Implikation $\xi_1 \leq \xi_2 \implies \sqrt{\xi_1} \leq \sqrt{\xi_2}$. Sie ergibt sich mittels der Ersetzung $\eta_j = \sqrt{\xi_j}$ als logische Kontraposition von $\eta_1 > \eta_2 \implies \eta_1^2 > \eta_2^2$.

⁴Würde eine solche Positivitätsrelation auf \mathbb{C} existieren, so müsste $z \cdot z > 0$ für jedes $z \neq 0$ gelten, wobei der Beweis analog zur zweiten Folgerung aus den reellen Anordnungsaxiomen geführt werden kann. Insbesondere müsste $1 = 1 \cdot 1 > 0$ sowie $-1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} > 0$ gelten und durch Addition beider Ungleichungen würde sich $0 = 1 - 1 > 0$ und damit ein Widerspruch ergeben.

Ausblick*: Polarkoordinaten und Eulerformel Wir haben die trigonometrischen Funktionen noch nicht eingeführt, wollen aber hier schon festhalten, dass sie eine wesentliche Rolle bei den komplexen Zahlen spielen werden. Es wird sich zeigen, dass zu jeder komplexen Zahl $z = x + i y$ ein reeller Radius $r \geq 0$ sowie ein reeller Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi)$$

gilt. Der Radius ist eindeutig durch $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ bestimmt, aber der Winkel wird nur eindeutig bis auf Vielfache von 2π festgelegt sein.⁵ Wir werden weiter unten auch die legendäre Euler-Formel

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

kennenlernen, mit deren Hilfe wir auch

$$z = x + i \cdot y = r \exp(i\varphi)$$

schreiben können und

$$r_1 \exp(i\varphi_1) \cdot r_2 \exp(i\varphi_2) = r_1 r_2 \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

als alternative Formulierung der komplexen Multiplikation ableiten können.

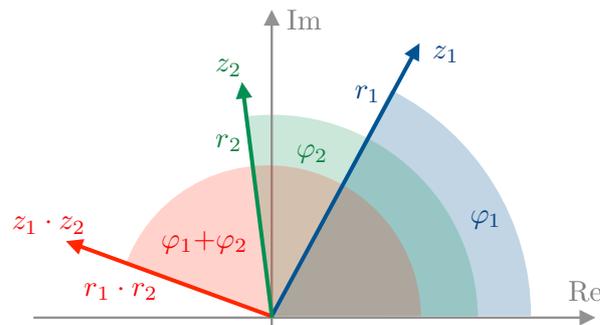


Abbildung Die Polarkoordinaten zeigen, dass auch die Multiplikation komplexer Zahlen eine geometrische Bedeutung besitzt: Die Radien werden multipliziert und die Winkel werden addiert.

Ausblick*: Fundamentalsatz der Algebra Jedes Polynom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

vom Grad n mit gegebenen Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ besitzt genau n komplexe Nullstellen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, wobei diese nicht unbedingt paarweise verschieden sein müssen⁶ und die Nummerierung der Nullstellen nicht festgelegt ist. Insbesondere kann das Polynom p im Komplexen via

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

faktorisieren werden, d.h. als Produkt von n Linearfaktoren geschrieben werden.⁷ Wir werden diesen Satz erst in der Vorlesung *Funktiontheorie* (das ist eigentlich Ana 4) beweisen, wenn wir die Theorie komplex differenzierbarer Funktionen studieren. Sie dürfen ihn aber ab sofort verwenden.

⁵Die Kreiszahl π werden wir auch noch rigoros einführen.

⁶Es kann Mehrfachnullstellen geben. Zum Beispiel sind die komplexen Nullstellen von

$$p(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2iz + z - i = (z - 1)^2(z - i)$$

durch $z_1 = z_2 = 1$ und $z_3 = i$ gegeben. Es gibt also eine Zweifach-Nullstelle und eine Einfach-Nullstelle.

⁷Das Polynom $q(x) = x^2 + 1$ kann im Reellen nicht faktorisiert werden, aber im Komplexen gilt $p(z) = z^2 + 1 = (z - i) \cdot (z + i)$.

Beispiel* Zu jedem $\zeta = \xi + i v \in \mathbb{C}$ gibt es nach dem Fundamentalsatz zwei komplexe Quadratwurzeln, d.h. Lösungen $z = x + i y$ der Gleichung

$$z^2 - \zeta = 0,$$

wobei man diese oftmals nicht mit z_1 und z_2 , sondern mit z_- und z_+ bezeichnet.⁸ Im einfachsten Fall verschwindet $v = \operatorname{Im}(\zeta)$ und wir können wegen $\zeta = \xi = \operatorname{Re}(\zeta) \in \mathbb{R}$ die Formeln⁹

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{\xi} \quad \text{falls } \xi > 0, v = 0$$

bzw.

$$z_{\pm} = \pm i \sqrt{-\xi} \quad \text{falls } \xi < 0, v = 0$$

ableiten. Im Fall von $v \neq 0$ gilt jedoch die kompliziertere Formel

$$z_{\pm} = \pm \left(\sqrt{+\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + v^2}} + i \operatorname{sgn}(v) \sqrt{-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + v^2}} \right) \quad \text{falls } v \neq 0,$$

wobei unter jedem der vier Wurzelzeichen eine nichtnegative reelle Zahl steht und $\operatorname{sgn}(v) \in \{-1, +1\}$ das Vorzeichen von $v = \operatorname{Im}(\zeta) \neq 0$ ist.

Erinnerung: In dieser Vorlesung benutzen wir das Wurzelzeichen nur bei nichtnegativen reellen Argumenten. Wir schreiben zum Beispiel **niemals** $\sqrt{1+i}$, da dann nicht klar ist, welche der beiden komplexen Lösungen zu $z^2 = 1+i$ gemeint ist.¹⁰

⁸Die Indizes $-$ und $+$ bedeuten dabei **nicht**, dass z_- bzw. z_+ positiv bzw. negativ wären, denn diese Begriffe haben im Komplexen ja keinen Sinn (siehe oben).

⁹Das Zeichen \pm bezeichnet keine Rechenoperation, sondern ist nur eine nützliche Schreibweise, um die separaten Formeln für z_- und z_+ zusammenzufassen.

¹⁰Die komplexen Lösungen zu $z^2 = 2$ sind $z_- = -\sqrt{2}$ und $z_+ = +\sqrt{2}$.

Kapitel 5

Zahlenfolgen

Vorlesungswoche 04

Vorbemerkung In diesem Kapitel diskutieren wir die Konvergenz von reellen und komplexen Zahlenfolgen. Wir legen damit die Grundlagen für alle Grenzübergänge in der Mathematik und damit insbesondere für die Theorien der Reihen, Ableitungen und Integrale.

Im Folgenden bezeichnet ε immer eine positive reelle Zahl. Diese Standardnotation wird seit ca. 150 Jahren in der Mathematischen Analysis benutzt und taucht immer wieder in der sogenannten *Epsilontik* auf.

5.1 Definition und Konvergenz

Definition Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei wir meist

$$x_n \quad \text{statt} \quad f(n)$$

schreiben und x_n das n -te Glied der Folge nennen.

Bemerkungen

1. Folgen werden oftmals durch eine Formel definiert, zum Beispiel durch

$$x_n = 1/n^2.$$

2. Wichtig sind auch rekursive (bzw. induktive) Definitionen, wie zum Beispiel

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 - 1,$$

bei denen die Folgenglieder nur indirekt gegeben sind. Insbesondere kennen wir den Wert von x_n erst, wenn wir aus x_1 bereits sukzessive die Werte x_2, \dots, x_{n-1} berechnet haben.

3. Eine reelle Folge können wir uns via

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

auch als unendliche Liste ihrer Glieder vorstellen. Wir bezeichnen eine Folge oftmals mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. In der Mathematik dürfen aber keine nicht-eindeutigen Definitionen verwendet werden. Wenn wir zum Beispiel

$$(2, 4, 6, 8, \dots)$$

schreiben, muss zweifelsfrei klar sein, ob die Folge der geraden natürlichen Zahlen gemeint ist oder nicht.¹

5. Analog ist eine komplexe Zahlenfolge eine Abbildung von $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei wir die Folgenglieder meist mit z_n bezeichnen.

Definition Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, sofern es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|x_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N$$

gilt. Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \text{oder} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$$

und nennen ξ den Grenzwert (oder den Limes) der Folge.

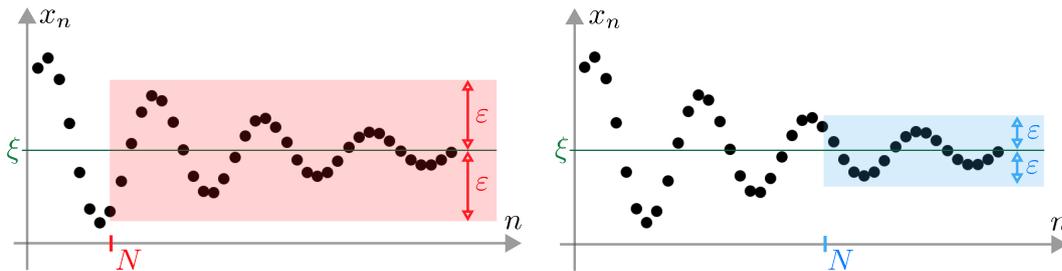


Abbildung Schematische Darstellung einer konvergenten reellen Zahlenfolge mit Grenzwert ξ : Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen entsprechenden Index N . Beachte, dass hier die Folge durch ihren Graphen dargestellt ist, d.h. durch die zweidimensionale Punktmenge $\{(n, x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ (schwarze Punktwolke).

Bemerkungen

1. Im Fall von $\xi = 0$ sprechen wir von einer Nullfolge.
2. Wir sagen auch: x_n konvergiert (oder strebt) für $n \rightarrow \infty$ gegen ξ .
3. Eine Folge, die nicht konvergiert, wird divergent genannt. Wir werden unten sehen, dass es verschiedene Gründe für Divergenz gibt.
4. Eine andere, sehr intuitive Notation für den Grenzwert ist x_∞ (anstelle von ξ), aber diese wird von vielen Autoren nicht verwendet.
5. N ist in der obigen Definition nicht eindeutig, denn jede größere natürliche Zahl besitzt auch die entsprechende Eigenschaft. Der kleinstmögliche Wert von N wird außerdem in aller Regel von ε abhängen, wobei gilt: Je kleiner ε ist, desto größer muss N sein.

¹Die Webseite *The Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OECS) zeigt, dass sehr viele Folgen eine mathematische Bedeutung besitzen und dass es sehr viele unterschiedliche Folgen geben kann, die mit endlich vielen vorgegebenen Gliedern starten.

6. Einen Konvergenzbeweis mit der obigen Definition kann man sich als eine Art Garantiererklärung vorstellen: Egal welches $\varepsilon > 0$ uns von einer höheren Macht vorgegeben wird, wir müssen immer in der Lage sein, ein entsprechendes N zu liefern.²
7. In der mathematischen Praxis wird die Konvergenz einer Zahlenfolge oftmals nicht direkt mit der Definition nachgeprüft, sondern aus anderen Prinzipien geschlossen oder mithilfe von Rechenregeln aus bereits bekannten Grenzwertformeln abgeleitet. Siehe dazu weiter unten.
8. Wenn wir die Formel $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ beweisen wollen, müssen wir im Prinzip immer die folgenden zwei Teilprobleme diskutieren:
 - (a) Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ überhaupt?
 - (b) Wenn ja, ist ξ wirklich der Grenzwert?

Oftmals ist es jedoch möglich, beide Fragen gleichzeitig zu beantworten.

9. Alternative Formulierung: Es gilt $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|\xi - x_n| < \varepsilon$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, bzw.

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen)

erfüllt ist.

10. Analog wird die Konvergenz von komplexen Zahlenfolgen definiert, wobei dann die komplexe Betragsfunktion zu verwenden ist und wir meist ζ statt ξ und z_n statt x_n schreiben. In rein symbolischer Schreibweise gilt also

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N : n > N \implies |z_n - \zeta| < \varepsilon,$$

wobei man eigentlich noch die Bedingungen $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ usw. unterbringen müsste.³

Klarstellung Der obige Konvergenzbegriff ist zentral für die gesamte Mathematik. Sie müssen ihn unbedingt in allen seinen Facetten verinnerlichen.

Beispiele

1. Jede konstante Folge konvergiert. Oder anders gesagt: Gilt $x_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$, so ergibt sich $\xi = c$ in der Definition, denn für jedes $\varepsilon > 0$ können wir offensichtlich $N = 1$ setzen.

²Wenn die Macht uns wohlgesonnen ist, gibt sie uns ein großes ε . Wenn Sie uns auf die Probe stellen will, wird sie uns ein sehr, sehr kleines ε geben und wir werden meist ziemlich ins Schwitzen kommen. Oder anders gesagt: Die kleinen ε machen die Probleme, nicht die großen!

³Solche abstrakten Schreibweisen vermeiden wir in dieser Vorlesung. Mathematische Erkenntnis drückt sich nicht in komplizierten Formeln, sondern im klaren Denken und richtigen Argumentieren aus.

2. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir (nach dem Satz von Archimedes) N mit $N > 1/\varepsilon$. Dann gilt

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

für jedes $n > N$. □

3. Für jeden festen Parameter $p \in \mathbb{Q}$ mit $p > 0$ gilt

$$x_n := \frac{1}{n^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis: Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$N > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}} = \varepsilon^{-1/p} \quad \text{bzw.} \quad N^{-p} < (\varepsilon^{1/p})^p = \varepsilon.$$

Nach den Potenzgesetzen⁴ gilt

$$|x_n - 0| = x_n = \frac{1}{n^p} < \frac{1}{N^p} = N^{-p} < \varepsilon$$

für jedes $n > N$. □

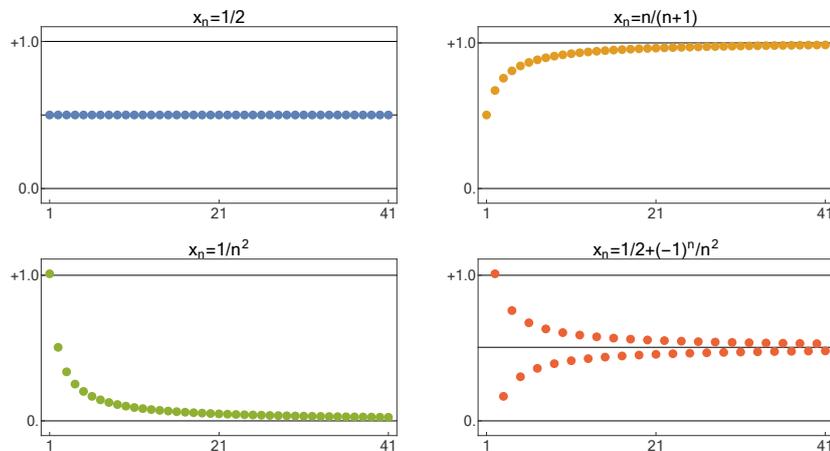


Abbildung Vier Beispiele für konvergente Folgen im Reellen, jeweils dargestellt durch die farbigen Punkte. Die grauen Linien sind nur Hilfslinien.

Gegenbeispiele

1. Die Folge

$$x_n := (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ +1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ist divergent, denn sie oszilliert zwischen zwei Werten. Wir werden unten sehen, dass sie genau zwei *Häufungspunkte* besitzt (nämlich -1 und $+1$).

⁴Wir benutzen hier insbesondere die Monotonie der Potenz: Für jedes $p = m/k$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ impliziert $0 < x < \tilde{x}$ die Abschätzungen $0 < x^p < \tilde{x}^p$ sowie $0 < \tilde{x}^{-p} < x^{-p}$. Siehe dazu das Kapitel über die Axiome von \mathbb{R} .

2. Für jedes $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 0$ beschreibt die Formel

$$x_n := n^s$$

eine divergente Zahlenfolge, die aber in einem *uneigentlichen Sinn* gegen $+\infty$ konvergiert (siehe dazu weiter unten).

3. Die Folge

$$x_n := (-1)^n n$$

ist ebenfalls divergent und wir werden später sehen, dass sie sich in einem uneigentlichen Sinne bei $-\infty$ und $+\infty$ häuft.

4. Auch

$$x_n := \sin(n)$$

beschreibt eine divergente Folge, wobei wir hier schon die Existenz der Sinusfunktion vorweggenommen haben. Sie besitzt sogar unendlich viele Häufungspunkte, nämlich jeden Punkt aus dem Intervall $[-1, +1]$.

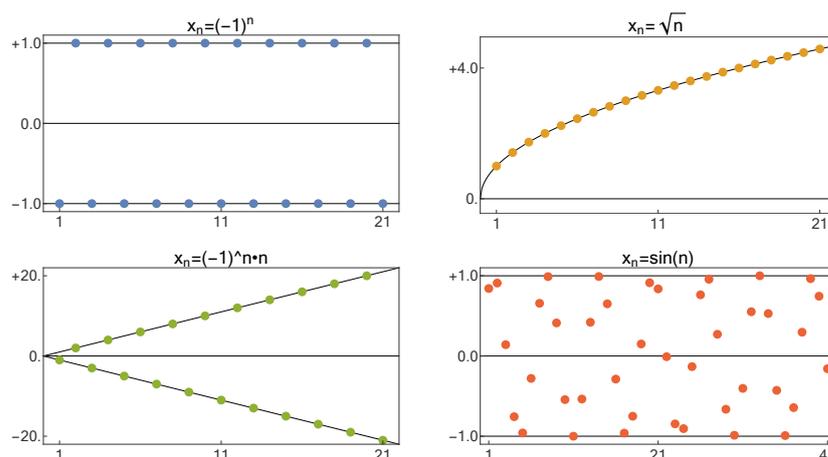


Abbildung Die vier Beispiele für divergente Folgen.

Ausblick Der Konvergenzbegriff für Zahlenfolgen kann leicht auf andere Folgen⁵ verallgemeinert werden, sofern man von *Umgebungen* des Limesobjektes reden kann: Ganz allgemein gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ genau dann, wenn jede ε -Umgebung von α fast alle Folgenglieder a_n enthält. Die ε -Umgebung einer reellen Zahl ξ bzw. komplexen Zahl ζ ist dabei durch

$$B_\varepsilon(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \varepsilon\} \quad \text{bzw.} \quad B_\varepsilon(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < \varepsilon\}$$

gegeben⁶ und beschreibt ein offenes Intervall der Länge 2ε bzw. eine offene Kreisscheibe vom Durchmesser 2ε mit Mittelpunkt ξ bzw. ζ .⁷

⁵Zum Beispiel Folgen von Vektoren, Folgen von Folgen, oder Folgen von Funktionen.

⁶Der Buchstabe B steht hier für *ball*, wobei es in der Mathematik Kugeln/Bälle mit beliebiger Dimension gibt: Ein Intervall ist ein eindimensionaler Ball, eine Kreisscheibe ein zweidimensionaler.

⁷*Offen* meint immer, dass der Rand nicht dazugehört. Im Gegensatz zu *abgeschlossen*.

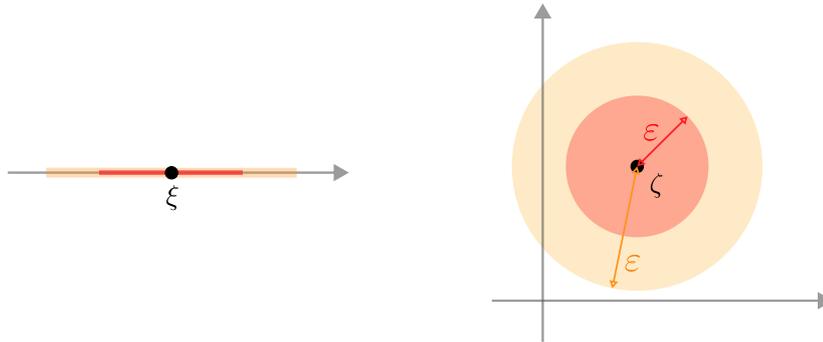


Abbildung Zwei verschiedene ε -Umgebungen von $\xi \in \mathbb{R}$ (links) und $\zeta \in \mathbb{C}$ (rechts). Der Umgebungsbegriff ist der Schlüssel zu vielen Konzepten und Resultaten der modernen Mathematik.

5.2 Mehr über Konvergenz

Über komplexe and reelle Konvergenz

Notation Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$z_n = x_n + i y_n \quad \text{bzw.} \quad \zeta = \xi + i v$$

das n -te Glied einer komplexen Folge bzw. den komplexen Grenzwert.

nützliche Beobachtung Machen Sie sich klar, dass die beiden Allaussagen

1. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein N , sodass $|z_n - \zeta| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein N , sodass $|z_n - \zeta| < \frac{1}{2} \varepsilon$ für alle $n > N$.

logisch äquivalent⁸ sind, wobei wir den Faktor $\frac{1}{2}$ auch durch jede andere positive reelle Zahl ersetzen dürften. Solche und ähnliche Argumente werden wir in der Analysis sehr häufig benutzen.

Lemma (Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Konvergenz)
Mit den obigen Notationen gilt

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta$$

genau dann, wenn

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \quad \text{und} \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

gilt. Oder anders gesagt: Eine komplexe Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sowohl ihre Realteile als auch ihre Imaginärteile als reelle Zahlenfolgen konvergieren.

Beweis *Hinrichtung:* Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - \zeta| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Für diese n gilt dann

$$|x_n - \xi| = |\operatorname{Re}(z_n - \zeta)| \leq |z_n - \zeta| < \varepsilon, \quad |y_n - v| = |\operatorname{Im}(z_n - \zeta)| \leq |z_n - \zeta| < \varepsilon$$

und es folgt die Behauptung.

⁸Salopp gesprochen gilt: Wenn eine Aussage für *alle* $\varepsilon > 0$ gilt, so gilt sie sinngemäß auch für *alle* $\varepsilon/2$. Ohne das Wort *alle* dürfen wir natürlich ε nicht durch $\varepsilon/2$ ersetzen.

Rückrichtung: Sei $\varepsilon > 0$ wieder beliebig. Nach Voraussetzung existieren natürliche Zahlen N_{Re} bzw. N_{Im} , sodass

$$|x_n - \xi| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |y_n - v| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

für $n > N_{\text{Re}}$ bzw. $n > N_{\text{Im}}$ gilt⁹. Für $n > N := \max\{N_{\text{Re}}, N_{\text{Im}}\}$ erhalten wir

$$|z_n - \zeta| \leq |(x_n - \xi) + \mathbf{i}(y_n - v)| \leq |x_n - \xi| + |\mathbf{i}| |y_n - v| < \frac{1}{2} \varepsilon + 1 \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon,$$

wobei wir die Dreiecksungleichung sowie die Eigenschaften der komplexen Betragsfunktion verwendet haben. \square

Beispiel Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\mathbf{i} n}{n+1} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) + \mathbf{i} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right) = \mathbf{i},$$

wobei der komplexe Grenzwert auf der linken Seite existiert, eben weil — siehe die Beispiele — die beiden reellen Grenzwerte in der Mitte existieren.

Bemerkung Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ können wir die Konvergenz im Reellen als Spezialfall der komplexen Konvergenz verstehen. Insbesondere gilt

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \iff \quad \xi + 0\mathbf{i} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 0\mathbf{i}),$$

wobei links bzw. rechts ein reeller bzw. ein komplexer Grenzwert steht. Außerdem gilt

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad \iff \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - \zeta|,$$

wobei der komplexe Grenzwert diesmal auf der linken Seite steht.

Merkregel: Die Konvergenzbegriffe im Reellen und Komplexen sind kompatibel und in gewisser Weise zueinander äquivalent.

Grundlegende Eigenschaften

Lemma Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis Wir beweisen nur die komplexe Version¹⁰ und nehmen an, dass für eine gegebene Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \tilde{\zeta}$$

im Sinne der Definition gilt. Um $\zeta = \tilde{\zeta}$ zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an und betrachten

$$\varepsilon := \frac{1}{2} |\zeta - \tilde{\zeta}| > 0.$$

Für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon, \quad |z_n - \tilde{\zeta}| < \varepsilon$$

und mittels einer nahrhaften Null sowie der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|\zeta - \tilde{\zeta}| = |(\zeta - z_n) - (\tilde{\zeta} - z_n)| \leq |\zeta - z_n| + |z_n - \tilde{\zeta}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |\zeta - \tilde{\zeta}|.$$

Das ist aber ein Widerspruch. \square

⁹Wir haben gerade die nützliche Beobachtung verwendet.

¹⁰Die reelle Variante kann entweder analog abgeleitet oder alternativ aus der vorherigen Bemerkung geschlossen werden.

Definition Die komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, sofern es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog für reelle Folgen.

Lemma Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis Wir benutzen die obigen Notationen, setzen $\varepsilon = 1$ und wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|z_n - \zeta| < 1$ und damit

$$|z_n| \leq |z_n - \zeta| + |\zeta| < 1 + |\zeta|$$

für alle $n > N$ gilt. Wir definieren

$$C := \max \{1 + |\zeta|, |z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|\}$$

und bemerken, dass die Abschätzung $|z_n| \leq C$ nun sowohl für alle $n > N$ als auch für alle $n \leq N$ gilt. \square

Achtung Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, das heißt nicht jede beschränkte Folge ist konvergent (siehe das erste Gegenbeispiel weiter oben).

Rechenregeln

Theorem (Rechenregeln für Grenzwerte, Teil 1) Die Grenzwertbildung ist mit den Grundrechenarten verträglich, d.h. aus

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta, \quad \tilde{z}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}$$

folgt

$$z_n \pm \tilde{z}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta \pm \tilde{\zeta}, \quad z_n \cdot \tilde{z}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta \cdot \tilde{\zeta}, \quad \frac{z_n}{\tilde{z}_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta}{\tilde{\zeta}}.$$

Dabei ist in der letzten Formel vorausgesetzt, dass $\tilde{z}_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und außerdem $\tilde{\zeta} \neq 0$ gilt.

Beweis Im Folgenden sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Teil 1/2: Die Dreiecksungleichung garantiert

$$|(z_n + \tilde{z}_n) - (\zeta + \tilde{\zeta})| \leq |z_n - \zeta| + |\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}|$$

und nach Voraussetzung¹¹ gilt

$$|z_n - \zeta| < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad |\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Da ε beliebig war, folgt die erste Behauptung und die zweite kann analog bewiesen werden.

Teil 3: Wir beginnen mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |z_n \cdot \tilde{z}_n - \zeta \cdot \tilde{\zeta}| &= \left| z_n \cdot \tilde{z}_n - \underbrace{\zeta \cdot \tilde{z}_n + \zeta \cdot \tilde{z}_n - \zeta \cdot \tilde{\zeta}}_{\text{nährhafte Null}} \right| \\ &\leq |z_n - \zeta| |\tilde{z}_n| + |\zeta| |\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}| \\ &\leq C |z_n - \zeta| + |\zeta| |\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}|, \end{aligned}$$

¹¹Wir wenden wieder die nützliche Beobachtung von oben an.

wobei die Konstante C so gewählt wurde, dass $|\tilde{z}_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (konvergente Folgen sind ja beschränkt). Nach Konvergenzvoraussetzung gilt nun

$$|z_n - \zeta| < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad |\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}| < \frac{\varepsilon}{2|\zeta|}$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ und dies impliziert die dritte Behauptung.¹²

Teil 4: Da wir Teil 3 schon bewiesen haben, müssen wir nur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tilde{z}_n} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}$$

zeigen. Die Voraussetzungen implizieren zum einen $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{z}_n| = |\tilde{\zeta}|$ und damit auch

$$|\tilde{z}_n| \geq \frac{1}{2} |\tilde{\zeta}|$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ (Übungsaufgabe). Für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$|\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}| \leq \frac{1}{2} |\tilde{\zeta}|^2 \varepsilon$$

und folglich auch die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{\tilde{z}_n} - \frac{1}{\tilde{\zeta}} \right| = \frac{|\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}|}{|\tilde{z}_n| |\tilde{\zeta}|} \leq \frac{|\tilde{z}_n - \tilde{\zeta}|}{\frac{1}{2} |\tilde{\zeta}|^2} < \frac{\frac{1}{2} |\tilde{\zeta}|^2 \varepsilon}{\frac{1}{2} |\tilde{\zeta}|^2} = \varepsilon.$$

Hieraus ergibt sich zunächst das Hilfsresultat und anschließend mit der dritten die vierte Behauptung. \square

Hinweis Sie fragen sich vielleicht, wie man sich die relativ technischen Beweise in diesem Abschnitt merken kann. Die Antwort ist: gar nicht. Es geht zunächst darum, die einzelnen Schritte zu verstehen. Mit der Zeit wächst Ihre Erfahrung und Sie werden erkennen, dass die zugrunde liegenden Beweisideen eigentlich sehr naheliegend sind und dass die Details aus Standardargumenten bestehen. Insbesondere wird es Ihnen nach einiger Zeit gelingen, entsprechende Beweise selbst zu führen.

Folgerung Die Implikation

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta \quad \implies \quad p(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(\zeta)$$

gilt für jedes komplexe Polynom $p(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ vom Grad k . Wie wir weiter unten sehen werden, meint diese Aussage gerade, dass jedes Polynom stetig ist.

Theorem (Rechenregeln für Grenzwerte, Teil 2) Konvergiert z_n für $n \rightarrow \infty$ gegen ζ , so gilt auch

$$|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\zeta|, \quad \overline{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{\zeta}$$

sowie

$$\operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\zeta), \quad \operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\zeta).$$

¹²Wir haben hier streng genommen $|\zeta| \neq 0$ vorausgesetzt. Im Fall von $|\zeta| = 0$ gilt aber $\zeta = 0$ und der Beweis wird sogar einfacher.

Beweis Wir beweisen nur die erste Behauptung; die zweite ist eine Übungsaufgabe und die dritte bzw. vierte haben wir schon oben in einer anderen Notation hergeleitet. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Nach Voraussetzung und Dreiecksungleichung gilt

$$\left| |z_n| - |\zeta| \right| \leq |z_n - \zeta| < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. □

Konvergenz nach Umformen Manchmal ist es sinnvoll, eine gegebene Formel für x_n oder z_n zunächst geschickt umzuformen, um anschließend die obigen Rechenregeln für Grenzwerte anzuwenden. Ein typisches Beispiel ist die Aussage

$$x_n := \sqrt{n^2 + n} - n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

die wir wie folgt ableiten können. Wir führen zunächst eine nahrhafte Eins ein und erhalten

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n \cdot 1}{n \cdot \left(\sqrt{1 + 1/n} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \end{aligned}$$

nach Anwendung elementarer Rechenregeln. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ können wir schließlich die Behauptung ablesen.¹³

Konvergenz reeller Zahlenfolgen

Vorbemerkung Da \mathbb{R} angeordnet ist, können wir die Konvergenz reeller Zahlenfolgen genauer charakterisieren und spezielle Konvergenzkriterien ableiten.

Folgerung (Vergleichsprinzip) Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit

$$x_n \leq \tilde{x}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\xi \leq \tilde{\xi}$$

für die Grenzwerte $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\tilde{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n$.

Beweis Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, und betrachten

$$\varepsilon := \frac{1}{3} (\xi - \tilde{\xi}) > 0.$$

Nach Konvergenzvoraussetzung gilt

$$x_n - \xi \leq |x_n - \xi| < \varepsilon, \quad \tilde{x}_n - \tilde{\xi} \leq |\tilde{x}_n - \tilde{\xi}| < \varepsilon$$

für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. In Kombination mit $x_n - \tilde{x}_n \leq 0$ und nach Einführung zweier nahrhafter Nullen erhalten wir via

$$3\varepsilon = \xi - \tilde{\xi} = (\xi - x_n) + (x_n - \tilde{x}_n) + (\tilde{x}_n - \tilde{\xi}) \leq \varepsilon + 0 + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

den gesuchten Widerspruch, denn es gilt ja $\varepsilon > 0$. □

¹³Wir haben hier benutzt, dass die reelle Wurzelfunktion stetig ist.

Achtung Beim Grenzübergang kann aus einer strikten Ungleichung eine Gleichheit werden. Zum Beispiel gilt

$$x_n := \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} =: \tilde{x}_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, aber im Limes $n \rightarrow \infty$ erhalten wir $\xi = 0 = \tilde{\xi}$.

Definition Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \text{bzw.} \quad x_{n+1} \geq x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

wird monoton fallend bzw. monoton wachsend genannt.

Bemerkung

1. Gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ sogar die strikte Ungleichung $x_{n+1} > x_n$ so sprechen wir von einer strikt monoton wachsenden Folge.¹⁴ Analog wird strikt monoton fallend definiert.
2. Für eine monoton wachsende Folge gilt

$$x_{n_2} \geq x_{n_1} \quad \text{für alle } n_2 > n_1,$$
 wobei man dies zum Beispiel für jedes feste n_1 durch vollständige Induktion bzgl. n_2 zeigen kann.
3. Da \mathbb{C} nicht angeordnet ist, kann die Monotonie komplexer Zahlenfolgen nicht in sinnvoller Weise definiert werden. Es kann natürlich passieren, dass die Real- und/oder Imaginärteile jeweils für sich betrachtet eine monotone reelle Folge bilden.
4. Verallgemeinerung*: Viele Aussagen über monotone Folgen gelten auch dann, wenn die definierende Ungleichung nicht für alle, sondern nur für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Theorem (Monotonieprinzip) Jede reelle Folge, die monoton und beschränkt ist, besitzt einen Grenzwert.

Beweis Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist (die Behauptung für fallende Folgen ergibt sich analog). Dann ist

$$\xi := \sup U \quad \text{mit} \quad U := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

nach Voraussetzung und dem Supremumsprinzip wohldefiniert, wobei $x_n \leq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir zeigen nun, dass ξ der gesuchte Grenzwert ist, wobei die Details unserer Argumentation davon abhängen, ob ξ zu U gehört oder nicht. Fall 1: Es gilt $\xi \notin U$, d.h. U besitzt gar kein Maximum. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Häufungseigenschaft von U ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\xi - \varepsilon < x_N < \xi$. Für alle $n > N$ gilt dann $\xi - \varepsilon < x_N < x_n < \xi$ und damit auch $|x_n - \xi| = \xi - x_n < \varepsilon$. Da ε beliebig war, haben wir insgesamt $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ gezeigt. Fall 2: Es gilt $\xi \in U$ bzw. $\xi = \max U$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = \xi$ und mit der Definition von ξ sowie der Monotonie der Folge schließen wir, dass $x_n = \xi$ bzw. $|x_n - \xi| = 0$ für alle $n \geq N$ gilt. Dies impliziert sofort die behauptete Konvergenz. \square

¹⁴Anstelle des Wortes *strikt* wird oft auch *streng* verwendet.

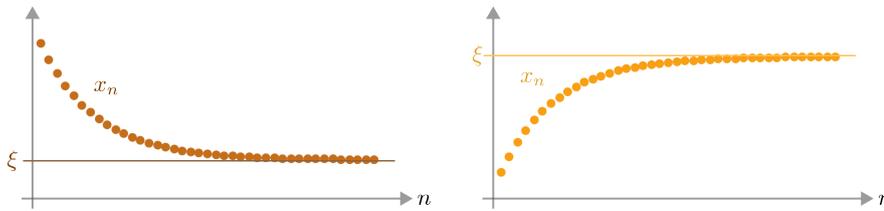


Abbildung Das Monotonieprinzip garantiert die Konvergenz gewisser reeller Folgen. Insbesondere gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \geq 1\}$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \geq 1\}$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die beschränkt sowie monoton fallend bzw. wachsend ist.

Bemerkung

1. Man kann das Monotonieprinzip auch so formulieren (Übungsaufgabe): Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.
2. Der Beweis zeigt, dass für eine monoton wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert ξ die Ungleichung $x_n \leq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog für fallende Folgen.
3. Bei monoton fallender bzw. wachsender Konvergenz schreiben wir oftmals $x_n \searrow \xi$ bzw. $x_n \nearrow \xi$ statt $x_n \rightarrow \xi$.

Theorem (Eulersche Zahl) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert $e \in \mathbb{R}$, der Eulersche Zahl genannt wird.

Beweis Monotonie: Mit elementaren Umformungen sowie der Bernoulli-Ungleichung (für die reelle Zahl $x = -1/(n+1)^2 > -1$) berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = 1 + \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \geq 1 \end{aligned}$$

und schließen, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Tat monoton wachsend ist.

Obere Schranke: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n}\right)^2$$

und weil die Bernoulli-Ungleichung, ausgewertet mit $x = -1/(2n+1) > -1$, die Abschätzung

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

impliziert, erhalten wir

$$x_n \leq x_{2n} \leq \left(1/\frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

Die Konvergenz folgt nun aus den Teilresultaten und dem Monotonieprinzip. \square

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
$x_n \approx$	2.000000	2.250000	2.370370	2.441406	2.488320	2.521626	2.546500
$n =$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
$x_n \approx$	2.593742	2.704814	2.716924	2.718146	2.718268	2.718280	2.718282

Tabelle Die Folge aus dem vorherigen Theorem konvergiert — allerdings sehr langsam — gegen $e \approx 2.718281828459045$. Jedes x_n ist dabei eine rationale Zahl, wohingegen e irrational ist (was aber nicht offensichtlich ist).

Theorem (Sandwichprinzip) Seien $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen, sodass

$$\underline{x}_n \leq x_n \leq \bar{x}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

sowie

$$\underline{\xi} = \bar{\xi}$$

mit $\underline{\xi} := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n$ und $\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n$. Dann gilt auch

$$\underline{\xi} = \xi = \bar{\xi}$$

mit $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Insbesondere konvergiert auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gemeinsamen Grenzwert.

Beweis Für festes $\varepsilon > 0$ können wir $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$|\underline{x}_n - \underline{\xi}| < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad |\bar{x}_n - \bar{\xi}| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

und (nach Dreiecksungleichung) auch

$$|\bar{x}_n - \underline{x}_n| \leq |\underline{x}_n - \underline{\xi}| + |\bar{\xi} - \underline{\xi}| + |\bar{x}_n - \bar{\xi}| < \frac{1}{3}\varepsilon + 0 + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon$$

für alle $n \geq N$ erfüllt ist, wobei die linke Seite wegen der Sandwich-Eigenschaft eine obere Schranke für sowohl $|x_n - \underline{x}_n|$ als auch für $|\bar{x}_n - x_n|$ ist. Damit erhalten wir

$$|x_n - \underline{\xi}| \leq |x_n - \underline{x}_n| + |\underline{x}_n - \underline{\xi}| \leq |\bar{x}_n - \underline{x}_n| + |\underline{x}_n - \underline{\xi}| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

für alle $n > N$. Da ε beliebig war, haben wir insgesamt gezeigt, dass x_n für $n \rightarrow \infty$ gegen $\underline{\xi} = \bar{\xi}$ konvergiert. \square

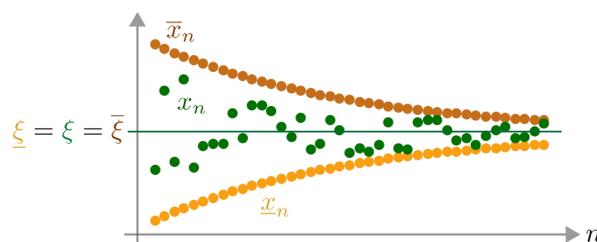


Abbildung Das Sandwich-Prinzip ein sehr mächtiges und robustes Werkzeug, um die Konvergenz reeller Folgen nachzuweisen. Beachte, dass $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht unbedingt monoton sein müssen.

Bemerkung Ein wichtiger Spezialfall ist gerade die im Bild dargestellte Situation: Es gilt die Sandwicheigenschaft für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n - \underline{x}_n = 0$ für eine monoton wachsende Folge $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine monoton fallende Folge $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel Die Konvergenzaussage

$$x_n = \frac{(\sin(n))^2}{n(2 + \cos(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

folgt aus dem Sandwich-Prinzip mit $\underline{x}_n = 0$ und $\bar{x}_n = 1/n$, wobei wir die Abschätzungen $-1 \leq \sin(x) \leq +1$ und $-1 \leq \cos(x) \leq +1$ vorweggenommen haben.

Uneigentliche Konvergenz Wir sagen, die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$x_n < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad x_n > +\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für alle} \quad n > N$$

gilt.

Beispiel Für jedes $p \in \mathbb{Q}$ mit $p > 0$ gilt

$$-n^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{sowie} \quad +n^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

im Sinne uneigentlicher Konvergenz, wobei dies mit dem Satz von Archimedes bewiesen werden kann (Übungsaufgabe).

Bemerkungen

1. Das Konzept der uneigentlichen Konvergenz ist sehr intuitiv und hat sich als ausgesprochen nützlich erwiesen. Wir können sagen: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ gilt genau dann, wenn x_n für $n \rightarrow \infty$ größer als jede vorgegebene reelle Zahl wird.
2. Achtung: Bei uneigentlicher Konvergenz handelt es sich um eine spezielle Form der Divergenz (siehe das zweite Gegenbeispiel zur Konvergenz). Dies liegt daran, dass $-\infty$ und $+\infty$ keine reellen Zahlen sind. Man spricht alternativ auch von bestimmter Divergenz.
3. Eine monoton wachsende Folge konvergiert entweder eigentlich gegen einen Grenzwert $\xi \in \mathbb{R}$ oder uneigentlich gegen $+\infty$ und eine analoge Aussage gilt für monoton fallende Folgen. Bei nicht-monotonen Folgen können wir aber nicht so einfach argumentieren (siehe wieder die Gegenbeispiele zur Konvergenz).
4. Verallgemeinerung*: Man kann uneigentliche Konvergenz auch für komplexe Folgen sinnvoll definieren, aber dann gibt es nicht mehr zwei „unendlich ferne Punkte“, sondern nur noch einen. Insbesondere konvergiert z_n für $n \rightarrow \infty$ genau dann gegen ∞ , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n| > 1/\varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

weiterführende Betrachtungen*

Vertauschung von Grenzübergängen* Oftmals tauchen in der Mathematik oder den Anwendungswissenschaften Größen auf, die von zwei Indizes — sagen wir n und m — abhängen und es stellt sich die Frage, ob wir die Grenzübergänge $n \rightarrow \infty$ und $m \rightarrow \infty$ in beliebiger Reihenfolge durchführen können.

Als einfaches, aber prototypisches Beispiel betrachten wir

$$x_{n,m} = \sqrt[m]{\gamma + \frac{1}{n}},$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ ein fester positiver Parameter ist. Für $\gamma = 2$ berechnen wir¹⁵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{2 + \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

sowie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{2 + \frac{1}{n}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{2} = 1,$$

d.h. hier ist es egal, ob wir erst m und dann n oder erst n und dann m nach ∞ schicken. Für $\gamma = 0$ ergeben sich jedoch mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0$$

zwei unterschiedliche Ergebnisse. Wir werden auf dieses Problem später noch einmal zurückkommen und besser verstehen, warum wir zwar für $\gamma = 2$, aber nicht für $\gamma = 0$ die Grenzübergänge $m \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow \infty$ vertauschen können.

Merkregel Zwei Grenzübergänge dürfen im Allgemeinen nicht vertauscht werden.

Grenzwerte rekursiv definierter Folgen* Oftmals werden Folgen *rekursiv*¹⁶ durch

$$x_1 = \mu, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

definiert, wobei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. die Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben sind und Rekursionsvorschrift bzw. Startpunkt genannt werden. Wir können die entsprechende Konvergenztheorie hier nicht im Detail diskutieren, wollen aber schon zwei wichtige Bemerkungen festhalten:

¹⁵Wir benutzen hier zwei Resultate aus der Schule, die wir aber in dieser Vorlesung erst später beweisen werden: Die reellen Wurzelfunktionen sind stetig und für alle $x > 0$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{x} = 1$.

¹⁶Statt *rekursiv* kann man auch *induktiv* oder *iterativ* verwenden.

1. Wenn x_n für $n \rightarrow \infty$ gegen ξ konvergiert, dann muss

$$\xi = f(\xi)$$

gelten¹⁷ und wir können durch Lösen dieser *Fixpunktgleichung* oftmals einige wenige Kandidaten für den Grenzwert explizit berechnen.

2. Es ist aber oftmals nicht einfach zu entscheiden, ob die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ überhaupt konvergiert oder (wenn ja) gegen welchen Kandidaten sie konvergiert.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \eta x(1 - x),$$

wobei $\eta \in \mathbb{R}$ ein positiver Parameter ist. Durch direkte Rechnungen können wir

$$\xi = f(\xi) \iff \xi \in \left\{ 0, \frac{\eta - 1}{\eta} \right\}$$

zeigen, dass heißt es gibt für festes η genau zwei Kandidaten für den Grenzwert ξ . Ob bzw. wogegen die Folge konvergiert, hängt aber ganz entscheidend von den Werten von μ und η ab.

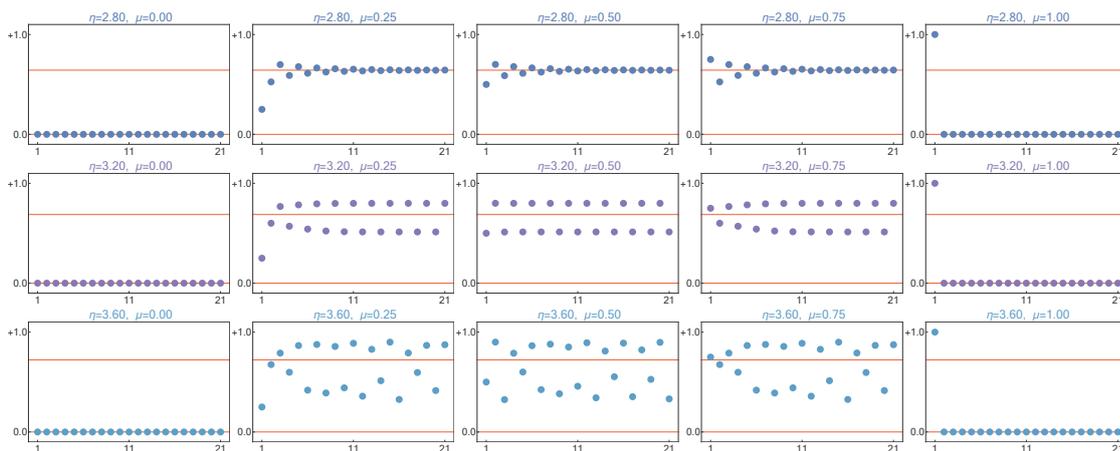


Abbildung Die Folge aus dem Beispiel für verschiedene Werte von μ und η , wobei die beiden Kandidaten für den Grenzwert ξ jeweils durch die rote Linie repräsentiert werden.

Ausblick: Rekursiv definierte Folgen sind Beispiele für *Dynamische Systeme* und können — in Abhängigkeit von f und μ — ein eher harmloses oder ein ausgesprochen kompliziertes Verhalten aufweisen, wobei wir dies im Rahmen der mathematischen *Chaostheorie* oftmals sehr gut verstehen und beschreiben können. Zum Beispiel illustriert die berühmte *Mandelbrotmenge*, wie das qualitative Verhalten der komplexen Folge

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

vom Wert des Parameters $c \in \mathbb{C}$ abhängt.

¹⁷Wir haben hier vorausgesetzt, dass f eine stetige Funktion ist. Zum Beispiel ein Polynom.

5.3 Teilfolgen und Häufungspunkte

Definition Eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt der komplexen Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|z_n - \zeta| < \varepsilon$ für *unendlich viele* (aber nicht unbedingt für *fast alle*) $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiele

1. Die alternierende reelle Folge mit $x_n = (-1)^n$ besitzt die beiden Häufungspunkte -1 und $+1$, aber keine weiteren.

Beweis: Für $\xi = -1$ bzw. $\xi = +1$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist die gewünschte Ungleichung für alle ungeraden bzw. alle geraden $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Für jeden anderen Wert von ξ und $\varepsilon < \min\{|+1 - \xi|, |-1 - \xi|\}$ gibt es jedoch überhaupt keinen Index $n \in \mathbb{N}$ mit der gewünschten Eigenschaft. \square

2. Die Folge mit $z_n = i^n$ besitzt genau vier verschiedene Häufungspunkte, nämlich alle $\zeta \in \{+i, -1, -i, +1\}$.

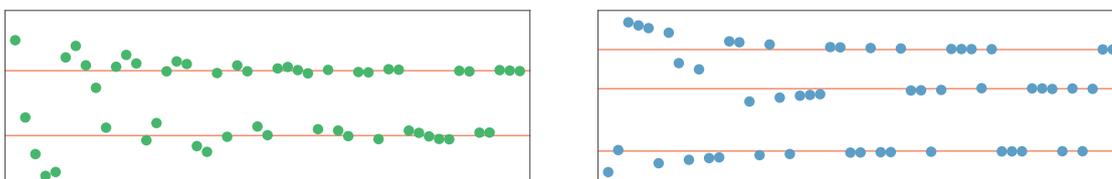


Abbildung Karikatur einer reellen Folge mit zwei (links) bzw. drei (rechts) Häufungspunkten, die jeweils durch die roten Linien repräsentiert werden. *Idee:* In jedem ε -Schlauch um jedem Häufungspunkt liegen immer unendlich viele Punkte der Folge.

Bemerkungen

1. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ deckt die Definition auch reelle Zahlenfolgen ab, wobei jeder Häufungspunkt dann eine reelle Zahl sein wird.
2. Manche Autoren benutzen das Wort *Häufungswert* anstelle von *Häufungspunkt*.
3. Wir werden unten beweisen, dass der einzige Häufungspunkt einer konvergenten Folge ihr Grenzwert ist.
4. Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so existiert ein $C > 0$ mit $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $|\zeta| \leq C$ für jeden Häufungspunkt ζ (Übungsaufgabe).
5. *Ausblick:* Wir werden später sehen, dass die Menge alle Häufungspunkte einer gegebenen Folge immer eine *abgeschlossene* Teilmenge von \mathbb{C} ist.

über Teilfolgen Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige komplexe Folge und ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine strikt monotone Folge von natürlichen Zahlen (die sogenannte Indexfolge), so wird

$$(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}, \dots)$$

die entsprechende Teilfolge von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genannt. Die Formeln $n_k = 2k$ bzw. $n_k = 2k-1$ beschreiben zum Beispiel die Teilfolgen

$$(z_{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (z_2, z_4, z_6, z_8, \dots)$$

bzw.

$$(z_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}} = (z_1, z_3, z_5, z_7, \dots),$$

die gerade aus den Folgengliedern mit geradem bzw. ungeradem Index bestehen. Es muss aber kein erkennbares Muster in $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ geben. Zum Beispiel entspricht

$$(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = (1, 12, 27, 64, 101, 102, \dots)$$

der Teilfolge

$$(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (z_1, z_{12}, z_{27}, z_{64}, z_{101}, z_{102}, \dots).$$

Wichtig sind auch Teilfolgen von Teilfolgen, wobei diese durch eine weitere Indexfolge $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ charakterisiert werden. Im Beispiel ergibt sich mit

$$(k_j)_{j \in \mathbb{N}} = (1, 3, 4, 6, \dots)$$

zunächst

$$(n_{k_j})_{j \in \mathbb{N}} = (1, 27, 64, 102, \dots)$$

und anschließend

$$(z_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}} = (z_1, z_{27}, z_{64}, z_{102}, \dots).$$

Bemerkungen

1. Da eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ strikt monoton wachsend ist und alle ihre Glieder natürliche Zahlen sind, gilt immer $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ im Sinne uneigentlicher Konvergenz. Hieraus folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k^{-q} = 0$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ gilt (Übungsaufgabe).
2. Mithilfe der entsprechenden Definitionen können wir zeigen (Übungsaufgabe): Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt bzw. konvergent mit Grenzwert ζ , so ist auch jede Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt bzw. konvergent mit Grenzwert ζ . Bei reellen Folgen gelten außerdem analoge Aussagen bzgl. der Monotonie.
3. *zur Notation*: Wir müssen bei einer Teilfolge immer einen anderen Laufindex als bei der Folge verwenden und bei Teilfolgen von Teilfolgen kommt stets ein dritter Laufindex ins Spiel.
4. Sei V eine unendliche Teilmenge von \mathbb{N} . Dann können wir die Elemente von V der Größe nach durchnummerieren¹⁸ und erhalten eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $V = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Oder anders gesagt: Zu jeder unendlichen Menge von Indizes gibt es genau eine entsprechende Indexfolge und umgekehrt.

Lemma (äquivalente Charakterisierung von Häufungspunkten) Für jede komplexe Zahlenfolge gilt: Jeder Häufungspunkt ist Grenzwert einer Teilfolge und umgekehrt.

¹⁸Die Existenz und Eindeutigkeit dieser speziellen Durchnummerierung ist durch das Wohlordnungsprinzip sichergestellt: n_1 ist das kleinste Element von V , n_2 das kleinste Element von $V \setminus \{n_1\}$, n_3 das kleinste Element von $V \setminus \{n_1, n_2\}$ usw.

Beweis Rückrichtung: Es gelte $\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ und $\varepsilon > 0$ sei beliebig. Wir wählen $K \in \mathbb{N}$, sodass $|\zeta - z_{n_k}| < \varepsilon$ für alle $k > K$ und jeder Index n aus der unendlichen Menge $\{n_K, n_{K+1}, n_{K+2}, \dots\}$ besitzt die gewünschte Eigenschaft.

Hinrichtung: Für jeden Häufungspunkt ζ einer gegebenen komplexen Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren wir eine entsprechende Teilfolge rekursiv wie folgt:

1. **Rekursionsanfang** ($k = 1$): Wir wählen $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $|z_{n_1} - \zeta| < \varepsilon_1 := 1$,
2. **Rekursionsschritt** ($k \rightsquigarrow k+1$): Ausgehend vom bereits bekannten Index n_k wählen wir n_{k+1} , sodass

$$|z_{n_{k+1}} - \zeta| < \varepsilon_{k+1} := \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad n_{k+1} > n_k.$$

Nach Voraussetzung ist die Rekursion wohldefiniert (da es insbesondere immer unendlich viele Kandidaten für n_{k+1} gibt) und liefert eine strikt monoton wachsende Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Außerdem gilt $\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. \square

Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte komplexe Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt (bzw. eine konvergente Teilfolge).

Beweis Für reelle Folgen werden wir diesen Satz erst weiter unten beweisen, wollen hier aber schon festhalten, mit welchem Argument wir daraus die komplexe Version ableiten können. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also eine beschränkte Folge in \mathbb{C} , wobei wir wieder $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$ und $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$ bzw. $z_n = x_n + i y_n$ schreiben. Die reellen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind dann auch beschränkt und die reelle Version des Satzes impliziert die Existenz einer Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sowie eines Häufungspunktes $\xi \in \mathbb{R}$, sodass $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Wir können die reelle Version des Satzes anschließend noch einmal anwenden, aber diesmal auf die reelle Folge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wir erhalten eine Indexfolge $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sowie ein $v \in \mathbb{R}$ mit $v = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_{k_j}}$. Nach Konstruktion gilt auch $\xi = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}}$, denn jede Teilfolge der oben gewählten konvergenten Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ muss wieder gegen ξ konvergieren. Die komplexe Folge $(z_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei die entsprechenden Real- bzw. Imaginärteile für $j \rightarrow \infty$ gegen ξ bzw. v konvergieren. Der Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Konvergenz garantiert schließlich, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} z_{n_{k_j}} = \xi + i v$ im Sinne der Konvergenz in \mathbb{C} gilt. \square

Bemerkungen

1. Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist ausgesprochen wichtig und wird sehr häufig in Beweisen verwendet. Wir werden unten sehen, dass er sehr eng mit dem Konzept der *Kompaktheit* verbunden ist.
2. Jede beschränkte Folge besitzt im Allgemeinen viele konvergente Teilfolgen (zum Beispiel jede Teilfolge einer konvergenten Teilfolge). Die Bedeutung des Theorems liegt darin, dass es die *Existenz* von konvergenten Teilfolgen garantiert.

Lemma (äquivalente Charakterisierung von Konvergenz) Eine beschränkte komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn Sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

Beweis *Hinrichtung*: Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert ζ und sei $\tilde{\zeta}$ ein beliebiger Häufungspunkt dieser Folge. Dann existiert eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{\zeta} = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$. Andererseits gilt aber auch $\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$, denn jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Grenzwert. Das Lemma über die Eindeutigkeit von Grenzwerten, angewendet auf $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, liefert nun $\tilde{\zeta} = \zeta$. Also kann es neben ζ keine weiteren Häufungspunkte geben.

Rückrichtung: Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, die genau einen Häufungspunkt ζ besitzt. Angenommen, ζ ist nicht der Grenzwert dieser Folge. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - \zeta| \geq \varepsilon$ sowie eine entsprechende Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Die Folge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist wieder beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(z_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$, die für $j \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert $\tilde{\zeta} \in \mathbb{C}$ konvergiert, und dies impliziert $|z_{n_{k_j}} - \tilde{\zeta}| < \varepsilon$ für alle hinreichend großen $j \in \mathbb{N}$. Die Zahl $\tilde{\zeta}$ ist aber nach Konstruktion selbst Häufungspunkt von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und daher muss $\zeta = \tilde{\zeta}$ gelten. Die Kombination der Abschätzungen ergibt deshalb

$$\varepsilon \leq |z_{n_{k_j}} - \zeta| < \varepsilon$$

und damit einen Widerspruch. Unsere Annahme war also falsch. \square

Besonderheiten reeller Folgen

Lemma (Existenz monotoner Teilfolgen) Jede reelle Folge besitzt mindestens eine monotone Teilfolge.

Beweis Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegebene reelle Folge. Wir nennen in diesem Beweis $n \in \mathbb{N}$ einen *Gipfelindex*, wenn $x_m \leq x_n$ für alle $m > n$ gilt.

Fall 1: Es gibt unendlich viele Gipfelindizes. Dann existiert auch eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass n_k gerade der k -te Gipfelindex ist (siehe die Bemerkung oben zur Durchnummerierung von Indexmengen). Nach Konstruktion ist nun $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei die Monotonie nicht strikt sein muss.

Fall 2: Es gibt keinen oder höchstens endlich viele Gipfelindizes. Dann können wir $n_1 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass n_1 größer als alle Gipfelindizes und damit selbst kein Gipfelindex ist. Insbesondere gibt es dann einen Index $n_2 > n_1$, sodass $x_{n_2} > x_{n_1}$ gilt. Da aber auch n_2 kein Gipfelindex sein kann, finden wir weiterhin einen Index $n_3 > n_2$ mit $x_{n_3} > x_{n_2}$. Durch Iteration dieses Arguments erhalten wir schließlich eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine strikt monoton wachsende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

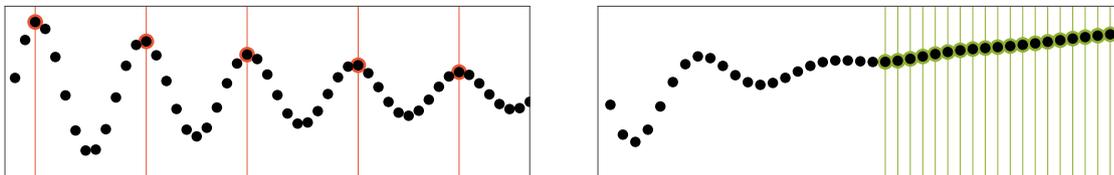


Abbildung Beispiele für eine monoton fallende Teilfolge (links, rot) sowie eine monoton wachsende Teilfolge (links, grün) als Illustration zum vorherigen Beweis.

Bemerkung

1. Jede reelle Folge besitzt eigentlich viele monotone Teilfolgen und oftmals gibt es sowohl fallende als auch wachsende. Der Punkt ist jedoch, dass es immer mindestens eine monotone Teilfolge gibt. Siehe zum Beispiel den nachfolgenden Beweis.

2. Das Lemma gilt auch für unbeschränkte Folgen.
3. Für komplexe Folgen gibt es kein direktes Analogon, da \mathbb{C} ja nicht angeordnet ist.

*Verallgemeinerung**: Man kann zeigen¹⁹, dass jede komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + i y_n$ eine Teilfolge besitzt, sodass $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jeweils monotone reelle Folgen sind. Es kann dabei passieren, dass die eine fallend und die andere wachsend ist.

Korollar (Satz von Bolzano-Weierstraß im Reellen) Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Aufgrund des vorherigen Lemmas gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die als Folge über dem Index k monoton ist. Sie ist aber nach Voraussetzung auch beschränkt und das Monotonieprinzip liefert die Existenz von $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Insbesondere ist ξ ein Häufungspunkt. \square

Theorem-Definition (extremale Häufungspunkte) Jede beschränkte reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt einen kleinsten bzw. einen größten Häufungspunkt, den wir mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

bezeichnen und den wir ihren Limes inferior bzw. ihren Limes superior nennen.

Beweis Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist die Menge

$$U := \{ \xi \in \mathbb{R} : \xi \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \}$$

nichtleer und nach Voraussetzung ist sie auch beschränkt (siehe die Bemerkungen zur Definition von Häufungspunkten). Damit sind $\underline{\xi} := \inf U$ und $\bar{\xi} := \sup U$ wohldefinierte reelle Zahlen und wir wollen nun zeigen, dass $\underline{\xi}$ zu U gehört und damit der kleinste Häufungspunkt ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\xi \in U$, sodass

$$\underline{\xi} \leq \xi < \underline{\xi} + \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{und damit} \quad |\xi - \underline{\xi}| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

erfüllt ist. (In der Tat, wenn $\underline{\xi}$ das Minimum von U ist, so können wir $\xi = \underline{\xi}$ wählen.²⁰ Andernfalls benutzen wir die Häufungseigenschaft des Infimums.) Andererseits gibt es unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ für die $|x_n - \xi| < \frac{1}{2} \varepsilon$ und damit auch

$$|x_n - \underline{\xi}| \leq |x_n - \xi| + |\xi - \underline{\xi}| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

gilt. Da ε beliebig war, haben wir insgesamt $\underline{\xi} \in U$ gezeigt. Mit analogen Argumenten können wir $\bar{\xi} \in U$ beweisen. \square

¹⁹Die Beweisidee ist wie folgt: Wir wählen zunächst eine Teilfolge, sodass die Realteile monoton sind. Anschließend wählen wir eine Teilfolge dieser Teilfolge, sodass zusätzlich auch die Imaginärteile monoton sind.

²⁰In diesem Fall sind wir eigentlich schon fertig mit dem Beweis, denn dann gilt ja $\xi = \min U \in U$.

Beispiel Als einfaches Beispiel betrachten wir die durch

$$x_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

definierte Folge (siehe das Bild) und bemerken zunächst, dass wegen

$$x_{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \quad x_{2k} = +1 + \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +1$$

die betrachtete Folge die beiden Häufungspunkte -1 und $+1$ besitzt. Wir wollen nun zeigen, dass diese beiden Zahlen der kleinste bzw. der größte Häufungspunkt sind, und benutzen dabei, dass

$$-1 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq +1 + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist nun ξ der Grenzwert einer Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so gilt diese Doppelungleichung mit $n = n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und das Vergleichsprinzip liefert

$$-1 \leq \xi \leq +1$$

nach Grenzübergang $k \rightarrow \infty$, wobei wir $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/n_k = 0$ eingesetzt haben (siehe die Bemerkung weiter oben). Insgesamt haben wir damit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +1$$

gezeigt.²¹

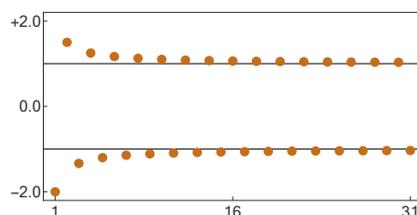


Abbildung Die Folge aus dem eben gerechneten Beispiel.

Bemerkungen

1. Die explizite Berechnung des kleinsten und größten Häufungspunktes ist im Allgemeinen alles andere als einfach.
2. Der Limes inferior bzw. superior einer Folge ist im Allgemeinen *nicht* das Infimum bzw. das Supremum der Menge $\{x_1, x_2, \dots\}$.
3. Bei unbeschränkten reellen Folgen können wir $-\infty$ bzw. $+\infty$ als uneigentliche Häufungspunkte zulassen, wobei dies dann immer meint, dass eine Teilfolge uneigentlich gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$ konvergiert.

Korollar Eine beschränkte reelle Folge konvergiert genau dann, wenn ihr Limes inferior und ihr Limes superior zusammenfallen.

²¹Mit nur etwas mehr Aufwand können wir sogar beweisen, dass -1 und $+1$ die einzigen Häufungspunkte sind.

Beweis Die Behauptung ergibt sich direkt aus der äquivalenten Charakterisierung von Konvergenz sowie der Definition der extremalen Häufungspunkte. \square

Lemma (Erste äquivalente Charakterisierung von \liminf und \limsup)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Dann gilt $\underline{\xi} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$

unendlich viele n mit $x_n < \underline{\xi} + \varepsilon$, aber

höchstens endlich viele n mit $x_n < \underline{\xi} - \varepsilon$

gibt. Analog gilt $\bar{\xi} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$

unendlich viele n mit $x_n > \bar{\xi} - \varepsilon$, aber

höchstens endlich viele n mit $x_n > \bar{\xi} + \varepsilon$

gibt.

Beweis Wir beweisen nur die Aussagen für den Limes inferior.

Hinrichtung: Sei $\underline{\xi} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Da $\underline{\xi}$ Häufungspunkt ist, existieren unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - \underline{\xi}| < \varepsilon$ und damit $x_n < \underline{\xi} + \varepsilon$. Wir nehmen nun an, es gibt unendlich viele Indizes mit $x_n < \underline{\xi} - \varepsilon$ und bezeichnen mit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die entsprechende Indexfolge. Die Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist nach Konstruktion beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt ξ , für den $\xi \leq \underline{\xi} - \varepsilon < \underline{\xi}$ gilt und der auch Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Das ist aber ein Widerspruch, denn $\underline{\xi}$ ist ja der Limes inferior.

Rückrichtung: Der erste Teil des ε -Kriteriums garantiert, dass $\underline{\xi}$ wirklich ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Angenommen, es existiert ein anderer Häufungspunkt ξ mit $\xi < \underline{\xi}$. Dann existieren zu $\varepsilon := \frac{1}{2}(\underline{\xi} - \xi)$ unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \varepsilon$ und für diese gilt

$$x_n = (x_n - \xi) + \xi \leq |x_n - \xi| + \xi \leq \varepsilon + (\underline{\xi} - 2\varepsilon) = \underline{\xi} - \varepsilon.$$

Das ist aber ein Widerspruch zum zweiten Teil des ε -Kriteriums, d.h. $\underline{\xi}$ ist wirklich der kleinste Häufungspunkt. \square

Lemma (Zweite äquivalente Charakterisierung von \liminf und \limsup)

Für jede beschränkte reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n,$$

wobei die Folgen $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\underline{x}_n := \inf \{x_m : m \geq n\} \quad \text{und} \quad \bar{x}_n := \sup \{x_m : m \geq n\}$$

definiert und beide konvergent sind (siehe das Bild).

Beweis Siehe die entsprechende *-Hausaufgabe. □

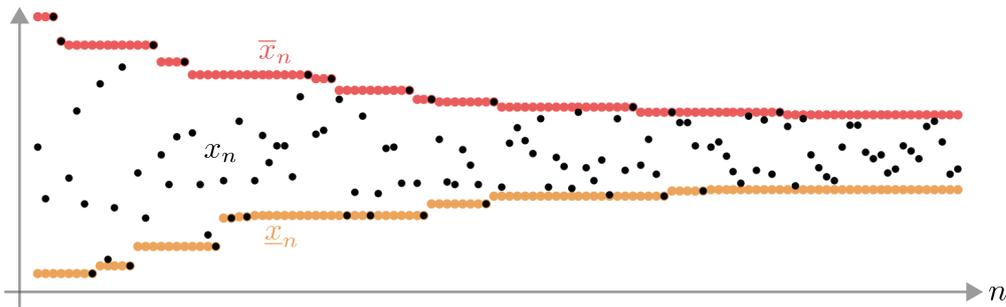


Abbildung Zur zweiten äquivalenten Charakterisierung der extremalen Häufungspunkte.

Bemerkungen

1. Die Folge $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, wohingegen $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Die Formeln aus dem Lemma können daher auch als

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{ \underline{x}_n : n \geq 1 \}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{ \bar{x}_n : n \geq 1 \}$$

geschrieben werden.

2. Das Lemma und das Sandwich-Prinzip basieren auf recht ähnlichen Ideen. Beachte aber, dass diesmal \underline{x}_n und \bar{x}_n nicht vorgegeben sind, sondern berechnet werden. Außerdem wird $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n$ im Allgemeinen nicht gelten.

5.4 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Definition Die komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m > N$$

gilt.

Theorem (Cauchy-Kriterium für Konvergenz) Eine komplexe Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie Cauchy-Folge ist.

Beweis Hinrichtung: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|z_n - \zeta| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

für alle $n > N$ gilt, wobei der Grenzwert $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ nach Voraussetzung in \mathbb{C} existiert und wir wieder die nützliche Beobachtung verwendet haben. Sind nun n und m zwei Indizes größer N , so erhalten wir mit einer nahrhaften Null sowie der Dreiecksungleichung via

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - \zeta| + |\zeta - z_m| = |z_n - \zeta| + |z_m - \zeta| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

die gewünschte Abschätzung.

Rückrichtung, Teil 1: Sei nun $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegebene Cauchy-Folge. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|z_n - z_m| < 1$$

für alle $n, m > N$ erfüllt ist. Hieraus schließen wir zunächst (mit $m = N + 1$), dass

$$|z_n| \leq |z_n - z_{N+1}| + |z_{N+1}| \leq 1 + |z_{N+1}|$$

für alle $n > N$ gilt, und anschließend, dass

$$|z_n| \leq C \quad \text{mit} \quad C := 1 + \max \{ |z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|, |z_{N+1}| \}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Oder anders gesagt: Die gegebene Cauchy-Folge ist beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $\zeta \in \mathbb{C}$ sowie eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$.

Rückrichtung, Teil 2: Wir wollen nun zeigen, dass ζ der Grenzwert der gegebenen Cauchy-Folge ist und fixieren dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|z_n - z_m| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n, m > N$$

gilt.²² Andererseits existiert auch ein Index K mit

$$|z_{n_k} - \zeta| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k > K$$

und o.B.d.A können wir annehmen, dass $n_{K+1} > N$ gilt (andernfalls können wir wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ den Index K einfach größer wählen). Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|z_n - \zeta| \leq |z_n - z_{n_{K+1}}| + |z_{n_{K+1}} - \zeta| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

für alle $n > N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt schließlich $z_n \rightarrow \zeta$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Bemerkungen

1. Das Cauchy-Kriterium ist ein ausgesprochen wichtiges Hilfsmittel, denn mit ihm kann zum Beispiel die Konvergenz einer Folge ohne explizite Kenntnis des Grenzwertes nachgewiesen werden (siehe die nachfolgenden Beispiele).
2. Die Gültigkeit des Theorems ist eine Möglichkeit, die Vollständigkeit von \mathbb{R} und \mathbb{C} zu charakterisieren. Es gibt zum Beispiel Folgen aus rationalen Zahlen, die zwar die Cauchy-Eigenschaft besitzen, aber eben nicht in \mathbb{Q} , sondern nur in \mathbb{R} einen Grenzwert besitzen.²³
3. Rückblick*: Das Vollständigkeitsaxiom wird in dem Beweis des Theorems nicht explizit erwähnt, ist aber indirekt eingeflossen: Nämlich über den Satz von Bolzano-Weierstrass, in dessen Beweis das Monotonieprinzip verwendet wird, welches wir vorher aus dem Supremumsprinzip hergeleitet haben. Letzteres wurde aber gerade mithilfe des Schnittaxioms bewiesen. Manche Autoren — siehe etwa [For] — verwenden das Cauchy-Kriterium als Vollständigkeitsaxiom und leiten dann zum Beispiel das Monotonieprinzip und das Supremumsprinzip aus diesem her.

²²Wir haben hier eine Variante der nützlichen Beobachtung benutzt.

²³Wir werden weiter unten konkrete Beispiele kennenlernen, etwa die Intervallschachtelung für Wurzeln oder die Dezimaldarstellung reeller Zahlen.

Beispiele

1. Eine wichtige Folge ist

$$x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

da sie die Partialsummenfolge der harmonischen Reihe repräsentiert (siehe dazu das nächste Kapitel). Für Indizes m, n mit $m > n$ gilt $x_m > x_n$ und damit

$$|x_m - x_n| = x_m - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \geq (m-n) \cdot \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m},$$

wobei die rechte Seite für jedes feste n mit $m \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Hieraus folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist und daher auch keinen Grenzwert in \mathbb{R} besitzt.²⁴

2. Wir betrachten die Folge

$$x_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

die sich vom Beispiel oben nur in den alternierenden Vorzeichen unterscheidet. Wir wollen diesmal mit dem Cauchy-Kriterium zeigen, dass die Folge konvergiert, und betrachten dazu für beliebige n, m mit $m > n$ bzw. $m = n + k$ mit $k \in \mathbb{N}$ den Ausdruck

$$(-1)^n (x_m - x_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{n+k}.$$

Umklammern auf der rechten Seite liefert

$$(-1)^n (x_m - x_n) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \dots,$$

wobei die Paarung für gerade k aufgeht und für ungerade k am Ende der positive Term $1/(n+k)$ übrig bleibt. Da die geklammerten Terme aber jeweils positiv sind, erhalten wir

$$(-1)^n (x_m - x_n) \geq 0$$

unabhängig vom Rest, den k bei Division durch 2 lässt, d.h. für alle $m > n$. Wir können die Terme aber auch als

$$(-1)^n (x_m - x_n) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) - \dots$$

klammern, wobei diesmal für ungerade k die Paarung aufgeht und für alle geraden k der negative Term $-1/(n+k)$ alleine stehen bleibt. Hieraus schließen wir

$$(-1)^n (x_m - x_n) \leq \frac{1}{n+1}$$

²⁴Da die Folge strikt monoton wachsend ist, können wir aber schließen, dass sie für $n \rightarrow \infty$ im uneigentlichen Sinne gegen $+\infty$ konvergieren muss.

und die Kombination der beiden Abschätzungen liefert

$$|x_m - x_n| = |(-1)^n (x_m - x_n)| \leq \frac{1}{n+1}$$

für alle n, m mit $m > n$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0$ existiert also für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index N , so dass

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \text{ mit } m > n > N.$$

Insbesondere ist die betrachtete Folge eine Cauchy-Folge und daher existiert der Grenzwert $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in \mathbb{R} .²⁵

Intervallschachtelungen

Vorbemerkung Wir studieren abschließend ein sehr wichtiges und schönes Prinzip der reellen Analysis.

Definition Eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \quad |I_n| = b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wird Intervallschachtelung genannt.

Theorem (Intervallschachtelungsprinzip) Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen I_n liegt.

Beweis Teil 1: Nach Voraussetzung gilt

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

sowie

$$a_1 \leq a_n \leq b_1, \quad a_1 \leq b_n \leq b_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (die Folge der linken Intervallgrenzen) monoton wachsend und beschränkt, wohingegen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (die Folge der rechten Intervallgrenzen) monoton fallend und beschränkt ist. Nach dem Monotonieprinzip existieren also die Grenzwerte

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

wobei die Ungleichungen

$$a_n \leq \alpha, \quad \beta \leq b_n, \quad \alpha \leq \beta$$

bzw.

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$$

²⁵Wir werden später mit ausgefeilteren Methoden zeigen, dass $\xi = \ln 2 \approx 0.693$ gilt.

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten und ebenfalls aus dem Monotonieprinzip sowie dem Vergleichsprinzip gewonnen werden können. Die letzte Formel impliziert

$$0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n$$

und nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\alpha = \beta,$$

wobei wir wieder das Vergleichsprinzip sowie die zweite Eigenschaft einer Intervallschachtelung verwendet haben.

Teil 2: Die Zahl $\alpha = \beta$ ist in jedem der Intervalle I_n enthalten. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_n \leq x \leq b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

aus dem Vergleichsprinzip. Damit gilt $\alpha = x = \beta$, d.h. es gibt wirklich nur eine reelle Zahl, die in allen Intervallen I_n liegt. \square

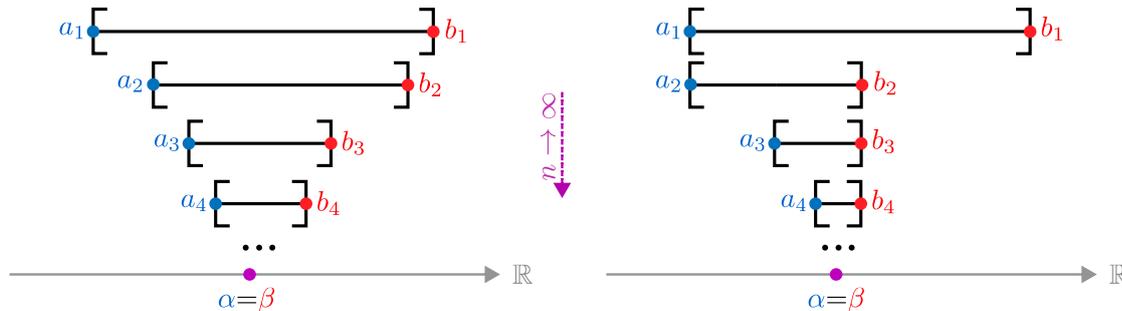


Abbildung Schematische Darstellung des Intervallschachtelungsprinzips, wobei die Intervalle zur besseren Darstellung übereinander gezeichnet wurden. *Links:* Der allgemeine Fall. *Rechts:* Oftmals wird I_{n+1} entweder als die linke oder die rechte Hälfte von I_n gewählt (Bisektion). Ein Beispiel ist die weiter unten diskutierte Konstruktion von Wurzeln.

Bemerkungen

1. Mit den Notationen im Beweis gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\} = \{\beta\}$. Insbesondere kann also die reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt, als Grenzwert der linken oder der rechten Intervallgrenzen gewonnen werden.
2. Es ist wichtig, dass die Intervalle I_n abgeschlossen sind. Zum Beispiel gilt für die offenen Intervalle $I_n = (0, 1/n)$ zwar $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$, aber die Schnittmenge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ist leer.
3. Das Intervallschachtelungsprinzip kann (mit einer leicht anderen Formulierung) auch als Vollständigkeitsaxiom verwendet werden, wobei dann das Schnittaxiom als Folgerung abgeleitet werden kann. Es ist sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht ausgesprochen nützlich und wird zum Beispiel unter dem Namen *Bisektionsverfahren* in der Numerik sowie in der Informatik verwendet.
4. Der Beweis des Theorems beruht auf einfachen und naheliegenden Argumenten. Er kann daher sehr gut in einer Prüfung abgefragt werden.²⁶

²⁶Sie sollten **niemals** einen Beweis aus diesem Skript oder einer anderen Quelle auswendig lernen. Merken Sie sich die zentralen Ideen und schreiben Sie die Details immer mit Ihren eigenen Worten auf.

Anwendung: Konstruktion von Wurzeln Für eine gegebene reelle Zahl $\xi > 0$ sowie festes $k \in \mathbb{N}$ wollen wir $\sqrt[k]{\xi}$ als Grenzwert konstruieren. Wir nehmen dazu $\xi > 1$ an²⁷ und definieren eine Intervallschachtelung rekursiv wie folgt:²⁸

1. *Rekursionsanfang* ($n = 1$): Wir setzen $a_1 := 1$ und $b_1 := \xi$ und bemerken, dass $a_1^k < \xi$ und $b_1^k > \xi$ gilt.
2. *Rekursionsschritt* ($n \rightsquigarrow n + 1$): Ist $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, so betrachten wir den Mittelpunkt $m_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und definieren I_{n+1} nach Fallunterscheidung:

Ist $m_n^k \leq \xi$, so setzen wir $a_{n+1} := m_n$ und $b_{n+1} := b_n$

Ist $m_n^k > \xi$, so setzen wir $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m_n$.

In jedem Fall gilt also $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$, d.h. die Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.

Durch vollständige Induktion können wir nun leicht zeigen, dass $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wirklich eine Intervallschachtelung ist und dass

$$a_n^k \leq \xi < b_n^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Limes $n \rightarrow \infty$ liefert das Vergleichsprinzip die Abschätzungen $\alpha^k \leq \xi \leq \beta^k$, wobei wieder $\alpha = \beta$ gilt. Insgesamt erhalten wir $\alpha^k = \xi = \beta^k$ und sehen, dass sowohl a_n als auch b_n für $n \rightarrow \infty$ gegen die k -te Wurzel von ξ konvergieren.

*Bemerkung**: Im Fall $k = 2$ und $\xi = 2$ können wir leicht durch vollständige Induktion zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die beiden Intervallgrenzen a_n und b_n rationale Zahlen sind. Die obige Intervallschachtelung produziert also mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konkrete Folgen rationaler Zahlen, die im Limes $n \rightarrow \infty$ gegen die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ konvergieren. Insbesondere ist jede dieser beiden Folgen eine Cauchy-Folge, die aber keinen Grenzwert in \mathbb{Q} , sondern nur einen Grenzwert in der größeren Menge \mathbb{R} besitzen. In diesem Sinn kann es kein Cauchy-Kriterium für rationale Folgen geben und \mathbb{Q} ist nicht vollständig.

Verallgemeinerung* Ein ähnliches Prinzip gibt es auch in \mathbb{C} , wobei die Intervalle I_n dann durch andere Mengen $U_n \subset \mathbb{C}$ (zum Beispiel Rechtecke oder Kreisscheiben) ersetzt werden, die jeweils nichtleer und abgeschlossen sind. Dann implizieren die Bedingungen

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } U_n = 0,$$

dass die Schnittmenge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ aus genau einem $\zeta \in \mathbb{C}$ besteht. Hierbei bezeichnet $\text{diam } U_n$ den Durchmesser von U_n .

Beweisskizze: Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine komplexe Zahl $z_n \in U_n$ beliebig und zeigen, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und daher konvergiert. Der Grenzwert ζ liegt dann in allen Mengen U_n und die Konvergenz der Durchmesser impliziert, dass nur ζ diese Eigenschaft besitzt. \square

²⁷Der Fall $0 < \xi < 1$ kann entweder mit einer modifizierten Intervallschachtelung oder durch Betrachtung von $1/\xi$ anstelle von ξ behandelt werden.

²⁸Wir hatten zwar schon die Existenz von k -ten Wurzeln aus dem Schnittaxiom abgeleitet, werden aber bei der Beschreibung der Intervallschachtelung davon keinen Gebrauch machen.

Kapitel 6

Reihen

Vorlesungswoche 06

6.1 Definition und Beispiele

Vorbemerkung Die Theorie der Reihen beschäftigt sich mit unendlichen Summen, wie zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

und untersucht, ob und wie man diese in sinnvoller Weise definieren und anschließend berechnen kann. Die zentrale Grundidee ist dabei ganz einfach und kann wie folgt zusammengefasst werden.

Merkregel Eine unendliche Summe ist **immer** der Grenzwert einer Folge endlicher Summen.

Definition Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, so schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_1 + \dots + z_n),$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Bemerkungen

1. Die Folge $(\sum_{k=1}^n z_k)_{n \in \mathbb{N}}$ wird die zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörende Partialsommenfolge genannt. Sie ist immer wohldefiniert, aber sie wird nicht immer konvergieren. Wir schreiben in dieser Vorlesung die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ nur dann, wenn die Existenz des Grenzwertes der Partialsommenfolge gesichert ist.
2. Die Partialsommenfolge zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden wir oftmals mit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, d.h. wir schreiben

$$s_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, sofern dieser Grenzwert existiert. Beachte, dass wir beim Arbeiten mit Partialsummen immer zwei verschiedene Indizes verwenden müssen (zum Beispiel n und k). In der finalen Reihenformel können wir aber wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{j=1}^{\infty} z_j$$

den Summationsindex beliebig wählen (sofern es keine Konflikte mit anderen Notationen gibt).

3. Bei Konvergenzuntersuchungen ist oftmals das folgende *Störungsprinzip* nützlich: Werden endlich viele Glieder von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeändert, so ändert sich nicht die Konvergenz der Partialsummenfolge. In der Regel ändert sich aber ihr Grenzwert.
4. Es gibt unterschiedliche Auffassungen, was die Reihe zur Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.¹

Interpretation 1: Oftmals ist damit der *Grenzwert der Partialsummenfolge* (so dieser existiert) gemeint, d.h. die *Zahl*, die durch unendliche Summation von z_1, z_2, z_3 usw. entsteht. Man sagt dann auch, die Reihe existiert (oder nicht).

Interpretation 2: In den meisten Lehrbüchern zur mathematischen Analysis ist die Reihe jedoch die Partialsummenfolge selbst, d.h. die Reihe ist keine Zahl, sondern eine Folge von Zahlen. In diesem Zusammenhang sagt man, die Reihe konvergiert (oder divergiert) und bezeichnet den entsprechenden Grenzwert als den Wert der Reihe.

In dieser Vorlesung verwenden wir das Wort *Reihe* in beiden Bedeutungen, wobei immer durch den Kontext klar wird, ob wir nun die Partialsummenfolge oder ihren Grenzwert meinen. Wichtig ist vor allem, dass wir niemals die oben formulierte Merkgel vergessen.

5. Bei vielen unendlichen Summen bietet es sich an, die Indizierung von z_n bzw. s_n bei einem beliebigen Startindex $n_* \in \mathbb{Z}$ (zum Beispiel $n_* = 0$) zu beginnen, wobei dann immer $n \geq n_*$ und

$$s_{n_*} = z_{n_*}, \quad s_{n_*+1} = z_{n_*} + z_{n_*+1}, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{k=n_*}^n z_k, \quad \dots$$

gilt. Die mathematische Theorie ändert sich durch diese Indexverschiebung natürlich nicht und alle im Folgenden abgeleiteten Resultate gelten sinngemäß auch im Fall $n_* \neq 1$. Wir können bei Bedarf nämlich immer die Umdefinitionen

$$\hat{z}_1 = z_{n_*}, \quad \hat{z}_2 = z_{n_*+1}, \quad \dots \quad \text{sowie} \quad \hat{s}_1 = \hat{z}_1 = s_{n_*}, \quad \hat{s}_2 = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = s_{n_*+1}, \quad \dots$$

verwenden.

6. Die Definition deckt wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auch reelle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab, wobei dann die entsprechende Partialsummenfolge auch reell ist. Eine Besonderheit reeller Folgen ist, dass ihre unendliche Summe im uneigentlichen Sinne existieren kann (siehe dazu weiter unten).

¹Es gibt weitere mathematische Begriffe, bei denen unterschiedliche Interpretationen nebeneinander existieren. Zum Beispiel *Kurve*.

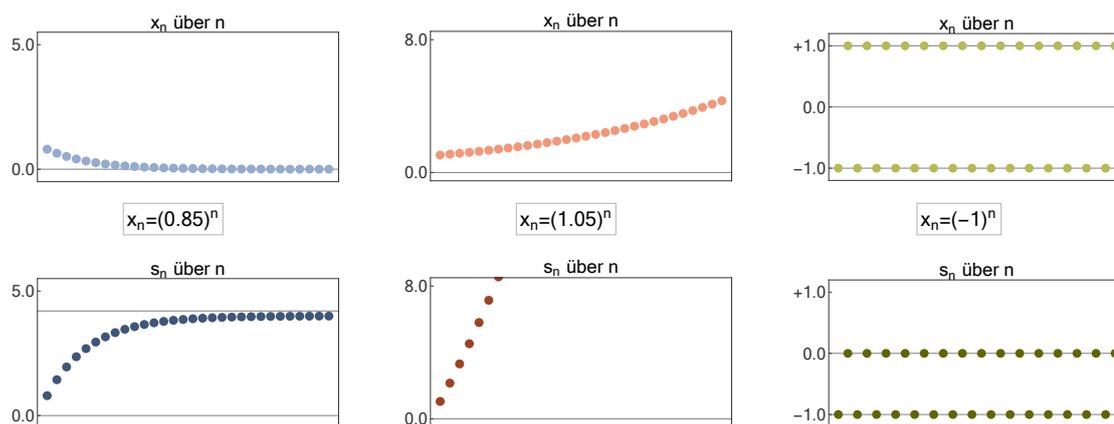


Abbildung Drei Beispiele für geometrische Folgen (oben) und ihre Partialsummenfolgen (unten).

Beispiele

1. Für jeden komplexen Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1 - \lambda}$$

und wird geometrische Reihe genannt.²

Beweis: Für jeden Index $n \geq 0$ setzen wir $z_n := \lambda^n$ sowie $s_n := \sum_{k=0}^n \lambda^k$. Damit gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n \\ \lambda s_n &= \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n + \lambda^{n+1} \end{aligned}$$

und nach Subtraktion sowie kleineren Umstellungen erhalten wir die Summenformel

$$s_n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}.$$

Die Bedingung $|\lambda| < 1$ garantiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{n+1} = 0$ und wir schließen, dass die Partialsummenfolge wirklich konvergiert und dass der angegebene Grenzwert richtig ist. \square

Bemerkung: Mit ganz ähnlichen Argumenten können wir

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} \lambda^k = \frac{\lambda^{m_1} - \lambda^{m_2+1}}{1 - \lambda}, \quad \sum_{k=m}^{\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^m}{1 - \lambda}$$

zeigen. Wir werden auch noch sehen, dass die geometrische Partialsummenfolge für $|\lambda| \geq 1$ nicht konvergiert.

2. Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

²Das ist das Standardbeispiel für unendliche Summen. Sie müssen sich diese Formel jederzeit herleiten können.

Beweis: Wegen

$$x_k := \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

berechnet sich die n -te Partialsumme zu

$$s_n := \sum_{k=1}^n x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

da die meisten Summanden sich gegenseitig aufheben. Insbesondere können wir $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ direkt ablesen. \square

Bemerkung: Die Umformung von z_n ist ein einfaches Beispiel für eine Partialbruchzerlegung und die Teleskopsumme³

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} (z_k - z_{k+1}) = z_{n_1} - z_{n_2+1}$$

verallgemeinert den Trick, den wir bei der Berechnung von s_n benutzt haben.

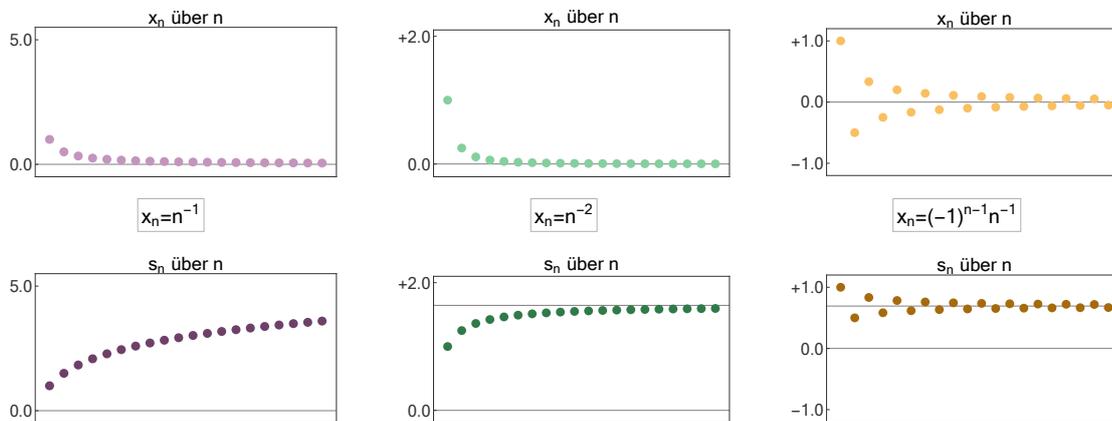


Abbildung Drei weitere Beispiele.

Gegenbeispiele

1. Die Reihe zur reellen Folge $x_n := (-1)^n$ konvergiert nicht, denn die Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

besitzt offensichtlich zwei Häufungspunkte (nämlich -1 und 0) und konvergiert deshalb nicht.

2. Für die harmonische Reihe gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} = -\infty$$

im Sinne uneigentlicher Konvergenz (bzw. bestimmter Divergenz), denn wir hatten schon im letzten Abschnitt gezeigt, dass die entsprechende Partialsummenfolge zwar monoton wachsend bzw. fallend ist, aber nicht nach oben bzw. unten beschränkt ist.

³Die Analogie zu einklappbaren Ferngläsern wird auf WIKIPEDIA erklärt.

über Rechenregeln Aus der Definition sowie den Rechenregeln für Grenzwerte folgt unmittelbar, dass die Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda z_k + \tilde{\lambda} \tilde{z}_k) = \lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right) + \tilde{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k \right)$$

für gegebene $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ immer dann gilt, wenn die beiden unendlichen Summen auf der rechten Seite wohldefiniert sind. Als Spezialfall erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_n + i y_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_n \right) + i \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_n \right),$$

sofern wieder sichergestellt ist, dass die rechte Seite definiert ist. Für zwei konvergente Reihen im Reellen gilt außerdem die Implikation

$$x_k \leq \tilde{x}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k,$$

die wir das Vergleichsprinzip für Reihen nennen.

Achtung Es gibt weder eine Produkt- noch eine Quotientenregel für Reihen.

uneigentliche Konvergenz reeller Reihen Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, deren Glieder fast alle positiv oder fast alle negativ sind, so konvergiert ihre Partialsummenfolge entweder im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne. Insbesondere können wir der unendlichen Summe der x_k immer in sinnvoller Weise einen Wert zuweisen, aber der Fall $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \{-\infty, +\infty\}$ ist nicht durch die obige Definition abgedeckt und stellt eigentlich nur eine nützliche und intuitive Schreibweise dar. Für komplexe Folgen — oder reelle Folgen mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern — kann es aber durchaus passieren, dass es keinen sinnvollen Wert für die unendliche Summe gibt.⁴

Lemma (nützliches Resultat) Für jeden rationalen⁵ Parameter $r > 0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} < \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} = \infty$$

genau dann, wenn $r > 1$ bzw. $r \leq 1$ gilt.

Beweis Wir betrachten die Partialsummenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=1}^n 1/k^r$ und bemerken, dass diese strikt monoton wachsend ist. Insbesondere konvergiert sie genau dann im eigentlichen bzw. uneigentlichen Sinne, wenn sie beschränkt bzw. unbeschränkt ist.

⁴Wie fast immer in der Mathematik, gibt es eine Fortsetzung der Geschichte. Zum Beispiel kann man vielen divergenten Reihen durch Verallgemeinerung des zu Grunde liegenden Konvergenzbegriffes doch in sinnvoller Weise einen Wert zuweisen. Zum Beispiel gilt $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 0$ im Sinne der Cesàro-Konvergenz der Mittelwerte. Wir können diesen Aspekt aber in dieser Vorlesung nicht vertiefen.

⁵Die Aussage gilt sogar für alle reellen Parameter $r > 0$.

Fall $r > 1$: Für $n = 2^m - 1$ fassen wir in der Formel für s_n immer Zweierpotenzen von aufeinanderfolgenden Summanden zusammen und erhalten

$$\begin{aligned} s_{2^m-1} &= \frac{1}{1^r} + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} \right) + \left(\frac{1}{4^r} + \dots + \frac{1}{7^r} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{mr-r}} + \dots + \frac{1}{2^{rm}-1} \right) \\ &\leq \frac{1}{1^r} + \frac{2}{2^r} + \frac{2^2}{2^{2r}} + \dots + \frac{2^{m-1}}{2^{r(m-1)}} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k, \end{aligned}$$

wobei

$$\lambda := \frac{1}{2^{r-1}}$$

eine positive reelle Zahl ist und $\lambda < 1$ wegen $r > 1$ gilt. Mit der Summenformel für geometrische Reihen können wir nun

$$s_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$$

abschätzen, wobei die rechte Seite unabhängig von n und m ist. Da es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2^m - 1$ gibt und dann auch $s_n \leq s_{2^m-1}$ gilt, schließen wir, dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und damit im eigentlichen Sinne konvergent ist.

Fall $0 < r \leq 1$: In diesem Fall gilt die Abschätzung

$$x_k = \frac{1}{k^r} \geq \frac{1}{k} \quad \text{bzw.} \quad s_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Vergleichsprinzip sowie dem letzten Beispiel erhalten wir $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$. □

Ausblick* Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450},$$

aber wir werden erst viel später verstehen, wie man diese verblüffenden Grenzwerte berechnen kann. Ganz allgemein ist die *Riemannsche Zeta-Funktion* durch

$$\zeta(r) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$$

definiert, wobei r eine komplexe Variable mit $\operatorname{Re}(r) > 1$ ist.⁶

⁶Die Eigenschaften dieser Funktion – bzw. ihrer *holomorphen Fortsetzung* – sind immer noch nicht vollständig verstanden und Gegenstand der *Riemannschen Vermutung*, d.h. eines der ungelösten Millenniumsprobleme der Mathematik.

6.2 Exkurs über Dezimalzahlen*

Vorbemerkung Wir wollen in diesem Abschnitt skizzieren, wie die Schulweisheit

Zu jeder reellen Zahl gibt es eine Dezimalzahl und umgekehrt.

mit unserem bisherigen Wissensstand rigoros aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Wir ignorieren dabei zunächst die Vorkommastellen und betrachten die Dezimalzahl

$$0.d_1d_2d_3d_4\dots,$$

wobei $d_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für jedes Glied der Ziffernfolge gilt.⁷ Die entscheidende Beobachtung ist, dass diese symbolische Zeichenkette in natürlicher Weise als eine unendliche Summe interpretiert werden kann.

Dezimalzahlen als reelle Zahlen Für eine gegebene Dezimalzahl setzen wir

$$x_n = d_n 10^{-n}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

und können nun zeigen, dass die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und wegen

$$0 \leq s_n = \sum_{k=1}^n d_k 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \frac{\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} \leq 9 \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

nach oben beschränkt ist. Insbesondere existiert nach dem Monotonieprinzip immer eine reelle Zahl $\sigma \in [0, 1]$, sodass

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0.d_1d_2d_3d_4\dots$$

gilt. Oder anders gesagt: Die Dezimalzahl ist nur eine andere Schreibweise für die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}$.

Dezimaldarstellung einer reellen Zahl Ist umgekehrt $\sigma \in [0, 1)$ vorgegeben, so können alle Zahlen d_n , x_n und s_n schrittweise wie folgt identifiziert werden:⁸

Rekursionsanfang ($n = 1$): Wir setzen $d_1 := \lfloor 10\sigma \rfloor$ sowie $s_1 := x_1 := d_1 10^{-1}$.

Rekursionsvorschrift ($n \rightsquigarrow n + 1$): Ausgehend von s_n definieren wir

$$d_{n+1} := \left\lfloor 10^{n+1} (\sigma - s_n) \right\rfloor, \quad x_{n+1} := d_{n+1} 10^{-n-1}, \quad s_{n+1} := s_n + x_{n+1}.$$

Insbesondere können wir mit überschaubarem Aufwand beweisen, dass wieder alle der oben angegebenen Formeln gelten.

⁷Wir schreiben in diesem Abschnitt Dezimalzahlen ausnahmsweise in einer anderen Schriftart.

⁸Wir benutzen hier wieder die Gauß-Klammer des Abrundens.

allgemeiner Fall Bisher haben wir nur reelle Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ bzw. Dezimalzahlen ohne Vorkommastellen betrachtet. Durch die Hinzunahme endlich vieler negativer Indizes, also mit

$$d_0.d_1d_2d_3d_4\dots = \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}, \quad d_{-1}d_0.d_1d_2d_3d_4\dots = \sum_{k=-1}^{\infty} d_k 10^{-k}, \quad \dots$$

können wir schließlich jede positive reelle Zahl als Dezimalzahl schreiben, wobei die Ziffer d_k immer der Zehnerpotenz 10^{-k} entspricht. Analoges gilt für negative Zahlen.

zur Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung Wir berechnen⁹

$$0.\bar{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \frac{1}{9} = 1 = 1.$$

und mit analogen Argumenten folgt

$$0.234 = 0.233\bar{9}, \quad 0.01708 = 0.01707\bar{9}, \quad 41.505 = 41.504\bar{9}.$$

Jede Dezimalzahl mit nur endlich vielen Nachkommastellen besitzt also eine alternative Darstellung, in der ab einer gewissen Stelle nur noch die Ziffer 9 auftaucht. Wir können aber mithilfe der oben angegebenen Formeln sowie unserem Wissen über konvergente Reihen zeigen, dass dies die einzige Mehrdeutigkeit in der Dezimaldarstellung ist.

Dezimaldarstellung rationaler Zahlen Eine reelle Zahl σ ist genau dann rational, wenn die Ziffernfolge ihrer Dezimaldarstellung ab einem gewissen Index periodisch ist, d.h. wenn es zwei natürliche Zahlen K und N gibt, sodass $d_{n+K} = d_n$ für alle $n > N$ gilt. Zum Beispiel gilt

$$0.\bar{6} = \frac{6}{10^1 - 1} = \frac{2}{3}, \quad 0.\overline{162} = \frac{162}{10^3 - 1} = \frac{6}{37}, \quad 25.\overline{03} = 25 + \frac{3}{10^2 - 1} = \frac{826}{33}$$

und

$$0.6\bar{7} = \frac{1}{10^1} \left(6 + \frac{7}{10^1 - 1}\right) = \frac{61}{90}, \quad 0.082\overline{15} = \frac{1}{10^3} \left(82 + \frac{15}{10^2 - 1}\right) = \frac{2711}{33000}.$$

Es ist aber nicht ganz so einfach zu sehen, was die Dezimaldarstellung von m/n für beliebig vorgegebene $m, n \in \mathbb{N}$ ist.¹⁰

p -adische Zahlen und Brüche Anstelle der Zahl 10 können wir im Prinzip jede andere natürliche Zahl $p > 1$ als Basis verwenden, wobei wir dann nicht zehn, sondern p verschiedene Ziffern benötigen. Die entsprechende Theorie kann via

$$[0.d_1d_2d_3d_4\dots]_p = \sum_{k=1}^{\infty} d_k p^{-k}$$

analog zu oben aufgebaut werden, wobei wir auch wieder negative Indizes k zulassen können. Zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{2} = [0.5]_{10} = [0.1]_2 = [0.\bar{1}]_3 = [0.\bar{3}]_7, \quad \frac{1}{3} = [0.\bar{3}]_{10} = [0.\overline{01}]_2 = [0.1]_3 = [0.\bar{2}]_7$$

sowie $1 = [0.\bar{1}]_2 = [0.\bar{2}]_3 = \dots = [0.\bar{8}]_9$ als alternative Darstellung von 1.

⁹Die Notation $0.\bar{9}$ meint, dass die Ziffer 9 unendlich oft wiederholt wird.

¹⁰Die zugrunde liegende Idee ist, dass die Folge der Reste, die m , $10m$, $100m$, ... bei Division durch n lassen, ab einem gewissen Index eine Periode ausweisen muss, da es ja nur n mögliche Werte für jeden Rest gibt.

6.3 Konvergenzkriterien

Theorem (Cauchy-Kriterium für Reihen) Die Reihe zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| = |z_{n+1} + \dots + z_m| < \varepsilon$$

für alle n, m mit $m > n > N$ gilt.

Beweis Wegen

$$\left(z_1 + \dots + z_{n-1} + z_n + z_{n+1} + \dots + z_m \right) - \left(z_1 + \dots + z_n \right) = z_{n+1} + \dots + z_m$$

ist die Behauptung gerade das Cauchy-Kriterium der Konvergenz, ausgewertet für die Partialsummenfolge. \square

Korollar (Kriterium für die Divergenz einer Reihe) Die Reihe zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann nur dann konvergieren, wenn $|z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt.

Beweis Die Behauptung folgt mit $m = n + 1$ direkt aus dem Cauchy-Kriterium. \square

Beispiele

- Das Cauchy-Kriterium ist wegen

$$\left| \sum_{k=n+1}^m \lambda^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |\lambda|^k = \frac{|\lambda|^{n+1} - |\lambda|^{m+1}}{1 - |\lambda|} \leq \frac{|\lambda|^{n+1}}{1 - |\lambda|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für die geometrische Reihe erfüllt, sofern $|\lambda| < 1$ für den Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Die bereits oben angegebene Reihenformel kann aber mit dem Cauchy-Kriterium nicht abgeleitet werden.

- Im Fall von $|\lambda| \geq 1$ gilt für die geometrische Folge $z_n = \lambda^n$ die Abschätzung $|z_n| = |\lambda|^n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Korollar impliziert, dass die entsprechende Reihe divergiert, d.h. nicht konvergiert.
- Wir hatten weiter oben schon gezeigt, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k$ nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert.

Theorem (Majoranten-Kriterium für Reihen) Seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine positive reelle Folge, sodass

$$|z_n| \leq \mu_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$$

gilt. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

Beweis Nach Dreiecksungleichung gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |z_k| \leq \sum_{k=n+1}^m \mu_k$$

und das Cauchy-Kriterium für $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann nun direkt aus dem Cauchy-Kriterium für $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeleitet werden. In der Tat, für jedes $\varepsilon > 0$ können wir $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass die rechte Seite in der Ungleichung für alle $m > n > N$ kleiner als ε ist. Dann muss aber auch die linke Seite kleiner als ε sein. \square

Bemerkungen

1. Die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird Majorante zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genannt.
2. Der Beweis des Theorems liefert sogar die *absolute Konvergenz* der Reihe (siehe dazu den nächsten Abschnitt).

Beispiele

1. Die Folge

$$z_n := \frac{(-1)^n}{3n^2} + i \frac{1}{1+n^4}$$

erfüllt

$$|z_n| = \sqrt{\frac{1}{9n^4} + \frac{1}{n^8 + 2n^4 + 1}} \leq \sqrt{\frac{1}{2n^4} + \frac{1}{2n^4}} = \frac{1}{n^2} =: \mu_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die entsprechende Partialsummenfolge besitzt einen Limes $\zeta \in \mathbb{C}$. Die Berechnung von $\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ ist aber keine leichte Aufgabe.

2. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine beschränkte komplexe Folge mit $|\alpha_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $z \in \mathbb{C}$ eine feste komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$, denn wir können $\mu_n := C|z|^n$ als Majorante verwenden. Wir werden unten ähnliche Fragen im Rahmen der *Potenzreihen* genauer studieren.

Theorem (Leibniz-Kriterium für Reihen mit alternierenden Vorzeichen)

Sei $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle und monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \eta_k$.

Beweis Die entscheidende Beobachtung ist, dass die Partialsummen

$$s_n := \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4 + \dots + (-1)^{n-1} \eta_n$$

die Ungleichungskette

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq s_8 \leq \dots \leq s_7 \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

bzw. die äquivalente Intervallschachtelung

$$[s_2, s_1] \supset [s_4, s_3] \supset [s_6, s_5] \supset \dots$$

erfüllen (siehe auch die Tabelle).

Nachweis der Schachtelung: Nach Voraussetzung gilt $0 \leq \eta_{n+1} \leq \eta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$s_{2j+2} - s_{2j} = -\eta_{2j+2} + \eta_{2j+1} \geq 0 \quad \text{sowie} \quad s_{2j+1} - s_{2j-1} = +\eta_{2j+1} - \eta_{2j} \leq 0$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, woraus wir durch vollständige Induktion die partiellen Monotonieabschätzungen

$$s_{2j_1} \leq s_{2j_2} \quad \text{sowie} \quad s_{2j_2-1} \leq s_{2j_1-1}$$

für alle Indizes $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ mit $j_1 \leq j_2$ ableiten. Da außerdem

$$s_{2j} - s_{2j-1} = -\eta_{2j} \leq 0$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, ergeben sich in Kombination mit der partiellen Monotonie die verbesserten Abschätzungen

$$s_{2j_1} \leq s_{2j_2} \leq s_{2j_2-1} \leq s_{2j_1-1}$$

für alle $j_1 \leq j_2$. Insgesamt haben wir die oben angegebene Ungleichungskette bewiesen.

Konvergenz der Partialsummenfolge: Wir argumentieren analog zum Beweis des Intervallschachtelungsprinzips. Die beiden Grenzwerte

$$\sigma_g = \lim_{j \rightarrow \infty} s_{2j}, \quad \sigma_u = \lim_{j \rightarrow \infty} s_{2j-1}$$

sind nach dem Monotonieprinzip wohldefiniert und erfüllen

$$s_{2j} \leq \sigma_g \leq \sigma_u \leq s_{2j-1}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $\sigma_g = \sigma_u = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, weil

$$s_{2j-1} - s_{2j} = \eta_{2j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

ebenfalls nach Voraussetzung gilt. □

$n =$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$s_n \approx$	1.00000	0.83333	0.78333	0.75952	0.74563	0.73654	0.73013	0.72537	0.72170
$n =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$s_n \approx$	0.50000	0.58333	0.61667	0.63452	0.64563	0.65321	0.65871	0.66287	0.66614

Tabelle Die ersten Partialsummen der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k = \ln 2$ als Beispiel für die Argumente aus dem Beweis des Leibniz-Kriteriums. Siehe auch das entsprechende Bild weiter oben.

Beispiel Das Leibniz-Kriterium garantiert die Existenz der unendlichen Summe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k^r$ für jeden rationalen Parameter $r > 0$. Die Herleitung expliziter Formeln wie zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^6} = \frac{31\pi^6}{30\,240}$$

erfordert jedoch ausgefeiltere Argumente, die uns noch nicht zur Verfügung stehen.

Lemma (Darstellung und Konvergenz des Restterms) Konvergiert die Reihe zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k - \sum_{k=1}^m z_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{k=m+1}^{\infty} z_k$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis Sei zunächst $m \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert. Für jedes $n > m$ gilt

$$\sum_{k=1}^n z_k - \sum_{k=1}^m z_k = \sum_{k=m+1}^n z_k,$$

wobei die linke Seite nach Voraussetzung für $n \rightarrow \infty$ gegen $r_m := \sum_{k=1}^{\infty} z_k - \sum_{k=1}^m z_k$ konvergiert. Da die rechte Seite der Formel aber die $(n-m)$ -te Partialsumme der Folge $(z_n)_{n \geq m+1}$ ist, garantiert die obige Definition, dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} z_k$ wohldefiniert ist und durch die angegebene Formel berechnet werden kann. Außerdem gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$ nach Voraussetzung und diese Beobachtung beendet den Beweis. \square

6.4 Absolute Konvergenz

Definition Wir sagen, die Reihe zur komplexen Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert absolut (bzw. existiert im Sinne absoluter Konvergenz), sofern die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < +\infty$$

erfüllt ist.

Bemerkungen

1. Erinnerung: Da die Partialsummenfolge $(\sum_{k=1}^n |z_k|)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt entweder $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < +\infty$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = +\infty$.
2. Absolute Konvergenz impliziert immer Konvergenz, wobei sich dies wegen

$$\left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |z_k|$$

sofort aus dem Cauchy-Kriterium für Reihen ergibt. Die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht. Zum Beispiel hatten wir schon gesehen, dass die alternierende harmonische Reihe zwar konvergiert, aber eben nicht absolut konvergiert.

3. Bei absoluter Konvergenz gilt immer

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|,$$

aber in der Regel wird dies eine Ungleichung und keine Gleichung sein.

Beispiel: Mit $z_k := (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^k$ und $|z_k| = (1/\sqrt{2})^k$ liefert die Formel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)} = 1 + i \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1},$$

aber es gilt $|1 + i| = \sqrt{2} < 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}/(\sqrt{2} - 1)$.

4. Wir können

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} z_k \right| \leq \sum_{m+1}^{\infty} |z_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

analog zum Lemma über die Darstellung und Konvergenz des Restterms zeigen.

5. Gilt $x_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ oder $x_n \leq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ genau dann, wenn sie absolut konvergiert.

6. Die Konzepte *Konvergenz* und *absolute Konvergenz* sind historisch entstanden. Aus Sicht der modernen Mathematik ist die Frage, ob eine gegebene komplexe oder reelle Reihe konvergiert oder nicht konvergiert, eigentlich gar nicht so wichtig. Viel entscheidender ist vielmehr die Frage, ob die Reihe absolut konvergiert oder nicht. Die nicht-absolute Konvergenz ist — wie wir im Fortgang der Vorlesung sehen werden — sehr fragil und in gewisser Weise immer entartet. Siehe zum Beispiel den Riemannsches Umordnungssatz weiter unten.

Theorem (Quotientenkriterium) Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben mit $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Im Fall von

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1,$$

konvergiert die entsprechende Reihe absolut. Gibt es jedoch ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \geq 1 \quad \text{für alle } n > N,$$

so divergiert die Reihe, d.h. sie konvergiert weder absolut noch nicht-absolut.

Beweis *Teil 1:* Wir wählen $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_{n+1}|/|z_n| < \kappa < 1$ und finden nach der ersten äquivalenten Charakterisierung des Limes superior ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z_{n+1}| \leq \kappa |z_n|$ für alle $n > N$ gilt. Induktiv folgt

$$|z_n| \leq \kappa^{n-N-1} |z_{N+1}| \quad \text{für alle } n > N$$

und mit der geometrischen Summenformel erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z_k| &= \sum_{k=1}^N |z_k| + \sum_{k=N+1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^N |z_k| + \sum_{k=N+1}^n \kappa^{k-N-1} |z_{N+1}| \\ &= \sum_{k=1}^N |z_k| + \frac{1 - \kappa^{n-N}}{1 - \kappa} |z_{N+1}| \leq \sum_{k=1}^N |z_k| + \frac{|z_{N+1}|}{1 - \kappa} \end{aligned}$$

wobei die reelle Zahl auf der rechten Seite nicht von n abhängt. Im Limes $n \rightarrow \infty$ erhalten wir die Behauptung.

Teil 2: Mit vollständiger Induktion können wir $|z_n| \geq |z_{N+1}|$ für alle $n > N$ zeigen und dies impliziert, dass die gegebene Folge keine Nullfolge ist. Daher muss die Reihe divergieren. \square

Theorem (Wurzelkriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergiert absolut unter der Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1.$$

Gilt jedoch

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1 \quad \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N},$$

so divergiert die Reihe.

Beweis Teil 1: Diesmal finden wir ein κ mit $0 < \kappa < 1$ sowie $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|z_n| \leq \kappa^{n-N-1} \quad \text{für alle } n > N$$

gilt. Mit direkten Rechnungen verifizieren wir

$$\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^N |z_k| + \sum_{k=N+1}^n \kappa^{k-N-1} = \sum_{k=1}^N |z_k| + \frac{1 - \kappa^{n-N}}{1 - \kappa} \leq \sum_{k=1}^N |z_k| + \frac{1}{1 - \kappa}$$

und die Behauptung folgt nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

Teil 2: Die Voraussetzung impliziert, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. \square

Bemerkungen

1. Das Quotientenkriterium kann sinngemäß auch dann verwendet werden, wenn $z_n = 0$ für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Das Quotienten- und das Wurzelkriterium decken nicht alle denkbaren Fälle ab. Konvergiert zum Beispiel $|z_{n+1}|/|z_n|$ bzw. $\sqrt[n]{|z_n|}$ für $n \rightarrow \infty$ von unten gegen 1, so ist keine einfache Entscheidung möglich und es kann im Prinzip alles passieren.
3. Das Wurzelkriterium ist allgemeiner, d.h. jede Aussage, die wir mit dem Quotientenkriterium begründen, kann alternativ auch aus dem Wurzelkriterium abgeleitet werden (die Umkehrung gilt jedoch nicht). In der Praxis ist das Quotientenkriterium aber einfacher zu handhaben als das Wurzelkriterium.
4. Die letzte Bemerkung kann aus der Ungleichungskette

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$$

abgeleitet werden, die wir im nächsten Kapitel beweisen werden.

Beispiele

1. Für die geometrische Folge $z_n = \lambda^n$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = |\lambda| = \sqrt[n]{|z_n|}.$$

Insbesondere fallen hier das Quotienten- und das Wurzelkriterium zusammen und liefern beide die schon bekannten Resultate für die geometrische Reihe, nämlich absolute Konvergenz für $|\lambda| < 1$ und Divergenz für $|\lambda| \geq 1$.

2. Für die nicht-negative Folge

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots \right), \quad x_n = \begin{cases} 2^{-j} & \text{für } n = 2j - 1 \\ 2^{-j} & \text{für } n = 2j \end{cases}$$

ergibt sich

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

sowie

$$\sqrt[n]{x_n} = \begin{cases} \sqrt[2^n]{2^{-n/2-1/2}} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \sqrt[2^n]{2^{-n/2}} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

wobei wir in der letzten Formel auch \lim statt \limsup schreiben dürften, da $\sqrt[n]{x_n}$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Insbesondere kann in diesem Beispiel das Quotientenkriterium nicht verwendet werden, wohingegen das Wurzelkriterium die absolute Konvergenz der Reihe sicherstellt.

Umordnung von Reihen

Beschreibung des Problems Auch bei unendlichen Summen können wir uns fragen, ob wir die Summanden beliebig vertauschen dürfen oder nicht. Da es aber *unendlich* viele Summanden gibt, ist die Antwort weder offensichtlich noch trivial. Aus mathematischer Sicht entspricht jede denkbare Vertauschung einer bijektiven Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die die *Umordnung* (oder *Umsortierung* oder *Umindizierung*) der Summanden kodiert.¹¹

Beispiel Wir betrachten nochmal die alternierende harmonische Reihe

$$\sigma_a = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j} \right) + \dots$$

sowie die unendliche Summe

$$\sigma_b = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} \right) + \dots,$$

in der zwar exakt dieselben Summanden, aber in einer anderen Sortierung auftauchen. Insbesondere gilt

$$\sigma_a = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sigma_b = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)},$$

mit $x_k = (-1)^{k-1}/k$, wobei die Tabelle¹²

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$\varphi(n) =$	1	2	4	3	6	8	5	10	12	7	14	16	9	18	20	...

¹¹Wir können φ auch als eine Permutation der unendlich vielen Indizes $\{1, 2, \dots\}$ betrachten.

¹²Können Sie eine explizite Formel für $\varphi(n)$ angeben?

die Umsortierung der Summanden beschreibt. Mit direkten Rechnungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sigma_a\end{aligned}$$

und damit ein recht überraschendes Ergebnis.¹³

Merkregel Bei unendlichen Summen können wir die Reihenfolge der Summanden im Allgemeinen nicht beliebig vertauschen.¹⁴

Theorem (Umordnungssatz) Konvergiert die Reihe zu $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_{\varphi(k)} \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |z_{\varphi(k)}|$$

für jede Umsortierung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Beweis Nach Voraussetzung sind

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad \tau = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

wohldefiniert und wir wollen nun zunächst mit der Definition von Konvergenz zeigen, dass die Partialsummenfolge zu $(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen σ konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Mithilfe der Resultate über die Reihenrestterme wählen wir zunächst $M \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} |z_j| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

gilt, und dies garantiert insbesondere

$$\left| \sigma - \sum_{m=1}^M z_m \right| = \left| \sigma - \sum_{j=1}^M z_j \right| = \left| \sum_{j=M+1}^{\infty} z_j \right| \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |z_j| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Anschließend wählen wir $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass

$$\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N)\} \supset \{1, 2, \dots, M\}$$

und betrachten ab jetzt nur noch Indizes $n > N$. Dann gilt die Abschätzung

$$\left| \sum_{m=1}^M z_m - \sum_{k=1}^n z_{\varphi(k)} \right| \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |z_j| \leq \frac{1}{2} \varepsilon,$$

¹³Wir haben uns nicht verrechnet: Es gilt wirklich $\sigma_a = \ln 2$ und $\sigma_b = \frac{1}{2} \ln 2$.

¹⁴Klarstellung: Es ist aber immer möglich, endlich viele Summanden zu vertauschen, denn dadurch ändern sich nur endlich viele Partialsummen.

denn unsere Wahl von N garantiert, dass es für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$ ein $k \in \{1, \dots, N\}$ mit $m = \varphi(k)$ gibt, sodass sich die entsprechenden Beiträge auf der linken Seite aufheben und nur Beiträge von $z_{\varphi(k)}$ mit $\varphi(k) > M$ übrig bleiben. Insgesamt erhalten wir

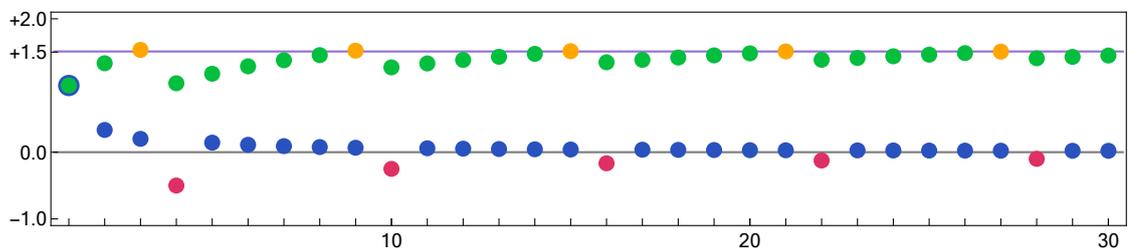
$$\left| \sigma - \sum_{k=1}^n z_{\varphi(k)} \right| \leq \left| \sigma - \sum_{m=1}^M z_m \right| + \left| \sum_{m=1}^M z_m - \sum_{k=1}^n z_{\varphi(k)} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

für alle $n > N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\varphi(k)} = \sigma$ gezeigt. Die zweite Behauptung kann analog abgeleitet werden. \square

Merkregel Bei absolut konvergenten Reihen (und nur bei diesen) dürfen wir die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauschen.

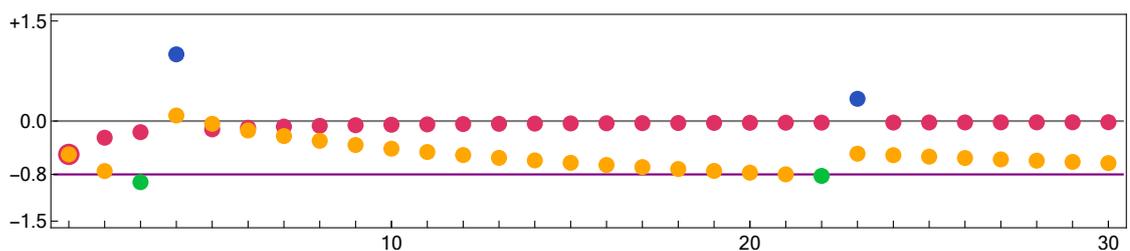
Riemannscher Umordnungssatz* Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, deren Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\sigma \in \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} = \sigma$ gilt. Oder anders gesagt: Nach geeigneter Umsortierung kann die unendliche Summe der x_k **jeden** beliebigen Wert annehmen.

Der Beweis dieses paradox anmutenden Resultats ist übrigens gar nicht so kompliziert und beruht auf einer erstaunlich einfachen Idee, die in den beiden Bildern für die alternierende harmonische Folge $x_n = (-1)^n/n$ und zwei willkürlich gewählte Werte von σ illustriert ist. Ein formaler Beweis findet sich in [Heu, Satz 32.4].



$$(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}, \frac{1}{23}, \frac{1}{25}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{27}, \frac{1}{29}, \frac{1}{31}, \frac{1}{33}, \frac{1}{35}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{37}, \frac{1}{39}, \frac{1}{41}, \frac{1}{43}, \frac{1}{45}, \frac{-1}{10}, \frac{1}{47}, \dots \right)$$

Abbildung Eine Umordnung der alternierenden harmonischen Folge $x_n = (-1)^{n-1}/n$, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} = \sigma$ mit $\sigma = 1.5$ gilt. Die positiven bzw. negativen Folgenglieder entsprechen den blauen bzw. roten Punkten und die grünen bzw. orangenen Punkte repräsentieren die Glieder der Partialsummenfolge, die kleiner bzw. größer als σ sind. Erkennen Sie die Konstruktionsidee? Sie besteht — salopp gesprochen — darin, die gegebenen positiven und negativen Bausteine ihrer Größe nach übereinander zu stapeln, wobei bei jedem Über- bzw. Unterschreiten der vorgegebenen Schranke σ die Sorte der Bausteine gewechselt wird.



$$(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{12}, \frac{-1}{14}, \frac{-1}{16}, \frac{-1}{18}, \frac{-1}{20}, \frac{-1}{22}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{26}, \frac{-1}{28}, \frac{-1}{30}, \frac{-1}{32}, \frac{-1}{34}, \frac{-1}{36}, \frac{-1}{38}, \frac{-1}{40}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{42}, \frac{-1}{44}, \frac{-1}{46}, \dots \right)$$

Abbildung Die Umordnung für $\sigma = -0.8$.

Produkte absolut konvergenter Reihen

Theorem (Cauchy-Produkt) Konvergieren die Reihen zu $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(v_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ absolut, so gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} v_l \right) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \quad \text{mit} \quad w_m := \sum_{n=0}^m u_n v_{m-n},$$

wobei die Reihe zu $(w_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ auch absolut konvergiert.

Beweis Die weitere Folge $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sei durch

$$\omega_m := \sum_{n=0}^m |u_n| |v_{m-n}|$$

definiert, wobei $0 \leq |w_m| \leq \omega_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ aus der Dreiecksungleichung folgt.

Teil 1: Wir bemerken zunächst (siehe die nachfolgende Abbildung), dass die Abschätzung

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^m |u_n| |v_{m-n}| \leq \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M |u_k| |v_l|$$

für jedes $M \in \mathbb{N}_0$ gilt. In der Tat, auf der linken Seite addieren wir alle nicht-negativen Produkte $|u_k| |v_l|$, für die das Indexpaar (k, l) auf den ersten M Diagonalen liegt (braun-rote Felder im ersten Bild), wohingegen wir auf der rechten Seite über alle Indexpaare summieren, die im Quadrat der Kantenlänge M liegen (grüne Felder im zweiten Bild). Außerdem gelten die Formeln

$$\sum_{m=0}^M \omega_m = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^m |u_n| |v_{m-n}|, \quad \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M |u_k| |v_l| = \left(\sum_{k=0}^M |u_k| \right) \left(\sum_{l=0}^M |v_l| \right),$$

denn die erste Gleichung ergibt sich aus der Definition von ω_m und bei der zweiten Gleichung entsteht die linke Seite durch Ausmultiplizieren der rechten Seite. Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{m=0}^M |w_m| \leq \sum_{m=0}^M \omega_m \leq \left(\sum_{k=0}^M |u_k| \right) \left(\sum_{l=0}^M |v_l| \right),$$

wobei alle auftretenden Summen monoton wachsend bzgl. M sind. Das Vergleichsprinzip für reelle Folgen liefert

$$\sum_{m=0}^{\infty} |w_m| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} |v_l| \right)$$

nach Grenzübergang $M \rightarrow \infty$, wobei rechts nach Voraussetzung eine endliche Zahl steht. Damit haben wir die absolute Konvergenz der Reihe zu $(w_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ sowie der Reihe zu $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ gezeigt.

Teil 2: Die zweite wesentliche Beobachtung ist die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^M u_k v_l - \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^m u_n v_{m-n} \right| \leq \sum_{m=M+1}^{2M} \sum_{n=0}^m |u_n| |v_{m-n}|,$$

die aus dem dritten Bild abgelesen werden kann. Auf der linken Seite summieren wir in der Betragsklammer effektiv nur die Produkte $u_k v_l$, deren Indexpaare (k, l) in einem Dreieck liegen (dunkle Felder), denn alle anderen Produkte kommen einmal mit $+$ und einmal mit $-$ vor und liefern keinen Beitrag. Auf der rechten Seite addieren wir hingegen die Beträge der linken Produkte sowie weitere nichtnegative Zahlen (helle Felder). Durch Einsetzen der Definitionen von w_m und ω_m sowie unter Ausnutzungen einer zu oben analogen Summenformel ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\left| \left(\sum_{k=0}^M u_k \right) \left(\sum_{l=0}^M v_l \right) - \sum_{m=0}^M w_m \right| \leq \sum_{m=M+1}^{2M} \omega_m$$

wobei die rechte Seite kleiner als der Reihenrest $\sum_{m=M+1}^{\infty} \omega_m$ ist. Die Behauptung ergibt sich nun nach Grenzübergang $M \rightarrow \infty$. \square

Bemerkungen

1. Wir haben im Theorem angenommen, dass alle unendlichen Summen beim Index 0 beginnen. Andere Wahlen der Startindizes sind natürlich möglich, aber die entsprechenden Formel werden etwas unübersichtlich.
2. Der Formel liegt eine einfache Idee zugrunde: Wenn wir zwei unendliche Summen nach der informellen Regel

Jeder Summand der eine Summe wird mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert.

gliedweise ausmultiplizieren und die entstehenden Produktterme *diagonalweise* (siehe die Abbildung) gruppieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) (v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = \\ \underbrace{u_0 v_0}_{=w_0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{=w_1} + \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{=w_2} + \underbrace{u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0}_{=w_3} + \dots \end{aligned}$$

und damit das gerade bewiesene Ergebnis. Beachte, dass wir hier stillschweigend vorausgesetzt haben, dass die Produkte beliebig umsortiert werden können.

3. Als wichtige Anwendung werden wir im nächsten Kapitel die Funktionalgleichung der Exponentialreihe aus der Cauchyschen Produktformel herleiten.

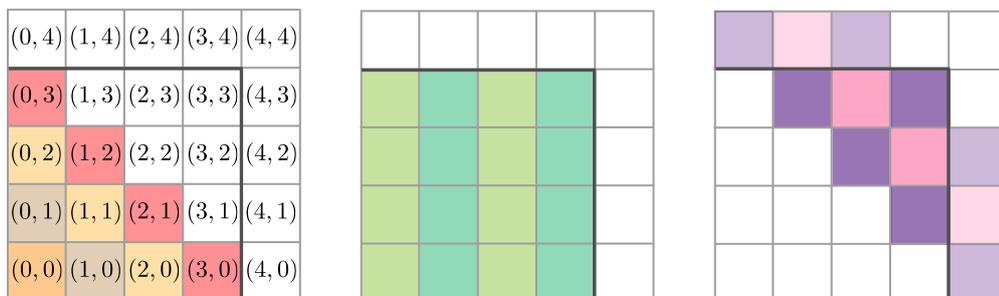


Abbildung Illustration zur Beweis der Cauchyschen Produktformel. *Links*: Alle Indexpaare (k, l) , wobei die Diagonalen $k + l = m$ für $m = 0, m = 1, m = 2$ und $m = 3$ jeweils farblich markiert sind. *Mitte*: Im ersten Beweisteil benutzen wir, dass alle Diagonalen mit $0 \leq m \leq M$ vollständig im Quadrat $0 \leq k \leq M$ und $0 \leq l \leq M$ liegen (dargestellt für $M = 3$). *Rechts*: Die Fehlerterme im zweiten Beweisteil werden entlang geeigneter Diagonalen kontrolliert.

Kapitel 7

Potenzreihen

Vorlesungswoche 07

7.1 Definition und Hauptsatz

Definition Ein Ausdruck der Bauart

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$$

heißt Potenzreihe mit komplexer Koeffizientenfolge¹ $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und Entwicklungspunkt z_* . Hierbei sind z , z_* sowie alle α_k im Allgemeinen komplexe Zahlen.

Bemerkungen

1. Potenzreihen sind sehr wichtig und werden Sie Ihr ganzes Studium begleiten. Die Idee ist, dass die Reihe auf der rechten Seite eine Funktion p in der Variablen z definiert, wobei der Definitionsbereich eine gewisse Teilmenge von \mathbb{C} ist. Siehe dazu den Hauptsatz weiter unten.
2. In der Theorie der Potenzreihen wird in der Regel \mathbb{N}_0 als Indexmenge für die unendliche Summe verwendet, d.h. der kleinste Summationsindex ist $k = 0$. Man kann alternativ aber auch bei einem anderen Startindex beginnen.
3. Wenn fast alle Koeffizienten α_k verschwinden², ist p gerade ein Polynom. Die Rolle von z_* werden wir erst später besser verstehen. Bei der ersten Lektüre können Sie immer $z_* = 0$ setzen.
4. Man kann auch wieder reelle Potenzreihen studieren, wobei dann $z_* \in \mathbb{R}$ und $\alpha_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Es wird sich aber zeigen, dass es selbst in diesem Fall oftmals sinnvoll ist, komplexe Werte für z zuzulassen und p als Funktion in einer komplexen Variablen zu betrachten.
5. Es gilt immer $p(z_*) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots = \alpha_0$.

¹*Erinnerung*: Es gilt $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

²*Verschwinden* gehört zum analytischen Jargon: Ein Zahl z verschwindet genau dann, wenn $z = 0$ gilt.

Theorem (Hauptsatz über Potenzreihen, Formel von Cauchy-Hadamard)
 Mit den obigen Notationen gibt es einen Konvergenzradius R , sodass die folgenden Aussagen gelten:

1. Für $|z - z_*| < R$ konvergiert $p(z)$ absolut.
2. Für $|z - z_*| > R$ divergiert $p(z)$.

Dieser Radius kann durch

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|},$$

berechnet werden, wobei die beiden Konventionen $1/0 = +\infty$ und $1/(+\infty) = 0$ gelten.

Beweis Wir diskutieren nur den Fall $0 < R < \infty$. In den beiden Entartungsfällen $R = 0$ oder $R = \infty$ können die jeweiligen Aussagen mit vereinfachten bzw. leicht abgewandelten Argumenten bewiesen werden.

Teil 1: Für festes z mit $|z - z_*| < R$ wählen wir ϱ beliebig mit $|z - z_*| < \varrho < R$. Nach der ersten äquivalenten Charakterisierung des Limes superior existiert ein Index $K \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[k]{|\alpha_k|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R} \right)$$

für alle $k > K$ gilt³, denn die rechte Seite ist nach Wahl von ϱ größer als $1/R$. Für diese Indizes k ergibt sich

$$\sqrt[k]{|\alpha_k (z - z_*)^k|} = \sqrt[k]{|\alpha_k|} |z - z_*| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R} \right) \varrho = \frac{R + \varrho}{2R} =: q,$$

wobei $0 < q < 1$ nach Konstruktion sichergestellt ist. Mit dem Majorantenkriterium für Reihen schließen wir

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |\alpha_k (z - z_*)^k| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} q^k = \frac{q^{K+1}}{1 - q} < \infty$$

und erhalten mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k (z - z_*)^k| = \sum_{k=0}^K |\alpha_k (z - z_*)^k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |\alpha_k (z - z_*)^k| \leq C_K + \frac{q^{K+1}}{1 - q} < \infty$$

die gewünschte absolute Konvergenz, wobei K die oben gewählte, feste Zahl ist und $C_K := \sum_{k=0}^K |\alpha_k (z - z_*)^k| < \infty$ gilt.

Teil 2: Im Fall von $|z - z_*| > R$ wählen wir ϱ mit $R < \varrho < |z - z_*|$ und folgern aus der ersten äquivalenten Charakterisierung des Limes superior, dass

$$\sqrt[k]{|\alpha_k|} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R} \right)$$

³Wir haben hier eigentlich die Negation einer Teilaussage dies Theorems verwendet.

für unendlich viele Indizes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei die rechte Seite diesmal kleiner als $1/R$ ist. Für diese Indizes gilt

$$\sqrt[k]{|\alpha_k(z - z_*)^k|} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R} \right) \varrho = \frac{R + \varrho}{2R} > 1 \quad \text{und damit} \quad \left| \alpha_k(z - z_*)^k \right| > 1$$

und wir schließen, dass die Folge $(\alpha_k(z - z_*)^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Reihenglieder keine Nullfolge ist. Also kann (siehe die Folgerung aus dem Cauchy-Kriterium) die Reihe zu $p(z)$ nicht konvergieren. \square

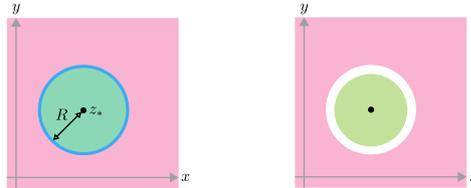


Abbildung Links: Jede Potenzreihe p besitzt eine offene Konvergenzkreisscheibe (grün) um ihren Entwicklungspunkt, auf der sie in jedem Punkt z absolut konvergiert. Auf dem Rand (blau) ist keine allgemeine Aussage möglich, aber im Außengebiet (rot) divergiert die Reihe in jedem Punkt z , d.h. $p(z)$ ist nicht wohldefiniert. Rechts: Auf jeder kleineren Kreisscheibe konvergiert die Potenzreihe sogar gleichmäßig bzgl. z .

Bemerkungen

1. Im Fall von $R = \infty$ konvergiert $p(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Das ist der denkbar beste Fall. Für $R = 0$ konvergiert $p(z)$ aber nur für $z = z_*$ und dies ist der denkbar schlechteste Fall. Für $0 < R < \infty$ gibt es jedoch eine nicht-entartete Konvergenzkreisscheibe, nämlich $B_R(z_*)$, die Kreisscheibe von Radius R um z_* . Siehe dazu auch das Bild.
2. Für einen Punkt z mit $|z - z_*| = R$ macht das Theorem keine Aussage und wir brauchen in der Regel ausgefeiltere Methoden, um zu entscheiden, ob nun Konvergenz oder Divergenz vorliegt. In der mathematischen Praxis stellt dies kein wirkliches Problem dar, denn in aller Regel werden sowieso nur Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_*| < R$ betrachtet.
3. Klarstellung: Für $k = 0$ ist der Ausdruck $\sqrt[k]{|\alpha_k|}$ gar nicht definiert. Das ist aber nicht schlimm, da uns in der Cauchy-Hadamard-Formel nur die großen Werte von k interessieren. Für $k = 1$ gibt es wegen $\sqrt[1]{|\alpha_1|} = |\alpha_1|$ kein Problem.
4. Mit denselben Methoden wie im Beweis des Theorems können wir im Fall von $R > 0$ die folgende Restgliedabschätzung etablieren: Für jeden Radius ϱ mit $0 < \varrho < R$ existiert eine Konstante C_ϱ , sodass

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \alpha_k(z - z_*)^k \right| \leq C_\varrho \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|z - z_*|}{R} \right)^k = \frac{C_\varrho |z - z_*|^{n+1}}{R^n (R - |z - z_*|)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_*| \leq \varrho$ gilt. Es folgt

$$\sup_{z \in \overline{B}_\varrho(z_*)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \alpha_k(z - z_*)^k \right| \leq \frac{C_\varrho \varrho^{n+1}}{R^n (R - \varrho)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wobei $\overline{B}_\varrho(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| \leq \varrho\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius ϱ und Mittelpunkt z_* ist. Wir werden später mit dieser Abschätzung zeigen, dass die Potenzreihe p *lokal gleichmäßig* auf ihrer Konvergenzkreisscheibe konvergiert.

Lemma (nützliches Resultat über Wurzel- und Quotiententerme) Sei $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge mit $\eta_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\eta_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\eta_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k},$$

wobei jeder Term auch den Wert $+\infty$ annehmen darf. Insbesondere gilt die Implikation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} = \tau \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\eta_k} = \tau,$$

aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Beweis Wir beginnen mit dem rechten Teil der Dreifachungleichung und bezeichnen mit $\bar{\tau}$ den größten Häufungspunkt der Folge $(\eta_{k+1}/\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Da im Fall $\bar{\tau} = +\infty$ ist nichts zu zeigen, gelte von nun an $\bar{\tau} < \infty$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$ beliebig und wählen $K \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} \leq \bar{\tau} + \varepsilon \quad \text{für alle } k > K$$

gilt. Durch vollständige Induktion können wir nun zeigen, dass

$$\eta_k \leq (\bar{\tau} + \varepsilon)^k \frac{\eta_{K+1}}{(\bar{\tau} + \varepsilon)^{K+1}} \quad \text{und damit} \quad \sqrt[k]{\eta_k} \leq (\bar{\tau} + \varepsilon) \sqrt[k]{\frac{\eta_{K+1}}{(\bar{\tau} + \varepsilon)^{K+1}}}$$

für alle $k > K$ gilt. Da die rechte Seite der zweiten Abschätzung für $k \rightarrow \infty$ gegen $\bar{\tau} + \varepsilon$ konvergiert, folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\eta_k} \leq \bar{\tau} + \varepsilon$$

mit einem einfachen Teilfolgenargument. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir schließlich die gewünschte Abschätzung. Der mittlere Teil der Dreifachungleichung gilt per Definition und der linke Teil kann analog abgeleitet werden, wobei der Sonderfall $\underline{\tau} = 0$ trivial ist. Die behauptete Implikation ist eine direkte Konsequenz der Dreifachungleichung. \square

Beispiel Mit $\eta_k = 1/k!$ gilt

$$\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \sqrt[k]{\eta_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

wobei das erste Konvergenzresultat fast trivial ist und in Kombination mit dem Lemma das zweite impliziert.

Korollar (Quotienten- und Wurzelformel für den Konvergenzradius) Für jede Potenzreihe gilt

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|},$$

sofern der jeweilige Grenzwert existiert.

Beweis Die Behauptungen ergeben sich sofort aus dem vorherigen Lemma sowie der Cauchy-Hadamard-Formel aus dem Hauptsatz. \square

Beispiele

1. Die wichtigsten Beispiele sind die Exponentialreihe sowie die trigonometrischen Reihen Sinus und Kosinus, die wir weiter unten einführen werden.
2. Für einen festen Parameter $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Koeffizienten $\alpha_k = \lambda^k$. Dann ist $(\alpha_k (z - z_*)^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ für jede Wahl von $z \in \mathbb{C}$ eine geometrische Folge und die bekannte Reihenformel

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (z - z_*)^k = \frac{1}{1 - \lambda(z - z_*)}$$

können wir dann und nur dann verwenden, wenn $|\lambda| |z - z_*| < 1$ gilt. Mit dem Beispiel zum Lemma liefert die Cauchy-Hadamard-Formel den Konvergenzradius $R = 1/|\lambda|$ via

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\lambda^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda| = |\lambda|$$

und damit im Prinzip dasselbe Ergebnis, nämlich absolute Konvergenz für $|z - z_*| < 1/|\lambda|$ und Divergenz für $|z - z_*| > 1/|\lambda|$.⁴

3. Ist $r \neq 0$ ein weiterer Parameter, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \lambda^k z^k$$

durch die Formel

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^r |\lambda^{k+1}|}{|k^r \lambda^k|} = |\lambda| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^r = |\lambda|$$

gegeben, d.h. es gilt wieder $R = 1/|\lambda|$ für jede Wahl von $r \neq 0$.⁵

4. Mit

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j! \text{ für ein } j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt sich die *Lückenreihe*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = \sum_{j=1}^{\infty} z^{j!} = z + z^2 + z^6 + z^{24} + z^{120} + \dots$$

Die Folge $(\sqrt[k]{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}_0} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ besitzt offensichtlich die Häufungspunkte 0 und 1, d.h. die Cauchy-Hadamard-Formel liefert $R = 1$ für den Konvergenzradius. In diesem Beispiel dürfen aber weder die Quotienten- noch die Wurzelformel aus dem Lemma verwendet werden, denn die jeweiligen Grenzwerte existieren nicht.

⁴Der Hauptsatz macht keine Aussage im Fall von $|z - z_*| = 1/|\lambda|$, wohingegen die Rechnungen mit geometrischen Partialsummen zeigen, dass dann Divergenz vorliegt.

⁵Hier haben wir wieder ein Stetigkeitsresultat antizipiert, dass wir eigentlich erst später beweisen werden, nämlich $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + 1/k)^r = 1$. Im Moment können wir die verwendete Grenzwertformel strenggenommen nur für ganzzahlige r rigoros begründen.

Theorem (Identitätssatz für Potenzreihen) Sei $R > 0$ und sei

$$\tilde{p}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k (z - z_*)^k$$

eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $\tilde{R} > 0$. Außerdem sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_*$ sowie

$$p(z_n) = \tilde{p}(z_n) \quad \text{und} \quad 0 < |z_n - z_*| < \min\{R, \tilde{R}\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\alpha_k = \tilde{\alpha}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $R = \tilde{R}$ sowie $p(z) = \tilde{p}(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_*| < R$.

Beweis Wir nehmen an, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es Indizes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$ und wir bezeichnen den davon kleinsten mit k_* . Damit gilt

$$p(z) - \tilde{p}(z) = (\alpha_{k_*} - \tilde{\alpha}_{k_*}) (z - z_*)^{k_*} + \sum_{k=k_*+1}^{\infty} (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) (z - z_*)^k$$

wegen $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0, \dots, \alpha_{k_*-1} = \tilde{\alpha}_{k_*-1}$. Die oben angegebene Restgliedabschätzung — angewendet einmal für p und dann noch einmal für \tilde{p} , jeweils mit $\varrho = \frac{1}{2} \min\{R, \tilde{R}\}$ und $n = k_*$ — liefert

$$\left| \sum_{k=k_*+1}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k \right| + \left| \sum_{k=k_*+1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k (z - z_*)^k \right| \leq C |z - z_*|^{k_*+1}$$

und damit

$$\left| \sum_{k=k_*+1}^{\infty} (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) (z - z_*)^k \right| \leq C |z - z_*|^{k_*+1}$$

für eine geeignete Konstante C . Wir wählen nun $n_* \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass

$$0 < |z_{n_*} - z_*| \leq \frac{|\alpha_{k_*} - \tilde{\alpha}_{k_*}|}{2C}$$

gilt und erhalten mit der Dreiecksungleichung (in der Form $|a + b| \geq |a| - |b|$) die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &= |p(z_{n_*}) - \tilde{p}(z_{n_*})| \geq |\alpha_{k_*} - \tilde{\alpha}_{k_*}| |z_{n_*} - z_*|^{k_*} - \left| \sum_{k=k_*+1}^{\infty} (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) (z_{n_*} - z_*)^k \right| \\ &\geq |\alpha_{k_*} - \tilde{\alpha}_{k_*}| |z_{n_*} - z_*|^{k_*} - C |z_{n_*} - z_*|^{k_*+1} \geq \frac{1}{2} |\alpha_{k_*} - \tilde{\alpha}_{k_*}| |z_{n_*} - z_*|^{k_*} > 0. \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch. □

Bemerkung Der Identitätssatz ist in der angegebenen Fassung sehr abstrakt und wenig anschaulich. Er wird aber später eine wichtige Rolle spielen. Insbesondere garantiert er, dass die Nullstellen einer Potenzreihe sich nicht häufen können und dass Potenzreihen mit unterschiedlichen Koeffizientenfolgen tatsächlich verschieden sind.

7.2 Reihen exp, sin, cos

Definition-Theorem Durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \dots$$

wird eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = \infty$ definiert, die wir Exponentialreihe nennen.

Beweis Die Aussage bzgl. R ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz und dem Beispiel zum nützlichen Resultat über Wurzel- und Quotiententerme. \square

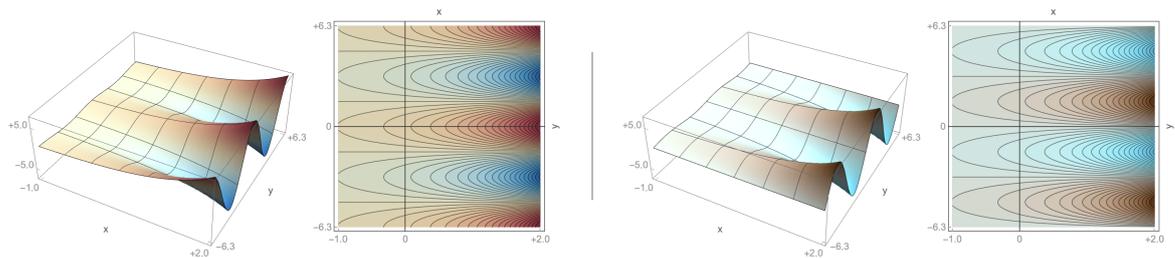


Abbildung Die Flächen- und Kontourplots für den Real- sowie den Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion. Links bzw. rechts vom Separator ist die Funktion

$$(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(\exp(x + i y)) = \exp(x) \cos(y) \quad \text{bzw.} \quad (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(\exp(x + i y)) = \exp(x) \sin(y)$$

dargestellt, wobei wie hinter dem Gleichheitszeichen schon Formeln von unten benutzt haben.

Definition Die Ausdrücke

$$\sin(z) := \frac{1}{2} i (\exp(-i z) - \exp(+i z))$$

bzw.

$$\cos(z) := \frac{1}{2} (\exp(-i z) + \exp(+i z))$$

werden Sinus bzw. Kosinus von z genannt.

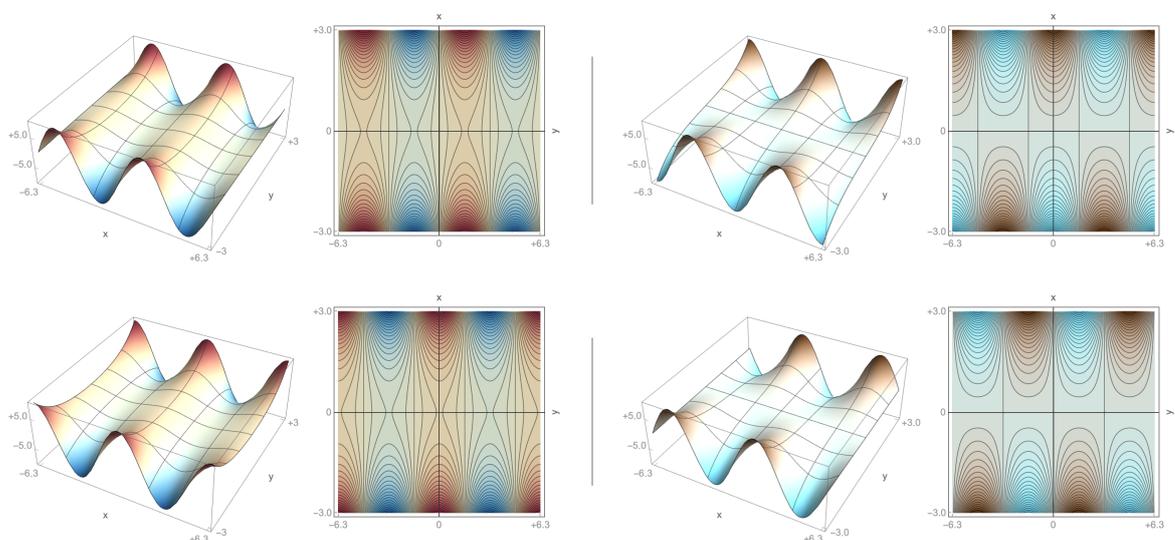


Abbildung Der Sinus (oben) und der Kosinus (unten) im Komplexen. Es wird sich zeigen, dass diese trigonometrischen Funktionen 2π -periodisch bzgl. x sind, aber in y -Richtung beidseitig exponentiell wachsen.

Reihendarstellungen von Sinus und Kosinus Aufgrund der Rechenregeln für konvergente Reihen ergibt sich

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left((-i)^k + (+i)^k \right) \frac{z^k}{k!} = 1 - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{24} z^4 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}$$

sowie

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} i \left((-i)^k - (+i)^k \right) \frac{z^k}{k!} = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

wobei wir benutzt haben, dass die beiden Folgen

$$\begin{aligned} \left((-i)^k \right)_{k \in \mathbb{N}_0} &= (+1, -i, -1, +i, +1, -i, \dots), \\ \left((+i)^k \right)_{k \in \mathbb{N}_0} &= (+1, +i, -1, -i, +1, +i, \dots) \end{aligned}$$

jeweils 4-periodisch sind. Insbesondere ist der Kosinus bzw. der Sinus eine Potenzreihe, bei der alle Koeffizienten mit ungeradem bzw. geradem Index k verschwinden.

Bemerkung

1. Die Reihendarstellungen zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Werte $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$ jeweils reell sind. In diesem Sinne gibt es die reellen Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Es ist zunächst nicht klar, dass die gerade definierten Funktionen wirklich die aus der Schule bekannten Eigenschaften besitzen. Dies wird sich aber im weiteren Verlauf der Vorlesung herausstellen.
3. Aus der Definition ergeben sich unmittelbar die Paritätseigenschaften

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ und analog für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Theorem (Euler-Formel) Es gilt

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis Wenn wir die Definitionen von $\cos(z)$ und $\sin(z)$ in die rechte Seite der Formel einsetzen, heben sich die Beiträge von $\exp(-iz)$ gegenseitig auf und es bleibt nur $\exp(+iz)$ stehen. \square

Theorem (Funktionalgleichung von exp) Die Formel

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

gilt für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Beweis Das Cauchy-Produkt für absolute konvergente Reihen garantiert

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} \right),$$

wobei

$$\frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \frac{k!}{j!(k-j)!} z_1^j z_2^{k-j} = \frac{1}{k!} \binom{k}{j} z_1^j z_2^{k-j}$$

gilt. Mit dem Binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$\sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z_1^j z_2^{k-j} \right) = \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!}$$

und die Behauptung folgt nach Einsetzen der letzten Formel in die erste. \square

Bemerkung

1. Die Funktionalgleichung legt die Exponentialfunktion bereits eindeutig bis auf eine Normierungsbedingung fest. Dies wird zum Beispiel in [Koe, Kapitel 8] gezeigt.
2. Als Spezialfall erhalten wir

$$\exp(-z) \exp(+z) = \exp(0) = 1$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$, wobei beide Faktoren auf der linken Seite im Allgemeinen nicht-reell sind. Insbesondere gilt $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. die komplexe Exponentialfunktion besitzt keine Nullstellen.

3. Die letzte Formel gilt natürlich auch für alle $i z$. In Kombination mit der Euler-Formel und den Paritätseigenschaften erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(-i z) \exp(+i z) = (\cos(z) - i \sin(z)) (\cos(z) + i \sin(z)) \\ &= \cos^2(z) + \sin^2(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $\cos^2(z)$ eine Abkürzung für $(\cos(z))^2$ ist. Die wohlbekannte Formel aus der Schule gilt also auch im Komplexen.

4. Für reelle Zahlen $x > 0$ ergibt sich $\exp(x) > 0$, da jedes Glied der Reihe positiv ist. Mit $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ folgt auch $\exp(-x) > 0$, d.h. in der entsprechenden unendlichen Summe dominieren die positiven Terme die negativen Terme.
5. Wir können leicht mit vollständiger Induktion zeigen, dass die verallgemeinerte Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + \dots + z_n) = \exp(z_1) \cdot \dots \cdot \exp(z_n)$$

für alle $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt.

Additionstheoreme Mittels der Euler-Formel und unter Verwendung der Paritätseigenschaften können die aus der Schule bekannten trigonometrischen Formeln sehr elegant hergeleitet werden. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) &= \exp(+i(z_1 + z_2)) = \exp(+i z_1) \exp(+i z_2) \\ &= (\cos(z_1) + i \sin(z_1)) (\cos(z_2) + i \sin(z_2)) \\ &= (\cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)) \\ &\quad + i (\cos(z_1) \sin(z_2) + \sin(z_1) \cos(z_2))\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) - i \sin(z_1 + z_2) &= \exp(-i(z_1 + z_2)) = \exp(-i z_1) \exp(-i z_2) \\ &= (\cos(z_1) - i \sin(z_1)) (\cos(z_2) - i \sin(z_2)) \\ &= (\cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2)) \\ &\quad - i (\cos(z_1) \sin(z_2) + \sin(z_1) \cos(z_2)),\end{aligned}$$

und durch Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2), \\ \sin(z_1 + z_2) &= \cos(z_1) \sin(z_2) + \sin(z_1) \cos(z_2)\end{aligned}$$

nach kleineren Umformungen, da sich auf der linken und der rechten Seite die Terme mit bzw. ohne den Vorfaktor i gegenseitig aufheben. Beachte, dass z_1 und z_2 beliebige komplexe Zahlen sein können.

hyperbolische Funktionen Oftmals werden auch der Sinus hyperbolicus

$$\sinh(z) := \frac{1}{2} (\exp(+z) - \exp(-z)) = -i \sin(i z)$$

sowie der Kosinus hyperbolicus

$$\cosh(z) := \frac{1}{2} (\exp(+z) + \exp(-z)) = \cos(i z)$$

verwendet.⁶ Diese Definitionen implizieren analog zu oben die Formeln

$$\cosh(-z) = \cosh(z), \quad \sinh(-z) = -\sinh(z),$$

aber diesmal gilt $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ sowie $\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$.

Ausblick: Rolle von π Wir haben die Kreiszahl immer noch nicht eingeführt, werden sie aber im nächsten Kapitel indirekt durch die Bedingungen $0 < \pi < 4$ und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

definieren (siehe dazu auch das Hilfsresultat weiter unten). Die Formel

$$\exp\left(z + i m \frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)^m \exp(z) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^m \exp(z) = (i)^m \exp(z)$$

⁶Die Bezeichnung *hyperbolisch* ist historisch entstanden und wird in der modernen Mathematik als feststehender Begriff verwendet. Mit den hyperbolischen Funktionen kann man zwar in der Tat Hyperbeln sehr gut beschreiben, aber das spielt heutzutage keine große Rolle mehr.

ergibt sich dann für jedes $m \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ unmittelbar aus der Euler-Formel sowie der Funktionalgleichung. Als direkte Konsequenz erhalten wir

$$\cos\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin(z), \quad \cos(z + \pi) = -\cos(z), \quad \cos\left(z + \frac{3}{2}\pi\right) = +\sin(z)$$

bzw.

$$\sin\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = +\cos(z), \quad \sin(z + \pi) = -\sin(z), \quad \sin\left(z + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos(z),$$

sowie die bekannten Periodizitätsgesetze

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z),$$

die auch im Komplexen gelten. Beachte aber, dass das Exponential keine reelle, sondern die imaginäre Periode $2\pi i$ besitzt, denn es gilt $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$.

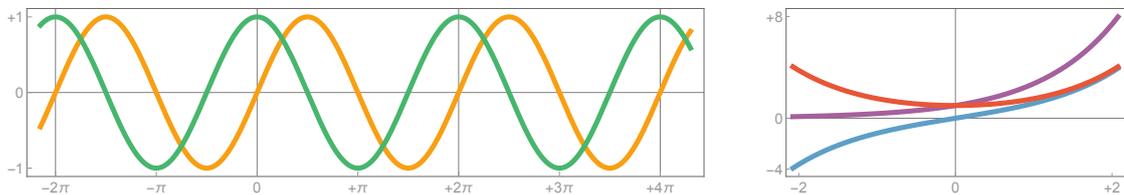


Abbildung Die Funktion \sin (gelb), \cos (grün), \sinh (blau), \cosh (rot) und \exp (lila) im Reellen.

7.3 Eigenschaften der komplexen Exponentialreihe

Lemma (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe) Es gilt

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$.

Beweis Die Behauptung ergibt sich aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|z|^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{|z|^{n+3}}{(n+3)!} + \dots \\ &= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z|}{(n+2)} + \frac{|z|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right), \end{aligned}$$

denn die geometrische Reihe auf der rechten Seite summiert sich zu 2. \square

Lemma (wichtige Grenzwertformeln) Für jede komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(z_n)}{z_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(z_n)}{z_n^2} = \frac{1}{2},$$

wobei $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt sei.

Beweis Die Restglieddarstellung aus dem letzten Lemma impliziert

$$|\exp(z) - 1 - z| \leq |z|^2$$

für alle z mit $0 < |z| \leq 1$. Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \rightarrow 0$ nach Voraussetzung gilt, erhalten wir

$$\left| \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} - 1 \right| \leq \frac{|\exp(z_n) - 1 - z_n|}{|z_n|} \leq |z_n|$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und dies impliziert die Behauptung mit $n \rightarrow \infty$. Die beiden anderen Formeln können mit analogen Argumenten aus der Definition von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ sowie den Restgliedabschätzungen

$$|\exp(\pm i z) - (\pm i z)| \leq |z|^2, \quad |\exp(\pm i z) - (\pm i z) - \frac{1}{2}(\pm i z)^2| \leq \frac{1}{3}|z|^3$$

hergeleitet werden. □

Lemma (Fundamentallemma) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right)$$

für jede konvergente Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.⁷

Beweis Weil $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als konvergente Folge auch beschränkt ist, existiert $C > 0$, sodass $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $|\zeta| \leq C$ gilt, wobei $\zeta := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\exp(C) = \sum_{k=0}^{\infty} C^k/k!$ eine absolut konvergente reelle Reihe ist, können wir $K_* \in \mathbb{N}$ so wählen, dass der Reihenrest die Abschätzung

$$\sum_{k=K_*+1}^{\infty} \frac{C^k}{k!} < \frac{1}{3}\varepsilon$$

erfüllt. Wir betrachten nur noch Indizes $n > K_*$ und schreiben

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \exp(\zeta) = D_n + E_n + F_n$$

mit

$$D_n := \sum_{k=0}^{K_*} \left(\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{\zeta^k}{k!} \right), \quad E_n := \sum_{k=K_*+1}^n \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k}, \quad F_n := \sum_{k=K_*+1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!},$$

wobei wir den binomischen Lehrsatz angewendet und die Definition der Exponentialreihe eingesetzt haben. Den dritten Fehlerterm können wir durch

$$|F_n| \leq \sum_{k=K_*+1}^{\infty} \frac{|\zeta|^k}{k!} \leq \sum_{k=K_*+1}^{\infty} \frac{|C|^k}{k!} < \frac{1}{3}\varepsilon$$

kontrollieren, und weil

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{0}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}$$

⁷Im Spezialfall $z_n = 1$ (konstante Folge) kann der Beweis deutlich vereinfacht werden. Siehe dazu die entsprechende *-Hausaufgabe.

gilt, erhalten wir mit

$$|E_n| \leq \sum_{k=K_*+1}^n \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k} \leq \sum_{k=K_*+1}^n \frac{C^k}{k!} \leq \sum_{k=K_*+1}^{\infty} \frac{C^k}{k!} < \frac{1}{3} \varepsilon$$

eine analoge Schranke für den zweiten Fehlerterm. Da

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \quad \text{und damit} \quad \frac{z_n^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta^k}{k!}$$

für jedes $k \in \{1, \dots, K_*\}$ erfüllt ist, gilt auch

$$D_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere existiert ein $N_* \in \mathbb{N}$ mit

$$|D_n| < \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_*$$

und insgesamt erhalten wir

$$\left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \exp(\zeta) \right| \leq \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max\{K_*, N_*\}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Korollar (Exponentialreihe und Eulersche Zahl) Es gilt

$$\exp\left(+\frac{m_1}{m_2}\right) = \mathbf{e}^{+m_1/m_2} = \sqrt[m_2]{\mathbf{e}^{+m_1}}, \quad \exp\left(-\frac{m_1}{m_2}\right) = \mathbf{e}^{-m_1/m_2} = \sqrt[m_2]{\mathbf{e}^{-m_1}}$$

für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbf{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ die Eulersche Zahl ist.

Beweis Wenn wir im Fundamentallemma $z_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen, erhalten wir $\mathbf{e} = \exp(1)$ und damit die erste Behauptung im Spezialfall $m_1 = m_2 = 1$. Für jedes feste $m_1 \in \mathbb{N}$ impliziert die verallgemeinerte Funktionalgleichung

$$\mathbf{e}^{m_1} = \underbrace{\exp(1) \cdot \dots \cdot \exp(1)}_{m_1 \text{ Faktoren}} = \exp(m_1 \cdot 1) = \exp(m_1),$$

d.h. die erste Behauptung gilt für alle m_1 mit $m_2 = 1$. Analog ergibt sich

$$\exp\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{m_2} = \underbrace{\exp\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cdot \dots \cdot \exp\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}_{m_2 \text{ Faktoren}} = \exp\left(m_2 \cdot \frac{m_1}{m_2}\right) = \exp(m_1)$$

für jede Wahl von $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, und wir schließen, dass die positive Zahl $\exp(m_1/m_2)$ die eindeutige m_2 -te Wurzel der positiven Zahl $\exp(m_1) = \mathbf{e}^{m_1}$ ist.⁸ Die zweite Behauptung ergibt sich schließlich aus

$$\exp\left(-\frac{m_1}{m_2}\right) \exp\left(+\frac{m_1}{m_2}\right) = 1,$$

d.h. es gilt $\exp(-m_1/m_2) = 1/\mathbf{e}^{+m_1/m_2}$. \square

⁸Wir hatten uns schon oben überlegt, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung Aufgrund des Lemmas schreiben wir auch

$$e^z \quad \text{statt} \quad \exp(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt

$$e^{x+iy} = \exp(x + iy) = \exp(x) (\cos(y) + i \sin(y))$$

und wir haben damit nebenbei Potenzen der reellen Zahl e mit komplexem *Exponenten* $z \in \mathbb{C}$ eingeführt. Wir werden später mit einem ähnlichen Trick Potenzen der Bauart β^{x+iy} für jedes reelle $\beta > 0$ definieren.

Achtung Potenzen mit komplexer *Basis*, also Terme wie

$$\sqrt{i}, \quad (1+i)^{1/3}, \quad (2-i)^{1+3i},$$

sind ungleich kritischer und wir können die zugrunde liegenden Mehrdeutigkeiten noch nicht diskutieren. In dieser Vorlesung verwenden wir für eine allgemeine komplexe Zahl $z \neq 0$ nur ihre *ganzzahligen* Potenzen

$$\dots, \quad z^{-2} = \frac{1}{z \cdot z}, \quad z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z^0 = 1, \quad z^{+1} = z, \quad z^{+2} = z \cdot z, \quad \dots,$$

die aufgrund der Körperstruktur von \mathbb{C} wohldefiniert sind.

Lemma (Hilfsresultat für die Definition der Kreiszahl) Es gilt

$$\cos(x_1) > \cos(x_2) \quad \text{für alle} \quad 0 \leq x_1 < x_2 \leq 2 \quad \text{mit} \quad \cos(0) > 0 > \cos(2)$$

sowie $\sin(x) > 0$ für alle $0 < x \leq 2$.

Beweis In diesem Beweis gilt stets $0 \leq x \leq 2$. Die Reihenentwicklung des Sinus kann auch als

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \eta_k \quad \text{mit} \quad \eta_k := \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

geschrieben werden, wobei die positiven Hilfskoeffizienten der Monotoniebedingung

$$0 \leq \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} = \frac{(2k-1)! x^{2k+1}}{(2k+1)! x^{2k-1}} = \frac{x^2}{2k(2k+1)} \leq \frac{x^2}{4} \leq 1$$

genügen. Das entspricht gerade der Voraussetzung im Leibniz-Kriterium und wie in dessen Beweis können wir

$$\eta_1 - \eta_2 \leq \sin(x) \leq \eta_1 \quad \text{bzw.} \quad x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin(x) \leq x$$

zeigen. Hieraus folgt

$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad \sin(x) \geq \left(1 - \frac{4}{6}\right)x = \frac{1}{3}x > 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0,$$

wobei wir $x^3 \leq 4x$ benutzt haben. Für reelle Zahlen x_1, x_2 mit $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ gehört sowohl $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ als auch $\frac{1}{2}(x_2 + x_1)$ zum Intervall $(0, 2]$ und in Kombination mit dem Additionstheorem (Übungsaufgabe)

$$\cos(x_1) - \cos(x_2) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x_2 - x_1)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(x_2 + x_1)\right)$$

erhalten wir die erste Behauptung über den Kosinus. Aus dem Additionstheorem folgt weiterhin

$$\cos(2) = 1 - 2 \sin^2(1) \leq 1 - 2 \frac{25}{36} = -\frac{7}{18} < 0,$$

wobei wir $\cos(0) = 1$ benutzt haben. □

Ausblick: Definition von π Wir haben gerade gezeigt, dass der reelle Kosinus auf dem Intervall $[0, 2]$ strikt monoton fallend ist und einen positiven bzw. negativen Wert am linken bzw. am rechten Randpunkt annimmt. Wir werden im nächsten Kapitel beweisen, dass der reelle Kosinus *stetig* ist und der *Zwischenwertsatz* wird zusammen mit der Monotonie sicherstellen, dass es genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ gibt. Das Doppelte dieser Nullstellen nennen wir π , so dass $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ per Definition gilt.⁹ Dies impliziert $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und schließlich $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1} = 1$ wegen $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

⁹Diese indirekte Definition impliziert $\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793 \dots$, d.h. π ist wirklich die aus der Schule bekannte Kreiszahl. Geeignete Formeln für die numerische Berechnung der Ziffernfolge werden zum Beispiel in [Koe, Abschnitt 8.11] diskutiert.

Kapitel 8

Stetigkeit

Vorlesungswoche 08

8.1 Definition und Beispiele

Vorbemerkung Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich ist. Die Menge $f(D) =: \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$ wird der Wertebereich oder der Bildbereich genannt.¹

Definition Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_* \in D$, sofern für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass die Implikation

$$|x - x_*| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ erfüllt ist.

Bemerkungen

1. Die geometrische Bedeutung dieser Definition ist im Bild illustriert. Beachte, dass δ von x_* und ε abhängen darf bzw. im Allgemeinen wird.
2. In der Schule lehrt man meist:

Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn ihr Graph ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden kann.

Für den Hausgebrauch ist das eine passable Beschreibung, aber mit ihr können wir weder Beweise führen noch geeignete Verallgemeinerungen identifizieren. Außerdem gibt es auch Funktionen, bei denen jede Anschauung versagt.

3. Stetigkeit ist per Definition zunächst eine **punktweise** Eigenschaft, die in einigen Punkten des Definitionsbereiches erfüllt, in anderen aber verletzt sein kann. Siehe dazu auch die Beispiele unten.
4. Wenn f in jedem Punkt $x_* \in \tilde{D}$ einer Menge $\tilde{D} \subseteq D$ stetig ist, so nennen wir f stetig auf \tilde{D} . Im Fall von $\tilde{D} = D$ sagen wir einfach, f ist stetig.

¹Manche Autoren schreiben $f[D]$ statt $f(D)$, da hier das Argument von f keine Zahl, sondern eine Menge von Zahlen ist.

5. Die Definition ist in vielen Fällen unhandlich bzw. nur schwer zu überprüfen. Wir werden aber alternative Stetigkeitskriterien ableiten, mit denen wir in der Praxis besser arbeiten können.
6. Ist f nicht stetig in x_* , so nennen wir x_* eine Unstetigkeitsstelle (oder -punkt) von f . Dabei kann es sich um eine *Sprungstelle* (siehe weiter unten) oder um etwas anderes handeln.

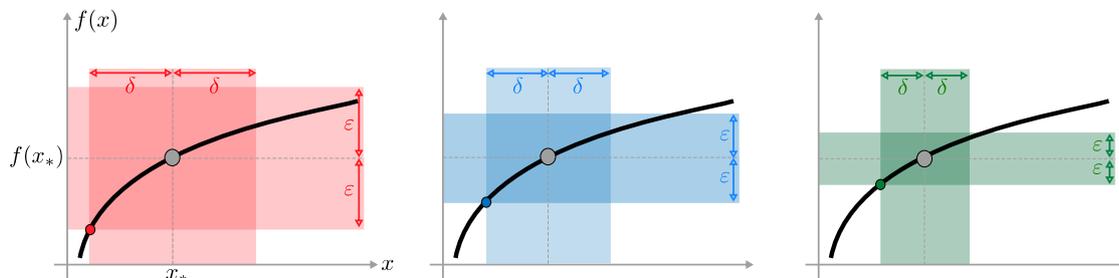


Abbildung Schematische Darstellung von Stetigkeit im Punkt x_* : Zu **jedem** horizontalen Schlauch der Dicke 2ε existiert ein entsprechender vertikaler Schlauch der Dicke 2δ , sodass für jedes x im vertikalen Schlauch der Funktionswert $f(x)$ im horizontalen Schlauch liegt. In jedem der drei Bilder ist immer die optimale Wahl von δ dargestellt (siehe die farbigen Punkte), aber jeder kleinere Wert von δ wäre auch zulässig.

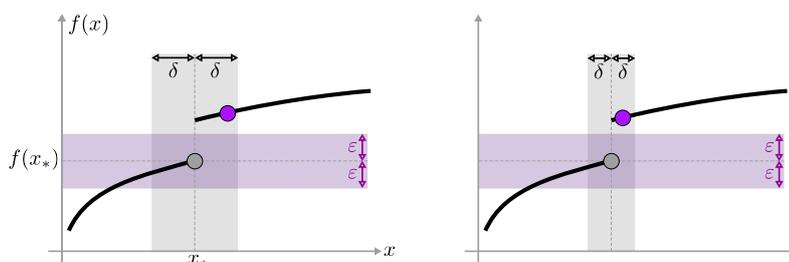


Abbildung Schematische Darstellung einer Unstetigkeitsstelle x_* : Für mindestens einen Wert von $\varepsilon > 0$ gibt es kein entsprechendes $\delta > 0$. Insbesondere gibt es für jeden noch so kleinen vertikalen Schlauch immer ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x)$ nicht im horizontalen Schlauch liegt (siehe die lila Punkte).

Beispiele

1. Das Polynom $f(x) = x^2$ ist auf $D = \mathbb{R}$ definiert und in jedem Punkt $x_* \in \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Es gilt

$$|f(x) - f(x_*)| = |x + x_*| |x - x_*| \leq (|x - x_*| + 2|x_*|) |x - x_*|$$

und für jedes $\varepsilon > 0$ können wir zum Beispiel

$$\delta := \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_*|} \right\}$$

setzen, obwohl das nicht unbedingt die optimale Wahl ist. In der Tat, für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_*| < \delta$ gilt dann $|x - x_*| + 2|x_*| < \delta + 2|x_*| \leq 1 + 2|x_*|$ und damit auch $|f(x) - f(x_*)| < (1 + 2|x_*|)\delta \leq \varepsilon$.

2. Die Signumsfunktion

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ +1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $x_* \neq 0$ stetig, aber im Punkt $x_* = 0$ unstetig.

Beweis: Für jedes $x_* \neq 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ können wir $\delta = |x_*|$ wählen, denn für jedes x mit $|x - x_*| < \delta$ gilt dann $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(x_*)$ und damit $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(x_*)| = 0 < \varepsilon$. \square

3. Die durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt $x_* \neq 0$ stetig, aber in $x_* = 0$ unstetig.

Beweis: Die Stetigkeitsaussage folgt aus den unten diskutierten Rechenregeln. Um die Unstetigkeit in $x_* = 0$ nachzuweisen, betrachten wir die Folge² $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = 1/(2\pi n)$ und bemerken, dass $x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $f(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein entsprechendes δ , denn für jedes $\delta > 0$ finden wir immer einen Index $n \in \mathbb{N}$, sodass für $x = x_n$ zwar $|x - x_*| < \delta$, aber gleichzeitig auch $|f(x) - f(x_*)| = 1 > \varepsilon$ erfüllt ist. \square

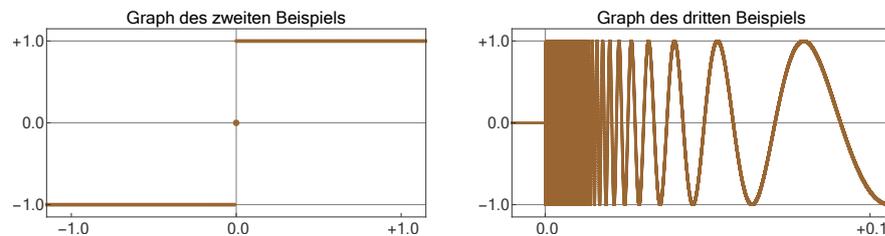


Abbildung Die Graphen der letzten beiden Beispiele. Beachte, dass die hohen Oszillationen im rechten Bild wegen der positiven Pinseldicke nur unvollständig dargestellt werden können.

ein wildes Beispiel Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1/m & \text{falls } x = k/m \text{ für teilerfremde Zahlen } k, m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt sehr merkwürdige Eigenschaften. Sie ist³

1. in jedem irrationalen Punkt aus $[0, 1]$ stetig, aber
2. in jedem rationalen Punkt aus $[0, 1]$ unstetig.

Insbesondere liegen sowohl Stetigkeitspunkte als auch die Unstetigkeitspunkte dicht im Definitionsbereich $[0, 1]$.

Definition Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig, wenn es zwei Konstanten $L > 0$ und $\nu > 0$ gibt, sodass

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|^\nu$$

für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt. Im Fall von $\nu = 1$ sprechen wir auch von Lipschitz-Stetigkeit.

²Wir antizipieren hier die Existenz und die Eigenschaften von π .

³Diese Funktion kann nicht visualisiert werden, denn ihr Graph ist keine Kurve, sondern nur eine staubartige Punktwolke. Es ist allerdings gar nicht so schwierig, ihre Stetigkeitseigenschaften rigoros zu beweisen. Die wesentliche Beobachtung ist, dass k_n/m_n für $n \rightarrow \infty$ nur dann gegen eine irrationale Zahl x konvergieren kann, wenn m_n mit $n \rightarrow \infty$ auch gegen ∞ strebt.

Beispiele

1. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$, denn nach Dreiecksungleichung gilt $||x_2| - |x_1|| \leq |x_2 - x_1|$.
2. Die reelle Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $D = [0, \infty)$ definiert und Hölder-stetig mit $L = 1$ und Exponent $\nu = 1/2$.

Beweis: Wir betrachten $0 \leq x_1 \leq x_2$ sowie $y_1 := \sqrt{x_1}$, $y_2 := \sqrt{x_2}$. Wegen $y_1 \leq y_2$ rechnen wir leicht nach, dass $(y_2 - y_1)^2 \leq y_2^2 - y_1^2$ gilt, und nach Wurzelziehen auf beiden Seiten erhalten wir mit $0 \leq \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2 - x_1}$ die gesuchte Ungleichung. \square

Verallgemeinerung: Die m -te Wurzelfunktion ist Hölder-stetig mit $\nu = 1/m$.

Bemerkungen

1. Jede Hölder-stetige Funktion ist in jedem Punkt $x_* \in D$ stetig, denn wenn wir in der Definition von Stetigkeit $\delta = (\varepsilon/L)^{1/\nu}$ wählen, so impliziert $|x - x_*| < \delta$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(x_*)| \leq L |x - x_*|^\nu < L \delta^\nu = \varepsilon.$$

Insbesondere hängt dieses δ zwar von ε , aber nicht von x_* ab, und deshalb sagt man auch, Hölder-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig.

2. Wir werden weiter unten sehen, dass man die Lipschitz-Stetigkeit sehr gut mithilfe der ersten Ableitungen untersuchen bzw. charakterisieren kann.
3. Für $\nu > 1$ ist jede Hölder-stetige Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, automatisch konstant (Übungsaufgabe).

8.2 Stetigkeit und Konvergenz

Konvergenz bei Funktionen Wir schreiben im Folgenden

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_*} y_* \quad \text{oder} \quad y_* = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x),$$

falls die Konvergenzaussage

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_*$$

für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt ist, für die

$$x_n \in D \quad \text{und} \quad x_n \neq x_* \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_*$$

gilt. Dabei muss nicht $x_* \in D$ gelten und die Fälle $x_* = \pm\infty$ und/oder $y_* = \pm\infty$ sind durch das Konzept der uneigentlichen Folgenkonvergenz mit abgedeckt.

Beispiel: Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} x^m = 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[n]{x} = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Theorem (erste äquivalente Charakterisierung von Stetigkeit) Die beiden Aussagen

1. f ist stetig in x_*
2. $f(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)$

sind für jedes $x_* \in D$ äquivalent.

Beweis *Hinrichtung*: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Wir wählen δ wie in der Definition von Stetigkeit sowie $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x_*| < \delta$ für alle $n > N$. Für diese Indizes gilt nun $|f(x_n) - f(x_*)| < \varepsilon$ nach Wahl von δ , und weil ε beliebig war, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_*)$. Da dies für alle zulässigen Folgen gilt, ergibt sich die Behauptung.

Rückrichtung: Wir beginnen mit der Antithese, d.h. wir nehmen an, dass f nicht stetig in x_* ist. Dann gibt es mindestens ein $\varepsilon > 0$, für das wir kein entsprechendes δ in der obigen Definition finden, und wir fixieren nun ein solches ε . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - x_*| \leq \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_*)| \geq \varepsilon,$$

denn andernfalls wäre $1/n$ ein möglicher Wert für δ . Die entstehende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ sowie $x_n \in D \setminus \{x_*\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $f(x_n)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ eben nicht gegen $f(x_*)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $f(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)$ und die Antithese muss falsch gewesen sein. \square

Bemerkungen

1. Die zweite Bedingung im Theorem wird auch Konvergenzkriterium der Stetigkeit genannt.
2. Das Theorem zeigt: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn die Implikation

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_* \quad \implies \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_*)$$

erfüllt ist (wobei immer $x_* \in D$ sowie $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt ist, da andernfalls die rechte Seite keinen Sinn hat). Insbesondere bildet eine stetige Funktion f jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf eine andere konvergente Folge ab, nämlich auf $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Rechenoperationen für Funktionen Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beide auf der derselben Menge D definiert, so können durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

in sinnvoller Weise die Summe bzw. das Produkt $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert werden. Analog verwenden wir die Schreibweisen

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad f^m(x) = (f(x))^m, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei λ bzw. m eine beliebige reelle bzw. natürliche Zahl ist und wir bei der Definition von $f/g : D \rightarrow \mathbb{R}$ immer stillschweigen voraussetzen, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt.

Achtung Das Symbol f^{-1} besitzt in der Mathematik verschiedene Bedeutungen: Es kann zum Beispiel die Umkehrfunktion von f bezeichnen oder alternativ die Funktion $x \mapsto 1/f(x)$. Was genau gemeint ist, ergibt sich in aller Regel aus dem Kontext oder muss im Zweifelsfall explizit klargestellt werden. Auch f^2 kann sich (wie in dieser Vorlesung) auf $x \mapsto (f(x))^2$ oder auf $x \mapsto f(f(x)) = (f \circ f)(x)$ beziehen.

Theorem (Stetigkeit und Rechenoperationen) Sind f und g stetig in x_* , so gilt:

1. $\lambda f + \mu g$ ist für je zwei Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ stetig in x_* ,
2. $f g$ ist stetig in x_* ,
3. f/g ist stetig in x_* ,

wobei die eben eingeführten Notationen gelten.

Beweis Alle Behauptungen folgen aus der ersten äquivalenten Charakterisierung von Stetigkeit sowie den Rechenregeln für konvergente Folgen. \square

Folgerung

1. Jedes reelle Polynom vom Grad k , d.h. jede Funktion der Bauart⁴

$$f(x) = p(x) = \lambda_k x^k + \lambda_{k-1} x^{k-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0$$

mit reellen Koeffizienten $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ ist in jedem Punkt $x_* \in D = \mathbb{R}$ stetig.

2. Jede rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lambda_k x^k + \lambda_{k-1} x^{k-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0}{\mu_m x^m + \mu_{m-1} x^{m-1} + \dots + \mu_1 x + \mu_0}$$

ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig, wobei dieser in natürlicher Weise durch $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ gegeben ist.

Beispiele

1. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^m$ stetig.
2. Die Formel $f(x) = 1/x^m$ beschreibt eine Funktion, die in jedem Punkt $x \neq 0$ definiert und stetig ist.
3. Die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{x^6 + 9x^5 - 2x^2 + 5}{x^2 - 3x + 2}$$

sind stetig, wobei $D_1 = \mathbb{R}$ und $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ die jeweiligen Definitionsbereiche sind.

⁴Meist fordert man zusätzlich $\lambda_k \neq 0$, da es sich andernfalls um ein Polynom kleineren Grades handelt.

Lemma (Stetigkeit der exponentiellen und trigonometrischen Funktionen)

Jede der drei Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ gilt

$$\exp(x_n) - \exp(x_*) = \exp(x_*) \cdot (x_n - x_*) \cdot \frac{\exp(x_n - x_*) - 1}{x_n - x_*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wobei wir die Funktionalgleichung der Exponentialreihe sowie die wichtige Grenzwertformel aus dem letzten Kapitel benutzt haben. Mit Additionstheoremen, der Abkürzung $\xi_n := \frac{1}{2}(x_n - x_*)$ und der Formel $\frac{1}{2}(x_n + x_*) = x_* + \xi_n$ erhalten wir

$$|\sin(x_n) - \sin(x_*)| = |2 \cos(x_* + \xi_n) \sin(\xi_n)| \leq 2 |\xi_n| \left| \frac{\sin(\xi_n)}{\xi_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sowie

$$|\cos(x_n) - \cos(x_*)| = |2 \sin(x_* + \xi_n) \sin(\xi_n)| \leq 2 |\xi_n| \left| \frac{\sin(\xi_n)}{\xi_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

wobei wir neben der Grenzwertformel für den Sinus benutzt haben, dass $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.⁵ \square

Bemerkung Wir werden weiter unten zeigen, dass alle durch Potenzreihen definierte Funktionen stetig sind. Wir werden später auch sehen, dass die reellen Versionen des Sinus und des Kosinus (aber nicht der Exponentialfunktion) Lipschitz-stetig sind.

Theorem (Stetigkeit und Komposition) Ist $f : D \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}$ stetig in $x_* \in D$ und ist $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $y_* = f(x_*)$, so ist auch die Funktion $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ stetig in x_* .

Beweis Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und seien die reellen Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $y_n = f(x_n)$ und $z_n = g(y_n)$. Die Stetigkeit von f in x_* impliziert $y_* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ und die Stetigkeit von g in y_* garantiert anschließend $z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, wobei $z_* = g(y_*)$. Da aber nach Konstruktion $z_n = (g \circ f)(x_n)$ sowie $z_* = (g \circ f)(x_*)$ gilt, folgt die Behauptung aus der ersten äquivalenten Charakterisierung von Stetigkeit. \square

Merkregel Entsteht f durch Komposition und elementare Rechenoperationen aus anderen stetigen Funktionen, so ist f stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Beispiele

1. Die Formeln

$$f_1(x) = (x^2 + 1)^3, \quad f_2(x) = \sin^2(x^3 + x), \quad f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x) + 1)}$$

beschreiben jeweils eine stetige Funktion $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

⁵Diese Abschätzungen kennen Sie aus der Schule. Sie gelten auch bei uns und können zum Beispiel aus $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ abgelesen werden.

2. Durch

$$f_4(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_5(x) = \frac{\exp(x+1) - 2}{\sin(x)}$$

wird auch jeweils eine stetige Funktion $f_j : D_j \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, aber diese sind nicht auf ganz \mathbb{R} , sondern nur auf $D_4 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $D_5 = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0\}$ definiert.

3. Die Funktion $f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_7(x) = \lfloor x^2 + 1 \rfloor$ besitzt viele Unstetigkeitsstellen. Dies ist kein Widerspruch zur Merkregel, denn die Gauß-Klammer beschreibt keine stetige Operation.

8.3 weiterführende Betrachtungen*

topologische Grundbegriffe

Erinnerung Die offene bzw. abgeschlossene Kugel vom Radius δ_* um den Mittelpunkt x_* ist durch

$$B_{\delta_*}(x_*) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_*| < \delta_*\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{B}_{\delta_*}(x_*) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_*| \leq \delta_*\}$$

gegeben, wobei es sich natürlich um das offene Intervall $(x_* - \delta_*, x_* + \delta_*)$ bzw. das abgeschlossene Intervall $[x_* - \delta_*, x_* + \delta_*]$ handelt.⁶

Definition Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$

1. offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $B_\delta(x)$ ganz in U liegt,
2. abgeschlossen, falls die Komplementmenge $\mathbb{R} \setminus U$ offen ist.

Beispiele

1. Jede offene Kugel $B_{\delta_*}(x_*)$ ist offen.

Beweis: Für festes x mit $|x - x_*| < \delta_*$ setzen wir $\delta = \delta_* - |x - x_*| > 0$. Für jedes \tilde{x} mit $|\tilde{x} - x| < \delta$ gilt dann $|\tilde{x} - x_*| \leq |\tilde{x} - x| + |x - x_*| < \delta_*$ nach der Dreiecksungleichung. Damit haben wir gezeigt, dass $B_\delta(x)$ ganz in $B_{\delta_*}(x_*)$ liegt. \square

2. Jede abgeschlossene Kugel $\overline{B}_{\delta_*}(x_*)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Für festes x mit $|x - x_*| > \delta_*$ setzen wir diesmal $\delta = |x - x_*| - \delta_* > 0$ und bemerken, dass $B_\delta(x)$ ganz in $\mathbb{R} \setminus \overline{B}_{\delta_*}(x_*)$ gilt. In der Tat, für jedes $\tilde{x} \in B_\delta(x)$ gilt $|\tilde{x} - x_*| \geq |x - x_*| - |\tilde{x} - x| > |x - x_*| - \delta = \delta_*$ und damit $\tilde{x} \notin \overline{B}_{\delta_*}(x_*)$. \square

Operationen mit offenen und abgeschlossenen Mengen

1. Jede Vereinigung offener Mengen ist offen. Dies gilt sogar für Vereinigungen von *unendlich vielen* Mengen und impliziert, dass der Durchschnitt von *beliebig vielen* abgeschlossenen Mengen immer abgeschlossen ist (Übungsaufgabe).

⁶Wir reden in diesem Abschnitt trotzdem von Kugeln, da dann alle Beispiele und Beweise leichter verallgemeinert werden können.

2. Der Durchschnitt *endlich vieler* offener Menge ist offen und die Vereinigung *endlich vieler* abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen (Übungsaufgabe).
3. Es gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{1+1/n}(0) = \overline{B}_1(0)$, d.h. der Durchschnitt *unendlich vieler* offener Mengen kann abgeschlossen sein. Analog zeigt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_{1-1/n}(0) = B_1(0)$, dass die Vereinigung *unendlich vieler* abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein muss.

Bemerkungen

1. Die Konzepte *offene* bzw. *abgeschlossene Mengen* haben sich als ausgesprochen mächtig erwiesen und geeignete Verallgemeinerungen werden in sehr vielen Kontexten benutzt. Es gibt mit der *Topologie* sogar einen ganzen Zweig der modernen Mathematik, der auf dieser Sichtweise aufgebaut ist und sehr tiefe Einsichten über die innere Struktur realer oder gedachter Welten gewonnen hat.
2. Viele Mengen sind weder offen noch abgeschlossen, zum Beispiel das halboffene Intervall $(0, 1]$.
3. Es gibt genau zwei Teilmengen von \mathbb{R} , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, nämlich die leere Menge \emptyset sowie \mathbb{R} selbst. Dass es keine weiteren Mengen mit dieser Eigenschaft gibt, ist allerdings nicht ganz so einfach zu sehen.

Theorem (zweite äquivalente Charakterisierung von Stetigkeit) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ das entsprechende Urbild $f^{-1}(V) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in V\}$ auch offen ist.

Beweis *Hinrichtung*: Sei f stetig und sei $V \subset \mathbb{R}$ offen. Für festes $x_* \in U = f^{-1}(V)$ gilt $y_* = f(x_*) \in V$ und weil V offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y_*) \subset V$. Zu diesem ε wählen wir schließlich $\delta > 0$ wie in der Definition von Stetigkeit. Für jedes $x \in B_\delta(x_*)$ gilt $|x - x_*| < \delta$ und damit $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$, wobei dies auch als $f(x) \in B_\varepsilon(y_*)$ geschrieben werden kann und $f(x) \in V$ impliziert. Insbesondere haben wir gezeigt, dass jeder Punkt in $B_\delta(x_*)$ von f in die Menge V abgebildet wird, d.h. es gilt $B_\delta(x_*) \subset U$. Da x_* ein beliebiger Punkt in U war, ist U offen.

Rückrichtung: Wir setzen voraus, dass das Urbild jeder offenen Menge offen ist und fixieren $x_* \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Menge $V = B_\varepsilon(f(x_*))$ ist offen und ihre Urbildmenge $U = f^{-1}(V)$ ist nach Voraussetzung ebenfalls offen. Da sie außerdem den Punkt x_* enthält, existiert ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x_*)$ ganz in U liegt. Mit diesem δ können wir nun die Stetigkeitsdefinition verifizieren. In der Tat, jedes x mit $|x - x_*| < \delta$ gehört zu $B_\delta(x_*)$ und damit zu U , d.h. $f(x)$ ist Element von V , was aber gerade $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$ meint. \square

Bemerkungen

1. Die zweite Bedingung im Theorem wird auch Urbildkriterium der Stetigkeit genannt und kann alternativ auch wie folgt formuliert werden: Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.⁷

⁷Diese Variante ergibt sich aus der Formel $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(V)$, d.h. aus der Tatsache, dass das Urbild der Komplementmenge die Komplementmenge des Urbildes ist.

2. Wir haben nicht vorausgesetzt, dass f invertierbar ist. Insbesondere ist die Urbildmenge $f^{-1}(V)$ für jedes $V \subseteq \mathbb{R}$ immer wohldefiniert.⁸
3. Wir haben im Theorem der Einfachheit halber nur stetige Funktionen betrachtet, die auf ganz \mathbb{R} definiert sind. Man kann ein analoges Theorem auch für andere Definitionsbereiche D beweisen, muss dann aber die sogenannte *Relativtopologie* auf D betrachten.
4. Eine direkte Konsequenz des Theorems ist, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$U := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < y_*\} \quad \text{bzw.} \quad U := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > y_*\}$$

immer eine offene Teilmenge von \mathbb{R} definiert wird, denn es handelt sich ja um das Urbild der offenen Menge $(-\infty, y_*)$ bzw. $(y_*, +\infty)$. Die Formeln

$$U := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y_*\}, \quad U := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq y_*\}$$

und $U := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y_*\}$ liefern jedoch immer eine abgeschlossene Menge.

Lemma (äquivalente Charakterisierung abgeschlossener Mengen) Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U die Menge ihrer (eentlichen) Häufungspunkte ganz in U liegt.⁹

Beweis *Hinrichtung*: Sei U abgeschlossen und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in U . Wir nehmen als Antithese außerdem an, dass es einen Häufungspunkt ξ gibt, der nicht zu U gehört. Dann existiert eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ sowie ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(\xi) \subset \mathbb{R} \setminus U$, wobei wir benutzt haben, dass $\mathbb{R} \setminus U$ offen ist. Die Konvergenz impliziert, dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|x_{n_k} - \xi| < \delta$ und damit $x_{n_k} \notin U$ gilt. Das ist aber ein Widerspruch, denn die Folge liegt ja in U .

Rückrichtung: Wir zeigen die Kontraposition der Behauptung.¹⁰ Sei also U nicht abgeschlossen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus U$ nicht offen und es existiert ein $x_* \in \mathbb{R} \setminus U$, sodass jede noch so kleine Kugel um x_* nicht ganz in $\mathbb{R} \setminus U$ liegt und damit immer mindestens ein Element aus U enthält. Insbesondere können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein x_n wählen, sodass

$$|x_n - x_*| < 1/n \quad \text{und} \quad x_n \in U$$

gilt. Dadurch erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die zwar ganz in U liegt, die aber gegen einen Grenzwert konvergiert, der nicht zu U gehört. Da Grenzwerte Häufungspunkte sind, ist damit die Kontraposition bewiesen. \square

Beispiele

1. Ist ξ Häufungspunkt einer Folge aus dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, so gilt $a \leq \xi \leq b$. Dies folgt aus dem Lemma sowie alternativ aus dem Vergleichsprinzip (wobei dies entlang einer konvergenten Teilfolge auszuwerten ist).
2. Als simples Gegenbeispiel betrachten wir die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = 1/n$. Diese liegt im offenen Intervall $(0, 2)$, aber der (einzige) Häufungspunkt $\xi = 0$ liegt nicht in diesem Intervall.

⁸Manche Autoren schreiben $f^{-1}[V]$ statt $f^{-1}(V)$.

⁹Mit Folge in U meinen wir wie üblich, dass alle Folgenglieder in U liegen, d.h. dass $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

¹⁰Wir beweisen also nicht $A \Leftarrow B$, sondern $\neg A \Rightarrow \neg B$.

Definition Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, wenn jede Folge in U mindestens eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in U liegt.

Bemerkung

1. *Kompaktheit* ist ein weiteres, sehr fundamentales Konzept der Mathematik, dass Sie in vielen verschiedenen Kontexten antreffen werden.
2. Das Lemma sowie der Satz von Bolzano-Weierstraß implizieren, dass die Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere ist \mathbb{R} nicht kompakt.

Ausblick*: Eine analoge Aussage gilt in allen endlich-dimensionalen Räumen. In einem unendlich-dimensionalen Raum ist zwar jede kompakte Menge immer noch abgeschlossen und beschränkt, aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht mehr.

Beispiele

1. Das Intervall $[0, 1]$ ist kompakt, die Intervalle $(0, 1)$, $(0, 1]$ und $[0, 1)$ sind es jedoch nicht.
2. Das Intervall $(-\infty, 2]$ ist abgeschlossen, aber nicht kompakt. Die Abgeschlossenheit scheint auf den ersten Blick verblüffend, erklärt sich aber dadurch, dass $-\infty$ keine reelle Zahl ist und damit auch nicht eigentlicher, sondern nur uneigentlicher Häufungspunkt einer Folge sein kann. Beachte auch, dass die Komplementmenge gerade das offene Intervall $(2, +\infty)$ ist.
3. Die Menge $U = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt, die Menge $U \cup \{0\}$ aber schon.

Stetigkeit im Komplexen

Generelle Betrachtungen Die Stetigkeit einer komplexen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ kann ganz analog eingeführt werden. Insbesondere sind

1. das ε - δ -Kriterium
2. das Konvergenzkriterium
3. das Urbildkriterium

wieder paarweise äquivalent, wobei in allen Betrachtungen und Beweisen die komplexe Betragsfunktion bzw. die entsprechenden zweidimensionalen Kugeln verwendet werden. Wir werden darauf in *Analysis 2* zurückkommen, wenn wir die Stetigkeit von Funktionen studieren, die n unabhängige Variablen auf einen m -dimensionalen Vektor abbilden.

Innerhalb von *Analysis 1* konzentrieren wir uns auf Funktionen, die eine Teilmenge D von \mathbb{R} nach \mathbb{R} abbilden, und wollen nur ein wichtiges Resultat im Komplexen bereitstellen.

Theorem (Stetigkeit von Potenzreihen) Sei

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann existiert für jedes ϱ mit $0 < \varrho < R$ eine Konstante L_ϱ , sodass die Lipschitz-Abschätzung

$$|p(z_2) - p(z_1)| \leq L_\varrho |z_2 - z_1|$$

für alle $z_1, z_2 \in \overline{B}_\varrho(z_*)$ gilt.

Beweis Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $z_* = 0$ gilt, fixieren ϱ und betrachten zwei beliebige z_1, z_2 mit $|z_1| \leq \varrho, |z_2| \leq \varrho$. Unser Ausgangspunkt ist die Ungleichung

$$\nu_n := \left| \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k z_2^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k z_1^k \right) \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k| |z_2^k - z_1^k| \right),$$

wobei wir benutzt haben, dass sich die Terme für $k = 0$ gegenseitig aufheben. Da die linke Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen $|p(z_2) - p(z_1)|$ konvergiert, wollen wir eine Konstante L finden, sodass die rechte Seite unabhängig von n durch $L |z_2 - z_1|$ nach oben beschränkt ist. Für jedes $k \geq 1$ impliziert die Formel¹¹

$$z_2^k - z_1^k = (z_2 - z_1) \sum_{j=0}^{k-1} z_2^j z_1^{k-1-j}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} |z_2^k - z_1^k| &= |z_2 - z_1| \left| \sum_{j=0}^{k-1} z_2^j z_1^{k-1-j} \right| \leq |z_2 - z_1| \sum_{j=0}^{k-1} |z_2|^j |z_1|^{k-1-j} \\ &\leq |z_2 - z_1| \sum_{j=0}^{k-1} \varrho^j \varrho^{k-1-j} \leq |z_2 - z_1| k \varrho^{k-1}, \end{aligned}$$

aus der sich

$$|\alpha_k| |z_2^k - z_1^k| \leq |z_2 - z_1| \mu_k \quad \text{mit} \quad \mu_k := |\alpha_k| k \varrho^{k-1}$$

ergibt. Andererseits folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\mu_k} = \frac{\varrho}{R} < 1$$

aus der Cauchy-Hadamard-Formel sowie den Hilfsformeln $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\varrho^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho / \sqrt[k]{\varrho}) = \varrho$. Mit dem Wurzelkriterium für Reihen schließen wir, dass

$$L := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu_k$$

eine wohldefinierte reelle Zahl ist, die von ϱ und der Koeffizientenfolge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$, aber weder von z_1 noch von z_2 abhängt. Insgesamt erhalten wir

$$\nu_n \leq |z_2 - z_1| \sum_{k=1}^n \mu_k$$

und die Behauptung folgt nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$. □

¹¹Diese Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel kann einfach nachgerechnet werden.

Bemerkungen

1. Die Konstante L_ϱ wird im Allgemeinen stark von ϱ abhängen und im Limes $\varrho \rightarrow R$ in aller Regel gegen ∞ konvergieren.
2. Das Theorem impliziert, dass die komplexen Versionen von \exp , \sin und \cos auf ganz \mathbb{C} stetig sind. Sie sind dort aber nicht Lipschitz-stetig, sondern nur auf jeder Kugel $\overline{B}_\varrho(0)$ mit $\varrho < \infty$.

8.4 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Vorbemerkung Ein Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ wird kompaktes Intervall genannt.¹²

Hinweis Fast alle Theoreme und Beweisideen in diesem Abschnitt können sehr gut in einer Prüfung abgefragt werden.

Theorem (Nullstellensatz von Bolzano) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$f(a) \leq 0 \leq f(b) \quad \text{oder} \quad f(a) \geq 0 \geq f(b).$$

Dann besitzt f mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$.

Beweis Wir diskutieren nur den Fall $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ (die Argumente für den zweiten sind analog) und definieren rekursiv eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ wie folgt:

Rekursionsanfang ($n = 1$): Wir setzen $a_1 := a$ und $b_1 := b$.

Rekursionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$): Wir berechnen den Mittelpunkt $m_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ von I_n und setzen

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= m_n \text{ und } b_{n+1} := b_n, \text{ falls } f(m_n) < 0, \text{ aber} \\ a_{n+1} &:= a_n \text{ und } b_{n+1} := m_n \text{ falls } f(m_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Wir können nun leicht zeigen, dass $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung definiert, wobei die Doppelungleichung

$$f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion sichergestellt ist. Das Intervallschachtelungsprinzip garantiert, dass sowohl a_n als auch b_n für $n \rightarrow \infty$ gegen denselben Grenzwert $\alpha = \beta$ konvergieren. Aus der Stetigkeit folgt $f(\alpha) \leq 0$ sowie $0 \leq f(\beta)$ und insgesamt erhalten wir $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. \square

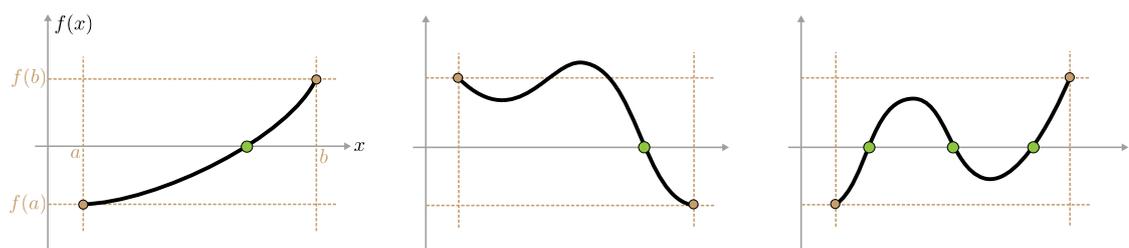


Abbildung Illustration zum Nullstellensatz. Beachte, dass eine nicht-monotone Funktion mehrere Nullstellen (grüne Punkte) besitzen kann.

¹²Es handelt sich dabei natürlich um eine kompakte Menge im Sinne der topologischen Definition.

Bemerkungen

1. Der Nullstellensatz ist sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht ausgesprochen wichtig und besitzt viele Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik.¹³
2. Die Intervallschachtelung im Beweis kann — jedenfalls im Prinzip — auf einem Computer implementiert werden. Dabei kann es passieren, dass $f(a_n) = 0$ oder $f(b_n) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt und dann muss die Intervallschachtelung nicht fortgesetzt werden.
3. Wir hatten es schon weiter oben vorweg genommen: Mit dem Nullstellensatz können wir die Kreiszahl π konstruieren. Siehe auch die Diskussion weiter unten.
4. Eine weitere klassische Folgerung wird in den Übungen besprochen: Jedes reelle Polynom mit *ungeradem* Grad besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Theorem (Zwischenwertsatz von Bolzano) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis Im Fall von $f(a) < f(b)$ betrachten wir für ein gegebenes $y_* \in (f(a), f(b))$ die stetige Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x) - y_*$, für die $g(a) < 0 < g(b)$ gilt. Nach dem Nullstellensatz existiert mindestens ein $x_* \in [a, b]$ mit $g(x_*) = 0$ und hieraus folgt $f(x_*) = y_*$. Für $f(a) = f(b)$ ist nichts zu zeigen und im Fall von $f(a) > f(b)$ müssen wir die obigen Argumente nur leicht anders aufschreiben. \square

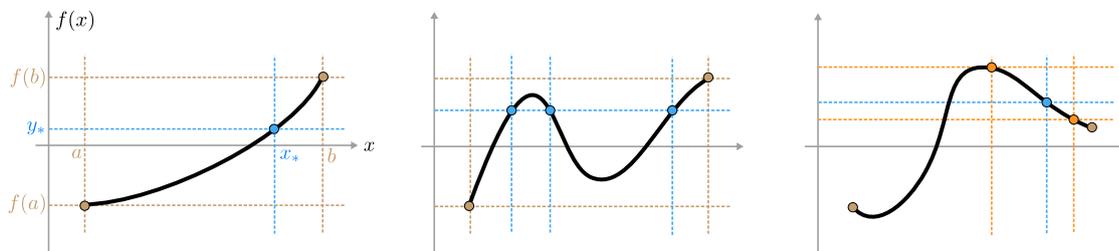


Abbildung Illustration zum Zwischenwertsatz. Für jedes y_* zwischen $f(a)$ und $f(b)$ existiert mindestens ein $x_* \in [a, b]$, sodass $f(x_*) = y_*$. Im rechten Bild ist die verallgemeinerte Fassung illustriert.

Bemerkungen

1. Der Zwischenwertsatz kann — mit leicht modifiziertem Beweis — auch allgemeiner formuliert werden: Sind \tilde{a} und \tilde{b} zwei beliebige Punkte in $[a, b]$, so nimmt f auch jeden Wert zwischen $f(\tilde{a})$ und $f(\tilde{b})$ an (siehe das dritte Bild).
2. Der Zwischenwertsatz und der Nullstellensatz sind sehr eng mit der Anordnung von \mathbb{R} verbunden. Sie können — im Gegensatz zu allen folgenden Resultaten über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen — nicht ohne weiteres auf höhere Dimensionen oder ins Komplexe verallgemeinert werden.

¹³Googeln Sie mal *Fix a woobly table*.

Theorem (Satz vom Minimum und vom Maximum) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ mit

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$$

für alle $x \in [a, b]$. Insbesondere nimmt die Funktion f sowohl ihr Minimum als auch Maximum an.

Beweis Um die Existenz von \bar{x} bzw. des Maximums zu zeigen, betrachten wir das Supremum der Bildmenge, d.h.

$$\bar{y} := \sup B, \quad B := f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Es gibt nun drei denkbare Fälle:

1. $\bar{y} \in B$,
2. $\bar{y} \notin B$, aber $\bar{y} < \infty$,
3. $\bar{y} = \infty$.

Im ersten Fall existiert ein \bar{x} mit $\bar{y} = f(\bar{x})$ und die Behauptung ist bereits bewiesen. In jedem der anderen beiden Fälle gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \bar{y}.$$

In der Tat, im zweiten Fall können wir aufgrund der Häufungseigenschaft für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in B$ mit $|y_n - \bar{y}| \leq 1/n$ und anschließend ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = y_n$ wählen. Im dritten Fall gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$, sodass $y_n = f(x_n) > n$ gilt. Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine strikt monotone Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass x_{n_k} für $k \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert $\bar{x} \in \mathbb{R}$ konvergiert, wobei das Vergleichsprinzip $a \leq \bar{x} \leq b$ garantiert, d.h. \bar{x} liegt auch im Intervall $[a, b]$. Da f stetig ist, gilt $f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \bar{y}$. Insbesondere gehört \bar{y} zur Bildmenge B , d.h. der zweite und der dritte Fall können gar nicht eintreten. Die Existenz des Minimums kann analog bewiesen werden. \square

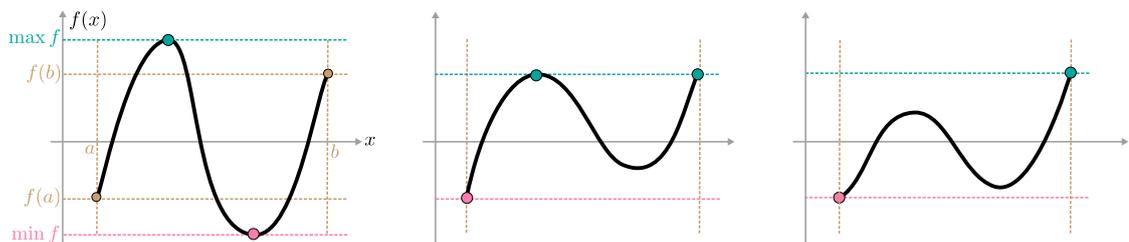


Abbildung Illustration zum Satz über das Minimum und das Maximum.

Bemerkungen

1. Wir nennen $\bar{y} = f(\bar{x})$ das Maximum von f , \bar{x} einen Maximierer für f und schreiben oftmals¹⁴

$$f(\bar{x}) = \max f, \quad \bar{x} \in \operatorname{argmax} f = \{x \in [a, b] : f(x) = f(\bar{x})\}.$$

Analoge Bezeichnungen und Notationen werden für $y = f(x)$ und x verwendet.

¹⁴In der Literatur finden Sie oftmals die Schreibweise $\bar{x} = \operatorname{argmax} f$. Diese ist aber missverständlich, denn im Gegensatz zum Maximum ist ein Maximierer im Allgemeinen nicht eindeutig.

2. Das Maximum kann im Inneren ($a < \bar{x} < b$) und/oder am Rand ($\bar{x} \in \{a, b\}$) angenommen werden. Analog für das Minimum.
3. Das Theorem bezieht sich auf das *globale Minimum* bzw. das *globale Maximum* (bzgl. des Intervalls $[a, b]$). Lokale Extrema werden wir erst im Rahmen der Differentialrechnung studieren.
4. Eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall besitzt im Allgemeinen weder ein Minimum noch ein Maximum, sondern nur ein Infimum bzw. Supremum.

Beispiel: Mit $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = x$ besitzt der Wertebereich $f((a, b))$ das Infimum 0 und das Supremum 1, aber diese werden von f nicht im offenen Intervall (a, b) angenommen.

5. Die Aussage des Theorems gilt sinngemäß für jede stetige Funktion auf jeder kompakten Menge (sogar in beliebigen Dimensionen), und dies wird sich als ein ausgesprochen mächtiges Prinzip erweisen. Die zentrale Beweisidee ist immer ganz analog zu unseren Argumenten und besteht darin, aus einer sogenannten *maximierenden Folge* eine konvergente Teilfolge auszuwählen.¹⁵

Folgerung Die Bildmenge einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein kompaktes Intervall, nämlich $[\min f, \max f]$.

Beweis Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz über das Minimum und das Maximum sowie der verallgemeinerten Fassung des Zwischenwertsatzes. \square

Theorem (gleichmäßige Stetigkeit) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt die folgende Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass die Implikation

$$|x - \tilde{x}| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$$

für alle $x, \tilde{x} \in [a, b]$ gilt.

Beweis Wir nehmen an, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es mindestens ein $\varepsilon > 0$, für das es kein entsprechendes $\delta > 0$ gibt, und wir fixieren ein solches ε . Da nun $1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ keine zulässige Wahl für δ ist, existieren $x_n, \tilde{x}_n \in [a, b]$ mit

$$|x_n - \tilde{x}_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon.$$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert eine monotone Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass x_{n_k} für $k \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert x_* konvergiert, wobei $x_* \in [a, b]$ durch das Vergleichsprinzip sichergestellt ist. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - \tilde{x}_{n_k}) = 0$ schließen wir, dass auch \tilde{x}_{n_k} für $k \rightarrow \infty$ gegen denselben Grenzwert x_* konvergiert, und in Kombination mit der Stetigkeit von f erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| = 0.$$

Andererseits gilt $|f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und wir haben den gewünschten Widerspruch gefunden. \square

¹⁵Man bezeichnet diese Beweisstrategie manchmal als die *Direkte Methode*.

Bemerkungen

1. Gleichmäßige Stetigkeit meint gerade, dass in der Definition von Stetigkeit das δ unabhängig von x_* gewählt werden kann (aber in aller Regel nicht unabhängig von ε). Diese Eigenschaft besitzt eine sehr große theoretische Bedeutung, die sich aber auf den ersten Blick nicht unmittelbar erschließt.
2. Eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall muss nicht gleichmäßig stetig sein.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ sowie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = 1/n$. Dann gilt offensichtlich

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = |n - (n+1)| = 1, \quad |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

und wir schließen, dass es für $\varepsilon = 1$ kein entsprechendes $\delta > 0$ geben kann.

8.5 Mehr über Konvergenz bei Funktionen

einseitige Grenzwerte Im Reellen können wir in natürlicher Weise von *einseitiger Konvergenz* reden. Wir nennen y_* den linksseitigen Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_*$, sofern die Aussage $y_* = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt ist, die neben der Konvergenzbedingung $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ auch der Nebenbedingung

$$x_n \in D \quad \text{und} \quad x_n < x_* \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

genügt, wobei die Forderung $x_n < x_*$ natürlich stärker als $x_n \neq x_*$ ist. In der Literatur existieren verschiedene Schreibweisen, zum Beispiel

$$f(x) \xrightarrow{x \nearrow x_*} y_* \quad \text{oder} \quad y_* = \lim_{x \nearrow x_*} f(x) \quad \text{oder} \quad y_* = \lim_{x \rightarrow x_* - 0} f(x),$$

wobei manchmal \uparrow statt \nearrow verwendet wird. Analog werden rechtsseitige Grenzwerte durch die Forderung $x_n > x_*$ definiert und als

$$f(x) \xrightarrow{x \searrow x_*} y_* \quad \text{oder} \quad y_* = \lim_{x \searrow x_*} f(x) \quad \text{oder} \quad y_* = \lim_{x \rightarrow x_* + 0} f(x),$$

geschrieben, wobei \searrow durch \downarrow ersetzt werden kann.

Beispiele

1. Für die Signumsfunktion gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow 0} \operatorname{sgn}(x) = +1,$$

aber der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht.

2. Durch die Betrachtung entsprechender Folgen erhalten wir

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

im Sinne der uneigentlichen Konvergenz, aber der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ existiert weder im eigentlichen noch im uneigentlichen Sinne.

3. Es gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

im uneigentlichen Sinne.

Bemerkungen

1. *Hinweis*: Die einseitige Konvergenz ist viel einfacher und anschaulicher, als es die formale Definition vermuten lässt. Mit etwas Erfahrung und Übung werden Sie problemlos mit linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerten operieren.
2. *Klarstellung*: Linksseitige Konvergenz meint nicht, dass $f(x)$ im Limes $x \rightarrow x_*$ von unten oder von links gegen y_* konvergiert, sondern dass y_* der Grenzwert von $f(x)$ ist, sofern x von unten oder von links gegen x_* läuft. Entsprechende Aussagen gelten für die rechtsseitige Konvergenz.
3. Sei $D = (a, b)$ und sei $x_* \in D$ ein fester Punkt. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = y_*$ genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_*} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_*} f(x)$ existieren und beide den Wert y_* annehmen (Übungsaufgabe).

Es gilt aber $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_*$ bzw. $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = y_*$ genau dann, wenn $\lim_{x \searrow a} f(x) = y_*$ bzw. $\lim_{x \nearrow b} f(x) = y_*$ gilt. Das liegt daran, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D automatisch $x_n > a$ bzw. $x_n < b$ gilt. Analoge Aussagen betreffen die Grenzwerte $\lim_{x \searrow -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow +\infty} f(x)$.

Ausblick*: zur Klassifikation von Unstetigkeitsstellen Beim Studium reeller Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kommt es oftmals vor, dass ein fixierter Punkt x_* eine Unstetigkeitsstelle oder eine Lücke im Definitionsbereich ist, die im folgenden Sinn isoliert ist: Es existiert ein kleines $\varepsilon > 0$, sodass f auf jedem der Intervalle $(x_* - \varepsilon, x_*)$ und $(x_*, x_* + \varepsilon)$ definiert und stetig ist.¹⁶

Wenn außerdem die beiden einseitigen Grenzwerte

$$y_{*-} := \lim_{x \nearrow x_*} f(x), \quad y_{*+} := \lim_{x \searrow x_*} f(x)$$

existieren, so nennen wir x_* eine

1. hebbare Stelle, wenn y_{*-} und y_{*+} dieselbe reelle Zahl bezeichnen,
2. Sprungstelle, sofern y_{*-} und y_{*+} zwei unterschiedliche reelle Zahlen sind,
3. Polstelle, falls y_{*-} und y_{*+} nur im uneigentlichen Sinne existieren und daher jeweils durch $-\infty$ oder $+\infty$ gegeben sind.¹⁷

Dabei ist nicht wichtig, ob $f(x_*)$ existiert oder ob $y_{*-} = f(x_*)$ bzw. $y_{*+} = f(x_*)$ gilt.

Beispiele Die Formeln

$$f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad f_2(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}, \quad f_3(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

definieren jeweils eine Funktion f_j mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei die Nummerierung gerade so gewählt wurde, dass der Index j die Klassifikation der Lücke $x_* = 0$ in der obigen Auflistung liefert (siehe auch das Bild). Jede der Funktionen

$$\tilde{f}_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist zwar in $x_* = 0$ definiert, aber dort nicht stetig. Die Klassifikation der Unstetigkeitsstelle $x_* = 0$ ist aber weiterhin durch den Wert von j gegeben.

¹⁶Alternativ können wir sagen: x_* ist genau dann isoliert, wenn f auf einer kleinen Umgebung von x_* definiert und stetig ist.

¹⁷Bei einer Polstelle ist es egal, ob $y_{*-} = y_{*+}$ oder $y_{*-} \neq y_{*+}$ gilt.

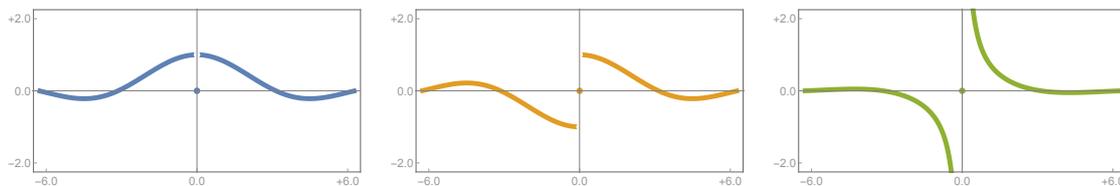


Abbildung Illustration zur Klassifikation isolierter Unstetigkeitsstellen anhand der Graphen der drei Funktionen \tilde{f}_j aus dem Beispiel mit der isolierten Unstetigkeitsstelle $x_* = 0$. Wird der einzelne farbige Punkt entfernt, entsteht jeweils der Graph von f_j und $x_* = 0$ wird eine isolierte Lücke im Definitionsbereich. Die Klassifikation ändert sich aber dadurch nicht.

8.6 Monotonie und Umkehrfunktion

Definition Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir

1. monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$
2. strikt monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$
3. monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$
4. strikt monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$

für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt.¹⁸ Dabei ist es zunächst nicht wichtig, ob f stetig ist oder nicht.

Theorem (Umkehrfunktion monotoner stetiger Funktionen) Sei $I = (a, b)$ ein (endliches oder unendliches) offenes Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und strikt monoton wachsende Funktion. Dann existiert ein offenes Intervall $J = (c, d)$ sowie eine stetige und strikt monoton wachsende Funktion $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in I \quad \text{bzw.} \quad f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in J,$$

d.h. g ist die mengentheoretische Umkehrabbildung zu f . Außerdem gilt

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{und} \quad d = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

jeweils im Sinne eigentlicher oder uneigentlicher Konvergenz.

Beweis Existenz und Monotonie von g : Wir setzen

$$J := f(U), \quad c := \inf J, \quad d := \sup J,$$

wobei c bzw. d entweder eine reelle Zahl ist oder den Wert $-\infty$ bzw. $+\infty$ annimmt. Es gilt auch $c < d$, denn andernfalls würde die Bildmenge J nur aus einem Punkt bestehen und f könnte nicht strikt monoton sein. Außerdem ist f nach Voraussetzung eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen I und J , sodass $g = f^{-1}$ als mengentheoretische Umkehrabbildung existiert. Sind $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ zwei beliebige Punkte in J mit $y_1 < y_2$, so muss $x_1 = g(y_1) < x_2 = g(y_2)$ gelten, da sich andernfalls sofort ein Widerspruch zur strikten Monotonie von f ergeben würde.

¹⁸Wie schon bei der Monotonie von reellen Zahlenfolgen meint (strikt) monoton entweder (strikt) monoton fallend oder (strikt) monoton wachsend.

Stetigkeit von g : Seien $y_* = f(x_*) \in J$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Mit

$$\tilde{\varepsilon} := \min \{ \varepsilon, x_* - a, b - x_* \}$$

setzen wir

$$\delta := \min \{ f(x_*) - f(x_* - \tilde{\varepsilon}), f(x_* + \tilde{\varepsilon}) - f(x_*) \}$$

und betrachten nun einen beliebigen Punkt $y = f(x) \in J$ mit $|y - y_*| < \delta$. Dann gilt $|x - x_*| < \tilde{\varepsilon}$ und damit $|x - x_*| < \varepsilon$, denn andernfalls würde entweder $x \leq x_* - \tilde{\varepsilon}$ oder $x \geq x_* + \tilde{\varepsilon}$ gelten und die Monotonie von f würde entweder $y \leq f(x_* - \tilde{\varepsilon})$ oder $y \geq f(x_* + \tilde{\varepsilon})$ und damit in jedem Fall $|y - y_*| \geq \delta$ implizieren. Weil $y_* \in J$ und ε beliebig waren, folgt insgesamt die Stetigkeit von g .

J ist offenes Intervall: Wir bemerken zunächst, dass c kein Element von J ist, denn andernfalls würde $c = f(x_*)$ für ein $x_* \in I$ gelten und die Monotonie von f würde $f(x) < f(x_*) = c$ für jedes $x \in (a, x_*)$ und damit einen Widerspruch zu $c = \inf J$ liefern. Damit haben wir $c = \inf J \notin J$ gezeigt und schließen, dass jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq c$ nicht zur Menge J gehört. Analog zeigen wir, dass jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq d$ kein Element von J ist. Sei nun $y_* \in (c, d)$ beliebig fixiert. Dann existieren $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ mit $c < y_1 < y_* < y_2 < d$, denn andernfalls könnte c nicht das Infimum oder d nicht das Supremum von J sein. Der Zwischenwertsatz — angewendet auf f , betrachtet als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[x_1, x_2]$ — liefert ein $x_* \in [x_1, x_2]$ mit $y_* = f(x_*)$ und damit $y_* \in J$. Insgesamt haben wir damit $J = (c, d)$ gezeigt.

Grenzwertformeln: Wir beweisen nur die erste Grenzwertformel, denn die zweite kann mit analogen Argumenten abgeleitet werden. Wir argumentieren außerdem indirekt und nehmen an, diese Formel sei falsch. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass im Limes $n \rightarrow \infty$ zwar $x_n \rightarrow a$ gilt, aber $y_n = f(x_n)$ nicht gegen c konvergiert. Fall 1, $a = -\infty$: Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt — sowohl für $c = -\infty$ als auch für $c \in \mathbb{R}$ — mindestens eine beschränkte Teilfolge, auf die wir dann den Satz von Bolzano-Weierstraß anwenden können. Insbesondere existiert eine Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $y_* = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$ für ein $y_* \in \mathbb{R}$ mit $c < y_* < d$ gilt. Die Stetigkeit von g impliziert jedoch $x_* = g(y_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = -\infty$ und damit einen Widerspruch zu $x_* \in \mathbb{R}$. Fall 2, $a \in \mathbb{R}$: Wir wählen eine Teilfolge wie im ersten Fall, erhalten aber diesmal $x_* = g(y_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$, d.h. die Funktion g nimmt den Wert a im Punkt y_* und damit im Inneren von J an. Die strikte Monotonie von g impliziert daher $g(y) < a$ für alle $y \in (c, y_*) \subset J$. Das ist aber ein Widerspruch, denn nach Konstruktion bildet g das Intervall J in das Intervall I ab, d.h. es gilt $g(y) > a$ für alle $y \in J$. \square

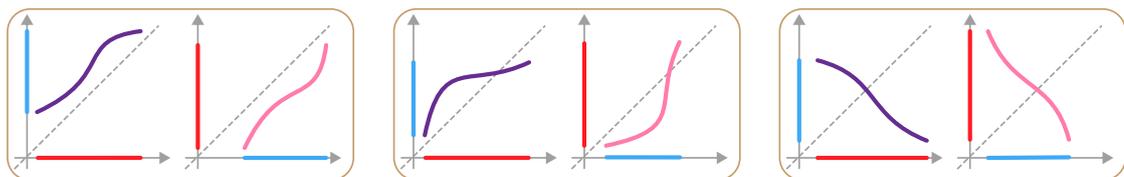


Abbildung Illustration zum Theorem über die Umkehrfunktion, wobei für drei typische Beispiele die Graphen von f bzw. g in violett bzw. rosa gezeichnet wurden. Beachte die Spiegelsymmetrie bzgl. der gestrichelten Diagonalen. Die Intervalle I bzw. J sind in rot bzw. blau dargestellt und wurden jeweils einmal auf der horizontalen und einmal auf der vertikalen Achse abgetragen.

Bemerkungen

1. Die Funktion g im Theorem wird auch als f^{-1} geschrieben. Der Graphen von f bzw. g , d.h.

$$\text{graph } f = \{(x, f(x)) : x \in I\} \quad \text{bzw.} \quad \text{graph } g = \{(x, g(x)) : x \in J\},$$

liegen (siehe das Bild) als Teilmengen des \mathbb{R}^2 spiegelsymmetrisch zur Diagonalen $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

2. Es gilt auch

$$a = \lim_{y \rightarrow c} g(y) \quad \text{und} \quad b = \lim_{y \rightarrow d} g(y),$$

denn das Theorem kann auch auf g anstelle von f angewendet werden.

3. Es gibt eine Variante des Theorems mit abgeschlossenen anstelle von offenen Intervallen, d.h. mit $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$, wobei sich die Grenzwertformeln dann zu

$$c = f(a), \quad d = f(b) \quad \text{bzw.} \quad a = g(c), \quad b = g(d)$$

vereinfachen. Diese „abgeschlossene“ Variante kann sogar einfacher bewiesen werden als die „offene“ Version. Auch für halboffene Intervalle existiert immer eine entsprechende Variante des Theorems.

4. Es gibt auch Varianten für strikt monoton-fallende Funktionen, wobei dann die Formeln im Theorem und im Beweis in natürlicher Weise angepasst werden müssen. Beachte in diesem Zusammenhang, dass f genau dann strikt monoton wachsend bzw. fallend ist, wenn die Funktion $-f$ strikt monoton fallend bzw. wachsend ist, und dass f genau dann stetig ist, wenn $-f$ stetig ist. Oder anders gesagt: Durch einen einfachen Vorzeichenwechsel kann die „fallende“ Version des Theorems aus der „wachsenden“ abgeleitet werden und umgekehrt.

Diskussion*

1. Die strikte Monotonie von f ist für die Existenz der Umkehrfunktion sehr wichtig, denn stetige Funktionen besitzen andernfalls keine Umkehrfunktion. Die Funktion

$$f : D \rightarrow D, \quad D = [-1, +1], \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ 1 - x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

zeigt aber zum Beispiel, dass es sehr wohl invertierbare Funktionen auf einem Intervall gibt, die nicht monoton sind. Solche Funktionen können aber nicht stetig sein.¹⁹

2. Die Stetigkeit von f ist im Beweis nur beim Nachweis benutzt worden, dass die Bildmenge wirklich ein Intervall ist. Die Stetigkeit von g folgt hingegen allein aus der strikten Monotonie von f . Das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ x + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad g(y) = \begin{cases} y + 1 & \text{für } y < -1 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ y - 1 & \text{für } y > +1 \end{cases}$$

¹⁹In diesem Beispiel gilt sogar $f = g$, d.h. f ist zu sich selbst invers.

mit

$$I = (-1, +1), \quad J = (-2, -1) \cup \{0\} \cup (+1, +2)$$

illustriert, dass $g : J \rightarrow I$ auch dann existiert und stetig ist, wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unstetig, aber immer noch strikt monoton ist. Nur ist J dann kein Intervall mehr.

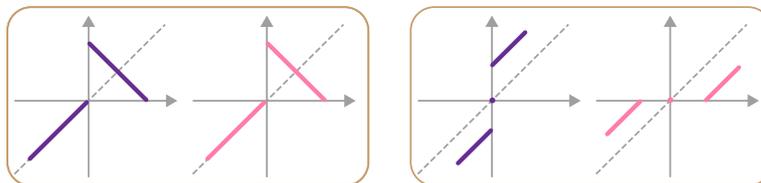


Abbildung Die beiden Beispiele aus der Diskussion.

8.7 Exponential und Logarithmus im Reellen

Vorbemerkung In diesem Abschnitt führen wir den Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialabbildung ein und diskutieren seine Eigenschaften. Wir werden dabei viele aus der Schule bekannte Formeln wiederentdecken.

Lemma (Eigenschaften von exp im Reellen) Die reelle Exponentialfunktion ist stetig sowie strikt monoton wachsend und bildet $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ ab.

Beweis Wir hatten bereits weiter oben bewiesen, dass $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Die Reihendarstellung

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

liefert $\exp(x) \geq 1$ für alle $x \geq 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = +\infty$. Da außerdem

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

gilt, erhalten wir $0 < \exp(x) \leq 1$ für alle $x \leq 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$. Die Funktionalgleichung impliziert außerdem

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1) \exp(x_1) > \exp(x_1)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ und damit die strikte Monotonie. \square

natürlicher Logarithmus im Reellen Die Funktion

$$\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

ist nach dem Theorem über die Umkehrfunktion sowie dem vorherigen Lemma wohldefiniert, stetig und strikt monoton wachsend. Insbesondere gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ die Formel $y = \exp(x)$ genau dann, wenn $x = \ln(y)$ gilt.

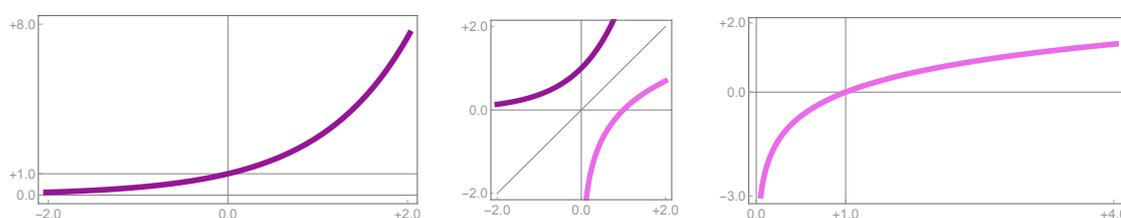


Abbildung Die Funktionen \exp (violett) und \ln (rosa).

Achtung Die komplexe Exponentialfunktion besitzt auf \mathbb{C} **keine** Umkehrfunktion, da sie nicht injektiv ist. Die Frage, ob bzw. in welchem Sinne komplexe Logarithmen sinnvoll definiert werden können, ist sehr viel anspruchsvoller und wird erst in der Vorlesung *Analysis 4* umfassend behandelt. Erste Resultate finden Sie am Ende dieses Kapitels.

Theorem (Funktionalgleichung von \ln) Die Formel

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

gilt für alle $x_1, x_2 > 0$.

Beweis Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion sowie der Notation $y_j = \ln(x_j)$ erhalten wir

$$x_1 x_2 = \exp(y_1) \exp(y_2) = \exp(y_1 + y_2)$$

und die Behauptung folgt nach Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten. \square

Lemma (Grenzwertformeln für \exp) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{+n} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-n} \exp(x) = +\infty$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis Die erste Behauptung hatten wir schon im letzten Kapitel bewiesen (in der äquivalenten Formulierung mit Folgen). Die Reihendarstellung impliziert

$$x^{-n} \exp(x) = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > x^{-n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)!}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit die dritte Behauptung im Grenzübergang $x \rightarrow \infty$. Die zweite ergibt sich schließlich nach Substitution $x = -\tilde{x}$ und der Nebenrechnung

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{+n} \exp(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} (-1)^n \tilde{x}^{+n} \exp(-\tilde{x}) = \frac{(-1)^n}{\lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} \tilde{x}^{-n} \exp(\tilde{x})}$$

aus der dritten. \square

Merkregel Die reelle Exponentialfunktion wächst für $x \rightarrow +\infty$ schneller als jedes Polynom. Für $x \rightarrow -\infty$ fällt es schneller als das Reziproke jedes Polynoms.

Lemma (Grenzwertformeln für \ln) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{+1/n} \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/n} \ln(x) = 0,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis Mit $y = \ln(x)$ bzw. $x = \exp(y)$ erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\exp(y)-1} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\exp(y)-1}{y}} = \frac{1}{1} = 1,$$

wobei wir die Stetigkeit von \exp sowie die erste Formel aus dem vorherigen Lemma benutzt haben. Mit der Substitution $x = \exp(+n\xi)$ bzw. $x = \exp(-n\xi)$ ist die zweite bzw. dritte Behauptung äquivalent zu

$$(+n) \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \exp(\xi) \xi = 0 \quad \text{bzw.} \quad (-n) \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \exp(\xi) \xi = 0$$

und folgt somit auch aus dem vorherigen Lemma. \square

Merkregel Der natürliche Logarithmus wächst für $x \rightarrow +\infty$ langsamer als jede Wurzel. Für $x \rightarrow 0$ wächst sein Betrag langsamer als das Reziproke jeder Wurzel.

Exponential und Logarithmus zur Basis $\beta > 0$ Für jeden Parameter $\beta > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ wird durch

$$\beta^x := \exp(\ln(\beta)x)$$

das Exponential zur Basis β definiert, wobei wir im Spezialfall $\beta = e$ gerade wieder die Exponentialfunktion \exp erhalten und der Fall $\beta = 1$ wegen $1^x = \exp(0 \cdot x) = 1$ entartet ist.²⁰ Die bisher bewiesenen Eigenschaften von \exp implizieren für jedes $\beta \neq 1$ die folgenden Aussagen, wobei die Beweise eine Übungsaufgabe sind.

Positivität: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\beta^x > 0$ mit $\beta^0 = 1$.

Potenzgesetze: Die Formeln

$$\beta^{x_1+x_2} = \beta^{x_1} \beta^{x_2}, \quad (\beta^{x_1})^{x_2} = \beta^{x_1 x_2}$$

sind für alle x_1, x_2 erfüllt.

Konsistenz: Im Fall von $x = +m_1/m_2$ bzw. $x = -m_1/m_2$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt $\beta^x = \sqrt[m_2]{\beta^{m_1}}$ bzw. $\beta^x = 1/\sqrt[m_2]{\beta^{m_1}}$.

Invertierbarkeit: Es gilt $y = \beta^x$ genau dann, wenn $x = \ln(y)/\ln(\beta)$ gilt.²¹

Monotonie und Stetigkeit bzgl. x : Die Funktion $x \mapsto \beta^x$ ist stetig und strikt monoton, wobei sie für $0 < \beta < 1$ bzw. $\beta > 1$ fallend bzw. wachsend ist.

Grenzwertformel für $x = 0$: Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta^x - 1}{x} = \ln(\beta)$

Grenzwertformeln im Unendlichen: Die Formeln

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \beta^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta^x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \beta^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta^x = +\infty$$

sind für $0 < \beta < 1$ bzw. $\beta > 1$ erfüllt.

²⁰Wir können hier x durch eine beliebige komplexe Zahl z ersetzen. Die Frage, ob wir für β negative reelle oder gar komplexe Zahlen zulassen dürfen, ist aber deutlich schwieriger zu beantworten.

²¹Die zweite Formel wird in der Literatur manchmal auch als $x = \log_\beta(y)$ geschrieben, wobei \log_β der Logarithmus zur Basis β ist. Es gilt $\ln = \log_e$.

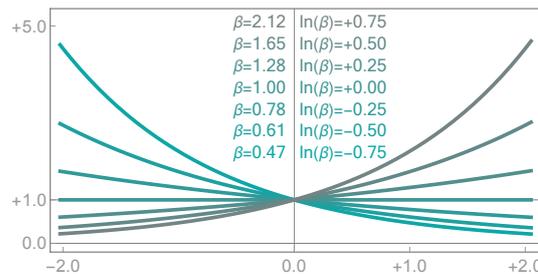


Abbildung Die reelle Exponentialfunktion für verschiedene Werte der Basis β . Innerhalb der Mathematik wird meist die natürliche Basis $\beta = e \approx 2.718281828$ verwendet.

Allgemeine Potenzen mit Exponent $\mu \in \mathbb{R}$ Für jeden Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und alle $x > 0$ wird durch

$$x^\mu := \exp(\mu \ln(x))$$

die μ -te Potenz von x definiert, wobei wir $x^0 = 1$ im Spezialfall $\mu = 0$ erhalten. Mittels der bereits bewiesenen Eigenschaften von \exp und \ln können die folgenden Aussagen abgeleitet werden (Übungsaufgabe).

Positivität: Für alle $x > 0$ und alle $\mu \in \mathbb{R}$ gilt $x^\mu > 0$ mit $1^\mu = 1$.

Potenzgesetze: Die Formeln

$$x^{\mu_1 + \mu_2} = x^{\mu_1} x^{\mu_2}, \quad (x^{\mu_1})^{\mu_2} = x^{\mu_1 \mu_2}$$

gelten für alle $x > 0$ und alle $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Konsistenz: Im Fall von $\mu = +m_1/m_2$ bzw. $\mu = -m_1/m_2$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt $x^\mu = \sqrt[m_2]{x^{m_1}}$ bzw. $x^\mu = 1/\sqrt[m_2]{x^{m_1}}$.

Invertierbarkeit: Mit $\mu \neq 0$ gilt $y = x^\mu$ genau dann, wenn $x = y^{1/\mu}$ gilt.

Monotonie und Stetigkeit bzgl. x : Für jedes $\mu \neq 0$ ist die Funktion $x \mapsto x^\mu$ stetig und strikt monoton, wobei sie für $\mu < 0$ bzw. $\mu > 0$ fallend bzw. wachsend ist.

Monotonie bzgl. μ : Für alle $\mu_1 < \mu_2$ gilt

$$x^{\mu_1} > x^{\mu_2} \quad \text{bzw.} \quad x^{\mu_1} < x^{\mu_2}$$

für $0 < x < 1$ bzw. $x > 1$.²²

Grenzwertformeln für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow +\infty$: Die Formeln

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\mu = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\mu = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = +\infty$$

sind für $\mu < 0$ bzw. $\mu > 0$ erfüllt.²³

²²Diese Aussage haben wir eigentlich schon oben bei den Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis formuliert. Genauso wie die stärkere Aussage, dass für jedes feste $x > 0$ mit $x \neq 1$ die Funktion $\mu \mapsto x^\mu$ stetig und strikt monoton ist.

²³Für $\mu > 0$ können wir wegen der Grenzwertaussage für $x \rightarrow 0$ in sinnvoller Weise $0^\mu = 0$ als Sonderregel vereinbaren.

weitere Grenzwertformeln / asymptotische Vergleiche: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\mu \exp(-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\mu \exp(+x) = \infty$$

für alle $\mu \in \mathbb{R}$, d.h. exponentielle Terme in x dominieren jede Potenz von x . Außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\mu \ln(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} x^\mu, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu \ln(x) = + \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu$$

für alle $\mu \neq 0$, wobei der Grenzwert auf der rechten Seite jeweils 0 oder $+\infty$ sein kann. Insbesondere dominiert jede nicht-entartete Potenz von x logarithmische Terme in x .

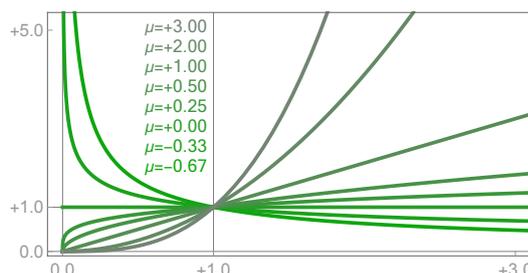


Abbildung Die reelle Potenzfunktion für verschiedene Werte des Exponenten μ .

8.8 Trigonometrische Funktionen im Reellen

Theorem (Existenz und Eindeutigkeit der Kreiszahl) Es gibt genau eine reelle Zahl $\pi \in (0, 4)$ mit $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ und $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$.

Beweis Wir hatten im letzten Kapitel im Hilfsresultat für die Definition der Kreiszahl festgehalten, dass der Kosinus auf dem Intervall $I := [0, 2]$ strikt monoton fallend mit $\cos(0) > 0 > \cos(2)$ ist, und weiter oben bereits seine Stetigkeit gezeigt. Der Nullstellensatz garantiert nun die Existenz einer Nullstelle $x_* \in I$ mit $\cos(x_*) = 0$ und die strikte Monotonie liefert sofort die Eindeutigkeit. Wir setzen $\pi := 2x_*$. Wir hatten im letzten Kapitel schon gesehen, dass die Euler-Formel $\cos^2(x_*) + \sin^2(x_*) = 1$ impliziert und dass der Sinus auf dem Intervall I nicht-negativ ist. Also gilt auch $\sin(x_*) = 1$. \square

Lemma (Eigenschaften von Sinus und Kosinus im Reellen) Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist 2π -periodisch und ungerade, d.h. es gilt

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Sie bildet das Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi]$ strikt monoton wachsend und bijektiv auf das Intervall $[-1, +1]$ ab.
3. Es gilt $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genügt hingegen den folgenden Aussagen:

1. Sie ist 2π -periodisch und gerade, d.h. es gilt

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Sie bildet das Intervall $[0, \pi]$ strikt monoton fallend und bijektiv auf das Intervall $[-1, +1]$ ab.

3. Es gilt $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x - \frac{1}{2}\pi$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Desweiteren gelten die Formeln

$$\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin(x), \quad \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = +\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis Wir hatten alle Argumente schon im letzten Kapitel erklärt, wobei damals aber π noch nicht rigoros eingeführt war. Das haben wir nun nachgeholt. \square

x	$0 = 0^\circ$	$\frac{1}{6}\pi = 30^\circ$	$\frac{1}{4}\pi = 45^\circ$	$\frac{1}{3}\pi = 60^\circ$	$\frac{1}{2}\pi = 90^\circ$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Tabelle Spezielle Werte für $\cos(x)$ und $\sin(x)$, die mithilfe der Definition von π aus den Additionstheoremen abgeleitet werden können (Übungsaufgabe). Einige Formeln lassen sich weiter vereinfachen, aber in der angegebenen Fassung kann die Tabelle besser memoriert werden.

Arkussinus und Arkuskosinus Die Funktionen

$$\arcsin : [-1, +1] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi\right] \quad \text{bzw.} \quad \arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$$

existieren als die Umkehrfunktionen des Sinus bzw. des Kosinus, sofern diese auf $[-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi]$ bzw. $[0, \pi]$ eingeschränkt werden. Man spricht auch von lokalen Umkehrfunktionen.²⁴ Insbesondere gilt

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad \cos(\arccos(x)) = x$$

für alle $x \in [-1, +1]$. Beachte aber, dass die Formeln

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad \arccos(\cos(x)) = x$$

nicht für alle $x \in \mathbb{R}$, sondern nur für $x \in [0, \pi]$ bzw. $x \in [-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi]$ verwendet werden dürfen.

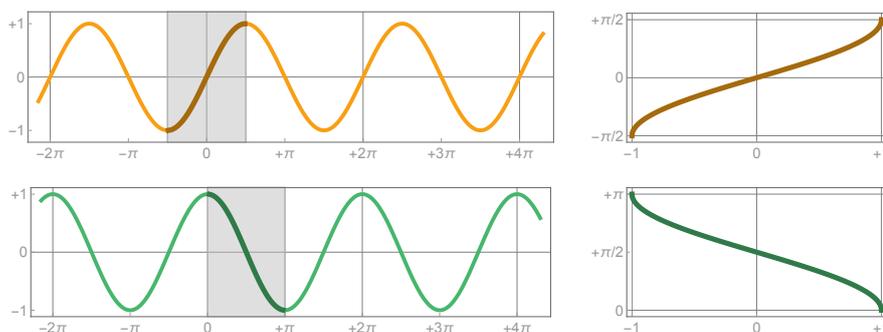


Abbildung Die Funktionen \arcsin (rechts oben) und \arccos (rechts unten) sind per Definition lokale Umkehrfunktionen von \sin (links oben) und \cos (links unten).

²⁴Der Logarithmus ist in diesem Sinne die globale Umkehrfunktion von \exp .

Arkustangens und Arkuskotangens Die Funktionen

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\pi)$$

sind monoton wachsend bzw. fallend und existieren als lokale Umkehrfunktionen des Tangens bzw. des Kotangens. Letztere sind durch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{bzw.} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

gegeben und jeweils π -periodisch.

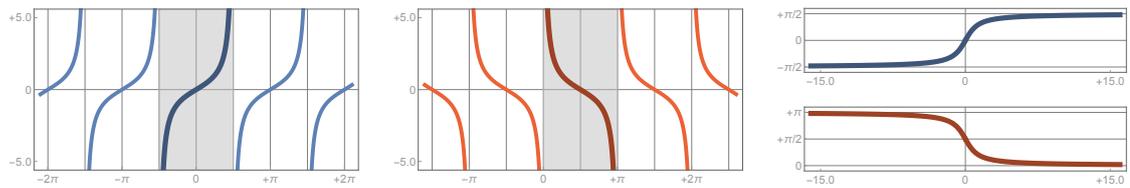


Abbildung Die Funktionen \tan (links) und \cot (Mitte) sowie ihre lokalen Umkehrfunktionen \arctan (rechts oben) und arccot (rechts unten).

8.9 Polardarstellung komplexer Zahlen

Vorbemerkung Im vierten Kapitel konnten wir noch nicht die Polarkoordinaten in der komplexen Zahlenebene einführen. Das wollen wir nun nachholen.

Lemma (Existenz der Polardarstellung) Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $z \neq 0$ existiert ein $r > 0$ sowie ein $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass

$$z = r \exp(i\varphi) \quad \text{bzw.} \quad x + iy = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

gilt. Dabei gilt $r = |z|$ und φ ist bis auf die Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π eindeutig festgelegt.

Beweis Existenz: Wir setzen $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und schreiben

$$\frac{z}{|z|} = \xi + iv \quad \text{mit} \quad \xi := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

wobei $\xi, v \in [-1, 1]$ sowie $\xi^2 + v^2 = 1$ gilt. Wir definieren

$$\varphi := \begin{cases} +\arccos(\xi) & \text{falls } v \geq 0 \\ -\arccos(\xi) & \text{falls } v < 0 \end{cases}$$

und prüfen in jedem der zwei Fälle durch direkte Rechnungen, dass die Gleichungen

$$\xi = \cos(\arccos(\xi)) = \cos(+\varphi) = \cos(-\varphi)$$

sowie $v^2 = 1 - \xi^2 = 1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)$ erfüllt sind. Für $v > 0$ gilt $\varphi \in [0, +\pi]$ und damit $\sin(\varphi) \geq 0$, wohingegen wir $\varphi \in [0, -\pi]$ und $\sin(\varphi) \leq 0$ im Fall von $v < 0$ erhalten. In jedem Fall folgt $v = \sin(\varphi)$ und mit der Euler-Formel ergibt sich via

$$r \exp(i\varphi) = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = |z| (\xi + iv) = z$$

die gewünschte Darstellung.

Ein- bzw. Mehrdeutigkeit: Seien (r, φ) und $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ zwei Polardarstellungen von $z \neq 0$. Dann gilt

$$r \exp(i \varphi) = z = \tilde{r} \exp(i \tilde{\varphi}).$$

und die Eigenschaften der komplexen Betragsfunktion implizieren

$$|z| = |r \exp(i \varphi)| = r |\exp(i \varphi)| = r \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = r.$$

Analog folgt $|z| = \tilde{r}$ und wir haben damit $r = \tilde{r}$ gezeigt. In Kombination mit den Eigenschaften des komplexen Exponentials erhalten wir

$$1 = \frac{z}{\tilde{z}} = \frac{r \exp(i \varphi)}{\tilde{r} \exp(i \tilde{\varphi})} = \exp(i(\varphi - \tilde{\varphi})) = \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) + i \sin(\varphi - \tilde{\varphi})$$

und damit $\sin(\varphi - \tilde{\varphi}) = 0$ nach Vergleich der Imaginärteile auf der linken und der rechten Seite. Da wir die reellen Nullstellen des Sinus kennen, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $\varphi - \tilde{\varphi} = k 2\pi$ gilt. \square

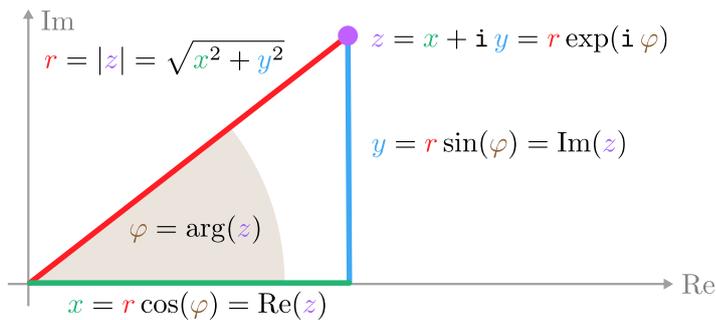


Abbildung Geometrische Bedeutung der Polarkoordinaten (r, φ) und der kartesischen Koordinaten (x, y) in der komplexen Zahlenebene. Zur Berechnung von φ aus (x, y) kann zum Beispiel der unten aufgeführte Formelsatz verwendet werden.

Beispiele Es gilt

$$+1 = \exp(0), \quad +i = \exp\left(i \frac{1}{2} \pi\right), \quad -1 = \exp(i \pi), \quad -i = \exp\left(i \frac{3}{2} \pi\right)$$

sowie

$$+1 \pm i = \sqrt{2} \exp\left(\pm i \frac{1}{4} \pi\right), \quad -1 \pm i = \sqrt{2} \exp\left(\pm i \frac{3}{4} \pi\right)$$

und

$$+\sqrt{3} \pm i = 2 \exp\left(\pm i \frac{1}{6} \pi\right), \quad +1 \pm i \sqrt{3} = 2 \exp\left(\pm i \frac{1}{3} \pi\right),$$

wobei die Notation \pm immer zwei Formeln in einer vereint. Siehe dazu auch die Tabelle weiter oben.

Bemerkungen

1. Die positive reelle Zahl r heißt Betrag oder Polarradius von z . Die reelle Zahl φ nennen wir den Polarwinkel oder das Argument von z und schreiben $\varphi = \arg(z)$, obwohl diese Schreibweise wegen der Mehrdeutigkeit nicht unproblematisch ist.

2. Die Euler-Formel garantiert die Produktformel

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp(i \varphi_1 + i \varphi_2) \quad \text{für} \quad z_1 = r_1 \exp(i \varphi_1), \quad z_2 = r_2 \exp(i \varphi_2),$$

d.h. bei der komplexen Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert (siehe die entsprechende Abbildung in Kapitel 4). Insbesondere beschreibt die Multiplikation mit $\exp(i \theta)$ die Drehung um den Winkel θ .

3. Der Polarwinkel φ im Lemma entspricht der SI-Einheit *Radian*.²⁵ Um den entsprechenden Wert in der aus der Schule bekannten *Gradskala* zu erhalten, müssen wir mit $180/\pi$ multiplizieren. Insbesondere gilt $\frac{1}{2} \pi = 90^\circ$, $\pi = 180^\circ$ und $2\pi = 360^\circ$.

4. Der Wechsel von den Polarkoordinaten (r, φ) zu den kartesischen Koordinaten (x, y) ist wegen $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$ relativ einfach. Soll jedoch (r, φ) bei vorgegebenem (x, y) bestimmt werden, so kann zwar der Radius mittels $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ leicht ermittelt werden, aber die Berechnung von φ erfordert meist Fallunterscheidungen und inverse trigonometrische Funktionen.

5. Die Zahl $z = 0$ spielt eine Sonderrolle. Es gilt $r = |z| = 0$, aber der Winkel φ kann nicht in sinnvoller Weise definiert werden bzw. kann jeden denkbaren Wert annehmen. In diesem Sinne ist der Koordinatenwechsel $(x, y) \leftrightarrow (r, \varphi)$ im Ursprung der Zahlenebene singulär.

Formelsatz für den Polarwinkel Im Beweis des Lemmas haben wir eine explizite Formel mit dem Arkuskosinus angegeben. Alternativ kann φ mithilfe des Arkustangens via

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 0, y = 0 \\ \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0, y > 0 & \text{(1. Quadrant)} \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x < 0, y > 0 & \text{(2. Quadrant)} \\ \pi & \text{falls } x < 0, y = 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x < 0, y < 0 & \text{(3. Quadrant)} \\ 3\pi/2 & \text{falls } x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0, y < 0 & \text{(4. Quadrant)} \end{cases}$$

berechnet werden, wobei diese Formeln immer einen Winkel $0 \leq \varphi < 2\pi$ liefern.²⁶ Siehe auch das nachfolgende Bild.

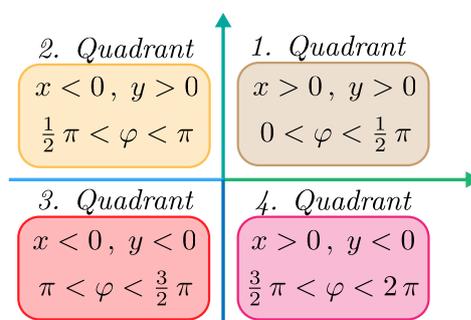


Abbildung Die vier Quadranten in der komplexen Zahlenebene, wobei sich die Winkelbereiche auf Werte zwischen 0 und 2π beziehen.

²⁵Wir werden später verstehen, dass φ gerade das *Bogenmaß* eines entsprechenden Segments auf der Einheitskreislinie ist.

²⁶In der Literatur und im Internet finden Sie weitere Formelsätze, wobei dann aber der Winkelbereich anders sein kann.

Polarkoordinaten und komplexe Wurzeln Mit Polarkoordinaten können wir die n -ten Wurzeln einer komplexen Zahl $\zeta \neq 0$ direkt berechnen. Zum Beispiel sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch

$$z_k = |\zeta|^{1/n} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta) + 2\pi k}{n}\right) \quad \text{mit } k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

die komplexen n -ten Wurzeln von ζ , d.h. alle Lösungen der algebraischen Gleichung $z^n = \zeta$ gegeben.²⁷ Siehe dazu das Bild und beachte, dass der Fundamentalsatz der Algebra genau n Lösungen sowie die multiplikative Zerlegung

$$z^n - \zeta = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

vorhersagt. Im Spezialfall $\zeta = 1$ mit $\arg(\zeta) = 0$ erhalten wir die Einheitswurzeln, wobei dann $z_n = 1$ gilt.

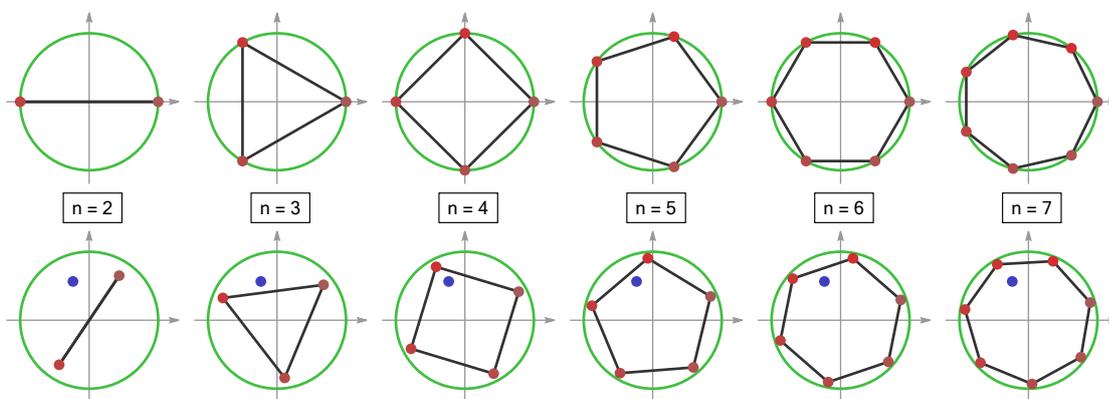


Abbildung *Oben*: Die n -ten komplexen Einheitswurzeln (rot) liegen auf der Einheitskreislinie (grün) und bilden die Ecken eines regulären n -Ecks (schwarz). Der Umfang bzw. der Flächeninhalt dieses n -Ecks konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen 2π bzw. π (siehe die Übungen). *Unten*: Die n -ten Wurzeln eines Punktes ζ mit $|\zeta| < 1$ (blau) bilden ein gedrehtes und gestauchtes, aber immer noch reguläres n -Eck.

Logarithmus und allgemeine Potenzen im Komplexen*

Mengenwertiger Logarithmus Im Gegensatz zur reellen Variante ist die komplexe Exponentialfunktion nicht injektiv, wobei dies zum Beispiel an der Periodizitätsrelation

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$$

abgelesen werden kann. Mit direkten Rechnungen (Übungsaufgabe) können wir aber für gegebenes $\zeta \neq 0$ die Äquivalenz

$$\exp(z) = \zeta \quad \iff \quad z \in \mathbf{Ln}(\zeta) := \left\{ \ln(|\zeta|) + i(\arg(\zeta) + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

zeigen, d.h. die unendliche Menge $\mathbf{Ln}(\zeta)$ enthält alle Kandidaten für den komplexen Logarithmus von $\zeta \neq 0$.²⁸

²⁷Wir rechnen leicht nach, dass $z_k^n = |\zeta| \exp(i \arg(\zeta)) = \zeta$ für alle k gilt und mit wenig mehr Aufwand können wir auch zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt (Übungsaufgabe).

²⁸Es gilt $\mathbf{Ln}(0) = \emptyset$, denn für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) \exp(-z) = \exp(0) = 1$ und damit $\exp(z) \neq 0$.

Beispiele

1. Für $\zeta = i = \exp(i \frac{1}{2} \pi)$ erhalten wir

$$\mathbf{Ln}(i) = \left\{ \dots, -i \frac{7}{2} \pi, -i \frac{3}{2} \pi, +i \frac{1}{2} \pi, +i \frac{5}{2} \pi, +i \frac{9}{2} \pi, \dots \right\},$$

und können mithilfe der Euler-Formel leicht nachprüfen, dass wirklich $\exp(z) = i$ für jedes z in dieser Menge gilt.

2. Für jedes reelle $\xi > 0$ gilt

$$\mathbf{Ln}(\xi) = \mathbf{Ln}(\xi + 0i) = \left\{ \dots, \ln(\xi) - i 2\pi, \ln(\xi), \ln(\xi) + i 2\pi, \dots \right\},$$

und wir schließen, dass von den unendlich vielen Kandidaten für den komplexen Logarithmus genau einer reell ist, nämlich $\ln(\xi)$. Für $\xi < 0$ enthält die Menge

$$\mathbf{Ln}(\xi) = \left\{ \dots, \ln(-\xi) - i\pi, \ln(-\xi) + i\pi, \ln(-\xi) + i3\pi, \dots \right\}$$

aber kein reelles Element, denn im Reellen gibt es keinen Logarithmus für negative Zahlen.

Mengenwertige Potenzen Analog kann jedes Element aus der Menge

$$\mathbf{Pow}_\mu(\zeta) = \left\{ \exp(\mu z) : z \in \mathbf{Ln}(\zeta) \right\}$$

als möglicher Wert der μ -ten Potenz von ζ betrachtet werden, wobei der Exponent μ eine beliebige komplexe Zahl sein darf. Es kann allerdings passieren, dass mehrere Kandidaten für den Logarithmus denselben Wert für die Potenz liefern, so dass die Menge $\mathbf{Pow}_\mu(\zeta)$ am Ende nur endlich viele verschiedene komplexe Zahlen enthält. Zum Beispiel können wir einfach nachrechnen, dass

$$\mathbf{Pow}_{+n}(\zeta) = \left\{ \zeta^{+n} \right\}, \quad \mathbf{Pow}_{-n}(\zeta) = \left\{ \zeta^{-n} \right\}$$

sowie

$$\mathbf{Pow}_{1/n}(\zeta) = \left\{ |\zeta|^{1/n} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta) + 2\pi k}{n}\right) : k \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere sind die ganzzahligen Potenzen von $\zeta \neq 0$ eindeutig²⁹ festgelegt, wohingegen wir für die n -ten Wurzeln von ζ genau dieselben n Zahlen wie oben erhalten. Für nicht-rationale Exponenten μ wird aber $\mathbf{Pow}_\mu(\zeta)$ im Allgemeinen eine unendliche Menge sein.

Beispiele

1. Die beiden komplexen Quadratwurzeln von $\zeta \neq 0$ sind durch

$$\mathbf{Pow}_{1/2}(\zeta) = \left\{ -\sqrt{|\zeta|} \exp\left(i \frac{1}{2} \arg(\zeta)\right), +\sqrt{|\zeta|} \exp\left(i \frac{1}{2} \arg(\zeta)\right) \right\}$$

gegeben und unterscheiden sich nur um den Faktor -1 .

2. Wegen

$$\mathbf{Pow}_i(i) = \left\{ \dots, e^{+\frac{7}{2}\pi}, e^{+\frac{3}{2}\pi}, e^{-\frac{1}{2}\pi}, e^{-\frac{5}{2}\pi}, e^{-\frac{9}{2}\pi}, \dots \right\}$$

gibt es unendlich viele mögliche Werte für die i -te Potenz von i , wobei jeder eine positive reelle Zahl ist.

²⁹Diese Eindeutigkeit ist nicht überraschend, denn andernfalls würde sich ein Widerspruch zur Körperstruktur von \mathbb{C} ergeben.

Hauptwert des Logarithmus Die mengenwertigen Formeln liefern ein vollständiges Verständnis der intrinsischen Mehrdeutigkeiten, die im Komplexen beim Logarithmus und bei allgemeinen Potenzen auftreten. Es gibt jedoch auch die Möglichkeit, auf gewissen Teilmengen der komplexen Zahlenebene eindeutige Logarithmus- und Potenzfunktionen einzuführen. Der Vorteil ist, dass man mit diesen viel besser rechnen kann, aber der Nachteil besteht darin, dass solche Funktionen nicht überall stetig sein können.

Zum Beispiel wird auf der geschlitzten Ebene

$$\mathbb{C} \setminus S = \{\xi + i v : \xi > 0 \text{ oder } v \neq 0\}, \quad S := \{\xi + i v : \xi \leq 0 \text{ und } v = 0\}$$

der sogenannte Hauptzweig des Logarithmus durch

$$\text{Ln}(\xi + i v) := \ln\left(\sqrt{\xi^2 + v^2}\right) + \begin{cases} -i \operatorname{arccot}(-\xi/v) & \text{falls } v < 0 \\ 0 & \text{falls } v = 0 \\ +i \operatorname{arccot}(+\xi/v) & \text{falls } v > 0 \end{cases}$$

eingeführt und liefert mit

$$\text{Pow}_\mu(\xi + i v) := \exp(\mu \text{Ln}(\xi + i v))$$

für jeden Exponenten $\mu \in \mathbb{C}$ eine dazu konsistente Potenzfunktion.

Beispiele Es gilt

$$\text{Ln}(+i) = +i \frac{1}{2} \pi, \quad \text{Ln}(-i) = -i \frac{1}{2} \pi$$

und

$$\text{Pow}_{1/2}(+i) = +i \frac{1}{4} \pi, \quad \text{Pow}_{1/2}(-i) = -i \frac{1}{4} \pi$$

aber $\text{Ln}(-1)$ und $\text{Pow}_{1/2}(-1)$ sind wegen $-1 \in S$ nicht definiert.

Bemerkungen

1. Es gilt stets $\text{Ln}(\zeta) \in \mathbf{Ln}(\zeta)$ sowie $\text{Pow}_\mu(\zeta) \in \mathbf{Pow}_\mu(\zeta)$.
2. Die Funktionen Ln und Pow_μ sind in jedem Punkt $\zeta \notin S$ stetig, aber es gilt

$$\lim_{v \nearrow 0} \text{Ln}(\xi + i v) = \ln(-\xi) - i \pi, \quad \lim_{v \searrow 0} \text{Ln}(\xi + i v) = \ln(-\xi) + i \pi$$

für jedes $\xi < 0$, d.h. jeder Punkt $\zeta \in S$ ist eine Sprungstelle von Ln und damit auch von Pow_μ . In jedem Punkt des Schlitzes S gibt es also zwei Kandidaten für den Wert der Funktion Ln . Es ist letztlich eine Frage des Geschmacks und der Bequemlichkeit, ob wir für $\zeta \in S$ den Wert $\text{Ln}(\zeta)$ als undefiniert betrachten oder in willkürlicher Weise einen der beiden Kandidaten auswählen. Die Unstetigkeit können wir nicht eliminieren.

3. Es gibt modifizierte Versionen dieser Funktionen, die auch auf dem Schlitz S definiert und stetig sind, aber dafür auf einen anderen Schlitz nicht definiert bzw. nicht stetig sind. Oder anders gesagt: Es kann keine Funktion geben, die jeder komplexen Zahl $\zeta \neq 0$ in stetiger Weise einen eindeutigen Wert des Logarithmus zuweist.
4. Die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln für Logarithmen und nicht-ganzzahlige Potenzen dürfen im Allgemeinen nicht verwendet werden (bzw. nur nach gesonderter Prüfung).

Kapitel 9

Differenzierbarkeit

Vorlesungswoche 10

9.1 Definition und Beispiele

Setting Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einem *offenen* Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind. Wir können im Prinzip allgemeinere Definitionsbereiche (zum Beispiel abgeschlossene Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen) zulassen, werden diese Fälle aber nur im Rahmen von Bemerkungen oder speziellen Beispielen studieren.

Definition Wir sagen, f ist differenzierbar im Punkt $x_* \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} =: f'(x_*)$$

im eigentlichen Sinne existiert.

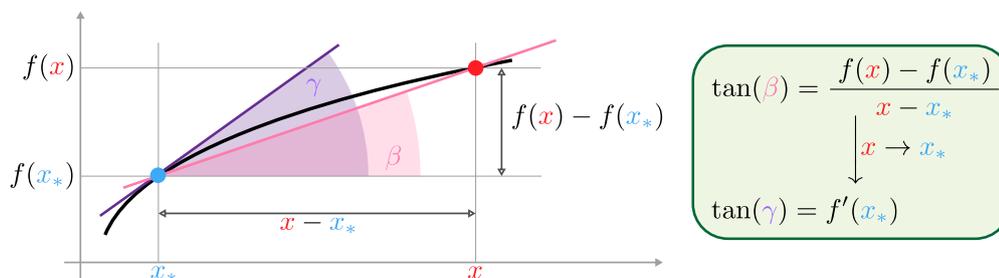


Abbildung Ist f in x_* differenzierbar, so quantifiziert die Ableitung $f'(x_*)$ den Anstieg der Tangente, die den Graphen von f im Punkt $(x_*, f(x_*))$ berührt. Für $x \approx x_*$ kann diese Tangente durch eine Sekante approximiert werden.

Merkregel Jede Ableitung ist ein Grenzwert von Quotienten.

Bemerkungen

1. Die reelle Zahl $f'(x_*)$ wird — sofern sie als Grenzwert wohldefiniert ist — die Ableitung von f im Punkt x_* genannt. Anstelle von $f'(x)$ wird oftmals auch

$$\frac{df}{dx}(x_*), \quad \frac{d}{dx}f(x_*), \quad \dot{f}(x_*) \quad \text{oder} \quad Df(x_*)$$

geschrieben.

2. Für jedes $x \neq x_*$ beschreibt (siehe das obige Bild) der Differenzenquotient $(f(x) - f(x_*))/(x - x_*)$ den Anstieg der *Sekante*, die die Punkte $(x_*, f(x_*))$ und $(x, f(x))$ miteinander verbindet.¹ Ist f in x_* differenzierbar, so beschreibt $f'(x_*)$ gerade den *Anstieg der Tangente*, die den Graphen von f im Punkt $(x_*, f(x_*))$ berührt. Diese Tangente ist die durch die affine Gleichung

$$y = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*)$$

charakterisierte Teilmenge des \mathbb{R}^2 und wird auch Tangentialgerade im Punkt x_* genannt.

3. Die Konvergenzaussage in der Definition meint (siehe das vorangegangene Kapitel), dass

$$\frac{f(x_n) - f(x_*)}{x_n - x_*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x_*)$$

für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt, die den Bedingungen

$$x_n \in I \setminus \{x_*\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_*$$

genügt. Insbesondere ist der Differenzenquotient mit $x = x_n$ immer wegen $x_n \neq x_*$ wohldefiniert.

4. Die Grenzwertformel in der Definition kann auch als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h} = f'(x_*)$$

geschrieben werden, wobei die Substitution $h = x - x_*$ bzw. $x = x_* + h$ zugrunde liegt.

5. Differenzierbarkeit ist — wie schon die Stetigkeit — zunächst eine **punktweise** Eigenschaft, d.h. es kann passieren, dass die Ableitung $f'(x_*)$ in einigen Punkten $x_* \in I$ existiert, in anderen aber nicht.
6. Existiert $f'(x_*)$ in allen Punkten $x_* \in I$, so sagen wir, f ist differenzierbar (auf I). In diesem Fall existiert $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Ableitung von f ist selbst eine Funktion auf I . Ist diese sogar stetig auf I , so heißt f stetig differenzierbar.
7. *Ausblick*: Mit einer analogen Formel können wir auch die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren. Es wird sich aber zeigen, dass die Theorie komplex differenzierbarer Funktionen in wesentlichen Aspekten von der Analysis reell differenzierbarer Funktionen abweicht. Wir werden dies erst in der Vorlesung *Funktionentheorie* genauer studieren können.

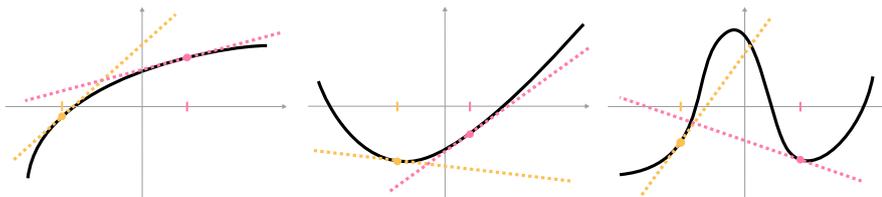


Abbildung Drei Beispiele für differenzierbare Funktionen (schwarze Graphen), wobei jeweils für zwei Wahlen von x_* (farbige Punkte) die entsprechende Tangentialgerade (gestrichelte Linien) dargestellt ist.

¹In der Definition von $f'(x_*)$ ist immer stillschweigend $x \neq x_*$ vorausgesetzt. Siehe dazu auch nachfolgende Bemerkung.

Beispiele

1. Für die affine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ und Parametern $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \alpha_1$$

und damit $f'(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \alpha_1 = \alpha_1$ für alle $x_* \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist f eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung konstant ist.

2. Das Monom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \alpha_m x^m$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $\alpha_m \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$f'(x) = m \alpha_m x^{m-1}.$$

Im Fall von $m = 1$ meint dies $f'(x) = \alpha_1$ und für $m = 0$ ergibt sich $f'(x) = 0$ (siehe auch das letzte Beispiel).

Beweis: Für festes $m \in \mathbb{N}$ und jedes beliebig fixierte $x_* \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \alpha_m \sum_{j=0}^{m-1} x^j x_*^{m-1-j} \xrightarrow{x \rightarrow x_*} \alpha_m \sum_{j=0}^{m-1} x_*^j x_*^{m-1-j} = \alpha_m m x_*^{m-1}$$

und damit $f'(x_*) = \alpha_m m x_*^{m-1}$, wobei wir im ersten Schritt der Herleitung die Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel verwendet haben. Weil x_* beliebig gewählt werden kann, können wir am Ende x_* durch x ersetzen. Beachte aber, dass wir in der Herleitung zwischen x und x_* unterscheiden müssen. \square

3. Die Formel

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{bzw.} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

beschreibt, dass die reelle Variante von \exp bzw. \ln auf ihrem Definitionsbereich (d.h. für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x > 0$) stetig differenzierbar mit der angegebenen Ableitung ist.

Beweis: Unter Verwendung der jeweiligen Funktionalgleichung bzw. der weiter oben bewiesenen Grenzwertformeln für \exp bzw. \ln erhalten wir

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot 1$$

bzw.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot 1.$$

In der zweiten Formel gilt natürlich $x > 0$ und wir haben außerdem angenommen, dass $|h|$ hinreichend klein ist, sodass auch $x+h$ positiv ist. \square

4. Es gilt

$$\sin'(x) = +\cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Additionstheoreme, die trigonometrischen Grenzwertformeln sowie die Stetigkeit des Kosinus implizieren

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = +\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\cos(x)$$

und analog liefert

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin\left(x + \frac{1}{2}h\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin(x)$$

die zweite Behauptung. □

Gegenbeispiele

1. Die Betragsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x_* = 0$ nicht differenzierbar. In jedem anderen Punkt $x_* \neq 0$ gilt aber $f'(x_*) = \operatorname{sgn}(x_*)$.

Beweis: Sei $x_* = 0$. Für negative bzw. positive h gilt

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{+h}{h} = +1$$

und wir erhalten

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{h \searrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1$$

im Sinne einseitiger Grenzwerte. Insbesondere konvergiert der Differenzenquotient nicht für $h \rightarrow 0$. Wir fixieren nun $x_* \in \mathbb{R}$ mit $x_* < 0$ bzw. $x_* > 0$. Für alle $h \in (-|x_*|, +|x_*|)$ erhalten wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_*+h) - f(x_*)}{h} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_*+h) - f(x_*)}{h} = +1$$

wegen $|x_*+h| = -(x_*+h) = |x_*| - h$ bzw. $|x_*+h| = x_*+h = |x_*| + h$. □

2. Es gilt $\operatorname{sgn}'(x_*) = 0$ für alle $x_* \neq 0$, aber in $x_* = 0$ ist die Signumsfunktion nicht differenzierbar.

Beweis: Mit $x_* = 0$ und $h > 0$ gilt

$$\frac{\operatorname{sgn}(0+h) - \operatorname{sgn}(0)}{h} = \frac{+1 - 0}{h} \xrightarrow{h \searrow 0} +\infty$$

und wir schließen, dass sgn' im Ursprung nicht definiert ist. Für $x_* < 0$ bzw. $x_* > 0$ erhalten wir

$$\frac{\operatorname{sgn}(x_*+h) - \operatorname{sgn}(x_*)}{h} = \frac{(-1) - (-1)}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\operatorname{sgn}(x_* + h) - \operatorname{sgn}(x_*)}{h} = \frac{(+1) - (+1)}{h} = 0,$$

sofern $|h|$ hinreichend klein ist. Die Formel $\operatorname{sgn}'(x_*) = 0$ ergibt sich in beiden Fällen unmittelbar im Limes $h \rightarrow 0$.

Bemerkung: Im Punkt $x_* = 0$ kann die Nichtdifferenzierbarkeit von sgn auch mit der Unstetigkeit begründet werden. Siehe dazu das Korollar weiter unten.

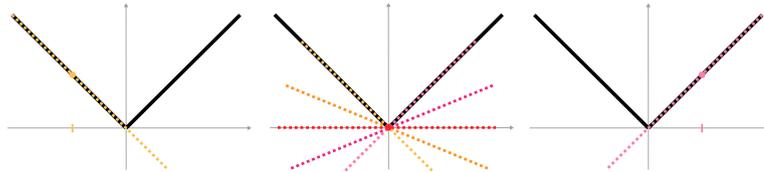


Abbildung Die Differenzierbarkeitseigenschaften der Betragsfunktion können auch geometrisch interpretiert werden: Für $x_* < 0$ (links) und $x_* > 0$ (rechts) existiert immer *genau* eine entsprechende Tangentialgerade. Für $x_* = 0$ (Mitte) gibt es wegen des *Knickes* jedoch zu viele Kandidaten für eine Tangentialgerade.

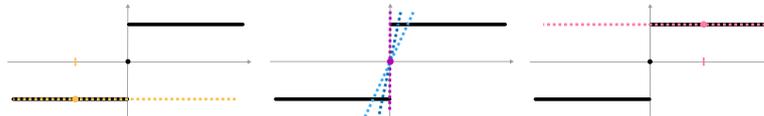


Abbildung Die Nichtdifferenzierbarkeit der Signumsfunktion im Ursprung kann auch wie folgt verstanden werden: Es gibt genau eine Kandidatengerade für die Tangente (rote Linie in der Mitte) als Grenzwert von Sekanten (blaue Linien), aber diese Gerade besitzt einen unendlich großen Anstieg und ist nicht der Graph einer affinen Funktion.

Achtung Das erste Gegenbeispiel und unsere Anschauung können zu der Vermutung führen, dass eine stetige Funktion mit Ausnahme von einigen wenigen Punkten (den *Knickstellen*) immer differenzierbar ist. Das ist aber **nicht** richtig: Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in jedem Punkt stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar sind.² Allerdings ist es nicht möglich, eine solche Funktion durch eine einfache Formel zu beschreiben oder durch einen Plot zu visualisieren.

Alternative Notation In den Natur- und Ingenieurwissenschaften benutzt man häufig die Schreibweise $y = f(x)$ und schreibt dann

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{statt} \quad f'(x).$$

Diese *Physiker-Notation* hat viele Vor-, aber auch einige Nachteile. Sie ist sehr intuitiv und wir können mit ihr sehr gut rechnen: Die Größe y hängt von der Größe x ab und es gilt

$$\delta y = \frac{dy}{dx} \delta x,$$

wobei δx eine „infinitesimale“ — also eine „unendlich kleine“ — Änderung von x meint und δy die entsprechende Änderung von y bezeichnet.³ Für Beweise ist die

²Man kann sogar zeigen, dass in der Menge aller stetigen Funktionen die Teilmenge der Funktionen, die auch nur in einem Punkte differenzierbar sind, in gewisser Weise „sehr klein“ ist. Siehe dazu den Baireschen Kategoriensatz in der in der Vorlesung *Funktionalanalysis*.

³ δx ist ein eigenes, nicht trennbares Symbol. Es meint **nicht** das Produkt von δ und x .

Mathematiker-Notation aber meist besser, insbesondere weil mit ihr klarer wird, dass Differenzierbarkeit zunächst eine punktweise Eigenschaft ist. Außerdem wurde das Konzept einer „infinitesimalen“ Größe mit der Einführung des rigorosen Grenzwertbegriffs aus der modernen Mathematik verbannt.⁴

Lemma (äquivalente Charakterisierung von Differenzierbarkeit) Die drei folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent:

1. Die Funktion f ist differenzierbar in x_* .
2. Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*) - \mu_* h}{h} = 0$$

für ein $\mu_* \in \mathbb{R}$.

3. Es existiert eine in x_* stetige Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = f(x_*) + \varphi(x) \cdot (x - x_*)$$

für alle $x \in I$ erfüllt ist.

Insbesondere folgt $f'(x_*) = \mu_* = \varphi(x_*)$ aus jeder der drei Aussagen.

Beweis 1. \Rightarrow 2.: Die Behauptung ergibt sich mit $\mu_* = f'(x_*)$ aus den Rechenregeln der Konvergenz. 2. \Rightarrow 3.: Die Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} & \text{für } x \neq x_* \\ \mu_* & \text{für } x = x_* \end{cases}$$

gegeben und stetig im Punkt x_* , denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x_* + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_* + h) - f(x_*) - \mu_* h}{h} + \mu_* \right) = 0 + \mu_* = \varphi(x_*)$$

nach 2., wobei wir $x = x_* + h$ substituiert haben. 3. \Rightarrow 1.: Die Bedingung 3. impliziert

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \lim_{x \rightarrow x_*} \varphi(x) = \varphi(x_*),$$

d.h. f ist differenzierbar in x_* mit $f'(x_*) = \varphi(x_*)$. □

Korollar (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit) Die Funktion f sei in x_* differenzierbar. Dann ist f auch stetig in x_* , d.h. es gilt $f(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)$.

Beweis Mit den Notationen des Lemmas und den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = f(x_*) + \left(\lim_{x \rightarrow x_*} \varphi(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_*} (x - x_*) \right) = f(x_*) + \varphi(x_*) \cdot 0 = f(x_*)$$

und die erste äquivalente Charakterisierung von Stetigkeit liefert die Behauptung. □

⁴Im Rahmen der sogenannten *Nichtstandardanalysis* gibt es die *hyperreellen* Zahlen, wobei diese unendlich klein oder unendlich groß sein können. Bei der Menge der hyperreellen Zahlen handelt es sich aber um einen nichtarchimedisch angeordneten Körper, d.h. die in Kapitel 2 formulierten Axiome der reellen Zahlen gelten nicht bzw. nicht in der angegebenen Form.

Achtung Aus der Stetigkeit im Punkt x_* folgt **nicht** die Differenzierbarkeit in x_* . Das Standardbeispiel ist die Betragsfunktion im Ursprung.

9.2 Rechenregeln für Ableitungen

Vorbemerkung In der mathematischen Praxis wird die Differenzierbarkeit meist nicht mit der Definition nachgeprüft, sondern mithilfe von Rechenregeln aus bereits bekannten Differenzierbarkeitsresultaten abgeleitet.

Theorem (Differenzierbarkeit und Rechenoperationen) Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils differenzierbar in $x_* \in I$, so gelten die Formeln

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'(x_*) &= \lambda f'(x_*) + \mu g'(x_*), && \text{(Linearität der Ableitung)} \\ (f \cdot g)'(x_*) &= f'(x_*) \cdot g(x_*) + f(x_*) \cdot g'(x_*), && \text{(Produktregel)} \\ (f/g)'(x_*) &= \frac{f'(x_*) \cdot g(x_*) - f(x_*) \cdot g'(x_*)}{g^2(x_*)}, && \text{(Quotientenregel)} \end{aligned}$$

wobei $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind und in der letzten Formel $g(x_*) \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Beweis Durch direkte Umformungen verifizieren wir

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_*)}{x - x_*} = \lambda \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} + \mu \frac{g(x) - g(x_*)}{x - x_*}$$

sowie

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_*)}{x - x_*} = \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} g(x) + f(x_*) \frac{g(x) - g(x_*)}{x - x_*}$$

und

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_*)}{x - x_*} = \frac{1}{g(x)g(x_*)} \left(\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} g(x_*) - f(x_*) \frac{g(x) - g(x_*)}{x - x_*} \right)$$

für alle $x \neq x_*$. Alle Behauptungen ergeben sich nun nach Grenzübergang $x \rightarrow x_*$ aufgrund der Stetigkeitsformeln $f(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)$ und $g(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} g(x)$ (siehe das Korollar zur äquivalenten Charakterisierung von Differenzierbarkeit). \square

Beispiele

1. Für jedes Polynom $p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ergibt sich

$$p'(x_*) = m \alpha_m x_*^{m-1} + (m-1) \alpha_{m-1} x_*^{m-2} + \dots + \alpha_1$$

für jedes $x_* \in \mathbb{R}$ aus den Rechenregeln sowie den Ableitungsformeln für die Monome (siehe oben). Da diese Formel für alle $x_* \in \mathbb{R}$ gilt, schreiben wir in der Regel x statt x_* .

2. Der Tangens $\tan = \sin / \cos$ ist nach der Quotientenregel auf seinem Definitionsbereich — also in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$ — differenzierbar mit

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

wobei wir die bereits oben hergeleiteten Ableitungsformeln für den Sinus und den Kosinus sowie die trigonometrische Identität $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ verwendet haben.

3. Wir berechnen

$$\frac{d}{dx}(\sin(x) \cdot \cos(x)) = \sin'(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

wobei die rechte Seite auch als $1 - 2 \sin^2(x)$ oder $2 \cos^2(x) - 1$ geschrieben werden kann.

4. Die Quotientenregel impliziert

$$\frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot (m x^{m-1})}{(x^m)^2} = \frac{-m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1}$$

für jedes $x \neq 0$ und jedes $m \in \mathbb{N}$. Alternativ können wir dieses Ergebnis nach kleineren Umstellungen aus

$$0 = \frac{d}{dx}1 = \frac{d}{dx}(x^m \cdot x^{-m}) = m x^{m-1} \cdot x^{-m} + x^m \cdot \frac{d}{dx}x^{-m}$$

ablesen, wobei wir hier die Produktregel angewendet haben.

Theorem (Kettenregel für Ableitungen) Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(I) \subseteq J$. Dann gilt

$$(g \circ f)'(x_*) = g'(f(x_*)) \cdot f'(x_*)$$

für jedes $x_* \in I$, sofern f differenzierbar in x_* und g differenzierbar in $f(x_*)$ ist.

Beweis Die äquivalente Charakterisierung von Differenzierbarkeit — ausgewertet für f und x_* sowie ein zweites Mal für g und $y_* := f(x_*)$ — liefert stetige Funktionen $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Gleichungen

$$f(x) = f(x_*) + \varphi(x) \cdot (x - x_*) \quad \text{bzw.} \quad g(y) = g(y_*) + \psi(y) \cdot (y - y_*)$$

für alle $x \in I$ bzw. alle $y \in J$ gelten, wobei φ bzw. ψ stetig in x_* bzw. in y_* ist. Mit $y = f(x)$ folgt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y_*) + \psi(y) \cdot (y - y_*)$$

aus der zweiten Gleichung, wobei wir dies mit der ersten Gleichung auch als

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_*) + \omega(x) \cdot (x - x_*) \quad \text{mit} \quad \omega(x) := \psi(f(x)) \cdot \varphi(x)$$

schreiben können. Da die Funktion $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_* ist (siehe die Rechenregeln zur Stetigkeit) impliziert die äquivalente Charakterisierung von Differenzierbarkeit, dass die Funktion $g \circ f$ in der Tat im Punkt x_* differenzierbar ist, wobei

$$(g \circ f)'(x_*) = \omega(x_*) = \psi(f(x_*)) \cdot \varphi(x_*)$$

gilt. Weil die äquivalente Charakterisierung außerdem

$$\varphi(x_*) = f'(x_*), \quad \psi(y_*) = g'(y_*)$$

sicherstellt, erhalten wir schließlich die gewünschte Formel. \square

Beispiele

1. Im Fall von $f(x) = x^2 + 1$ und $g(y) = y^3$ können wir $I = J = \mathbb{R}$ wählen und berechnen die Funktion $h := g \circ f$ zu

$$h(x) = (x^2 + 1)^3.$$

Für jeden Punkt $x_* \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$h'(x_*) = g'(f(x_*)) \cdot f'(x_*) = 3 (f(x_*))^2 \cdot (2x_*) = 6x_* (x_*^2 + 1)^2,$$

wobei wir die Formeln $f'(x_*) = 2x_*$ und $g'(y_*) = 3y_*^2$ verwendet haben und am Ende wieder x_* durch x ersetzen können.

Bemerkung 1: In der Formulierung sowie im Beweis der Kettenregel haben wir zwischen x_* (festgehaltener Punkt) und x (die freie Variable) unterschieden. Das ist auch sinnvoll, da ja Differenzierbarkeit zunächst eine Eigenschaft ist, die in einigen Punkten erfüllt, in anderen aber verletzt sein kann. Wenn wir aber schon wissen, dass alle betrachteten Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar sind, so können wir das Endergebnis auch direkt mithilfe der Rechnung

$$\frac{d}{dx} \left((x^2 + 1)^3 \right) = 3 (x^2 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = 3 (x^2 + 1)^2 \cdot 2x$$

herleiten.

Bemerkung 2: In diesem Beispiel können wir das Ergebnis auch ohne die Kettenregel verifizieren. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$h(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

und damit

$$h'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 6x = 6x(x^2 + 1)^2,$$

wobei sich das erste Gleichheitszeichen aus den Rechenregeln ergibt und das zweite direkt nachgerechnet werden kann.

2. Es gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\exp(\sin(x)) \right) = \exp'(\sin(x)) \cdot \sin'(x) = \exp(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sin^3(x^2 + x)) &= 3 \sin^2(x^2 + x) \cdot \frac{d}{dx} (\sin(x^2 + x)) \\ &= 3 \sin^2(x^2 + x) \cdot \cos(x^2 + x) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + x) \\ &= 3 \sin^2(x^2 + x) \cdot \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Rechnung die Kettenregel zweimal angewendet haben.

Alternativer Blick auf die Kettenregel In den Anwendungswissenschaften taucht die Kettenregel oftmals in einer anderen Schreibweise auf: Mit den Notationen $y = f(x)$ und $z = g(y)$ kann sie formal als

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

geschrieben werden, denn links steht die Ableitung von $g \circ f$ und rechts gerade das Produkt der Ableitung von g und der Ableitung von f .⁵

Beispiel: Mit $y = x^2 + 1$ und $z = y^3$ ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dz}{dy} = 3y^2, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2,$$

und wir erhalten dasselbe Ergebnis wie oben.

Theorem (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine strikt monotone sowie stetige Funktion und sei $g = f^{-1} : J \rightarrow I$ die entsprechende Umkehrfunktion, wobei $J = f(I)$ das Bildintervall von f ist. Ist f in x_* differenzierbar mit $f'(x_*) \neq 0$, so ist g im Punkt $y_* = f(x_*)$ differenzierbar, wobei die entsprechende Ableitung durch

$$g'(f(x_*)) = \frac{1}{f'(x_*)} \quad \text{bzw.} \quad g'(y_*) = \frac{1}{f'(g(y_*))}$$

berechnet werden kann.

Beweis Nach der äquivalenten Charakterisierung von Differenzierbarkeit existiert eine in x_* stetige Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Gleichung

$$f(x) - f(x_*) = \varphi(x) \cdot (x - x_*)$$

für alle $x \in I$ gilt. Da f strikt monoton ist, gilt $f(x) \neq f(x_*)$ für alle $x \in I$ mit $x \neq x_*$ und wir schließen, dass daher auch $\varphi(x) \neq 0$ gelten muss. Außerdem gilt $\varphi(x_*) = f'(x_*) \neq 0$ nach Voraussetzung und wir haben insgesamt gezeigt, dass φ keine Nullstellen besitzt. Mit $y = f(x)$ bzw. $x = g(y)$ erhalten wir damit

$$g(y) - g(y_*) = \psi(y) \cdot (y - y_*) \quad \text{mit} \quad \psi(y) := \frac{1}{\varphi(g(y))}$$

für alle $y \in J$, wobei ψ in x_* stetig ist (beachte, dass φ in x_* stetig ist und dass $g = f^{-1}$ auf ganz J stetig ist). Die äquivalente Charakterisierung liefert die Differenzierbarkeit von g in y_* sowie die zweite Formel in der Behauptung. Die erste ergibt sich dann unmittelbar mit $x_* = g(y_*)$. \square

⁵Salopp gesprochen besagt die Kettenregel also, dass der Term dy „gekürzt“ werden darf. Aus Sicht der reinen Lehre sind Ableitungen zwar keine Quotienten, sondern Grenzwerte von Quotienten, aber da wir die Kettenregel nun rigoros aus den Axiomen hergeleitet haben, dürfen wir diesen Trick von nun an auch verwenden.

Bemerkungen

1. Die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion $g : J \rightarrow I$ sowie die Intervalleigenschaft von $J = f(I)$ hatten wir im Kapitel über Stetigkeit bewiesen. Die Monotonie von f ist auch im Beweis wichtig, da sie — in Kombination mit der Differenzierbarkeit von f in x_* — die Differenzierbarkeit von g in y_* garantiert.
2. Ist f sogar in jedem Punkt aus I differenzierbar, so kann die Formel für $g'(y)$ auch wie folgt hergeleitet werden: Es gilt

$$x = g(f(x))$$

für alle $x \in I$ und durch Differentiation beider Seiten nach x erhalten wir

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

aufgrund der Kettenregel und damit $g'(f(x)) = 1/f'(x)$ für alle $x \in I$ bzw. $g'(y) = 1/f'(g(y))$ für alle $y \in J$. Beachte, dass das Theorem erst sicherstellt, dass wir überhaupt so rechnen dürfen. Außerdem liefert es auch dann sinnvolle Aussagen, wenn f nicht in allen Punkten ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist.

3. In der intuitiven Physiker-Notation kann die Formel für die Umkehrfunktion formal als

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

geschrieben werden.

Beispiele

1. Der Logarithmus ist als Umkehrfunktion der Exponentialabbildung nach dem Theorem in jedem Punkt seines Definitionsbereichs differenzierbar und die Ableitungsformel impliziert

$$\ln'(x_*) = \frac{1}{\exp'(\ln(x_*))} = \frac{1}{\exp(\ln(x_*))} = \frac{1}{x_*}$$

für alle $x_* > 0$. Wir dürfen in dieser Formel wieder x_* durch x ersetzen und hatten dieses Ergebnis schon oben auf eine andere Art hergeleitet.

noch eine Herleitung der Formel: Es gilt

$$x = \exp(\ln(x))$$

für alle $x > 0$ und wenn wir beide Seiten differenzieren, so erhalten wir

$$1 = \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = \exp(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = x \cdot \ln'(x)$$

unter Ausnutzung der Kettenregel sowie der Eigenschaften von \exp .

2. Das Theorem garantiert, dass der Arkustangens in jedem Punkt der reellen Achse differenzierbar ist. Mit dieser Information sowie der Formel

$$x = \tan(\arctan(x))$$

ergibt sich

$$1 = \tan'(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot \arctan'(x)$$

indem wir beide Seiten differenzieren, die Kettenregel anwenden und die Formel für die Ableitung des Tangens einsetzen. Damit gilt

$$\arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x)),$$

aber wir können diese Formel weiter vereinfachen. Es gilt nämlich

$$\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x)) = 1$$

sowie

$$\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} = \tan^2(\arctan(x)) = x^2,$$

und nach kleineren Umstellungen erhalten wir mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ein erstaunlich einfaches Ergebnis.

alternative Rechnung: Wir schreiben $y = \arctan(x)$ bzw. $x = \tan(y)$ und wegen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right) = \frac{\sin'(y) \cos(y) - \sin(y) \cos'(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)}$$

erhalten wir zunächst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2(y).$$

Wegen

$$x^2 = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1 - \cos^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1$$

gilt aber auch $\cos^2(y) = 1/(1+x^2)$ und wir erhalten dasselbe Endergebnis.

9.3 Mehr über Ableitungen

Höhere Ableitungen Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so existiert ihre (erste) Ableitung $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn diese wieder differenzierbar ist, so wird

$$f''(x_*) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_*) = \frac{df'}{dx}(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f'(x) - f'(x_*)}{x - x_*}$$

die zweite Ableitung von f in x_* genannt. Analog werden die dritte, die vierte und allgemein die n -te Ableitung von f eingeführt, wobei letztere auch mit $f^{(n)}$ bezeichnet wird. Insbesondere gilt

$$f^{(n+1)}(x_*) = \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_*) = \frac{df^{(n)}}{dx}(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_*)}{x - x_*},$$

wobei man $f^{(0)} = f$ vereinbart, d.h. die nullte Ableitung von f ist f selbst.

Beispiele

1. Für das Polynom $p(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ erhalten wir

$$p'(x) = 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1, \quad p''(x) = 6\alpha_3 x + 2\alpha_2, \quad p'''(x) = 6\alpha_3$$

sowie $p^{(k)}(x) = 0$. Ganz allgemein ist die k -te Ableitung eines Polynoms vom Grad m für $k \leq m$ ein Polynom vom Grad $m - k$.

2. Es gelten die Formeln

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \sin''(x) = -\sin(x), \quad \sin'''(x) = -\cos(x), \quad \sin^{(4)}(x) = \sin(x)$$

sowie analoge Aussagen für den Kosinus.

3. Für $f(x) = \exp(x)$ ergibt sich $f^{(n)}(x) = \exp(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Einseitige Ableitungen in Randpunkten* Wir haben in diesem Abschnitt immer vorausgesetzt, dass I ein offenes Intervall ist. Insbesondere existiert zu jedem $x_* \in I$ ein $\varepsilon > 0$, sodass das Intervall $(x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon)$ ganz in I liegt. In der Praxis treten natürlich auch abgeschlossene oder halboffene Intervalle auf und man kann dann in den jeweiligen Randpunkten Ableitungen im Sinne einseitiger Grenzwerte definieren. Wir wollen dies hier nicht vertiefen, sondern nur einige typische Beispiele besprechen.

Beispiele*

1. Wir betrachten die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$, wobei in den beiden Randpunkten die Stetigkeitsformeln

$$0 = f(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) \quad 1 = f(1) = \lim_{x \nearrow 1} f(x)$$

gelten. Die Rechnung

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \xrightarrow{x \nearrow 1} \frac{1}{2}$$

zeigt, dass $f'(1)$ als einseitiger Limes des entsprechenden Differenzenquotienten wohldefiniert ist. Wegen

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \searrow 0} +\infty$$

ist f aber im linken Randpunkt $x_* = 0$ nicht differenzierbar.

2. Der Arkussinus ist auf dem Intervall $I = [-1, +1]$ definiert und stetig. Er ist außerdem nach dem Theorem über die Ableitung der Umkehrfunktion in jedem Punkt $x_* \in (-1, +1)$ differenzierbar mit

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

wobei diese Formel leicht nachgerechnet werden kann (Übungsaufgabe). Es gilt aber

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{\arcsin(x) - \arcsin(1)}{x - 1} = \lim_{y \nearrow \pi/2} \frac{y - \pi/2}{\sin(y) - 1} = \lim_{y \nearrow \pi/2} \frac{1}{\cos(y)} = +\infty,$$

wobei wir im ersten Schritt die Substitution $y = \arcsin(x)$ benutzt und im zweiten Schritt die Regel von de l'Hospital vorweggenommen haben. Insbesondere ist der Arkussinus im rechten Randpunkt $x_* = +1$ nicht differenzierbar und mit analogen Rechnungen können wir zeigen, dass auch im linken Randpunkt $x_* = -1$ keine Ableitung existiert.

Ausblick: Ableitungen vektorwertiger Funktionen* Ableitungen können ganz analog für vektorwertige Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert werden, wobei dann

$$f'(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h}$$

für jedes $x_* \in I$ ein Vektor, d.h. ein Element des \mathbb{R}^m , ist.⁶ Dabei ist es für diese Formel sehr wichtig, dass der Definitionsbereich I eine Teilmenge des \mathbb{R} ist.⁷ Wir werden später sehen, dass eine solche Funktion in natürlicher Weise als *Kurve* im \mathbb{R}^m interpretiert werden kann und dass ihre ersten und zweiten Ableitungen eine physikalische sowie eine geometrische Bedeutung aufweisen.

Die Differentiationstheorie für Abbildungen $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ werden wir in *Analysis 2* studieren, wobei es dann *partielle Ableitungen* geben wird, da ja $x \in \mathbb{R}^n$ selbst n verschiedene Komponenten aufweist.

Beispiele* Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} + \cos(t) \\ + \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiralkurve in der Ebene, wobei wir hier t statt x geschrieben haben, um eine Interpretation als Zeit anzudeuten. Die ersten beiden Ableitungen sind durch

$$\dot{f}(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} + \cos(t) \\ + \sin(t) \end{pmatrix} + \exp(t) \begin{pmatrix} - \sin(t) \\ + \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \ddot{f}(t) = 2 \exp(t) \begin{pmatrix} - \sin(t) \\ + \cos(t) \end{pmatrix}$$

gegeben und können komponentenweise nachgerechnet werden, wobei wir hier $\dot{}$ statt $'$ geschrieben haben, da t ja die Zeit sein soll.

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

parametrisiert die Einheitssphäre (also eine Fläche), wobei u_1 und u_2 die sogenannten Euler-Winkel sind. Es gibt hier insgesamt 6 partielle Ableitungen, nämlich $\frac{\partial f_j}{\partial u_k}$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \{1, 2\}$.

Berechnung singulärer Grenzwerte

Theorem (Regel von de l'Hospital) Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen und x_* ein Punkt in I mit

$$f(x_*) = 0 = g(x_*).$$

⁶Insbesondere ist der Zähler bzw. der Nenner des Differenzenquotienten ein Vektor bzw. ein Skalar.

⁷In manchen Kontexten spricht man von *einer unabhängigen Variable* (nämlich die reelle Zahl x) und m *abhängigen Größen* (die Komponenten von $f(x) \in \mathbb{R}^m$).

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_*)}{g'(x_*)},$$

sofern f und g in x_* differenzierbar sind und außerdem $g'(x_*) \neq 0$ gilt.

Beweis Nach Voraussetzung sowie aufgrund der äquivalenten Charakterisierung von Differenzierbarkeit existieren Funktionen $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = 0 + \varphi(x) \cdot (x - x_*) \quad g(x) = 0 + \psi(x) \cdot (x - x_*)$$

für alle $x \in I$ gilt, wobei beide Funktionen im Punkt x_* stetig sind und außerdem die Gleichungen

$$\varphi(x_*) = f'(x_*), \quad \psi(x_*) = g'(x_*) \neq 0$$

erfüllt sind. Damit ergibt sich

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_*} \frac{\varphi(x_*)}{\psi(x_*)},$$

wobei wir benutzt haben, dass die Stetigkeit von ψ in Kombination mit $\psi(x_*) \neq 0$ impliziert, dass $\psi(x) \neq 0$ immer dann gilt, wenn $|x - x_*|$ hinreichend klein ist. \square

Bemerkungen

1. Das Theorem ist ein sehr mächtiges Werkzeug, um singuläre Grenzwerte der Bauart $0/0$ zu berechnen. Sind f und g auf I stetig differenzierbar, so kann die Formel von de l'Hospital auch in der modifizierten Version

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

geschrieben werden.

2. Die modifizierte Variante kann oftmals auch im Fall von

$$f(x_*) = \infty = g(x_*)$$

verwendet werden, wobei dann f und g im Punkt x_* gar nicht definiert sind. Für eine rigorose Formulierung sowie den Beweis verweisen wir auf [Koe, Kapitel 9] und [Heu, Abschnitt 50]. Die zugrunde liegende Idee ist, anstelle von f und g die Funktionen $x \mapsto 1/f(x)$ und $x \mapsto 1/g(x)$ zu betrachten und auf diese dann das Theorem anzuwenden. Insbesondere liefert die formale Rechnung

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)} \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right)} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2}{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2}{\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \end{aligned}$$

nach elementaren Umstellungen wieder die Formel von de l'Hospital für f und g .

3. Eine weitere Verallgemeinerung ist, dass die modifizierte Fassung sinngemäß auch für einseitige Grenzwerte gilt. Insbesondere kann x_* auch ein Randpunkt des Intervalls I sein.
4. Mit etwas mehr Aufwand können Varianten mit höheren Ableitungen formuliert und bewiesen werden. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_*)}{g''(x_*)},$$

sofern f und g in x_* zweimal differenzierbar sind und die natürlichen Bedingungen

$$f(x_*) = 0 = g(x_*), \quad f'(x_*) = 0 = g'(x_*), \quad g''(x_*) \neq 0$$

erfüllt sind. Wir werden später sehen, dass diese Varianten direkt aus dem *Satz von Taylor* abgeleitet werden können.

Beispiele

1. Direkte Anwendungen des Theorems sind die Grenzwertformeln

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2 \cos(0)}{3} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{\sin(x)} = \frac{\exp(0)}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1,$$

wobei wir in der ersten Rechnung benutzt haben, dass die Ableitung der Nennerfunktion konstant ist.

2. Die Formel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\exp(x) - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\exp(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{\exp(x)} = \frac{-1}{1} = -1$$

ergibt sich aus zweifacher Anwendung der modifizierten Fassung. Beachte, dass die Brüche in den ersten beiden Grenzwerten bei Auswertung in $x = 0$ immer den nicht-definierten Term $0/0$ ergeben. Nach zweimaligem Ableiten der Zähler- und der Nennerfunktion können wir aber endlich $x = 0$ setzen.

3. Manchmal müssen die auftretenden Terme erst geeignet umgeformt werden. Ein klassisches Beispiel ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{2 \cdot 1 - 0 \cdot 0} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Regel von de l'Hospital zweimal angewendet haben und insgesamt einen Grenzwert der Bauart $\infty - \infty$ berechnet haben.

4. Es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} (-x \ln(x)) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

wobei dies ein Beispiel für einen einseitigen Grenzwert der Bauart $0 \cdot \infty$ ist, der im ersten Schritt als einseitiger Grenzwert der Bauart ∞/∞ geschrieben wird. Als Nebenprodukt erhalten wir die wichtige Formel

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} \exp(x \ln(x)) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} (x \ln(x))\right) = \exp(0) = 1,$$

wobei wir zusätzlich die Stetigkeit der Exponentialfunktion ausgenutzt haben.

5. Die Rechnung

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

ist ein Beispiel für eine dreifache und alles andere als triviale Anwendung der Regel von de l'Hospital, wobei auch algebraische Umformungen sowie die Rechenregeln für Ableitungen eingeflossen sind.

Merkregeln

1. Durch — vielleicht mehrfaches — Anwenden der Regel von de l'Hospital können wir singuläre Grenzwerte der Bauart $0/0$ oder ∞/∞ berechnen.
2. Die Fälle $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ können oftmals durch geschicktes Umformen in die Form $0/0$ oder ∞/∞ gebracht werden.
3. Die Details können trickreich sein.

Achtung Die Regel von de l'Hospital darf natürlich nicht wahllos angewendet werden. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\exp(x)} = \frac{\cos(0)}{\exp(0)} = 1,$$

aber auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos'(x)}{\exp'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\exp(x)} = \frac{-\sin(0)}{\exp(0)} = 0 \neq 1.$$

Der Grund für die Ungleichheit ist, dass der obere Grenzwert gar nicht singulär ist, sondern von der regulären Bauart $1/1$.

9.4 Mittelwertsatz und Folgerungen

Theorem (Mittelwertsatz von Cauchy) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die außerdem in jedem Punkt aus (a, b) differenzierbar sind. Dann gilt

$$g'(\xi) (f(b) - f(a)) = f'(\xi) (g(b) - g(a)).$$

für mindestens ein $\xi \in (a, b)$.

Beweis Die Funktion $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x) := (f(b) - f(a))g(x) - f(x)(g(b) - g(a)) + f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

ist stetig mit $\psi(a) = \psi(b) = 0$, wobei die Formel

$$\psi'(x) := (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$$

nach den Rechenregeln für Ableitungen in jedem $x \in (a, b)$ erfüllt ist. Insbesondere müssen wir die Existenz von ξ mit $\psi'(\xi) = 0$ zeigen. Wenn ψ eine konstante Funktion ist, so gilt $\psi(x) = 0$ und damit $\psi'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, d.h. die Behauptung folgt mit einem beliebig gewählten ξ . Andernfalls wählen wir \underline{x} bzw. \bar{x} als Minimierer bzw. Maximierer von ψ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, siehe den Satz vom Minimum und Maximum, und bemerken, dass

$$\psi(\underline{x}) < 0 \quad \text{oder} \quad \psi(\bar{x}) > 0$$

und damit auch $a < \underline{x} < b$ oder $a < \bar{x} < b$ gilt. Im ersten Fall impliziert die Minimierungseigenschaft von \underline{x} , dass die einseitigen Differenzenquotienten durch

$$\frac{\psi(\underline{x} + \varepsilon) - \psi(\underline{x})}{+\varepsilon} \leq 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{\psi(\underline{x} - \varepsilon) - \psi(\underline{x})}{-\varepsilon} \geq 0$$

abgeschätzt werden können, wobei hier immer $0 < \varepsilon < \min\{\underline{x} - a, b - \underline{x}\}$ vorausgesetzt ist. Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\psi'(\underline{x}) \leq 0 \quad \text{sowie} \quad \psi'(\underline{x}) \geq 0,$$

d.h. mit $\xi := \underline{x}$ erhalten wir $\psi'(\xi) = 0$ und damit die Behauptung. Im zweiten Fall setzen wir $\xi := \bar{x}$ und benutzen die Maximierungseigenschaft um $\psi'(\xi) = 0$ zu zeigen. \square

Bemerkungen

1. Im Fall von $g'(\xi) \neq 0$ gilt auch $g(b) - g(a) \neq 0$ und damit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

In der Literatur wird das Theorem manchmal als *verallgemeinerter Mittelwertsatz* bezeichnet.

2. Im Spezialfall $g(x) = x$ ergibt sich

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und das Theorem wird Mittelwertsatz von Lagrange genannt. Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$ (und damit $f'(\xi) = 0$), so sprechen wir auch vom Satz von Rolle.

3. Im Beweis haben wir unter anderem gezeigt, dass die Ableitung von ψ in jeder Extremstelle verschwindet, sofern diese echt zwischen a und b liegt. Wir werden unten sehen, dass dies ein allgemeines Prinzip widerspiegelt.

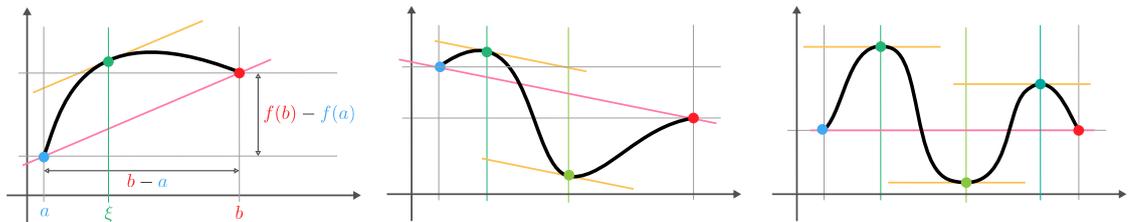


Abbildung Drei Beispiele für den Mittelwertsatz von Lagrange, wobei es ein, zwei oder drei mögliche Wahlen für ξ gibt, wobei das rechte Bild den Satz von Rolle illustriert. Beachte, dass die Tangente im Punkt $(\xi, f(\xi))$ (orange Gerade und grüner Punkt) an den Graphen von f (schwarze Kurve) sowie die durch $(a, f(a))$ (blauer Punkt) und $(b, f(b))$ (roter Punkt) verlaufende Sekante (rosa Gerade) denselben Anstieg aufweisen und daher parallel sind.

Lemma (Lipschitz-Eigenschaft einer differenzierbaren Funktion) Für jede differenzierbare Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1| \quad \text{mit} \quad L := \sup_{x \in I} |f'(x)|$$

für alle $x_1, x_2 \in I$. Insbesondere ist f Lipschitz-stetig, sofern $L < \infty$ gilt.

Beweis O.b.d.A können wir $x_1 < x_2$ annehmen (andernfalls vertauschen wir die beiden Indizes). Nach dem Mittelwertsatz — ausgewertet für die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_1, x_2]$ — existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ und wir erhalten

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq L |x_2 - x_1|.$$

Die zweite Behauptung ergibt sich aus der Definition von Lipschitz-Stetigkeit.

Bemerkungen

1. Das Lemma wird manchmal auch Schränkensatz genannt und stellt die Standardmethode dar, um die Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion nachzuweisen.⁸
2. Ausblick*: Der *Satz von Rademacher* garantiert, dass jede Lipschitz-stetige Funktion in *fast jedem* (aber nicht unbedingt in jedem) Punkt x ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, wobei dann auch $|f'(x)| \leq L$ gilt und L die Lipschitz-Konstante von f bezeichnet. Der Beweis dieser Aussage ist aber nicht einfach und liegt jenseits unserer Möglichkeiten.

⁸Es gibt leider kein so einfaches Kriterium, um die Hölder-Stetigkeit einer Funktion nachzuweisen.

Lemma (eine Variante des Mittelwertsatzes von Lagrange) Die stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar in (a, b) . Außerdem seien x und h zwei reelle Zahlen mit $h \neq 0$ sowie $a \leq x, x + h \leq b$. Dann gilt

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h) h$$

für mindestens ein $\theta \in (0, 1)$.

Beweis Im Fall $h > 0$ betrachten wir die Einschränkung von f auf das Intervall $[x, x + h] \subseteq [a, b]$. Dann gilt $f(x + h) - f(x) = f'(\xi) h$ nach dem Mittelwertsatz für ein $\xi \in (x, x + h)$ und die Behauptung folgt mit $\theta := (\xi - x)/h$. Für $h < 0$ argumentieren wir analog auf dem Intervall $[x + h, x]$. \square

Monotonie, Konvexität und Konkavität

Vorbemerkung Wir betrachten im Rest dieses Abschnitts immer Funktionen auf einem offenen Intervall (a, b) , aber viele der folgenden Resultate gelten sinngemäß auch auf abgeschlossenen oder halboffenen Intervallen.

Theorem (Monotonie und erste Ableitung) Eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann monoton fallend bzw. monoton wachsend, wenn

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(x) \geq 0,$$

für alle $x \in (a, b)$ gilt. Insbesondere ist f genau dann konstant, wenn $f'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ verschwindet.

Beweis Monotonie, Hinrichtung: Sei f monoton fallend und x beliebig fixiert mit $a < x < b$. Wegen der Monotonie gilt dann

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0$$

für alle h mit $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$ und der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert $f'(x) \leq 0$. Die Argumentation für wachsende Funktionen ist ganz analog; wir müssen nur das Relationszeichen in der Abschätzung des Differenzenquotienten ändern.

Monotonie, Rückrichtung: Es gelte $f'(x) \leq 0$ für alle x mit $a < x < b$. Für je zwei beliebig gewählte Punkte x_1, x_2 mit $a < x_1 < x_2 < b$ existiert nach dem Mittelwertsatz — in der Version von Lagrange und ausgewertet für die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_1, x_2]$ — ein ξ , sodass neben $x_1 < \xi < x_2$ auch $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ gilt, und wegen $f'(\xi) \leq 0$ sowie $x_2 - x_1 > 0$ erhalten wir $f(x_2) \leq f(x_1)$. Da x_1, x_2 beliebig waren, ist f also monoton fallend. Die Argumentation im anderen Fall ist analog.

Konstanz: Die Hinrichtung ergibt sich unmittelbar aus den Rechenregeln der Differenzierbarkeit. Gilt nun $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so muss f nach den bisher bewiesenen Aussagen sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend sein. Es gilt also $f(x_1) \geq f(x_2)$ sowie $f(x_1) \leq f(x_2)$ und damit $f(x_1) = f(x_2)$ für alle x_1, x_2 mit $a < x_1 < x_2 < b$. Sei nun $x_* := \frac{1}{2}(a + b)$ und $c := f(x_*)$. Für $x < x_*$ bzw. $x > x_*$ folgt nun $f(x) = c$ mit $x_1 = x, x_2 = x_*$ bzw. $x_1 = x_*, x_2 = x$. Insbesondere gilt $f(x) = c$ für alle $x \in (a, b)$, d.h. f ist eine konstante Funktion. \square

Bemerkungen

1. Gilt sogar die strikte Ungleichung

$$f'(x) < 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(x) > 0$$

für alle $x \in (a, b)$, so impliziert unser Beweis (genauer gesagt: der Mittelwertsatz), dass f strikt monoton fallend bzw. strikt monoton wachsend ist. Die umgekehrte Aussage ist aber im Allgemeinen nicht mehr richtig.

Gegenbeispiel: Die kubische Funktion $f : (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3$ ist zwar strikt monoton wachsend, aber es gilt $f'(0) = 0$.

2. Für die Aussage des Theorems ist es wichtig, dass der Definitionsbereich von f ein Intervall ist.

Beispiel: Die durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < 0 \\ x - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

auf dem *punktierten Intervall* $D := (-1, +1) \setminus \{0\}$ definierte Funktion ist in jedem Punkt $x \in D$ sowohl stetig als auch differenzierbar, wobei immer $f'(x) = +1$ gilt. Sie ist aber nicht monoton wachsend, da etwa $f(-\frac{1}{2}) = +\frac{1}{2} > -\frac{1}{2} = f(+\frac{1}{2})$ gilt.⁹

Definition Eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ wird konvex bzw. konkav genannt, wenn

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

bzw.

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ sowie jedes $\lambda \in (0, 1)$ gilt.

Bemerkungen

1. Gilt die jeweilige Ungleichung sogar immer im strikten Sinn, so sprechen wir von einer strikt konvexen bzw. strikt konkaven Funktion. Außerdem ist f genau dann (strikt) konvex, wenn $-f$ (strikt) konkav ist.
2. Für eine affine Funktion $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ gilt sogar

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

d.h. sie ist konvex und konkav, aber weder strikt konvex noch strikt konkav.¹⁰

3. Für jedes $0 < \lambda < 1$ wird $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ eine Konvexkombination von x_1 und x_2 genannt und liegt immer zwischen x_1 und x_2 .

⁹Beachte, dass $x_* = 0$ (die isolierte Lücke im Definitionsbereich) wegen

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = +1, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = -1$$

eine Sprungstelle von f ist. Insbesondere wächst f auf dem linken Teilintervall $(-1, 0)$, springt im Ursprung um 2 nach unten und wächst wieder auf dem Intervall $(0, +1)$.

¹⁰Man kann auch zeigen, dass jede Funktion, die sowohl konvex als auch konkav ist, affin sein muss.

4. Für die obige Definition ist es wichtig, dass f auf einem Intervall $D = (a, b)$ definiert ist, denn nur dann gilt die Implikation

$$x_1, x_2 \in D \quad \implies \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in D \quad \text{für alle } \lambda \in (0, 1).$$

Wir könnten aber auch halboffene oder abgeschlossene Intervalle zulassen.

*Ausblick**: In höheren Dimensionen wird eine Menge D , für die diese Implikation gilt, konvex genannt, aber in einer Dimension sind das gerade die Intervalle. Konvexe Funktionen und Mengen spielen eine wichtige Rolle in der modernen Mathematik, zum Beispiel in der Mathematischen Optimierung.

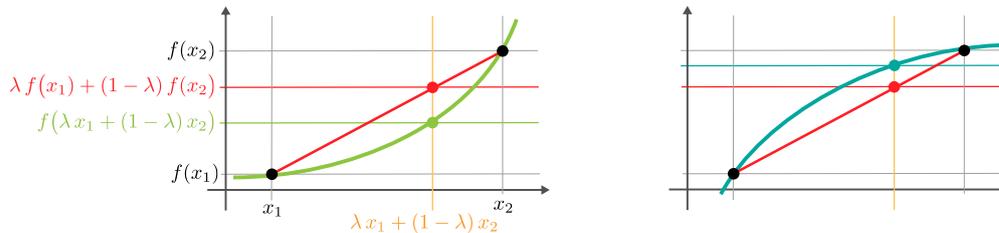


Abbildung Links: Ist f strikt konvex, so liegt zu je zwei verschiedenen Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ das verbindende Sekantensegment (rote Strecke) oberhalb des Graphen von f (hellgrüne Kurve). Rechts: Bei einer strikt konkaven Funktion (türkiser Graph) liegt das Sekantensegment jedoch immer unterhalb.

Theorem (Konvexität und erste Ableitung) Eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex bzw. konkav, wenn f' monoton wachsend bzw. monoton fallend ist, d.h. wenn

$$f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f'(x_1) \geq f'(x_2),$$

für alle x_1, x_2 mit $a < x_1 < x_2 < b$ gilt.

Beweis Wir beweisen nur die Behauptungen für konvexe Funktionen; der konkave Fall ergibt sich dann, wenn wir statt f die Funktion $-f$ betrachten.

Hinrichtung: Sei f konvex und seien x_1, x_2 beliebig fixiert mit $a < x_1 < x_2 < b$. Für jedes $\lambda \in (0, 1)$ gelten die beiden Konvexitätsungleichungen

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

und

$$f((1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

wobei wir benutzt haben, dass mit $0 < \lambda < 1$ auch immer $0 < 1 - \lambda < 1$ gilt. Wenn wir in der ersten bzw. zweiten Ungleichung auf beiden Seiten $f(x_2)$ bzw. $f(x_1)$ abziehen und anschließend durch $-\lambda(x_2 - x_1)$ bzw. $+\lambda(x_2 - x_1)$ teilen, so erhalten wir zwei Abschätzungen, die zusammen als

$$\frac{f(x_2 - \lambda(x_2 - x_1)) - f(x_2)}{-\lambda(x_2 - x_1)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) - f(x_1)}{+\lambda(x_2 - x_1)}$$

geschrieben werden können. Im Limes $\lambda \searrow 0$ erhalten wir

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1),$$

wobei wir das Vergleichsprinzip für Grenzwerte benutzt haben. Das ist aber die gewünschte Monotonieaussage für f' .

Rückrichtung: Sei f' monoton wachsend und seien $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$ sowie $\lambda \in (0, 1)$ gegeben. Wir setzen $x_* = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, wobei dann $x_1 < x_* < x_2$ gilt, und werten den Mittelwertsatz für die Einschränkungen von f auf $[x_1, x_*]$ und auf $[x_*, x_2]$ aus. Dies liefert zwei reelle Zahlen ξ_1, ξ_2 mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_*) - f(x_1)}{x_* - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_*)}{x_2 - x_*},$$

wobei außerdem $x_1 < \xi_1 < x_* < \xi_2 < x_2$ und damit $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ gilt. Insgesamt erhalten wir

$$\frac{f(x_*) - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_*)}{\lambda(x_2 - x_1)},$$

woraus nach kleineren Umformungen $f(x_*) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ und damit die gewünschte Abschätzung folgt. \square

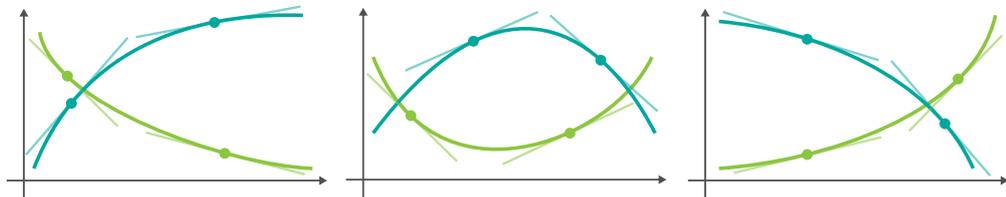


Abbildung Drei Beispiele für den Graphen einer strikt konvexen (hellgrün) bzw. strikt konkaven (türkis) Funktion. Die geraden Linien repräsentieren für jeweils zwei gewählte Punkte die Tangentialgeraden, deren Anstiege durch die monoton wachsende bzw. fallende Funktion f' beschrieben wird.

Theorem (Konvexität und zweite Ableitung) Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex bzw. konkav, wenn

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(x) \leq 0,$$

für alle $x \in (a, b)$ gilt.

Beweis Die Behauptung ergibt sich aus der Kombination des vorherigen Theorems sowie dem Theorem über Monotonie und erste Ableitungen, sofern dieses für f' anstelle von f ausgewertet wird. \square

Bemerkungen

1. Mithilfe der beiden Theoreme kann die Konvexität bzw. Konkavität einer Funktion durch das Studium ihrer ersten oder zweiten Ableitung relativ einfach bewiesen oder widerlegt werden.
2. *Achtung:* Es kann Punkte geben, in denen eine konvexe oder konkave Funktion f gar nicht differenzierbar ist.

Beispiel: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist konvex (Übungsaufgabe), aber im Ursprung nicht differenzierbar.

3. Im Beweis haben wir gezeigt, dass für konvexe Funktionen die Doppelungleichung

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

für alle $x_1 < x_2$ erfüllt ist. Dieses nützliche Resultat wird häufig verwendet und gilt nur für konvexe Funktionen (wie man mit überschaubarem Aufwand zeigen kann).

Beispiele

1. Die Exponentialfunktion ist strikt konvex und der Logarithmus ist strikt konkav (jeweils auf dem ganzen Definitionsbereich), denn es gilt

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0 \quad \text{bzw.} \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. alle $x > 0$.

2. Mit $f(x) = x^3$ gilt $f''(x) = 6x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir schließen, dass f konkav auf $(-\infty, 0)$, aber konvex auf $(0, \infty)$ ist. Insbesondere ist $x = 0$ ein *Wendepunkt*.

einige Resultate über Extremstellen

Lemma (notwendiges Kriterium für eine Extremstelle) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $x_* \in (a, b)$ ein Minimierer oder Maximierer von f . Dann gilt $f'(x_*) = 0$.

Beweis Sei x_* ein Minimierer von f , d.h. $f(x_*) \leq f(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Für jedes x mit $a < x < x_*$ bzw. $x_* < x < b$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \leq 0$$

und im Limes $x \nearrow x_*$ bzw. $x \searrow x_*$ erhalten wir $f'(x_*) \geq 0$ bzw. $f'(x_*) \leq 0$ nach dem Vergleichsprinzip für Grenzwerte. Insgesamt folgt die Behauptung und für Maximierer argumentieren wir analog.

Bemerkung* Dieses wichtige Resultat kann nicht ohne Anpassungen auf halboffene oder abgeschlossene Intervalle übertragen werden, denn dort kann das Minimum oder Maximum am Rand angenommen werden. Mit den Methoden aus dem Beweis können wir aber für Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Randaussagen ableiten:¹¹

1. Ist a ein Minimierer bzw. Maximierer von f , so gilt $f'(a) \geq 0$ bzw. $f'(a) \leq 0$.
2. Ist b ein Minimierer bzw. Maximierer von f , so gilt $f'(b) \leq 0$ bzw. $f'(b) \geq 0$.

Beispiel: Betrachten wir $f(x) = x^2$ auf den Intervall $[-2, -1]$, so ist $x_* = -2$ der Maximierer und $x_* = -1$ der Minimierer, wobei $f'(x_*) < 0$ in beiden Punkten gilt. Betrachten wir f jedoch auf dem Intervall $[+1, +2]$, so gilt $f'(x_*) > 0$ sowohl für den Minimierer $x_* = +1$ als auch für den Maximierer $x_* = +2$.

Merkregel: Extremstellen am Rand sind anders als Extremstellen in inneren Punkten.

Lemma (1. hinreichendes Kriterium für Extremstellen) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei x_* ein Punkt in (a, b) mit

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad a < x < x_* \quad \text{sowie} \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x_* < x < b$$

bzw.

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad a < x < x_* \quad \text{sowie} \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x_* < x < b.$$

Dann ist x_* ein Minimierer bzw. ein Maximierer von f , d.h. es gilt $f(x) \geq f(x_*)$ bzw. $f(x) \leq f(x_*)$ für alle $x \in (a, b)$.

¹¹Diese Aussagen können auch mit einfachen Skizzen plausibilisiert und verstanden werden.

Beweis Wir beweisen nur die erste Aussage, da die Argumente für die zweite analog sind. Das Theorem garantiert in Kombination mit der Voraussetzung, dass f monoton fallend auf dem Intervall (a, x_*) , aber monoton wachsend auf dem Intervall (x_*, b) ist (siehe das linke Bild). Aus der ersten Eigenschaft folgt $f(x) \geq f(\tilde{x})$ für alle x, \tilde{x} mit $a < x < \tilde{x} < x_*$ und nach Grenzübergang $\tilde{x} \nearrow x_*$ erhalten wir $f(x) \geq f(x_*)$ aus der ersten äquivalenten Charakterisierung von Stetigkeit, da f stetig in x_* ist. Analog zeigen wir $f(x) \geq f(x_*)$ für alle $x_* < x < b$, d.h. x_* ist wirklich ein Minimierer von f und $f(x_*)$ das Minimum. \square

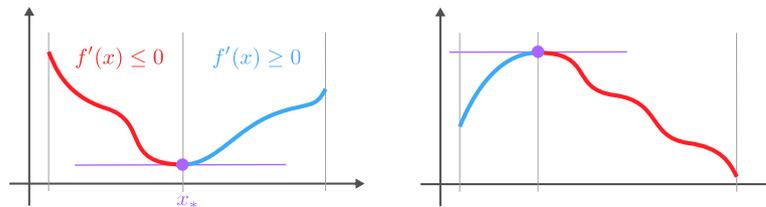


Abbildung Beispiele für die beiden Fälle im ersten hinreichenden Kriterium für Extremstellen. Beachte, dass $f'(x_*) = 0$ gilt, d.h. die entsprechende Tangente (lila Gerade) verläuft horizontal.

Bemerkungen

1. Im Theorem ist x_* immer eine globale Extremstelle von f auf dem Intervall (a, b) . Lokale Extremstellen diskutieren wir weiter unten.
2. Wenn die jeweiligen Abschätzungen von $f'(x)$ für jedes x sogar strikt sind, so ist x_* sogar die einzige Extremstelle und $f(x_*)$ ein striktes Extremum. Andernfalls kann es passieren, dass das Minimum bzw. das Maximum nicht in einem inneren Punkt, sondern auf einem Intervall realisiert wird.

Anwendung Um den schulmathematischen Lehrsatz

Unter allen Rechtecken mit gegebenem Umfang $2\mu > 0$ besitzt das Quadrat den größten Flächeninhalt.

zu beweisen, betrachten wir die Funktion $f : (0, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x(\mu - x)$, wobei x die eine und $\mu - x$ die andere Kantenlänge des Rechtecks repräsentiert.¹² Die Formel $f'(x) = \mu - 2x$ impliziert

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < \frac{1}{2}\mu \quad \text{sowie} \quad f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad \frac{1}{2}\mu < x < \mu$$

und wir schließen mit dem Theorem, dass $f(x_*) = \frac{1}{4}\mu^2$ das Maximum von f ist. Aufgrund der strikten Ungleichungen für $f'(x)$ ist x_* sogar der einzige Maximierer.

Lemma (2. hinreichendes Kriterium für Extremstellen) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(x_*) \leq 0$$

für alle $x \in (a, b)$. Außerdem gelte $f'(x_*) = 0$ für ein $x_* \in (a, b)$. Dann ist x_* ein Minimierer bzw. Maximierer von f .

¹²Beachte, dass $f(x)$ den entsprechenden Flächeninhalt des Rechtecks quantifiziert, wohingegen der Umfang wegen $2x + 2(\mu - x) = 2\mu$ konstant ist.

Beweis Wir betrachten nur den ersten Fall, denn die Argumente im zweiten sind analog. Da f'' nicht-positiv ist, implizieren die Theoreme zur Charakterisierung von Konvexität durch Ableitungen, dass f konvex und f' monoton wachsend ist. Es gilt also

$$f'(x) \leq f'(x_*) = 0 \quad \text{für} \quad a < x < x_*, \quad f'(x) \geq f'(x_*) = 0 \quad \text{für} \quad x_* < x < b$$

und die Behauptung folgt aus dem vorherigen Lemma. \square

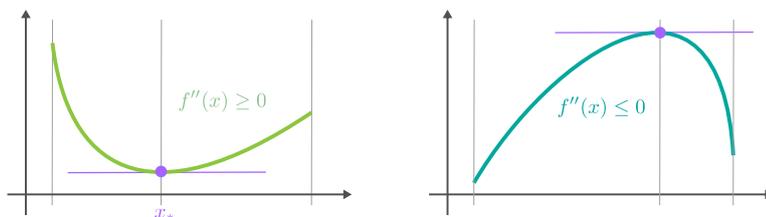


Abbildung Die beiden Fälle im zweiten hinreichenden Kriterium für Extremstellen, die jeweils auch als Spezialfall des ersten Kriteriums betrachtet werden können (siehe dazu auch den Beweis).

9.5 Satz von Taylor

Vorbemerkung Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass jede n -mal differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal immer durch Polynome vom Grad $k \leq n$ approximiert werden kann. Diese Erkenntnis ist eines der wichtigsten Resultate der gesamten Mathematik und besitzt zahlreiche Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Definition Für eine n -mal differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch

$$T_{f,n,x_*}(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k$$

das n -te Taylor-Polynom von f definiert, wobei $x_* \in I$ der Entwicklungspunkt ist.

Bemerkungen

1. T_{f,n,x_*} ist immer ein Polynom vom Grad n (in der Variablen $x \in \mathbb{R}$), wobei die Koeffizienten von den Ableitungen von f im Entwicklungspunkt abhängen. Insbesondere ist T_{f,n,x_*} immer auf ganz \mathbb{R} definiert.
2. Es gibt in der Literatur verschiedene alternative Notationen für die reelle Zahl $T_{f,n,x_*}(x)$, etwa

$$T_{f,n}(x; x_*) \quad \text{oder} \quad T_n[f, x_*](x).$$

Sofern wir nur mit einer Funktion f arbeiten, wird manchmal auch nur $T_{n,x_*}(x)$ oder $T_n(x; x_*)$ geschrieben, d.h. die Abhängigkeit von f wird nicht explizit angegeben.

Bemerkung: Egal welche Notation verwendet wird, wenn f und n festgelegt sind, gibt es zu jeder Wahl von x_* ein entsprechendes Taylor-Polynom.

3. Mit dem n -ten Taylor-Polynom existiert für alle $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ auch das m -te Taylor-Polynom und es gilt

$$\begin{aligned} T_{f,0,x_*}(x) &= f(x_*), \\ T_{f,1,x_*}(x) &= f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*), \\ T_{f,2,x_*}(x) &= f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*)(x - x_*)^2, \\ T_{f,3,x_*}(x) &= f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*)(x - x_*)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_*)(x - x_*)^3, \\ &\dots \\ T_{f,n,x_*}(x) &= \dots \end{aligned}$$

Beim Übergang $m-1 \rightsquigarrow m$ entsteht also das m -te Taylor-Polynom T_{f,m,x_*} indem zu $T_{f,m-1,x_*}$ der monomiale Term $\alpha_m(x - x_*)^m$ addiert wird, wobei $\alpha_m = f^{(m)}(x_*)/(m)!$ der entsprechende Koeffizient ist.

Merkregel $T_{f,n,x_*}(x)$ ist immer ein Polynom vom Grad n in $x - x_*$ (und damit auch ein Polynom bzgl. der Variablen x), wobei es sich

für $n = 0$ um eine konstante, für $n = 1$ um eine affine/lineare,
für $n = 2$ um eine quadratische, für $n = 3$ um eine kubische

Funktion handelt. Die Koeffizienten zu den verschiedenen Potenzen von $x - x_*$ sind unabhängig von x , aber hängen — in vielleicht nicht-polynomieller Weise — von x_* ab.

Beispiel Für die Sinusfunktion berechnen wir

$$\begin{aligned} T_{\sin,0,x_*}(x) &= \sin(x_*), \\ T_{\sin,1,x_*}(x) &= \sin(x_*) + \cos(x_*)(x - x_*), \\ T_{\sin,2,x_*}(x) &= \sin(x_*) + \cos(x_*)(x - x_*) - \frac{1}{2} \sin(x_*)(x - x_*)^2, \\ T_{\sin,3,x_*}(x) &= \sin(x_*) + \cos(x_*)(x - x_*) - \frac{1}{2} \sin(x_*)(x - x_*)^2 - \frac{1}{6} \cos(x_*)(x - x_*)^3, \end{aligned}$$

wobei diese Formeln für jeden denkbaren Entwicklungspunkt $x_* \in \mathbb{R}$ gelten.¹³ Für die konkrete Wahl $x_* = 0$ erhalten wir

$$T_{\sin,0,0}(x) = 0, \quad T_{\sin,1,0}(x) = T_{\sin,2,0}(x) = x, \quad T_{\sin,3,0}(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$

wobei das erste und das zweite Taylor-Polynom wegen $\sin''(x_*) = 0$ identisch sind. Mit $x_* = \frac{1}{2}\pi$ gilt $\sin'(x_*) = \sin'''(x_*) = 0$, sodass das nullte und das erste sowie das dritte und das dritte Taylor-Polynom zusammenfallen und sich zu

$$T_{\sin,0,\pi/2}(x) = T_{\sin,1,\pi/2}(x) = 1, \quad T_{\sin,2,\pi/2}(x) = T_{\sin,3,\pi/2}(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi)^2$$

ergeben. Im Allgemeinen werden aber die Taylor-Polynome für verschiedene n und gleiches x_* nicht identisch sein.

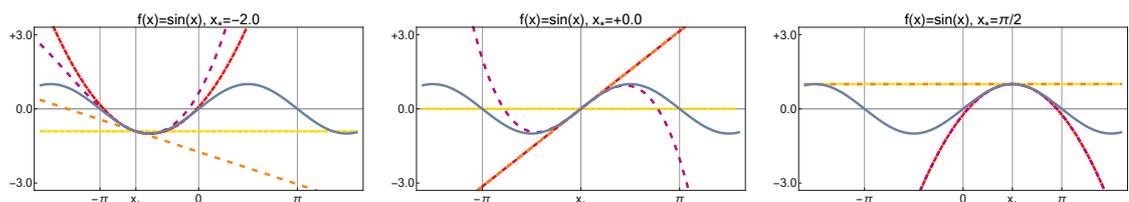


Abbildung Der Sinus (blau) und seine Taylor-Polynome nullten (gelb, konstant), ersten (orange, affin/linear), zweiten (rot, quadratisch) und dritten (lila, kubisch) Grades für drei verschiedene Wahlen des Entwicklungspunktes x_* .

¹³Wenn wir $f = \sin$ vereinbaren, können wir natürlich auch T_{f,k,x_*} statt T_{\sin,k,x_*} schreiben.

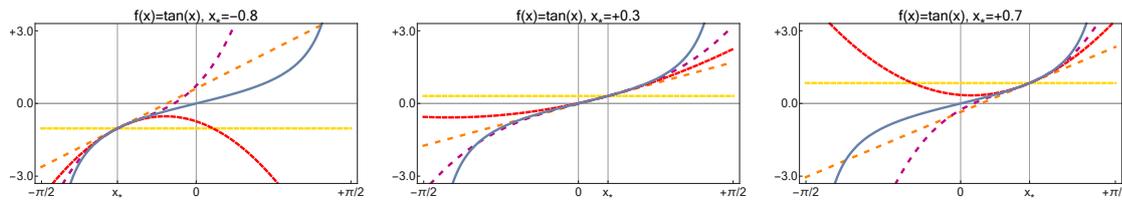


Abbildung Taylor-Polynome des Tangens in drei verschiedenen Entwicklungspunkten.

Lemma (Schmiegeeigenschaft von Taylor-Polynomen) Es gilt

$$T_{f,n,x_*}^{(j)}(x_*) = f^{(j)}(x_*)$$

für alle $j \in \{0, \dots, n\}$. Im Punkt x_* stimmen also die ersten n Ableitungen der Funktion f und des Polynoms T_{f,n,x_*} überein.

Beweis Sei j fixiert. Die Rechenregeln der Ableitung implizieren

$$\frac{d^j}{dx^j}(x - x_*)^k = 0 \quad \text{für } k < j, \quad \frac{d^j}{dx^j}(x - x_*)^k = j! \quad \text{für } k = j$$

sowie

$$\frac{d^j}{dx^j}(x - x_*)^k = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1)(x - x_*)^{k-j} = \frac{k!}{(k-j)!}(x - x_*)^{k-j}$$

für $k > j$. Insbesondere gilt

$$T_{f,n,x_*}^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} \frac{d^j}{dx^j}(x - x_*)^k = f^{(j)}(x_*) + \sum_{k=j+1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{(k-j)!} (x - x_*)^{k-j}$$

für alle $x \in I$, da jeder Beitrag für $k < j$ verschwindet. Die Auswertung mit $x = x_*$ liefert die Behauptung, da dann zusätzlich die Beiträge für $k > j$ verschwinden. \square

Interpretation Das Lemma impliziert, dass sich die Graphen der Taylor-Polynome mit wachsendem Grad immer besser an den Graphen von f “anschmiegen“, da immer mehr Ableitungen im Punkt x_* übereinstimmen.¹⁴ Zum Beispiel approximiert für $x \approx x_*$ das quadratische Polynom $T_{f,2,x_*}$ die Funktion f besser als die lineare Funktion $T_{f,1,x_*}$ und $T_{f,3,x_*}$ liefert eine noch bessere Approximation, da dann auch noch kubische Terme berücksichtigt werden. Siehe auch den Satz von Taylor weiter unten.

Eigenschaften des Restgliedes

Definition Die Funktion $R_{f,n,x_*} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$R_{f,n,x_*}(x) := f(x) - T_{f,n,x_*}(x)$$

wird das n -te Taylor-Restglied von f im Entwicklungspunkt x_* genannt.

¹⁴Das *Anschmiegen* ist zunächst ein eher heuristisches, aber nützliches Konzept, das analog auch in der *Differentialgeometrie* von Kurven und Flächen verwendet wird.

Lemma (Darstellungen des Restgliedes) Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei $n+1$ -mal differenzierbar und $x_*, x_\# \in I$ seien beliebig fixiert mit $x_* \neq x_\#$. Dann gilt

$$R_{f,n,x_*}(x_\#) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_\# - x_*)^{n+1} \quad (\text{Formel von Lagrange})$$

für mindestens ein ξ , dass zwischen x_* und $x_\#$ liegt, sowie

$$R_{f,n,x_*}(x_\#) = \frac{f^{(n+1)}((1-\theta)x_* + \theta x_\#)}{n!} (1-\theta)^n (x_\# - x_*)^{n+1} \quad (\text{Formel von Cauchy})$$

für mindestens ein $\theta \in [0, 1]$.

Beweis Wir betrachten nur den Fall $x_* < x_\#$; für $x_* > x_\#$ reicht es, in den folgenden Betrachtungen das Intervall $[x_*, x_\#]$ durch $[x_\#, x_*]$ zu ersetzen.

Teil 1: Durch die Formeln

$$\varrho(x) := (x_\# - x)^{n+1}, \quad \sigma(x) := f(x) - f(x_\#) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x_\# - x)^k$$

werden zwei Funktionen $\varrho, \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und die Rechenregeln der Ableitung implizieren, dass diese auf dem Intervall I differenzierbar sind mit

$$\varrho'(x) = -(n+1)(x_\# - x)^n$$

und

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= \frac{d}{dx} \sigma(x) = f'(x) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{dx}{dx} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right) (x_\# - x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{d}{dx} (x_\# - x)^k \\ &= f'(x) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (x_\# - x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (x_\# - x)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (x_\# - x)^n, \end{aligned}$$

wobei sich im letzten Schritt der Umformung die meisten Beiträge von den beiden Summen gegenseitig aufheben und nur der angegebene stehen bleibt. Aufgrund des Cauchyschen Mittelwertsatzes — ausgewertet für die Einschränkungen von ϱ und σ auf $[x_*, x_\#]$ — existiert ein ξ mit $x_* < \xi < x_\#$, sodass

$$\frac{\sigma(x_\#) - \sigma(x_*)}{\varrho(x_\#) - \varrho(x_*)} = \frac{\sigma'(\xi)}{\varrho'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt, wobei sowohl $\varrho'(\xi)$ als auch $\varrho(x_\#) - \varrho(x_*)$ nicht verschwindet. Wegen

$$\varrho(x_*) = (x_\# - x_*)^{n+1}, \quad \varrho(x_\#) = 0,$$

und

$$\sigma(x_*) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x_\# - x_*)^k = -R_{f,n,x_*}(x_\#), \quad \sigma(x_\#) = 0$$

erhalten wir die erste Behauptung nach Einsetzen.

Teil 2: Das Lemma über die Variante des Mittelwertsatzes von Lagrange impliziert, dass

$$\sigma(x_\#) - \sigma(x_*) = \sigma'(x_* + \theta(x_\# - x_*)) (x_\# - x_*)$$

für ein $\theta \in [0, 1]$ gilt, und dies impliziert die zweite Behauptung. \square

Bemerkungen

1. In aller Regel können wir ξ und θ nicht explizit angeben, aber es ist von großer theoretischer Bedeutung, dass die Größen existieren. Beachte auch, dass ξ und θ sich ändern, wenn x_* oder $x_{\#}$ variiert werden.
2. Wir werden im nächsten Kapitel auch die *Integraldarstellung* des Restgliedes kennenlernen. Die entsprechende Herleitung wird auch etwas anschaulicher als der hier angegebene, recht technische Beweis mithilfe des Mittelwertsatzes sein.
3. Die Definition von T_{f,n,x_*} benötigt nur die ersten n Ableitungen von f , aber die beiden Restglied-Formeln gelten nur dann, wenn zusätzlich noch die $n+1$ -te Ableitung von f existiert. Ist f nur n -mal differenzierbar, so kann nur das schwächere Ergebnis

$$R_{f,n,x_*}(x_{\#}) \xrightarrow{x_{\#} \rightarrow x_*} 0$$

gezeigt werden (siehe [For, Kapitel 22] für die Details). Beachte, dass diese Konvergenzaussage auch aus dem Lemma folgt, denn im Limes $x_{\#} \rightarrow x_*$ muss auch $\xi \rightarrow x_*$ gelten.

4. *Bemerkung zur Notation*: Da $x_{\#}$ einen beliebigen Punkt in I beschreibt, können wir im Lemma auch x statt $x_{\#}$ schreiben (und in der Literatur werden die beiden Formeln oftmals in dieser Fassung angegeben). Dann müssen wir aber im Beweis x durch ein anderes, nicht belegtes Symbol ersetzen (etwa t oder y), denn dort benötigen wir neben zwei beliebig fixierten Punkten in I (bei uns sind das x_* und $x_{\#}$) noch eine weitere, freie Variable (bei uns x).

Korollar (Taylor-Polynome eines Polynoms) Sei p ein Polynom vom Grad m und sei $n \geq m$. Dann gilt

$$T_{p,n,x_*}(x) = p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. in jedem Entwicklungspunkt x_* ist p sein eigenes Taylor-Polynom.

Beweis Nach dem Lemma der Restglied-Darstellung existiert zu jedem x ein ξ mit

$$R_{p,n,x_*}(x) = \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_*)^{n+1} = 0,$$

wobei wir benutzt haben, dass $p^{(n+1)}$ die Nullfunktion ist. Insbesondere ist auch R_{p,n,x_*} die Nullfunktion und dies liefert die Behauptung. \square

Bemerkungen

1. Für $n < m$ gilt im Allgemeinen $T_{p,n,x_*}(x) \neq p(x)$ (siehe die Beispiele). Für $n > m$ gilt jedoch $T_{p,n,x_*}(x) = T_{p,m,x_*}(x)$, weil die Ableitungen p^{m+1} , p^{m+2} jeweils die Nullfunktion sind.
2. Offensichtlich gilt auch die umgekehrte Aussage: Ist f eine Funktion und x_* ein Entwicklungspunkt, sodass $T_{f,n,x_*}(x) = f(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $m \leq n$.

3. *Alternativer Beweis**: Wir können das Korollar auch direkt beweisen, indem wir den Ausdruck für $T_{p,n,x_*}(x)$ als Funktion in der Variablen x_* betrachten, wobei x dann die Rolle eines festgehaltenen, reellen Parameters spielt.¹⁵ Mit direkten Rechnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_*} \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k &= \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k+1)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k - \sum_{k=1}^n \frac{p^{(k)}(x_*)}{(k-1)!} (x - x_*)^{k-1} \\ &= \frac{p^{(n+1)}(x_*)}{n!} (x - x_*)^n = 0 \end{aligned}$$

und schließen, dass $T_{p,n,x_*}(x)$ für $n \geq m$ gar nicht von der Wahl von x_* abhängt. Mit $p(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ergibt sich dann

$$T_{p,n,x_*}(x) = T_{p,n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^m \alpha_k x^k,$$

wobei wir benutzt haben, dass $p^{(k)}(0) = \alpha_k k!$ für $k \leq m$ und $p^{(k)}(0) = 0$ für $k > m$ gilt.

Beispiel Für das quadratische Polynom $p(x) = x^2 - x + 1$ berechnen wir

$$p'(x) = 2x - 1, \quad p''(x) = 2, \quad p'''(x) = 0, \quad p''''(x) = 0$$

und nach Einsetzen in die entsprechende Definition erhalten wir

$$T_{p,1,x_*}(x) = p(x_*) + p'(x_*)(x - x_*) = (x_*^2 - x_* + 1) + (2x_* - 1)(x - x_*),$$

als erstes Taylor-Polynom von p , wobei es sich um ein Polynom vom Grad 1 handelt (bzgl. der Variablen x), dessen Koeffizienten in nichtlinearer Weise vom Entwicklungspunkt x_* abhängen. Das zweite Taylor-Polynom hat Grad 2 und ist durch

$$\begin{aligned} T_{p,2,x_*}(x) &= p(x_*) + p'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2} p''(x_*)(x - x_*)^2 \\ &= (x_*^2 - x_* + 1) + (2x_* - 1)(x - x_*) + \frac{1}{2} 2(x - x_*)^2 \end{aligned}$$

gegeben, aber nach Auflösen der Klammern heben sich alle Beiträge von x_* gegenseitig auf und wir erhalten

$$T_{p,2,x_*}(x) = p(x)$$

für alle x und alle x_* . Das ist gerade die abstrakte Aussage des Korollars.

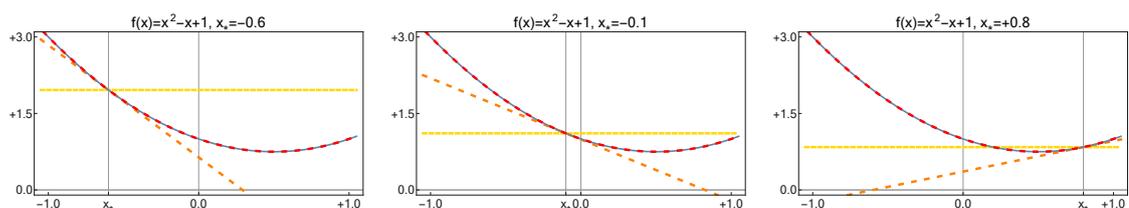


Abbildung Die Polynome aus dem eben gerechneten Beispiel. Da $f = p$ eine quadratische Funktion ist, fällt sie in jedem Entwicklungspunkt mit ihrem zweiten Taylor-Polynom zusammen.

¹⁵Bei genauer Betrachtung der Funktion σ aus dem Beweis des Lemma wird klar, dass wir bei der Herleitung der Restglied-Formeln eine ganz ähnliche Idee verwendet haben.

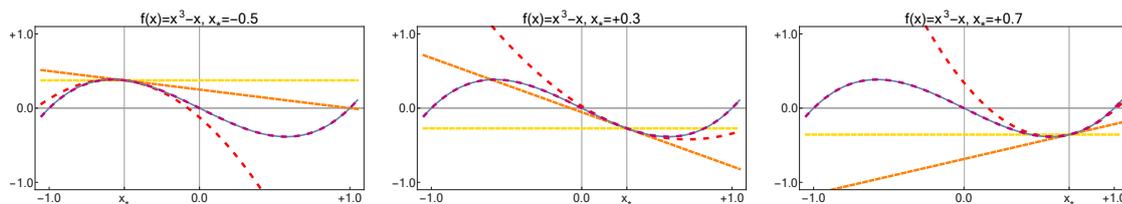


Abbildung Die kubische Funktion $f(x) = p(x) = x^3 - x$ stimmt für jedes x_* mit ihrem dritten Taylor-Polynom überein. Das nullte, erste und zweite Taylor-Polynom liefert jeweils nur eine lokale Approximation in der Nähe von x_* und die entsprechenden Koeffizienten hängen von x_* ab.

Theorem (Satz von Taylor, Approximation durch Taylor-Polynome) Wenn $f^{(n+1)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und stetig ist, dann existiert für jedes kompakte Intervall $K \subset I$ eine Konstante $C_{n,K}$, sodass die Abschätzung

$$|f(x) - T_{f,n,x_*}(x)| \leq C_{n,K} |x - x_*|^{n+1}$$

für alle $x, x_* \in K$ erfüllt ist.

Beweis Nach Voraussetzung ist

$$C_{n,K} := \frac{\max \{ |f^{(n+1)}(\xi)| : \xi \in K \}}{(n+1)!}$$

als reelle Zahl wohldefiniert (da die stetige Funktion $|f^{(n+1)}|$ auf K ihr Maximum annimmt). Seien nun $x, x_* \in K$ beliebig fixiert. Dann gilt

$$|f(x) - T_{f,n,x_*}(x)| = |R_{f,n,x_*}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_*)^{n+1} \right|$$

für ein geeignetes ξ , das zwischen x und x_* und damit auch in K liegt. Die Behauptung folgt unmittelbar. \square

Diskussion

1. Der Satz von Taylor ist eines der bedeutendsten Theoreme der Analysis und besitzt mannigfaltige Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik. Er besagt, dass jede Funktion, die hinreichend oft differenzierbar ist, in der Nähe eines jeden Entwicklungspunktes x_* durch Polynome approximiert werden kann, wobei die Approximationsgüte mit wachsendem Polynomgrad immer besser wird.
2. Ist f zum Beispiel viermal stetig differenzierbar, so können wir den Satz von Taylor mit $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ auswerten¹⁶ und erhalten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f(x) - T_{f,0,x_*}(x)| &\leq C_{0,K} |x - x_*|^1, \\ |f(x) - T_{f,1,x_*}(x)| &\leq C_{1,K} |x - x_*|^2, \\ |f(x) - T_{f,2,x_*}(x)| &\leq C_{2,K} |x - x_*|^3, \\ |f(x) - T_{f,3,x_*}(x)| &\leq C_{3,K} |x - x_*|^4, \end{aligned}$$

¹⁶Der Fall $n = 0$ ist ziemlich entartet, aber trotzdem nicht ganz unwichtig.

für alle $x, x_* \in K$, wobei wir uns K als ein kompaktes Intervall der Bauart $K = [x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$ mit festem $\varepsilon > 0$ vorstellen können. Wenn nun $x - x_*$ hinreichend klein ist, so gilt

$$C_{0,K} |x - x_*|^1 \ll C_{1,K} |x - x_*|^2 \ll C_{2,K} |x - x_*|^3 \ll C_{3,K} |x - x_*|^4,$$

wobei das Zeichen \ll die informelle Bedeutung „*sehr viel kleiner*“ besitzt.¹⁷

- Die Taylor-Approximation liefert nur *lokal* — d.h. für $x \approx x_*$ — gute Resultate, denn wenn $|x - x_*|$ nicht hinreichend klein ist, so kann der Fehlerterm $|R_{f,k,x_*}(x)|$ größer als $|T_{f,k,x_*}(x)|$ sein. Die Sinusfunktion ist zum Beispiel beschränkt, aber jedes ihrer Taylor-Polynome ist unbeschränkt und kann daher für $|x - x_*| \approx \infty$ keine gute Näherung liefern.

über Taylor-Reihen*

Problem Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, so können wir formal die entsprechende Taylor-Reihe

$$T_{f,\infty,x_*}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k$$

einführen, wobei sich in natürlicher Weise die folgenden Fragen stellen:

- Ist T_{f,∞,x_*} im Sinne einer reellen Potenzreihe wohldefiniert und was ist der entsprechende Konvergenzradius?
- Für welche x gilt $f(x) = T_{f,\infty,x_*}(x)$?

Wir können hier die Theorie der Taylor-Reihen nicht vollständig entwickeln, wollen aber festhalten, dass die Antworten für verschiedene Funktionen f unterschiedlich ausfallen.¹⁸

Gegenbeispiel Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, wobei $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt (siehe die Hausaufgaben). Dies impliziert

$$T_{f,\infty,0}(x) = 0 \neq f(x)$$

für alle $x > 0$, d.h. diese Funktion kann im Entwicklungspunkt $x_* = 0$ nicht als Taylor-Reihe geschrieben werden.

¹⁷Wir wollen hier keine rigorose Definition geben, verweisen aber auf die Landau-Symbole weiter unten.

¹⁸Ausblick: In der Vorlesung *Funktionentheorie* wird sich herausstellen, dass f genau dann in einer Umgebung von x_* durch ihre Taylor-Reihe dargestellt werden kann, wenn f zu einer komplexen Funktion fortgesetzt werden kann, die in x_* komplex differenzierbar ist. Ist diese Eigenschaft in jedem $x_* \in (a, b)$ erfüllt, so nennt man f eine analytische Funktion.

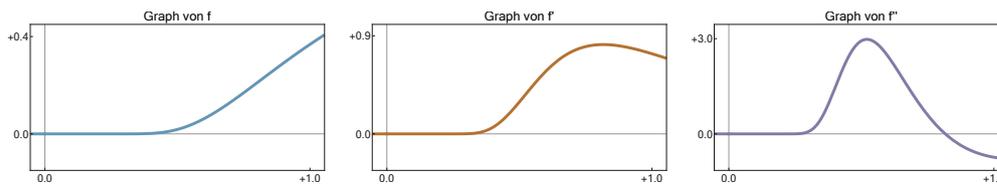


Abbildung Die Funktion aus dem Gegenbeispiel sowie ihre ersten beiden Ableitungen. Im Punkt $x_* = 0$ nehmen alle Ableitungen den Wert 0 an, obwohl die Funktion für $x > 0$ echt positiv ist.

Taylor und Potenzreihen Man kann zeigen, dass eine reelle Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_*)^k = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_*) + \alpha_2(x - x_*)^2 + \alpha_3(x - x_*)^3 + \dots$$

mit Konvergenzradius $R > 0$ und Entwicklungspunkt x_* in jedem Punkt ihres offenen Konvergenzintervalls — d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_*| < R$ — differenzierbar ist, wobei die Ableitung durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha_1 + 2\alpha_2(x - x_*) + 3\alpha_3(x - x_*)^2 + 4\alpha_4(x - x_*)^3 + 5\alpha_5(x - x_*)^4 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k(x - x_*)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\alpha_{k+1}(x - x_*)^k. \end{aligned}$$

gegeben ist und auch mittels gliedweiser Differentiation von f berechnet werden kann.¹⁹ Insbesondere ist auch f' eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und muss daher selbst wieder differenzierbar sein. Induktiv folgt nun, dass f in jedem Punkt x mit $|x - x_*| < R$ unendlich viele Ableitungen besitzt, wobei jede via

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m!} \alpha_k (x - x_*)^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \alpha_{k+m} (x - x_*)^k$$

durch eine andere Potenzreihe beschrieben wird, die aber alle denselben Konvergenzradius aufweisen.²⁰ Mit $x = x_*$ ergibt sich

$$f^{(m)}(x_*) = m! \alpha_m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0,$$

wobei wir dies auch als

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

schreiben können. Oder anders gesagt: Jede Potenzreihe ist ihre eigene Taylor-Reihe.

¹⁹Wir könnten diese Aussage mit unserem Wissenstand rigoros begründen, aber die Details sind etwas technisch und erfordern sorgfältige Abschätzungen von Reihenresten. Wir werden den Beweis in der Vorlesung *Funktionentheorie* nachholen, wenn wir Potenzreihen genauer studieren.

²⁰Die beiden unendlichen Summenformeln für die m -te Ableitung unterscheiden sich nur durch eine Indexverschiebung. Es gilt zum Beispiel

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot \alpha_2 + 3 \cdot 2 \cdot \alpha_3 \cdot (x - x_*) + 4 \cdot 3 \cdot \alpha_4 \cdot (x - x_*)^2 + 5 \cdot 4 \cdot \alpha_5 \cdot (x - x_*)^3 + \dots,$$

d.h. die Formel für $f^{(m)}$ ergibt sich durch m -fache gliedweise Differentiation von f .

9.6 Landau-Symbole und Taylor-Approximation*

Vorbemerkung Wir diskutieren in diesem Abschnitt eine etwas andere Sicht auf den Satz von Taylor, die vor allem in den Anwendungswissenschaften verwendet wird und nützliche Einsichten in das lokale Verhalten von Funktionen liefert. Wir folgen einer informellen Darstellung und setzen zum Beispiel immer stillschweigend voraus, dass die betrachtete Funktion f hinreichend viele Ableitungen besitzt und das $|x - x_*|$ immer hinreichend klein ist. Alle Argumente und Resultate können — unter gewissen, zu spezifizierenden Annahmen — auch rigoros formuliert und bewiesen werden, aber das ist im Moment nicht unser Ziel.

Landau-Symbole Seien ε eine positive reelle Zahl, $r > 0$ ein positiver Exponent und $\delta(\varepsilon)$ eine reelle Größe, die von ε abhängt. Wir schreiben

1. $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^r)$, falls $|\delta(\varepsilon)|$ *schneller als* ε^r gegen 0 konvergiert, d.h. sofern $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\delta(\varepsilon)|/\varepsilon^r = 0$ gilt²¹,
2. $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon^r)$, falls $|\delta(\varepsilon)|$ *nicht langsamer als* ε^r gegen 0 konvergiert, d.h. sofern Konstanten $\varepsilon_* > 0$ und $C_* > 0$ existieren, sodass $|\delta(\varepsilon)|/\varepsilon^r \leq C_*$ für alle ε mit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ gilt.

Beispiele

1. Für jede Konstante C gilt

$$C \varepsilon^2 = O(\varepsilon^2) = o(\varepsilon), \quad C \varepsilon^3 = O(\varepsilon^3) = o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon)$$

und ganz allgemein $C \varepsilon^s = O(\varepsilon^s) = o(\varepsilon^r)$ für alle $s > r > 0$.

2. Es gilt $\exp(-1/\varepsilon) = o(\varepsilon^r)$ sowie $\varepsilon^r = o(1/\ln(1/\varepsilon))$ für jedes $r > 0$.

Bemerkung Die Landau-Symbole o und O sind extrem nützlich, um kleine Fehlerterme zu bezeichnen, aber es gelten einige auf den ersten Blick seltsam anmutende Regeln, wie zum Beispiel

$$5 \cdot O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2), \quad O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3) = O(\varepsilon^2), \quad O(\varepsilon^2) \cdot O(\varepsilon^3) = O(\varepsilon^5).$$

Der Grund ist, dass $o(\varepsilon^r)$ bzw. $O(\varepsilon^r)$ keine konkrete reelle Zahl bezeichnet, sondern eher eine Menge von Zahlen.

Taylor-Approximation Mit den Landau-Symbolen können wir die Aussage des Satzes von Taylor in sehr kompakter und intuitiver Form notieren. Zum Beispiel beschreibt die Formel

$$f(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + O(|x - x_*|^2)$$

bzw.

$$f(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*)(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3),$$

dass f in der Nähe von x_* durch ihr erstes bzw. zweites Taylor-Polynom approximiert werden kann, wobei die Fehlerterme von zweiter bzw. dritter Ordnung in $\varepsilon = |x - x_*|$ sind. Das Monom $\alpha_k (x - x_*)^k$ mit $\alpha_k = f^{(k)}(x_*)/k!$ wird auch Term der Ordnung k genannt.

²¹Statt $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^r)$ wird manchmal auch $\delta(\varepsilon) \ll \varepsilon^r$ geschrieben. In diesem Sinne gilt $\varepsilon^3 \ll \varepsilon^2 \ll \varepsilon$.

Nullstellen der ersten Ableitung Im Fall $f'(x_*) = 0$ verschwindet der erste Ordnungsterm in den Taylor-Polynomen und für eine lokale Beschreibung von f ist es wichtig, ob die zweite Ableitung in x_* ebenfalls verschwindet oder nicht. Im Fall von $f''(x_*) \neq 0$ dominiert der zweite Ordnungsterm alle Terme höherer Ordnung und wir können das Verhalten von f in der Nähe von x_* vollständig durch das quadratische Taylor-Polynom 2. Ordnung charakterisieren. Andernfalls müssen wir jedoch höhere Ableitungen zu Rate ziehen.

Standardfall Mit $f''(x_*) \neq 0$ ergibt sich

$$f(x) = f(x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*) (x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3) \approx f(x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*) (x - x_*)^2$$

und wir erhalten die aus der Schule bekannten Aussagen:

- (-) x_* ist strikter lokaler Minimierer für $f''(x_*) > 0$,
- (-) x_* ist strikter lokaler Maximierer für $f''(x_*) < 0$.

Entartungsfall Für $f''(x_*) = 0$ müssen wir untersuchen, welcher der höheren Ordnungsterme dominant ist, und weitere Fallunterscheidungen treffen:

- (-) Aus $f'''(x_*) \neq 0$ folgt

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{1}{6} f'''(x_*) (x - x_*)^3$$

und wir können mit Sicherheit sagen, dass x_* weder ein lokaler Minimierer noch ein lokaler Maximierer ist.

- (-) Gilt $f'''(x_*) = 0$ mit $f''''(x_*) \neq 0$, so erhalten wir

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{1}{24} f''''(x_*) (x - x_*)^4$$

und das Vorzeichen der vierten Ableitung von f in x_* entscheidet darüber, ob x_* ein lokaler Minimierer oder Maximierer ist.

- (-) Die nächste Bedingung in dieser Liste ist $f'''(x_*) = f''''(x_*) = 0 \neq f'''''(x_*)$, unter der das fünfte Taylor-Monom alle Terme höherer Ordnung dominiert. Auch in diesem Fall ist x_* weder Minimierer noch Maximierer.

Nullstellen der zweiten Ableitung Auch in der Nähe eines Punktes x_* mit $f''(x_*) = 0$ können wir das Verhalten von f mithilfe von Taylor-Approximationen verstehen.

Standardfall Mit $f'''(x_*) \neq 0$ erhalten wir

$$f(x) \approx f(x_*) + f'(x_*) (x - x_*) + \frac{1}{6} f'''(x_*) (x - x_*)^3$$

und damit die folgende Klassifikation (siehe auch das Bild):

- (-) x_* ist konvex-konkaver Wendepunkt für $f'''(x_*) < 0$,
- (-) ist konkav-konvexer Wendepunkt für $f'''(x_*) > 0$.

Entartungsfall Für $f'''(x_*) = 0$ hängt das Verhalten von f wieder von den Vorzeichen der höheren Ordnungsterme ab.

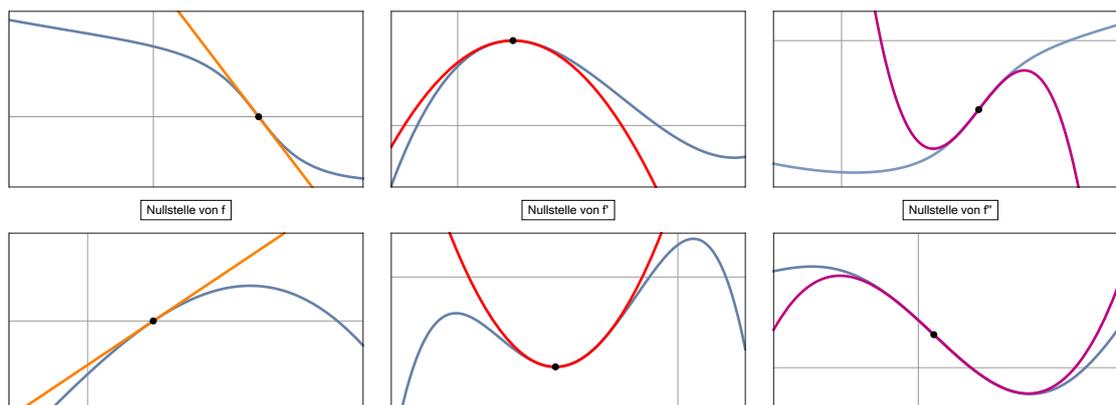


Abbildung In der Nähe eines Punktes x_* mit $f^{(k)}(x_*) = 0$ ist das Verhalten der Funktion f (blauer Graph) durch ihr $k+1$ -tes Taylor-Polynom $T_{f, k+1, x_*}$ festgelegt, sofern $f^{(k+1)}(x_*)$ negativ (obere Reihe) oder positiv (untere Reihe) ist. Die Standardfälle sind für $k = 0$ (links, Nullstellen), $k = 1$ (Mitte, Extremstellen) und $k = 2$ (rechts, Wendepunkte) dargestellt, wobei die grauen Linien die Koordinatenachsen repräsentieren und der Punkt $(x_*, f(x_*))$ jeweils schwarz hervorgehoben ist. Im Fall $f^{(k+1)}(x_*) = 0$ ist $T_{f, k+1, x_*}$ jedoch entartet und es müssen zusätzlich höhere Ableitungen von f in x_* ausgewertet werden.

anderer Blick auf die Regel von de l'Hospital Der Satz von Taylor impliziert auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2}f''(x_*)(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3)}{g(x_*) + g'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2}g''(x_*)(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3)},$$

wobei für $f(x_*) \neq 0$ und $g(x_*) \neq 0$ die Terme nullter Ordnung dominieren und

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_*) + O(|x - x_*|)}{g(x_*) + O(|x - x_*|)} \approx \frac{f(x_*)}{g(x_*)}$$

für $x \approx x_*$ implizieren. Im Fall von $f(x_*) = 0 = g(x_*)$ müssen wir jedoch die höheren Ordnungsterme berücksichtigen. Unter der Zusatzannahme $f'(x_*) \neq 0$ und $g'(x_*) \neq 0$ dominieren die Terme erster Ordnung und es gilt mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_*)(x - x_*) + O(|x - x_*|^2)}{g'(x_*)(x - x_*) + O(|x - x_*|^2)} = \frac{f'(x_*) + O(|x - x_*|)}{g'(x_*) + O(|x - x_*|)} \approx \frac{f'(x_*)}{g'(x_*)}$$

eine Variante der Regel von de l'Hospital. Wenn allerdings die zweiten Ordnungsterme alle anderen dominieren, d.h. wenn die Bedingungen

$$f(x_*) = f'(x_*) = 0 \neq f''(x_*), \quad g(x_*) = g'(x_*) = 0 \neq g''(x_*)$$

erfüllt sind, so erhalten wir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{2}f''(x_*)(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3)}{\frac{1}{2}g''(x_*)(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3)} = \frac{f''(x_*) + O(|x - x_*|)}{g''(x_*) + O(|x - x_*|)} \approx \frac{f''(x_*)}{g''(x_*)}$$

für $x \approx x_*$ und damit eine Formel, die der zweifachen Anwendung der Regel von de l'Hospital entspricht.

Kapitel 10

Integrierbarkeit

Vorlesungswoche 12

10.1 Definition und Eigenschaften des Integrals

Setting Wir betrachten in diesem Abschnitt ein kompaktes Intervall $J := [a, b]$ sowie beschränkte Funktionen $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere gilt immer

$$-\infty < \inf(f) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \leq \sup(f) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} < +\infty,$$

aber f muss weder stetig noch differenzierbar sein.¹

Definition Eine Zerlegung von J ist eine endliche Menge $X = \{x_1, \dots, x_K\}$ von K Teilpunkten mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{K-1} < x_K = b,$$

wobei

$$|X| := \max\{x_1 - x_0, \dots, x_K - x_{K-1}\}$$

die Feinheit der Zerlegung genannt wird. Eine Zerlegung \tilde{X} wird Verfeinerung von X genannt, wenn $X \subseteq \tilde{X}$ gilt, d.h. wenn jeder Teilpunkt von X auch Teilpunkt von \tilde{X} ist.

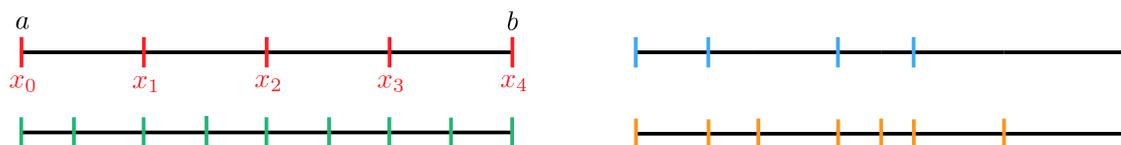


Abbildung Vier verschiedene Zerlegungen eines Intervalls (schwarz), wobei die rote und die grüne jeweils äquidistant sind. Die grüne ist außerdem eine Verfeinerung der roten und die orange ist die gemeinsame Verfeinerung der roten und der blauen.

¹In diesem Abschnitt bezeichnen wir Intervalle mit dem Buchstaben J und benutzen verschiedene Varianten des Buchstaben I für Integrale bzw. gewisse Hilfsgrößen.

Bemerkungen

1. Jede Zerlegung X zerlegt das Intervall J in K kompakte Teilintervalle $[x_{n-1}, x_n]$, wobei $|X|$ gerade die Länge des größten Teilintervalls ist. Diese Teilintervalle überlappen sich dabei nur in Randpunkten bzw. Teilpunkten von X .
2. Es gilt die Teleskopsummenformel $\sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1}) = x_K - x_0 = b - a$.
3. Wenn wir mit mehreren Zerlegungen arbeiten, schreiben wir oftmals auch

$$X_n = \{x_{n,1}, \dots, x_{n,K_n}\},$$

wobei der Index n in der Regel eine natürliche Zahl ist. Beachte, dass K_n , die Anzahl der Teilintervalle von X_n , von n abhängen darf und dass jeder Teilpunkt $x_{n,k}$ zwei unabhängige Indizes besitzt.

4. Besonders wichtig sind Zerlegungen, bei denen alle Teilintervalle gleich lang sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird durch

$$x_{n,k}^* := a + \frac{k(b-a)}{n} \quad \text{für alle } k \in \{0, 1, \dots, K_n^*\} \quad \text{mit } K_n^* := n$$

die entsprechende äquidistante Zerlegung $X_n^* = \{x_{n,1}^*, \dots, x_{n,n}^*\}$ definiert, bei der jedes Teilintervall die Länge $(b-a)/n$ besitzt.

5. Sind X_1 und X_2 zwei Zerlegungen des Intervalls $J = [a, b]$, so wird die Zerlegung $X_1 \cup X_2$ als gemeinsame Verfeinerung bezeichnet. Diese enthält alle Teilpunkte, die in X_1 und /oder X_2 enthalten sind (die Nummerierung ist aber anders).

Definition Die reellen Zahlen

$$\underline{S}(f, X) := \sum_{k=1}^K \inf (f|_{[x_{k-1}, x_k]}) (x_k - x_{k-1})$$

bzw.

$$\overline{S}(f, X) := \sum_{k=1}^K \sup (f|_{[x_{k-1}, x_k]}) (x_k - x_{k-1})$$

werden Untersumme bzw. Obersumme von f bzgl. X genannt und können beide in natürlicher Weise als Summe von Rechtecksflächen interpretiert werden (siehe die Bilder). Hierbei bezeichnet $f|_{[\alpha, \beta]}$ die Einschränkung von f auf das Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq J$.²

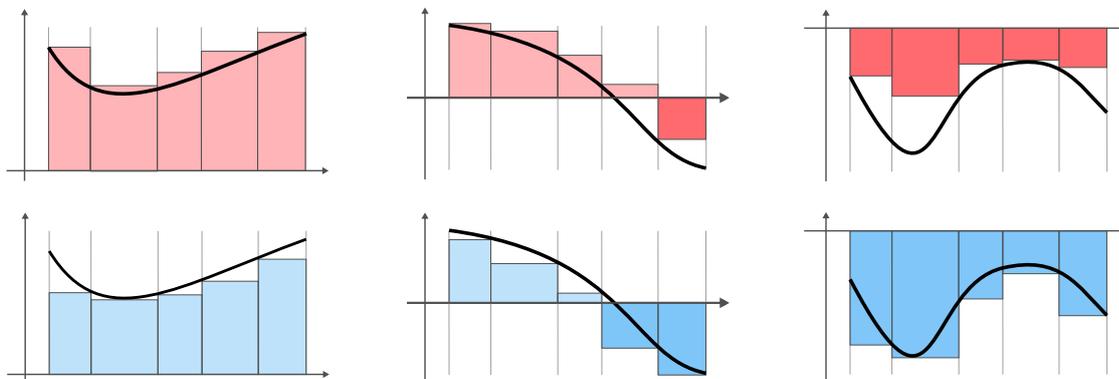


Abbildung Untersummen (blaue Flächen) und Obersummen (rote Flächen) für drei verschiedene Funktionen f (schwarz) auf einem Intervall, das jedesmal gleich zerlegt wird. Beachte, dass die hellen bzw. dunklen Flächen positive bzw. negative Beiträge liefern.

²Es gilt $\sup (f|_{[\alpha, \beta]}) := \sup \{f(x) : x \in [\alpha, \beta]\}$ sowie $\inf (f|_{[\alpha, \beta]}) := \inf \{f(x) : x \in [\alpha, \beta]\}$.

Beispiel Wir betrachten die lineare Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall J . Aus der Monotonie ergibt sich $\inf(f_{[x_{k-1}, x_k]}) = x_{k-1}$ sowie $\sup(f_{[x_{k-1}, x_k]}) = x_k$ für jede Zerlegung und wir erhalten

$$\underline{S}(f, X) = \sum_{k=1}^K x_{k-1} (x_k - x_{k-1}), \quad \bar{S}(f, X) = \sum_{k=1}^K x_k (x_k - x_{k-1}),$$

wobei diese Formeln auch als

$$\underline{S}(f, X) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1})^2, \quad \bar{S}(f, X) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1})^2$$

geschrieben werden können.³ Mit $X = X_n^*$ gilt $x_k - x_{k-1} = x_{n,k}^* - x_{n,k-1}^* = (b-a)/n$ sowie $K = K_n^* = n$ und wir erhalten

$$\underline{S}(f, X_n^*) = \frac{b^2 - a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad \bar{S}(f, X_n^*) = \frac{b^2 - a^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Insbesondere nehmen nun für große n sowohl die Unter- als auch die Obersumme ungefähr den Wert $(b^2 - a^2)/2$ an.

Definition Das Unter- bzw. das Oberintegral von f ist durch

$$\underline{I}(f) := \sup \{ \underline{S}(f, X) : X \text{ ist Zerlegung von } J \}$$

bzw.

$$\bar{I}(f) := \inf \{ \bar{S}(f, X) : X \text{ ist Zerlegung von } J \}$$

gegeben. Das Unterintegral ist also die kleinste Zahl, die größer als jede Untersumme ist, und die Obersumme ist die größte Zahl, die kleiner als jede Obersumme ist.⁴

Definition Wenn $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ gilt, so nennen wir die Funktion f integrierbar (auf dem Intervall $[a, b]$) und bezeichnen die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x) \, dx := I(f) := \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

als das bestimmte Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkungen

1. Das Integral quantifiziert den — vorzeichenbehafteten — Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse. Wir werden in den Übungen diskutieren, wie man mithilfe von Integralen auch geometrische Flächeninhalte (die immer positiv sind) berechnen kann.

³Am einfachsten sieht man die Gleichheit der entsprechenden Formeln, indem jeweils alle Klammern aufgelöst werden und $a = x_1$ sowie $b = x_K$ eingesetzt wird.

⁴Das Unterintegral ist nicht unbedingt die größte Untersumme, da das Supremum in der Definition kein Maximum sein muss (und im Allgemeinen auch nicht sein wird), aber als informelle Merkregel kann man diese Formulierung durchaus verwenden. Analog können wir uns das Oberintegral als die kleinste Obersumme vorstellen, obwohl auch das nicht ganz richtig ist.

2. Im Fall von $\underline{I}(f) < \overline{I}(f)$ ist f nicht integrierbar und der Fall $\underline{I}(f) > \overline{I}(f)$ kann, wie wir sehen werden, nicht eintreten.
3. Nicht jede Funktion ist integrierbar (siehe das Gegenbeispiel), aber wir werden zeigen, dass sowohl stetige als auch monotone Funktionen integrierbar sind. Es gibt aber auch integrierbare Funktionen, die weder monoton noch stetig sind.
4. In der bestimmten Integralformel ist x keine *freie*, sondern eine *gebundene* Variable, die man die Integrationsvariable nennt. Insbesondere gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(y) \, dy = \int_a^b f(t) \, dt,$$

d.h. das bestimmte Integral hängt nicht von x (aber indirekt von a und b) ab. Das wird bei den weiter unten diskutierten unbestimmten Integralen anders sein.

5. Ausblick: Die obere Definition beschreibt das sogenannte Riemann-Integral. Wir werden in der Vorlesung *Analysis 3* zusätzlich das Lebesgue-Integral kennenlernen, das auf einer deutlich anspruchsvolleren Theorie beruht, aber bessere mathematische Eigenschaften besitzt. Es wird sich jedoch herausstellen, dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist und dass beide Theorien denselben Wert für das bestimmte Integral liefern. Es gibt aber Funktionen, die zwar Lebesgue-, aber nicht Riemann-integrierbar sind.⁵

Gegenbeispiel Für die Dirichlet-Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ergibt sich $\inf(f|_{[x_{k-1}, x_k]}) = 0$ und $\sup(f|_{[x_{k-1}, x_k]}) = 1$ für *alle* Zerlegungen X , da jedes Intervall positiver Länge unendlich viele rationale und gleichzeitig unendlich viele irrationale Zahlen enthält.⁶ Dies impliziert

$$\underline{S}(f, X) = \sum_{k=1}^K 0(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad \overline{S}(f, X) = \sum_{k=1}^K 1(x_k - x_{k-1}) = x_K - x_0 = 1$$

und damit $\underline{I}(f) = 0 < 1 = \overline{I}(f)$, d.h. f ist nicht (Riemann-)integrierbar.⁷

Kriterien für Integrierbarkeit und Approximationsformeln

Hinweis Wir formulieren und beweisen nun wichtige Resultate über Unter- und Obersummen bzw. -integrale. Die Formeln und Ungleichungen werden Ihnen wahrscheinlich sehr kompliziert und abstrakt vorkommen, aber anhand einiger Skizzen kann man sich immer klar machen, dass und warum diese gelten. Malen Sie also viele Bilder!

⁵In diesem Sinne ist das Lebesgue-Integral eine echte Verallgemeinerung des Riemann-Integrals. Es gibt allerdings auch Funktionen, die noch nicht einmal Lebesgue-integrierbar sind.

⁶Diese Aussage ergibt sich zum Beispiel aus der Dezimaldarstellung reeller Zahlen.

⁷Die Funktion f ist aber im Lebesgueschen Sinne integrierbar mit $\int_0^1 f(x) \, dx = 0$.

Lemma (Vergleichseigenschaften für Unter- und Obersummen) Es gilt

$$\underline{S}(f, X_1) \leq \bar{S}(f, X_2),$$

für zwei beliebige Zerlegungen X_1, X_2 , d.h. keine Untersumme kann größer als eine Obersumme sein. Weiterhin gilt

$$\underline{S}(f, X) \leq \underline{S}(f, \tilde{X}) \leq \bar{S}(f, \tilde{X}) \leq \bar{S}(f, X),$$

sofern \tilde{X} eine Verfeinerung von X ist, d.h. durch Verfeinerung einer Zerlegung kann die Untersumme nur größer, die Obersumme jedoch nur kleiner werden.

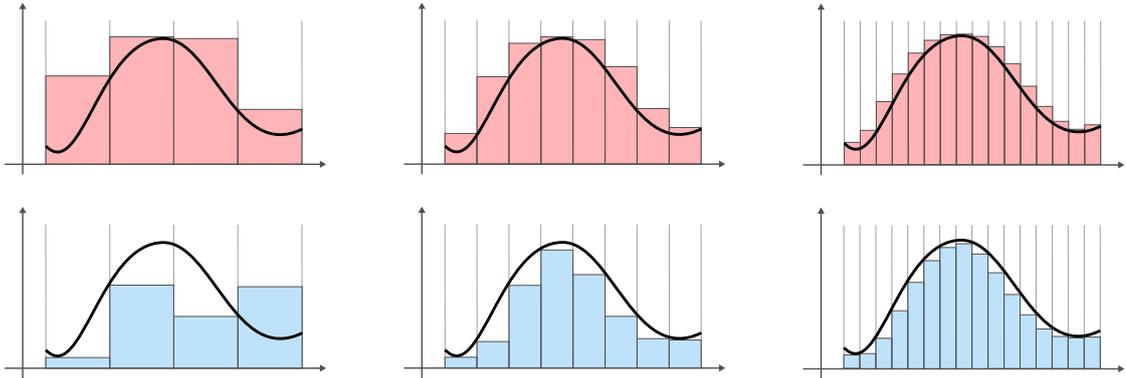


Abbildung Untersummen (blau) und Obersummen (rot) für eine Funktion und drei verschiedene Zerlegungen, wobei die 2. eine Verfeinerung der 1. und die 3. eine Verfeinerung der 1. und der 2. ist. Beim Übergang $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ nimmt die Untersumme zu, wohingegen die Obersumme kleiner wird. Sehen Sie, warum das so sein muss?

Beweis Teil 1: Wir beginnen mit der zweiten Behauptung und nehmen zunächst an, dass \tilde{X} genau einen Teilpunkt mehr als X enthält. Dann gilt $\tilde{K} = K + 1$ und es existiert genau ein Index $l \in \{1, \dots, K\}$ mit

$$x_k = \tilde{x}_k \quad \text{für } k \leq l - 1, \quad x_{l-1} = \tilde{x}_{l-1} < \tilde{x}_l < \tilde{x}_{l+1} = x_l, \quad x_k = \tilde{x}_{k+1} \quad \text{für } k \geq l,$$

d.h. das Intervall $[x_{l-1}, x_l]$ ist die Vereinigung von $[\tilde{x}_{l-1}, \tilde{x}_l]$ und $[\tilde{x}_l, \tilde{x}_{l+1}]$. Wir setzen

$$c_l := \sup(f|_{[x_{l-1}, x_l]}), \quad \tilde{c}_l := \sup(f|_{[\tilde{x}_{l-1}, \tilde{x}_l]}), \quad \tilde{c}_{l+1} := \sup(f|_{[\tilde{x}_l, \tilde{x}_{l+1}]})$$

und weil das Supremum von f auf einem größeren Intervall nicht kleiner als das Supremum auf einem kleineren Intervall sein kann, müssen die Ungleichungen $c_l \geq \tilde{c}_l$ und $c_l \geq \tilde{c}_{l+1}$ gelten. Damit erhalten wir

$$\bar{S}(f, X) - \bar{S}(f, \tilde{X}) = (c_l - \tilde{c}_l)(\tilde{x}_l - \tilde{x}_{l-1}) + (c_l - \tilde{c}_{l+1})(\tilde{x}_{l+1} - \tilde{x}_l) \geq 0$$

und mit analogen Abschätzungen leiten wir $\underline{S}(f, X) - \underline{S}(f, \tilde{X}) \leq 0$ her. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass sich bei Hinzunahme eines Teilpunktes zu X die Unter- bzw. die Obersumme nur erhöhen bzw. verringern kann. Die Behauptung folgt durch Iteration dieses Arguments.

Teil 2: Ist \tilde{X} die gemeinsame Verfeinerung von X_1 und X_2 , so liefert der erste Teil die drei Abschätzungen

$$\underline{S}(f, X_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{X}), \quad \underline{S}(f, \tilde{X}) \leq \bar{S}(f, \tilde{X}), \quad \bar{S}(f, \tilde{X}) \leq \bar{S}(f, X_2),$$

aus denen sich dann die erste Behauptung ergibt. □

Lemma (Approximation des Unter- und des Oberintegrals) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung X , sodass

$$\underline{I}(f) - \varepsilon \leq \underline{S}(f, X) \leq \overline{S}(f, X) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon$$

gilt.

Beweis Aufgrund der Approximationseigenschaft des Infimums und des Supremums können wir Zerlegungen X_1 und X_2 mit

$$\underline{I}(f) - \varepsilon \leq \underline{S}(f, X_1), \quad \overline{S}(f, X_2) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon$$

wählen. Für die gemeinsame Verfeinerung $X = X_1 \cup X_2$ liefert das vorherige Lemma

$$\underline{S}(f, X_1) \leq \underline{S}(f, X) \leq \overline{S}(f, X) \leq \overline{S}(f, X_2),$$

wobei die mittlere Ungleichung auch unmittelbar aus der obigen Definition folgt. \square

Korollar (fundamentale Ungleichungen) Es gilt

$$\inf(f)(b-a) \leq \underline{S}(f, X) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}(f, X) \leq \sup(f)(b-a)$$

und damit auch

$$0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \overline{S}(f, X) - \underline{S}(f, X)$$

für jede Zerlegung X .

Beweis Das vorherige Lemma impliziert $\underline{I}(f) - \varepsilon \leq \overline{I}(f) + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und ein einfaches Widerspruchsargument zeigt, dass daher $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$ gelten sein. Die obigen Definitionen implizieren außerdem

$$\inf(f)(b-a) \leq \underline{S}(f, X) \leq \underline{I}(f), \quad \overline{I}(f) \leq \overline{S}(f, X) \leq \sup(f)(b-a),$$

wobei wir wie schon weiter oben benutzt haben, dass $\inf(f) \leq \inf(f|_{[x_{k-1}, x_k]})$ sowie $\sup(f|_{[x_{k-1}, x_k]}) \leq \sup(f)$ für jedes $k \in \{1, \dots, K\}$ gelten muss. Insgesamt ergibt sich die Behauptung. \square

Lemma (erste äquivalente Charakterisierung von Integrierbarkeit) Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\overline{S}(f, X_n) - \underline{S}(f, X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für mindestens eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von Zerlegungen gilt, d.h. wenn der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme beliebig klein sein kann.

Beweis *Hinrichtung*: Sei f integrierbar und sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen. Das Approximationslemma von oben liefert für jedes n eine Zerlegung X_n mit

$$\underline{I}(f) - \varepsilon_n \leq \underline{S}(f, X_n) \leq \overline{S}(f, X_n) \leq \overline{I}(f) + \varepsilon_n$$

und wegen $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ gilt dann

$$0 \leq \overline{S}(f, X_n) - \underline{S}(f, X_n) \leq 2\varepsilon_n,$$

wobei die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Rückrichtung: Für die gegebene Folge von Zerlegungen folgt

$$0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \overline{S}(f, X_n) - \underline{S}(f, X_n)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus dem Korollar über die fundamentalen Ungleichungen und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert die Integrierbarkeit von f .

Theorem (zwei Klassen integrierbarer Funktionen) Ist f monoton oder stetig, so ist f auch integrierbar.

Beweis *Teil 1*: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass f monoton wachsend ist, denn die Argumente für fallende Funktionen sind analog. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die entsprechende äquidistante Zerlegung X_n^* (siehe oben) und berechnen⁸

$$\underline{S}(f, X_n^*) = \sum_{k=1}^n f(x_{n,k}^*) (x_{n,k}^* - x_{n,k-1}^*) = \frac{b-a}{n} (f(a) + f(x_{n,1}^*) + \dots + f(x_{n,n-1}^*))$$

sowie

$$\overline{S}(f, X_n^*) = \sum_{k=1}^n f(x_{n,k}^*) (x_{n,k}^* - x_{n,k-1}^*) = \frac{b-a}{n} (f(x_{n,1}^*) + \dots + f(x_{n,n-1}^*) + f(b)),$$

wobei wir $x_{n,0}^* = a$ und $x_{n,n}^* = b$ benutzt haben. Insbesondere gilt

$$\overline{S}(f, X_n^*) - \underline{S}(f, X_n^*) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

und die Behauptung folgt mit $X_n = X_n^*$ aus der ersten äquivalenten Charakterisierung.

Teil 2: Da jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig ist (das haben wir schon gezeigt), existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{N}$, sodass die Implikation

$$|\tilde{x} - x| \leq 1/m_n \implies |f(\tilde{x}) - f(x)| \leq 1/n$$

für alle $x, \tilde{x} \in [a, b]$ gilt. Da stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall ihr Minimum und Maximum annehmen, können sich das Infimum und das Supremum von f auf jedem Teilintervall $[x_{m_n, k-1}^*, x_{m_n, k}^*]$ höchstens um den Wert $1/n$ unterscheiden. Da außerdem die Länge jedes Teilintervalls $1/m_n$ ist, erhalten wir

$$\overline{S}(f, X_{m_n}^*) - \underline{S}(f, X_{m_n}^*) \leq \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{n} (x_{m_n, k}^* - x_{m_n, k-1}^*) = \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wobei wir auch die Teleskopsummenformel benutzt haben. Die Integrierbarkeit von f folgt nun mit $X_n = X_{m_n}^*$ aus der ersten äquivalenten Charakterisierung. \square

⁸Die Monotonie von f garantiert $f(x_{n, k-1}^*) \leq f(x) \leq f(x_{n, k}^*)$ für alle x aus dem k -ten Teilintervall von X_n^* und damit $\inf(f|_{[x_{n, k-1}^*, x_{n, k}^*]}) = f(x_{n, k-1}^*)$ sowie $\sup(f|_{[x_{n, k-1}^*, x_{n, k}^*]}) = f(x_{n, k}^*)$.

Bemerkung Mit wenig mehr Aufwand können wir zeigen, dass Funktionen, die nur stückweise monoton oder nur stückweise stetig sind, auch integrierbar sind.

Lemma (technisches Hilfsresultat) Die Abschätzungen

$$0 \leq \underline{S}(f, X_1 \cup X_2) - \underline{S}(f, X_2) \leq 2 \sup(|f|) |X_2| K_1$$

sowie

$$0 \leq \overline{S}(f, X_2) - \overline{S}(f, X_1 \cup X_2) \leq 2 \sup(|f|) |X_2| K_1$$

sind für beliebige Zerlegungen X_1 und X_2 erfüllt, wobei K_1 die Anzahl der Teilpunkte von X_1 ist.⁹

Beweis Wir beweisen nur die Doppelungleichung für die Untersummen und setzen $X_3 := X_1 \cup X_2$. Für jedes Teilintervall $J_{2,l} := [x_{2,l-1}, x_{2,l}]$ von X_2 gibt es die folgenden zwei Möglichkeiten: Fall 1: Wenn $J_{2,l}$ keinen Teilpunkt von X_1 enthält, so ist $J_{2,l}$ auch Teilintervall von X_3 und liefert zu $\underline{S}(f, X_2)$ denselben Beitrag wie zu $\underline{S}(f, X_3)$. Fall 2: Enthält $J_{2,l}$ jedoch einen oder mehrere Teilpunkte aus X_1 , so wird es von diesen in mehrere Teilintervalle zu X_3 zerlegt (im Bild zerfällt zum Beispiel das blaue Intervall in drei grüne). Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass der Beitrag von $J_{2,l}$ zu $\underline{S}(f, X_2)$ zum einen kleiner ist als die Summe der Beiträge, die alle Intervalle $J_{3,m} \subseteq J_{2,l}$ zu $\underline{S}(f, X_3)$ liefern, aber das zum anderen beide Werte sich höchstens um den Wert $2 \sup(|f|)(x_{2,l} - x_{2,l-1})$ unterscheiden, wobei beide Aussagen sich aus der Doppelabschätzung

$$0 \leq \inf(f|_{J_{3,m}}) - \inf(f|_{J_{2,l}}) \leq 2 \sup|f|$$

ergeben. Finales Argument: Weil der zweite Fall höchstens K_1 mal eintreten kann und da $(x_{2,l} - x_{2,l-1}) \leq |X_2|$ gilt, ergibt sich insgesamt die Behauptung. \square

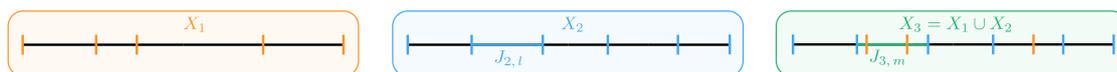


Abbildung Illustration des Hilfsresultats, das im Beweis der zweiten äquivalenten Charakterisierung verwendet wird.

Theorem (zweite äquivalente Charakterisierung von Integrierbarkeit) Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$0 \leq \overline{S}(f, X) - \underline{S}(f, X) < \varepsilon$$

für jede Zerlegung X mit $|X| < \delta$ gilt.

Beweis Hinrichtung: Sei f integrierbar und sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Nach der ersten äquivalenten Charakterisierung wählen wir eine Zerlegung X_1 mit

$$\overline{S}(f, X_1) - \underline{S}(f, X_1) < \frac{1}{2} \varepsilon,$$

⁹Es gilt $\sup(|f|) = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ sowie $\sup(|f|) \leq \max\{+\sup(f), -\inf(f)\}$.

und unter Verwendung von K_1 (die Anzahl der Teilintervalle von X_1) definieren wir

$$\delta := \frac{\varepsilon}{8 \sup(|f|) K_1}.$$

Sei nun X_2 eine beliebige Zerlegung mit $|X_2| < \delta$ und sei $X_3 := X_1 \cup X_2$ die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt

$$\overline{S}(f, X_3) - \underline{S}(f, X_3) \leq \overline{S}(f, X_1) - \underline{S}(f, X_1) < \frac{1}{2} \varepsilon$$

nach den Vergleichseigenschaften von Unter- bzw. Obersummen und das Hilfsresultat liefert

$$0 \leq \overline{S}(f, X_2) - \underline{S}(f, X_2) \leq \overline{S}(f, X_3) - \underline{S}(f, X_3) + 4 \sup(|f|) |X_2| K_1,$$

wobei die Wahl von δ die Abschätzung

$$4 \sup(|f|) |X_2| K_1 < 4 \sup(|f|) \delta K_1 = \frac{1}{2} \varepsilon$$

und damit

$$0 \leq \overline{S}(f, X_2) - \underline{S}(f, X_2) < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

garantiert. Insgesamt haben wir gezeigt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der gewünschten Eigenschaft gibt (wobei X_2 die Rolle von X übernommen hat).

Rückrichtung: Es gelte das ε - δ -Kriterium und $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine positive Nullfolge. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir δ_n passend zu ε_n sowie ein $m_n \in \mathbb{N}$ mit $1/m_n < \delta_n$. Für die äquidistante Zerlegung $X_{m_n}^*$ gilt dann

$$0 \leq \overline{S}(f, X_{m_n}^*) - \underline{S}(f, X_{m_n}^*) < \varepsilon_n.$$

Die Integrierbarkeit von f folgt nun mit $X_n = X_{m_n}^*$ und wegen $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n$ aus der ersten äquivalenten Charakterisierung. \square

Bemerkungen

1. Die erste bzw. zweite äquivalente Charakterisierung wird auch das *Riemann-* bzw. das *Cauchy-Kriterium der Integrierbarkeit* genannt.
2. Die erste Charakterisierung eignet sich besonders gut, um die Integrierbarkeit einer Funktion nachzuweisen, denn wir müssen nur eine geeignete Folge von Zerlegungen finden (siehe den Beweis der Integrierbarkeit monotoner bzw. stetiger Funktionen). Der Vorteil der zweiten ist, dass aus der Integrierbarkeit Aussagen über sehr viele Folgen von Zerlegungen abgeleitet werden können (siehe dazu das folgende Resultat).

Korollar (Approximative Berechnung von Integralen, Version 1) Ist f integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, X_n)$$

für jede Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0$ gilt.

Beweis Sei f integrierbar und sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegebene Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0$. Außerdem seien $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert und $\delta > 0$ entsprechend der zweiten äquivalenten Charakterisierung gewählt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|X_n| < \delta$ und damit

$$0 \leq \overline{S}(f, X_n) - \underline{S}(f, X_n) < \varepsilon$$

für alle $n > N$ erfüllt ist. Da außerdem

$$\underline{S}(f, X_n) \leq I(f) \leq \overline{S}(f, X_n)$$

gilt (siehe das Korollar über die fundamentalen Ungleichungen), erhalten wir

$$0 \leq I(f) - \underline{S}(f, X_n) < \varepsilon, \quad 0 \leq \overline{S}(f, X_n) - I(f) < \varepsilon$$

für alle $n > N$. Da ε beliebig war, haben wir insgesamt die beiden gewünschten Konvergenzaussagen etabliert. \square

Beispiele

1. Für jede konstante Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a),$$

denn für jede Zerlegung X ergibt sich $\underline{S}(f, X) = c(b - a) = \overline{S}(f, X)$ direkt aus der Teleskopsummenformel.

2. Es gilt

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

denn für die lineare Funktion $f(x) = x$ hatten wir oben bereits explizite Formeln für die Unter- und Obersumme bzgl. der äquidistanten Zerlegung X_n^* hergeleitet, in denen wir den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführen können.

allgemeine Riemann-Summen Integrale können nicht nur mit Unter- und Obersummen, sondern auch mit der allgemeineren Formel

$$S(f, X, \Xi) = \sum_{n=1}^N f(\xi_n)(x_{n-1} - x_n),$$

berechnet werden, wobei $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ als die Menge der Stützstellen bezeichnet wird und via

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, K\}$$

mit der Zerlegung X kompatibel sein muss. Insbesondere gilt die Abschätzung $\inf(f|_{[x_{k-1}, x_k]}) \leq f(\xi_k) \leq \sup(f|_{[x_{k-1}, x_k]})$ auf jedem Teilintervall von X .

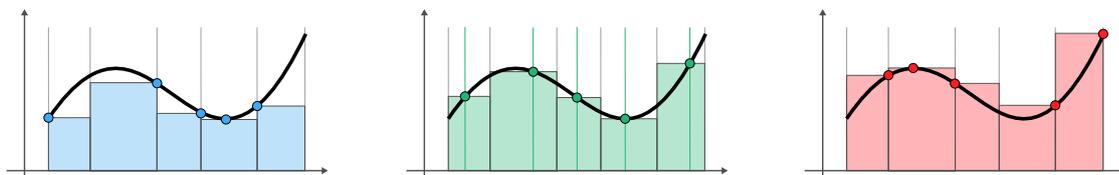


Abbildung Bei einer allgemeinen Riemann-Summe (grüne Fläche) zur Zerlegung X wird die Funktion f auf dem k -ten Teilintervall in einer beliebig gewählten Stützstelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ausgewertet (die grünen Punkte entsprechen $(\xi_k, f(\xi_k))$). Die Unter- bzw. Obersumme entsteht bei einer stetigen Funktion, wenn ξ_k als Minimierer bzw. Maximierer von $f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ gewählt wird (siehe die blauen bzw. roten Punkte).

Korollar (Approximative Berechnung von Integralen, Version 2) Ist f integrierbar, so folgt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, X_n, \Xi_n)$$

aus $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0$, sofern Ξ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompatibel zu X_n ist.

Beweis Nach Konstruktion gilt stets $\underline{S}(f, X_n) \leq S(f, X_n, \Xi_n) \leq \overline{S}(f, X_n)$ und die Konvergenzaussage ergibt sich direkt in Kombination mit der ersten Version des Korollars aus dem Sandwich-Prinzip. \square

Merkregel Das Integral von $f : [a, b]$ ist der Grenzwert einer Folge endlicher Summen. Dabei kann es sich um Untersummen, Obersummen oder Riemann-Summen handeln, aber zugrunde liegt stets eine Folge von immer feiner werdenden Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$.

Eigenschaften bestimmter Integrale

Lemma (Linearität) Wenn f und g integrierbar sind, dann gilt

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

für alle reellen Zahlen λ, μ .

Beweis Mit der ersten äquivalenten Charakterisierung zeigen wir zunächst die Integrierbarkeit von $\lambda f, \mu g$ und anschließend von $\lambda f + \mu g$. Die Formel folgt dann aus

$$S(\lambda f + \mu g, X_n, \Xi_n) = \lambda S(f, X_n, \Xi_n) + \mu S(g, X_n, \Xi_n)$$

nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$, siehe das zweite Korollar zur approximativen Berechnung von Integralen. \square

Achtung Es gibt keine Formeln für das Integral des Produktes, des Quotienten oder der Komposition zweier Funktionen.¹⁰ Die Integration ist daher in der Praxis viel schwieriger als die Differentiation.¹¹

Lemma (Gebietsadditivität) Ist f integrierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_\xi^b f(x) dx$$

für jedes $\xi \in (a, b)$.

¹⁰Man kann zum Beispiel zeigen, dass das Produkt zweier integrierbarer Funktionen f und g auch integrierbar ist, aber $\int_a^b f(x)g(x) dx$ kann nicht aus $\int_a^b f(x) dx$ und $\int_a^b g(x) dx$ berechnet werden.

¹¹Diese Aussage gilt nicht für approximative Berechnungen auf dem Computer. Aus numerischer Sicht ist Integration deutlich robuster als Differentiation.

Beweis Für festes ξ wählen wir eine Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen des Intervalls $[a, \xi]$ mit $|Y_n| \rightarrow 0$ sowie eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen des Intervalls $[\xi, b]$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ und bemerken, dass $X_n := Y_n \cup Z_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $|X_n| = \max\{|Y_n|, |Z_n|\}$ ist. Nach Konstruktion gilt

$$\left(\overline{S}(f, X_n) - \underline{S}(f, X_n)\right) = \left(\overline{S}(f, Y_n) - \underline{S}(f, Y_n)\right) + \left(\overline{S}(f, Z_n) - \underline{S}(f, Z_n)\right),$$

wobei jede der drei geklammerten Differenzen nichtnegativ ist. Die Integrierbarkeit von f auf jedem Teilintervall sowie die gewünschte Formel ergeben sich nun im Limes $n \rightarrow \infty$, siehe das Lemma zur ersten äquivalenten Charakterisierung sowie das erste Korollar zur Approximation von Integralen. \square

Notation Aufgrund der Gebietsadditivität haben sich auch die Konventionen

$$\int_{\xi}^{\xi} f(x) \, dx := 0, \quad \int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$$

bewährt. Insbesondere ändert sich das Vorzeichen des Integrals, wenn die Integrationsgrenzen vertauscht werden.

Lemma (Monotonie) Die Implikation

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \quad \implies \quad \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

gilt für alle integrierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis Übungsaufgabe. \square

Lemma (Standardabschätzungen) Die Ungleichungen

$$\inf(f)(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \sup(f)(b-a)$$

und

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq \sup(|f|)(b-a)$$

gelten für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis Teil 1: Wir zeigen zunächst, dass mit f auch $|f|$ integrierbar ist.¹² Dazu leiten wir die Ungleichung

$$\sup(|f|_L) - \inf(|f|_L) \leq \sup(f_L) - \inf(f_L)$$

¹²Per Definition gilt $|f|(x) = |f(x)|$.

für jedes Teilintervall $L \subseteq [a, b]$ her, indem wir die Fälle

$$\inf(f|_L) \leq \sup(f|_L) \leq 0, \quad \inf(f|_L) \leq 0 \leq \sup(f|_L), \quad 0 \leq \inf(f|_L) \leq \sup(f|_L)$$

einzelnen diskutieren, und folgern anschließend, dass

$$0 \leq \overline{S}(|f|, X) - \underline{S}(|f|, X) \leq \overline{S}(f, X) - \underline{S}(f, X)$$

für jede Zerlegung X gilt. Die Integrierbarkeit von $|f|$ ergibt sich nun mit der ersten äquivalenten Charakterisierung aus der Integrierbarkeit von f .

Teil 2: Weil für jedes $x \in [a, b]$ die Abschätzungen

$$\inf(f) \leq f(x) \leq \sup(f), \quad -f(x) \leq |f|(x), \quad +f(x) \leq |f|(x), \quad |f|(x) \leq \sup(|f|)$$

gelten, ergeben sich die Ungleichungen aus der Monotonie des Integrals.¹³ \square

10.2 Fundamentalsatz der Analysis

Vorbemerkung Wir beweisen nun, das Differenzieren und Integrieren in gewisser Weise zueinander inverse Operationen sind. Diese Erkenntnis ist ausgesprochen wichtig und wird oftmals auch Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung genannt.

Definition Eine Funktion $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ wird Stammfunktion von $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ genannt, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in J$ gilt.

Bemerkungen

1. In der Definition kann J ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall sein, wobei in Randpunkten von J die Ableitung von F im Sinne einseitiger Grenzwerte von Differenzenquotienten zu verstehen ist.
2. Sind F und \tilde{F} zwei Stammfunktionen von f , so unterscheiden sie sich nur um eine Konstante. Die Differenzfunktion $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G(x) := \tilde{F}(x) - F(x)$ muss nämlich konstant sein, da ihre Ableitung wegen $G'(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in J$ verschwindet. Siehe dazu das Theorem über Monotonie und erste Ableitungen.
3. Ist umgekehrt F eine Stammfunktion von f und C eine beliebige Konstante, so ist auch \tilde{F} mit $\tilde{F}(x) := F(x) + C$ eine Stammfunktion von f .
4. Stammfunktionen sind sehr eng mit dem Konzept eines *unbestimmten Integrals* verbunden. Siehe dazu die Diskussion weiter unten.

Theorem (Fundamentalsatz der Analysis) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so werden durch

$$F_1(\xi) := + \int_a^\xi f(x) dx, \quad F_2(\xi) := - \int_\xi^b f(x) dx$$

¹³Beachte, dass die Ungleichung $|c| \leq b$ für $c \in \mathbb{R}$ und $d \geq 0$ genau dann gilt, wenn $-c \leq d$ und $+c \leq d$ erfüllt sind.

zwei Stammfunktionen $F_1, F_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von f definiert. Außerdem gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

für jede Stammfunktion F von f .

Beweis *Teil 1a*: Wir fixieren $\xi \in [a, b)$ beliebig und betrachten zunächst positive reelle Zahlen $h > 0$, die aber so klein sind, dass $\xi + h$ in (a, b) liegt. Die Gebietsadditivität bestimmter Integrale impliziert

$$F_1(\xi + h) - F_1(\xi) = \int_a^{\xi+h} f(x) dx - \int_a^{\xi} f(x) dx = \int_{\xi}^{\xi+h} f(x) dx$$

und außerdem gilt

$$\int_{\xi}^{\xi+h} f(\xi) dx = f(\xi) h,$$

da wir hier eine konstante Funktion integrieren (siehe das Beispiel weiter oben). In Kombination mit den Standardabschätzungen erhalten wir

$$\left| \frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi) - f(\xi) h}{h} \right| = \frac{1}{h} \left| \int_{\xi}^{\xi+h} (f(x) - f(\xi)) dx \right| \leq \frac{1}{h} C(\xi, h) h = C(\xi, h)$$

mit

$$C(\xi, h) := \max \{ |f(x) - f(\xi)| : x \in [\xi, \xi + h] \} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

wobei diese Konvergenz mit einem einfachen Widerspruchsbeweis aus der Stetigkeit von f hergeleitet werden kann (Übungsaufgabe). Damit haben wir bewiesen, dass

$$\frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi)}{h} - f(\xi) = \frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi) - f(\xi) h}{h} \xrightarrow{h \searrow 0} 0$$

für jedes $\xi \in [a, b)$ erfüllt ist, und durch analoge Betrachtungen mit $h < 0$ zeigen wir

$$\frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi)}{h} - f(\xi) \xrightarrow{h \nearrow 0} 0$$

für jedes $\xi \in (a, b]$. Insgesamt schließen wir, dass F_1 in jedem Punkt $\xi \in [a, b]$ die Ableitung $F_1'(\xi) = f(\xi)$ besitzt, wobei dies in den Randpunkten $\xi = a$ und $\xi = b$ nur im Sinne einseitiger Ableitungen gilt.

Teil 1b: Die Gebietsadditivität für Integrale impliziert, dass

$$F_1(\xi) - F_2(\xi) = \int_a^b f(x) dx$$

für alle $\xi \in [a, b]$ gilt, wobei die rechte Seite nicht von ξ abhängt. Die Rechenregeln für Ableitungen garantieren, dass auch F_2 differenzierbar ist, wobei $F_1'(\xi) - F_2'(\xi) = 0$ und damit $F_2'(\xi) = F_1'(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in [a, b]$ gilt.

Teil 2: Sei F irgendeine Stammfunktion zu f . Aufgrund der obigen Bemerkungen existiert eine Konstante C , sodass $F(\xi) = F_1(\xi) + C$ für alle $\xi \in [a, b]$, und wir berechnen

$$F(b) - F(a) = (F_1(b) + C) - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a) = F_1(b) = \int_a^b f(x) dx,$$

wobei wir benutzt haben, dass $F_1(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$ gilt. \square

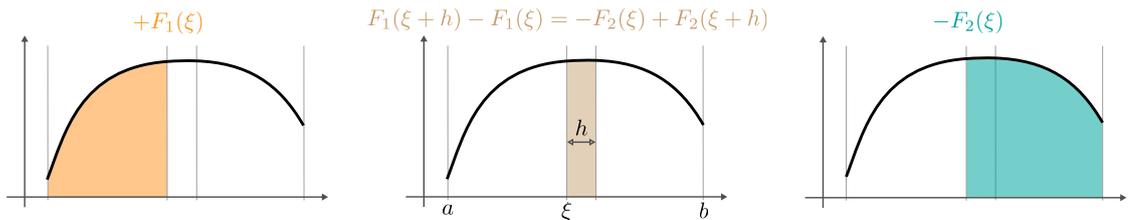


Abbildung Zur Bedeutung und zum Beweis des Fundamentalsatzes der Analysis (bzw. des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung).

Bemerkungen

1. Sind α und β zwei reelle Zahlen mit $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, so gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) =: [F(x)]_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

für jede Stammfunktion F von f , wobei wir auf der rechten Seite eine praktische und weitverbreitete Schreibweise eingeführt haben.

2. Die Formeln

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -f(\alpha), \quad \frac{d}{d\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = +f(\beta)$$

liefern eine andere, aber äquivalente Formulierung des Fundamentalsatzes.

3. Achtung: Die Integrationsvariable darf bei einem bestimmten Integral nicht in der unteren oder oberen Grenze vorkommen. Im Theorem können wir zum Beispiel

$$F_1(x) = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \text{oder} \quad F_1(x) = \int_a^x f(y) dy,$$

aber **niemals** $F_1(x) = \int_a^x f(x) dx$ schreiben, da dann x zwei nicht miteinander kompatible Bedeutungen besitzt.

4. Der Fundamentalsatz impliziert, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall eine Stammfunktion besitzt, wobei diese durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden kann. Die Frage, ob bzw. in welchem Sinne unstetige Funktionen eine Stammfunktion besitzen, können wir in dieser Vorlesung nicht diskutieren. Man kann aber zum Beispiel die Betragsfunktion als Stammfunktion der Signumsfunktion betrachten, obwohl die Betragsfunktion im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Integralberechnungen mit dem Fundamentalsatz Wenn eine Stammfunktion F zu f explizit bekannt ist, so können wir bestimmte Integrale von f relativ einfach berechnen. Zum Beispiel gilt

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{3} 1^3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} 0^3 + 0 \right) = \frac{4}{3}$$

und

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} = \left(-\cos(\pi/2) \right) - \left(-\cos(\pi/4) \right) = -1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Achtung Es gibt keinen Algorithmus, mit dem für gegebenes f eine „einfache“ Formel für die Stammfunktion F ermittelt werden kann. Wir werden noch spezielle Methoden diskutieren, mit denen dies für bestimmte Klassen von Funktionen f gelingt, aber es gibt auch viele wichtige Funktionen, für die Stammfunktionen nur durch Integralformeln dargestellt werden können. Ein Beispiel ist die *Gaußsche Fehlerfunktion*

$$\operatorname{erf}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-x^2) dx$$

als Stammfunktion der *Gaußschen Glockenfunktion* $\varrho(x) := 2 \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$. Natürlich gilt auch hier der Fundamentalsatz, aber die Formel $\int_{\alpha}^{\beta} \varrho(x) dx = \operatorname{erf}(\beta) - \operatorname{erf}(\alpha)$ erlaubt keine effektive Berechnung des bestimmten Integrals auf der linken Seite.¹⁴

unbestimmte Integrale Ist F eine Stammfunktion von f , so schreiben wir auch

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

und nennen die linke Seite in dieser Formel bzw. C das unbestimmte Integral von f bzw. die Integrationskonstante. Der Anhang enthält einige bekannte unbestimmte Integrale und in der Literatur oder im Internet finden Sie wesentlich umfangreichere Listen.

Achtung Das bestimmte Integral von f bzgl. eines Intervalles liefert eine reelle *Zahl* (die von der Wahl des Intervalles abhängt). Das unbestimmte Integral ist jedoch eine *Funktion*, die neben der freien Variablen (bei uns standardmäßig x) noch eine freie Konstante (meist C genannt) enthält.¹⁵ Zum Beispiel gilt

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

¹⁴Computer können heutzutage im Prinzip jedes bestimmte Integral numerisch berechnen, benutzen aber in aller Regel eine Approximation mit Riemann-Summen (oder verwandte Näherungsverfahren). Einige Programme, wie zum Beispiel WOLFRAM MATHEMATICA, verfügen über eine umfangreiche Datenbank bekannter Stammfunktionen und liefern für viele (aber eben nicht für alle) Funktionen f exakte Resultate.

¹⁵Die Notationen für Integrale sind historisch entstanden und daher nicht das Ergebnis didaktischer Überlegungen.

und

$$\int_0^b \exp(y) \, dy = e^b - 1, \quad \int \exp(y) \, dy = \exp(y) + C,$$

aber die Formeln $\int_a^b \cos(x) \, dx = \sin(x)$ und $\int \cos(y) \, dy = \sin(x) + C$ sind inkonsistent und haben keinen Sinn.

Korollar (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Die rechte Seite wird als Integralmittel von f bezeichnet.

Beweis Die Formel ist äquivalent zu

$$F_1'(\xi) = \frac{F_1(b) - F_1(a)}{b-a}$$

und die Behauptung folgt aus dem Mittelwertsatz von Lagrange, sofern dieser auf F_1 angewendet wird. \square

Theorem (partielle Integration für bestimmte Integrale) Es gilt

$$\int_a^b u'(x) v(x) \, dx = [u(x) v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x) v'(x) \, dx$$

sofern $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beide stetig differenzierbar sind.

Beweis Der Fundamentalsatz, die Produktregel und die Rechenregeln für Integrale implizieren

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b \left(\frac{d}{dx} (u(x)v(x)) \right) dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkung Mit *partieller Integration* können oftmals bestimmte Integrale explizit berechnet werden. Die Kunst besteht darin, für einen gegebenen Integranden f zwei Funktionen u und v zu finden, sodass zum einen $f(x) = u'(x)v(x)$ gilt und zum anderen eine Stammfunktion zu $g(x) = u(x)v'(x)$ bekannt ist.

Beispiele

1. Für $f(x) = x \ln(x)$ können wir $u(x) = \frac{1}{2} x^2$ und $v(x) = \ln(x)$ wählen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b x \ln(x) dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{1}{4} b^2 (2 \ln(b) - 1) - \frac{1}{4} a^2 (2 \ln(a) - 1), \end{aligned}$$

wobei wir im ersten bzw. zweiten Schritt das Theorem bzw. den Fundamentalsatz angewendet haben. Das dritte Gleichheitszeichen ergibt sich durch direkte Termumstellungen.

2. Es gilt

$$\int_0^1 x \exp(x) dx = [x \exp(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \exp(x) dx = \exp(1) - [\exp(x)]_{x=0}^{x=1} = 1,$$

wobei wir diesmal $u(x) = \exp(x)$ und $v(x) = x$ gewählt haben.

Lemma (Integraldarstellung des Taylor-Restglieds) Es gilt

$$R_{f,n,x_*}(\xi) = \frac{1}{n!} \int_{x_*}^{\xi} (\xi - x)^n f^{(n+1)}(x) dx$$

für alle $\xi, x_* \in [a, b]$, sofern $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ -mal stetig differenzierbar ist.

Beweis Wir betrachten die Integralformel in der Behauptung als die Definition von $R_{f,n,x_*}(\xi)$ und zeigen mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$R_{f,n,x_*}(\xi) = f(\xi) - T_{f,n,x_*}(\xi)$$

gilt. Der Induktionsanfang $n = 0$ ergibt sich dabei via

$$R_{f,0,x_*}(\xi) = \int_{x_*}^{\xi} f'(x) dx = f(\xi) - f(x_*) = f(\xi) - T_{f,0,x_*}(\xi)$$

direkt aus dem Fundamentalsatz und der Definition des nullten Taylor-Polynoms. Im Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$ mit $n \geq 1$ benutzen wir

$$u(x) := f^{(n)}(x), \quad v(x) := \frac{(\xi - x)^n}{n!} \quad v'(x) = -\frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

und erhalten mittels partieller Integration das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} R_{f,n,x_*}(\xi) &= \int_{x_*}^{\xi} u'(x) v(x) dx = [f^{(n)}(x) v(x)]_{x=x_*}^{x=\xi} - \int_{x_*}^{\xi} f^{(n)}(x) v'(x) dx \\ &= -f^{(n)}(x_*) \frac{(\xi - x_*)^n}{n!} + \int_{x_*}^{\xi} f^{(n)}(x_*) \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \\ &= -T_{f,n,x_*}(\xi) + T_{f,n-1,x_*}(\xi) + R_{f,n-1,x_*}(\xi). \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Induktionsvoraussetzung $R_{f,n-1,x_*}(\xi) = f(\xi) - T_{f,n-1,x_*}(\xi)$ folgt nun die Induktionsbehauptung, d.h. das analoge Resultat mit n statt $n-1$. \square

10.3 Integration durch Substitution

Vorbemerkung Die Substitutionsformel kann verwendet werden, um bestimmte oder unbestimmte Integrale einer komplizierten Funktion f zu ermitteln. Die Idee ist dabei, die gegebene Variable (bei uns standardmäßig x) durch eine neue — in aller Regel geschickt gewählte — Variable (zum Beispiel y) zu ersetzen, sodass nach der Substitution ein transformiertes Integral entsteht, das wir schon kennen oder direkt berechnen können.

Theorem (abstrakte Substitutionsregel) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\psi : (c, d) \rightarrow (a, b)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y)) \psi'(y) \, dy = \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} f(x) \, dx$$

für alle $y_1, y_2 \in (c, d)$.

Beweis Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f und sei $G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $G(y) := F(\psi(y))$. Dann ist G nach der Kettenregel differenzierbar mit Ableitung

$$g(y) := G'(y) = F'(\psi(y)) \psi'(y) = f(\psi(y)) \psi'(y)$$

und der Fundamentalsatz — angewendet auf g und G — liefert

$$G(y_2) - G(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} g(y) \, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y)) \psi'(y) \, dy.$$

Auf der anderen Seite impliziert der Fundamentalsatz — diesmal ausgewertet für f und F — auch

$$G(y_2) - G(y_1) = F(\psi(y_2)) - F(\psi(y_1)) = \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} f(x) \, dx$$

und die Behauptung folgt unmittelbar durch Gleichsetzen. □

Bemerkungen

1. Im Beweis des Theorems haben wir die Argumente von f und F mit x , die von g und G jedoch mit y bezeichnet. Die Funktion ψ beschreibt dabei, wie x von y abhängt.
2. Im Theorem ist nicht vorausgesetzt, dass ψ invertierbar ist. In den meisten Anwendungen wird ψ aber strikt monoton (fallend oder wachsend) sein und das Intervall (c, d) bijektiv auf das Intervall (a, b) abbilden. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung $\varphi = \psi^{-1}$ wohldefiniert und bildet (a, b) bijektiv auf (c, d) ab. Die Gesetze für Umkehrfunktionen stellen außerdem sicher, dass auch φ strikt monoton und stetig differenzierbar ist.

- Wir haben hier eine Variante mit offenen Intervallen gewählt, aber das Theorem gilt sinngemäß auch für abgeschlossene Intervalle, wobei die Ableitungen in den Randpunkten dann im Sinne einseitiger Grenzwerte von Differenzenquotienten zu verstehen sind.
- Für unbestimmte Integrale können wir mit exakt denselben Argumenten die Formel

$$\int f(\psi(y)) \psi'(y) dy = \int f(x) dx + C \quad \text{mit} \quad x = \psi(y)$$

herleiten, wobei C wieder eine Integrationskonstante ist, die wir entweder auf der linken oder auf der rechten Seite schreiben können.

Achtung: Der Zusatz „mit $x = \psi(y)$ “ ist hier sehr wichtig: Das unbestimmte Integral auf der rechten Seite steht für $F(x)$ und ist insbesondere eine Funktion in der Variablen x . Das unbestimmte Integral auf der linken Seite repräsentiert jedoch eine Funktion in y , nämlich $G(y) = F(\psi(y))$. Der Zusatz macht klar, dass x und y nicht voneinander unabhängige, sondern gekoppelte Variablen sind. Siehe dazu auch die Diskussion der *Rücksstitution* weiter unten.

- Das Theorem liefert ein sehr mächtiges Werkzeug zur Berechnung von Integralen und besitzt einen erstaunlich einfachen Beweis, in dem der Fundamentalsatz lediglich mit der Kettenregel kombiniert wird. Die Aussage des Theorems — also die angegebene Substitutionsformel — ist auch viel einfacher als es auf den ersten Blick scheint. Siehe dazu die Diskussion unten.
- Ausblick:* Die Verallgemeinerung des Theorems in höheren Dimensionen wird *Transformationsformel für Integrale* genannt und in der Vorlesung *Analysis 3* eine sehr wichtige Rolle spielen.

Beispiele

- Mit $\psi(y) = \mu y + \nu$ erhalten wir als Spezialfall die Formel

$$\mu \int_{y_1}^{y_2} f(\mu y + \nu) dy = \int_{\mu y_1 + \nu}^{\mu y_2 + \nu} f(x) dx,$$

die affine Transformationen im Argument einer Funktion beschreibt. Sie gilt für alle Parameter $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und alle x_1, x_2 , sofern $\mu x_1 + \nu$ und $\mu x_2 + \nu$ zu (a, b) gehören, und eine konkrete Anwendung ist

$$2 \int_0^3 \ln(2y + 1) dy = \int_1^7 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_{x=1}^{x=7} = 7 \ln(7) - 6.$$

Wir werden unten diese Formeln noch einmal, aber in einer leicht abweichenden Formulierung und mit einer anderen Methode herleiten.

- Mit derselben Funktion ψ ergibt sich

$$\mu \int f(\mu y + \nu) dy = F(\mu y + \nu) + C$$

für die unbestimmten Integrale, wobei F wieder die Stammfunktion von f bezeichnet. Mit $f(x) = \ln(x)$ gilt $F(x) = x \ln(x) - x$ und daher

$$\mu \int \ln(\mu y + \nu) dy = (\mu y + \nu) \ln(\mu y + \nu) - (\mu y + \nu) + C,$$

wobei wir mit dieser Formel das unbestimmte Integral aus dem letzten Beispiel auf eine andere Art berechnen könnten.

Bemerkung Mit $f(x) = 1/x$ gilt $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ und das Theorem liefert die nützliche Formel

$$\int \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} dy = \ln|\psi(y)| + C,$$

die in der Literatur oftmals mit x statt y geschrieben wird. Dabei sind

$$\int \frac{dy}{y \ln(y)} = \ln|\ln(y)| + C$$

und

$$\int \tanh(y) dy = \ln(\cosh(y)) + C, \quad \int \coth(y) dy = \ln|\sinh(y)| + C$$

wichtige Spezialfälle.¹⁶

Heuristische Herleitung der Substitutionsformel

Grundlagen Die Substitution wird durch die Gleichung

$$x = \psi(y)$$

beschrieben und die Rechenregeln der Differentialrechnung implizieren

$$\frac{dx}{dy} = \psi'(y).$$

Der Trick besteht nun darin, diese Gleichung auf einer formalen Ebene als

$$dx = \psi'(y) dy$$

zu schreiben.¹⁷

Bemerkung Besitzt ψ die Umkehrfunktion $\varphi = \psi^{-1}$ (was meist der Fall ist), so können wir auch

$$y = \varphi(x), \quad dy = \varphi'(x) dx$$

schreiben, wobei $\psi'(y) \varphi'(x) = 1$ aus dem Theorem über die Ableitung von Umkehrfunktionen folgt und die Konsistenz der verschiedenen Formelsätze sicherstellt.

¹⁶Beachte, dass \cosh im Gegensatz zu \sinh immer positive Werte annimmt, d.h. es gilt $|\cosh| = \cosh$.

¹⁷Wir hatten ein ähnliches Konzept schon bei der alternativen Herleitung der Kettenregel verwendet. Aus Sicht der modernen Mathematik handelt es sich bei dx und dy um *Differentialformen*, aber wir können die entsprechende Theorie hier nicht entwickeln.

Anwendung auf unbestimmte Integrale Durch konsistente *Substitution* erhalten wir die Formel

$$\int f(x) \, dx = \int f(\psi(y)) \psi'(y) \, dy + C,$$

wobei die Formel $x = \psi(y)$ den Variablenwechsel $x \rightsquigarrow y$ beschreibt und dx in dazu konsistenter Weise durch $\psi'(y) \, dy$ ersetzt wird. Wenn wir explizite Formeln für das unbestimmte Integral auf der rechten Seite kennen, so müssen wir in diesen anschließend die *Rücksubstitution* $y \rightsquigarrow x$ mittels $y = \varphi(x)$ durchführen, um am Ende wieder eine Funktion in der Variablen x zu erhalten. Siehe dazu auch die Beispiele.

Anwendung auf bestimmte Integrale Analog ergibt sich

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx = \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y)) \psi'(y) \, dy,$$

wobei diesmal die Konsistenzbedingungen

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \varphi(x_2)$$

äquivalent zu

$$x_1 = \psi(y_1), \quad x_2 = \psi(y_2)$$

sind und auch die Rolle der Rücktransformation übernehmen.

Klarstellung Die Transformationsformeln gelten für alle denkbaren Funktionen ψ bzw. φ , aber das entstehende bestimmte oder unbestimmte Integral bzgl. y wird oftmals mindestens so kompliziert sein wie das Ursprungintegral bzgl. x . Nur für spezielle Wahlen der neuen Variable y entsteht ein einfacheres Integral und die Kunst besteht darin, diese Transformation zu finden. Es gibt allerdings Listen, in der für viele Klassen von Funktionen f eine zielführende Substitution angegeben ist. Für andere Funktionen sind jedoch keine das Integral vereinfachende Transformationen bekannt.

Hinweis Wie so oft gilt auch hier: Merken Sie sich nicht die Formeln, sondern ihre Herleitung!

Konkrete Substitutionen

Beispiel für ein bestimmtes Integral Um

$$I := \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$$

zu berechnen, substituieren wir x durch die neue Variable y indem wir die Exponentialfunktion bzw. den Logarithmus als ψ bzw. φ verwenden. Es gilt also

$$y = \ln(x), \quad x = \exp(y), \quad dx = x \, dy$$

und wir erhalten

$$I = \int_0^1 \frac{dy}{1+y} = \left[\ln(1+y) \right]_{y=0}^{y=1} = \ln(2).$$

Dabei haben wir benutzt, dass unter dem betrachteten Variablenwechsel die Randbedingung $x = 1$ bzw. $x = e$ äquivalent zu $y = 0$ bzw. $y = 1$ ist.

Bemerkung: In guten Integraltafeln findet sich die Formel

$$\int \frac{1}{x(1+\ln(x))} dx = \ln(1+\ln x) + C,$$

mit der der Wert von I auch direkt aus dem Hauptsatz hergeleitet werden kann.

Beispiel für ein unbestimmtes Integral Mit Integration durch Substitution können wir eine Stammfunktion zu $f(x) = \exp(\sqrt{x})$ für $x > 0$ explizit berechnen. Der entsprechende Variablenwechsel ist durch

$$x = y^2, \quad y = \sqrt{x}, \quad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad dx = 2\sqrt{x} dy = 2y dy$$

gegeben und liefert das Zwischenergebnis

$$\int \exp(\sqrt{x}) dx = \int 2y \exp(y) dy + C \quad \text{mit} \quad y = \sqrt{x},$$

wobei das unbestimmte Integral bzgl. y mittels partieller Integration zu

$$\int 2y \exp(y) dy = 2y \exp(y) - \int 2 \exp(y) dy = 2y \exp(y) - 2 \exp(y) + C,$$

berechnet werden kann. Nach Einsetzen und Rücksubstitution erhalten wir

$$\int \exp(\sqrt{x}) dx = 2\sqrt{x} \exp(\sqrt{x}) - 2 \exp(\sqrt{x}) + C$$

als Endergebnis, wobei auf beiden Seiten die freie Variable mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet ist (so wie es sein muss).

Probe: Die Rechenregeln der Differentialrechnung implizieren

$$\frac{d}{dx} \left(2\sqrt{x} \exp(\sqrt{x}) - 2 \exp(\sqrt{x}) + C \right) = \exp(\sqrt{x}),$$

d.h. wir haben uns in der Herleitung wirklich nicht verrechnet.

Bemerkung: Wir haben hier eine übliche Vereinfachung angewendet und nur mit einer Integrationskonstante gearbeitet, die wir außerdem immer C genannt haben. Streng genommen müssten wir mit mehreren Integrationskonstanten arbeiten und diese zum Beispiel durch Indizes unterscheiden, aber das macht die Formeln unnötig kompliziert. Am Ende ist nur wichtig, dass es eine freie Integrationskonstante gibt, wobei wir diese standardmäßig C nennen.

Hinweis: Denken Sie nicht zu viel über die Integrationskonstante nach. Sie können sie in allen Zwischenergebnissen auch weglassen und erst ganz am Ende einfügen.

Beispiel für ein bestimmtes Integral mit variablen Grenzen Wir berechnen das bestimmte Integral

$$I := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-t^2} dt$$

für beliebige Integrationsgrenzen durch eine geeignete Substitution, wobei wir immer $-1 < t_1 < t_2 < +1$ voraussetzen, da andernfalls der Integrand nicht wohldefiniert ist. Wir transformieren das Integral via

$$s = \arcsin(t), \quad t = \sin(s), \quad dt = \cos(s) ds,$$

wobei s immer Werte im Intervall $(-\pi/2, +\pi/2)$ annimmt und daher

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(s)} = \sqrt{\cos^2(s)} = \cos(s) > 0$$

gilt. Mit $t_j = \sin(s_j)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1-\sin^2(s)} \cdot \cos(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \cos^2(s) ds \\ &= \left[\frac{1}{2} s + \frac{1}{2} \sin(s) \cos(s) \right]_{s=s_1}^{s=s_2} = \left[\frac{1}{2} \arcsin(t) + \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} \right]_{t=t_1}^{t=t_2}, \end{aligned}$$

wobei die angegebene Stammfunktion von \cos^2 mit partieller Integration berechnet werden kann.

Probe: Auch hier können wir das Endergebnis mithilfe von Differentiation überprüfen.

Komposition mit affiner Funktion Ist F eine (bekannte) Stammfunktion zu f , so beschreibt die nützliche Formel

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\mu x + \nu) dx = \frac{1}{\mu} (F(\mu x_2 + \nu) - F(\mu x_1 + \nu)),$$

wie wir affine Transformationen im Argument von f behandeln können. Wir hatten eine Variante dieser Formel (mit vertauschten Rollen von x und y) schon weiter oben aus dem Theorem abgelesen, wollen aber auch noch die direkte Herleitung besprechen.

Alternative Herleitung: Die Substitution $y = \mu x + \nu$ beschreibt den Variablenwechsel $x \rightsquigarrow y$ und mit

$$dy = \mu dx \quad \text{bzw.} \quad dx = \frac{1}{\mu} dy, \quad x = x_j \quad \Leftrightarrow \quad y = y_j = \mu x_j + \nu,$$

erhalten wir

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\mu x + \nu) dx = \frac{1}{\mu} \int_{y_1}^{y_2} f(y) dy.$$

Aus $\int_{y_1}^{y_2} f(y) dy = F(y_2) - F(y_1)$ folgt nun das gewünschte Ergebnis, sofern am Ende als Rücksubstitution y_j durch x_j ersetzt wird. \square

Bemerkung: Die entsprechende Formel für unbestimmte Integrale lautet

$$\int f(\mu x + \nu) dx = \frac{1}{\mu} F(\mu x + \nu) + C$$

und kann ebenfalls durch angegebene Substitution hergeleitet werden. Alternativ können wir diese Formel aber auch durch scharfes Hinsehen finden, denn

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu} F(\mu x + \nu) + C \right) = f(\mu x + \nu)$$

ergibt sich direkt aus der Kettenregel.

Beispiele: Es gilt

$$\int_1^3 \exp(5x - 3) dy = \frac{1}{5} [\exp(y)]_{y=5 \cdot 1 - 3}^{y=5 \cdot 3 - 3} = \frac{1}{5} (e^{12} - e^2),$$

sowie

$$\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(y) dy = 2(\sin(\pi/2) - \sin(0)).$$

Zusammenfassung

1. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Substitutionsformel für Integrale anzuwenden oder aufzuschreiben, aber die notwendigen Rechnungen ergeben sich immer in sehr nachvollziehbarer Weise aus den zugrunde liegenden Ideen.
2. Es ist nicht wichtig, wie wir die Variablen vor und nach der Transformation bezeichnen, sondern nur dass wir zwei verschiedene Buchstaben benutzen und in allen Zwischenschritten immer konsistente Notationen verwenden.
3. In der Praxis besteht die Schwierigkeit darin, eine geeignete Variablensubstitution zu identifizieren, die ein gegebenes, kompliziertes Integral in ein berechenbares transformiert.

10.4 Integration durch Partialbruchzerlegung

Definition Der Quotient

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

zweier reeller Polynome p und q wird gebrochenrationale (oder rationale) Funktion genannt und ist in natürlicher Weise auf der Menge $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ definiert. Dabei sprechen wir im Fall von $\deg(p) < \deg(q)$ bzw. $\deg(p) \geq \deg(q)$ von einer echt gebrochenrationalen bzw. einer unecht gebrochenrationalen Funktion.¹⁸

Idee der Partialbruchzerlegung Jede rationale Funktion r kann als gewichtete Summe gewisser Bausteine dargestellt werden, wobei diese additive Zerlegung von den komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms q abhängt und das Lösen linearer Gleichungssysteme erfordert. Damit können — zumindest im Prinzip — explizite Darstellungsformeln für das unbestimmte Integral von r hergeleitet werden.

Baustein	Stammfunktion	
x^j	$\frac{x^{j+1}}{j+1}$	$j \in \mathbb{N}_0$
$\frac{1}{(x-\lambda)}$	$\ln x-\lambda $	$x \neq \lambda$
$\frac{1}{(x-\lambda)^l}$	$-\frac{1}{(l-1)(x-\lambda)^{l-1}}$	$l \in \mathbb{N}, l > 1, x \neq \lambda$
$\frac{1}{(x-\mu)^2 + \nu^2}$	$\frac{1}{\nu} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)$	$\nu \neq 0$
$\frac{x-\mu}{(x-\mu)^2 + \nu^2}$	$\frac{1}{2} \ln((x-\mu)^2 + \nu^2)$	$\nu \neq 0$
$\frac{1}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n}$...	$n \in \mathbb{N}, n > 1, \nu \neq 0$
$\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n}$	$-\frac{1}{2(n-1)((x-\mu)^2 + \nu^2)^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, \nu \neq 0$

Tabelle Die Bausteine für die Partialbruchzerlegung sowie die entsprechenden Stammfunktionen (ohne Integrationskonstante C). In der sechsten Zeile gibt es keine einheitliche Formel für alle Werte von n , sondern nur die Rekursionsvorschrift

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n\nu^2} \left((2n-1) I_n(x) + \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n} \right) \quad \text{mit} \quad I_n(x) := \int \frac{dx}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n},$$

wobei diese Formel mit partieller Integration hergeleitet oder alternativ durch Differentiation überprüft werden kann. Da I_1 in der vierten Zeile steht, können nun I_2, I_3, I_4 usw. sukzessive berechnet werden.

Klarstellung Obwohl natürlich auch Theoreme formuliert und bewiesen werden können, ist die Partialbruchzerlegung vor allem eine handwerkliche Fertigkeit, die durch das Studium von Beispielen sowie das Lösen von Übungsaufgaben erlernt wird.

¹⁸Mit $\deg(p)$ wird der Grad (bzw. *degree*) des Polynoms p , also der größte auftretende Exponent bezeichnet.

einführende Beispiele

1. Die Funktion

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{2(x + 2 - 2) - 1}{x + 2} = \frac{2(x + 2) - 5}{x + 2} = 2 - \frac{5}{x + 2}$$

besitzt das unbestimmte Integral

$$\int r(x) dx = 2x - 5 \ln |x + 2| + C,$$

wobei wir in diesem sehr einfachen Beispiel die Partialbruchzerlegung nach Einführung der nahrhaften Null $0 = 2 - 2$ mit direkten Rechnungen bestimmen konnten.

2. Ein komplizierteres, aber immer noch einfaches Beispiel ist die Funktion

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1} = \frac{((x - 1) + 1)^2 + 2((x - 1) + 1) - 4}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)^2 + 4(x - 1) - 1}{x - 1} = (x - 1) + 4 - \frac{1}{x - 1} = x + 3 - \frac{1}{x - 1}, \end{aligned}$$

für die wir ihre Partialbruchzerlegung ebenfalls durch geschickte Umformungen im Zähler identifiziert haben. Das unbestimmte Integral

$$\int r(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln |x - 1| + C,$$

kann nun aus der Tabelle der Bausteine einfach abgelesen werden.

3. Für die echt gebrochenrationale Funktion

$$r(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 4} = \frac{x - 5}{(x - 2)(x + 2)}$$

besitzt das Nennerpolynom die zwei reellen Nullstellen -2 und $+2$, die jeweils einfach sind. In Antizipation des allgemeinen Prinzips bestimmen wir nun zwei Konstanten a_1 und a_2 , sodass

$$r(x) = \frac{a_1}{x - 2} + \frac{a_2}{x + 2},$$

für alle $x \neq \pm 2$ gilt, denn damit können wir die Formel

$$\int r(x) dx = a_1 \ln |x - 2| + a_2 \ln |x + 2| + C$$

direkt aus den Stammfunktionen der Bausteine zusammensetzen.

Koeffizientenvergleich: Wir bringen die beiden auftretenden Bausteine auf ihren gemeinsamen Nenner und erhalten

$$\frac{a_1}{x - 2} + \frac{a_2}{x + 2} = \frac{a_1(x + 2) + a_2(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{(a_1 + a_2)x + (2a_1 - 2a_2)}{x^2 - 4}.$$

Ein Vergleich mit der Ursprungsformel liefert das lineare Gleichungssystem

$$a_1 + a_2 = 1, \quad 2a_1 - 2a_2 = -5$$

und kleinere Rechnungen zeigen, dass

$$a_1 = -\frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{7}{4}$$

die einzige Lösung ist. Wir haben damit das unbestimmte Integral der Funktion r vollständig berechnet.

Einsetzungsmethode: Alternativ können wir a_1 und a_2 auch dadurch bestimmen, dass wir die beiden Formeln für r in zwei verschiedenen Punkten x auswerten. Mit $x = 0$ und $x = 1$ ergibt sich zum Beispiel

$$-\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 = f(0) = \frac{5}{4}, \quad -a_1 + \frac{1}{3}a_2 = f(1) = \frac{4}{3}$$

und damit das gleiche Ergebnis wie vorher.

4. Bei der unecht gebrochenrationalen Funktion

$$r(x) = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

besitzt der Zähler einen höheren Grad als das Nennerpolynom und deshalb kann in einem ersten Schritt zunächst ein Polynom in additiver Weise abgespalten werden. Durch fortgesetzte Polynomdivision mit Rest erhalten wir

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} + \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \\ &= x^2 + x + \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x + 2}{x^2 - 1} = x^2 + x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Summand eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Diese besitzt zwei einfache reelle Nullstellen und kann analog zum letzten Beispiel in zwei Bausteine aufgespalten werden. Dies liefert die Partialbruchzerlegung

$$r(x) = x^2 + x + 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1},$$

aus der das unbestimmte Integral

$$\int r(x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x + 1| + C$$

mithilfe der Tabelle bestimmt werden kann.

reelle Partialbruchzerlegung echt gebrochenrationaler Funktionen Für jede rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \deg(p) < \deg(q)$$

existieren reelle Zahlen $a_{k,l}$, $b_{m,n}$ und $c_{m,n}$, sodass

$$r(x) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} \frac{a_{k,l}}{(x - \lambda_k)^l} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} \frac{b_{m,n}(x - \mu_m) + c_{m,n}}{((x - \mu_m)^2 + \nu_m^2)^n}$$

für alle x aus dem Definitionsbereich von r erfüllt ist. Hierbei gelten die folgenden Abkürzungen, die sich alle auf die Nullstellen von q beziehen:

1. K ist die Anzahl der paarweise verschiedenen Nullstellen und M die Anzahl der paarweise verschiedenen Paare konjugiert komplexer Nullstellen.
2. λ_k bezeichnet die k -te reelle Nullstelle und L_k deren Vielfachheit.
3. Das m -te Paar konjugiert komplexer Nullstellen besteht aus $\mu_m - i\nu_m$ sowie $\mu_m + i\nu_m$, wobei N_m die entsprechende Vielfachheit ist.

Bemerkungen

1. Alle Aussagen und Formeln ergeben sich aus dem Fundamentalsatz der Algebra, obwohl die Herleitung etwas technisch ist. Die wesentlichen Argumente können wie folgt zusammengefasst werden:
 - (a) Das Nennerpolynom q besitzt genau $\deg(q)$ komplexe Nullstellen, sofern deren Vielfachheit berücksichtigt wird.¹⁹
 - (b) Da alle Koeffizienten von q reell sind, müssen die nicht-reellen Nullstellen in Paaren konjugiert komplexer Nullstellen auftreten (Übungsaufgabe). Die Formel

$$(x - (\mu_n - i\nu_n))(x - (\mu_n + i\nu_n)) = (x - \mu_n)^2 + \nu_n^2$$

beschreibt dabei, dass zu jedem Paar konjugiert komplexer Nullstellen ein entsprechendes quadratisches Polynom im Reellen existiert.

2. Zu einer L -fachen reellen Nullstelle gehören in der Partialbruchzerlegung genau L verschiedene Terme bzw. Konstanten, wohingegen ein Paar komplexer Nullstellen mit Vielfachheit N durch $2N$ Konstanten repräsentiert wird. Insgesamt gibt es also genau

$$\sum_{k=1}^K L_k + 2 \sum_{m=1}^M N_m = \deg(q)$$

zu bestimmende Konstanten.

3. Wenn die Nummerierung der Nullstellen festgelegt ist, dann sind die Koeffizienten $a_{k,l}$, $b_{m,n}$ und $c_{m,n}$ eindeutig bestimmt und können durch lineare Gleichungssysteme ermittelt werden. Die Bezeichnungen der Nullstellen und Konstanten können dabei beliebig gewählt werden. Siehe dazu die Beispiele.
4. *Ausblick**: Im Komplexen gibt es eine einfachere Version der Partialbruchzerlegung, die wir aber in dieser Vorlesung nicht verwenden, das wir die Besonderheiten der entsprechenden Differential- und Integralrechnung noch nicht diskutiert haben. Die reelle und die komplexe Variante können jedoch ineinander umgerechnet werden, wobei die Formeln

$$\frac{1}{x - (\mu_n - i\nu_n)} + \frac{1}{x - (\mu_n + i\nu_n)} = \frac{2(x - \mu_n)}{(x - \mu_n)^2 + \nu_n^2}$$

und

$$\frac{1}{x - (\mu_n - i\nu_n)} - \frac{1}{x - (\mu_n + i\nu_n)} = \frac{-2\nu_n}{(x - \mu_n)^2 + \nu_n^2}$$

zugrunde liegen.

¹⁹Zweifach- bzw. Dreifachnullstellen zählen bei dieser Rechnung also doppelt bzw. dreifach.

5. In der Praxis treten natürlich auch unecht gebrochenrationale Funktionen auf. In diesem Fall können wir mittels *Polynomdivision* immer eine eindeutige Darstellung

$$r(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$$

finden, wobei p_1 und p_2 zwei Polynome sind, so dass der Grad von p_2 kleiner als der Grad von q ist. Die Partialbruchzerlegung kann anschließend für p_2/q durchgeführt werden.

vereinfachter Formelsatz Im Standardfall sind alle komplexen Nullstellen des Nenners q paarweise verschieden, d.h. es gilt $L_k = 1$ für alle $k \in \{1, \dots, K\}$ und $N_m = 1$ für alle $m \in \{1, \dots, M\}$. Die Formel der Partialbruchzerlegung vereinfacht sich dann zu

$$r(x) = \sum_{k=1}^K \frac{a_k}{x - \lambda_k} + \sum_{m=1}^M \frac{b_m(x - \mu_m) + c_m}{(x - \mu_m)^2 + \nu_m^2},$$

wobei $K + 2M = \deg(q)$ gilt und die zu bestimmenden Konstanten jeweils nur einen Index aufweisen. Im Entartungsfall gibt es mindestens eine Mehrfachnullstelle und der allgemeine Ansatz muss wie angegeben modifiziert werden.

Bestimmung von Nullstellen Bei der Partialbruchzerlegung müssen wir alle Nullstellen des Nennerpolynoms kennen bzw. berechnen, aber es gibt für diese Aufgabe keinen allgemeinen Algorithmus.²⁰ Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir in aller Regel das folgende pragmatische Verfahren benutzen (siehe auch die Übungen):

1. Wir bestimmen eine Nullstelle durch Raten und spalten anschließend mittels Polynomdivision den entsprechenden Linearfaktor ab.
2. Wir wiederholen den ersten Schritt solange, bis wir die p - q -Formel auf einen quadratischen Restfaktor anwenden können.

Beispiele für den Standardfall

1. Im echt gebrochenrationalen Fall

$$p(x) = -x^2 + 20x + 149, \quad q(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$$

bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms, zum Beispiel mit dem oben beschriebenen Verfahren. Dies liefert

$$q(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 5)$$

und damit die drei reellen, jeweils einfachen Nullstellen $\lambda_1 = +3$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -5$. Die rationale Funktion besitzt daher die Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{a_1}{x - 3} + \frac{a_2}{x + 2} + \frac{a_3}{x + 5},$$

²⁰Die komplexen Nullstellen eines kubischen oder quartischen Polynoms können im Prinzip explizit berechnet werden, aber die entsprechenden Verfahren sind recht unhandlich (siehe etwa *Cardanische Formel* unter WIKIPEDIA). Für Polynome vom Grad fünf oder höher gibt es aber keine geschlossenen Lösungsformeln mehr.

wobei wir dies auch als

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{a_1(x+2)(x+5) + a_2(x-3)(x+5) + a_3(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+5)} \\ &= \frac{(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (7a_1 + 2a_2 - a_3)x + (10a_1 - 15a_2 - 6a_3)}{(x-3)(x+2)(x+5)}, \end{aligned}$$

schreiben können. Der Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$a_1 + a_2 + a_3 = -1, \quad 7a_1 + 2a_2 - a_3 = 20, \quad 10a_1 - 15a_2 - 6a_3 = 149,$$

das wir zum Beispiel mit dem Gaußschen Algorithmus lösen können. Wir erhalten

$$a_1 = 5, \quad a_2 = -7, \quad a_3 = 1$$

und damit

$$\int r(x) dx = 5 \ln|x-3| - 7 \ln|x+2| + \ln|x+5| + C.$$

In einer Probe können wir die rechte Seite differenzieren und sehen nach einigen Umformungen, dass die Ableitung gerade die rationale Funktion $r = p/q$ ist.

Bemerkung: Machen Sie bei komplizierten Partialbruchzerlegungen immer eine Probe!

2. Für die unecht gebrochenrationale Funktion mit

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 2, \quad q(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

müssen wir in einem ersten Schritt ein Polynom als Summanden abspalten und erhalten nach Polynomdivision die Formel

$$r(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad p_1(x) = x - 1, \quad p_2(x) = 3x^2 + 1.$$

Das Nennerpolynom q besitzt die drei, jeweils einfachen komplexen Nullstellen 1 , $-i$ und $+i$ (es gilt also $L = N = 1$ sowie $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\nu_1 = 1$) und die reelle Partialbruchzerlegung ist daher durch

$$\begin{aligned} r(x) &= x - 1 + \frac{a_1}{x-1} + \frac{b_1x + c_1}{x^2+1} \\ &= x - 1 + \frac{(a_1 + b_1)x^2 + (c_1 - b_1)x + (a_1 - c_1)}{(x-1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

gegeben, wobei a_1 , b_1 , und c_1 drei, im Moment noch noch unbekannte, reelle Konstanten sind. Ein Koeffizientenvergleich mit dem Polynom p_2 liefert die drei linearen Gleichungen

$$a_1 + b_1 = 3, \quad c_1 - b_1 = 0, \quad a_1 - c_1 = 1$$

und damit $a_1 = 2$ sowie $b_1 = c_1 = 1$. Insgesamt ergibt sich

$$r(x) = x - 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}.$$

sowie

$$\int r(x) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C$$

als Endergebnis

Bemerkung: Das Gleichungssystem für die Koeffizienten wird immer eindeutig lösbar sein. Falls nicht, so haben wir uns irgendwo verrechnet.

Beispiele für den Entartungsfall

1. Das Nennerpolynom der echt gebrochenrationalen Funktion

$$r(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9} = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x(x-3)^2}$$

besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen, wobei $L_1 = 1$ bzw. $L_2 = 2$ die Vielfachheit von $\lambda_1 = 0$ bzw. $\lambda_2 = 3$ ist. Da λ_2 eine Doppelnullstelle ist, verwenden wir die modifizierte Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{a_1}{x} + \frac{a_{2,1}}{(x-3)^1} + \frac{a_{2,2}}{(x-3)^2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{2,1})x^2 + (-6a_1 - 3a_{2,1} + a_{2,2})x + 9a_1}{x(x-3)^2}, \end{aligned}$$

wobei a_1 die Konstante zu λ_1 ist und $a_{2,1}$ sowie $a_{2,2}$ beide zu λ_2 gehören. Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$a_1 + a_{2,1} = 5 \quad -6a_1 - 3a_{2,1} + a_{2,2} = -37, \quad 9a_1 = 54,$$

dessen eindeutige Lösung

$$a_1 = 6 \quad a_{2,1} = -1, \quad a_{2,2} = -4$$

die Formel

$$\int r(x) dx = 6 \ln|x| - \ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + C.$$

für die gesuchte Stammfunktion impliziert.

Bemerkung: Die drei Konstanten könnten auch anders bezeichnet werden, zum Beispiel mit E , F und G . Wichtig ist jedoch, dass die Anzahl stimmt und dass die richtigen Bausteine verwendet werden.

2. Im Fall von

$$r(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^5 + x^3} = \frac{x^2 - x + 1}{x^3(x^2 + 1)}$$

verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{a_{1,1}}{x^1} + \frac{a_{1,2}}{x^2} + \frac{a_{1,3}}{x^3} + \frac{b_1 x + c_1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(a_{1,1} + b_1)x^4 + (a_{1,2} + c_1)x^3 + (a_{1,1} + a_{1,3})x^2 + a_{1,2}x + a_{1,3}}{x^3(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

mit insgesamt fünf Konstanten, die durch das Gleichungssystem

$$a_{1,1} + b_1 = 0, \quad a_{1,2} + c_1 = 0, \quad a_{1,1} + a_{1,3} = 1, \quad a_{1,2} = -1, \quad a_{1,1} = 1$$

eindeutig festgelegt sind und zu

$$a_{1,1} = 0, \quad a_{1,2} = -1, \quad a_{1,3} = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 1$$

berechnet werden können. Insgesamt erhalten wir

$$r(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

bzw.

$$\int f(x) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \arctan(x) + C$$

als Formel für die gesuchte Stammfunktion.

10.5 Prinzip von Cavalieri für Rotationskörper

Vorbemerkung In diesem Abschnitt benutzen wir eindimensionale Integrale, um das Volumen und die Oberfläche von rotationssymmetrischen Objekten in drei Raumdimensionen zu beschreiben. Wir verwenden dabei schulmathematisches Wissen sowie unsere geometrische Anschauung und verweisen für eine vollständige und mathematisch rigorose Theorie von Volumen- und Flächenintegralen auf die Vorlesung *Analysis 3*.

Beschreibung durch Funktionen Wird der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ um die x -Achse rotiert, so beschreibt die Punktmenge

$$C := \{(x, y, z) : a < x < b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

den entstehenden Rotationskörper (siehe das Bild) und

$$\partial_{\text{MC}} C := \{(x, y, z) : a < x < b, \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\}$$

bzw.

$$\partial_{\text{GD}} C := \{(x, y, z) : x \in \{a, b\}, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

entspricht der Mantelfläche bzw. der Vereinigung von Grund- und Deckfläche.²¹

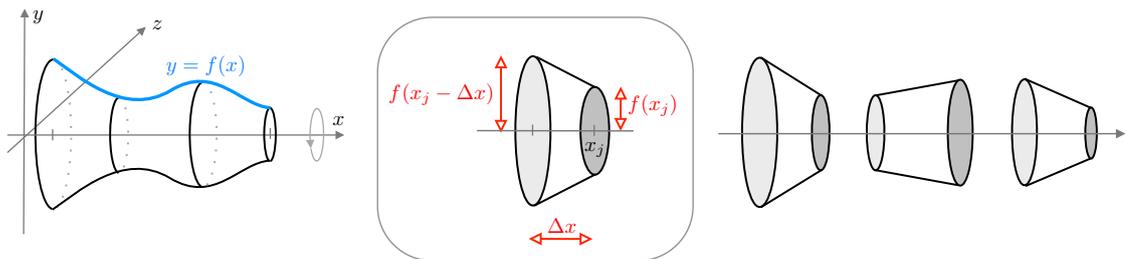


Abbildung *Links*: Ein Rotationskörper C , der durch Rotation des Graphen der Funktion f (blau) um die x -Achse entsteht. *Rechts*: Das Prinzip von Cavalieri besagt, dass C durch eine Vereinigung von endlich vielen Scheiben approximiert werden kann, wobei jede Scheibe ein Kegelstumpf ist und eine gute Approximation aus einer großen Anzahl von sehr dünnen Scheiben besteht. Im Bild werden nur drei Scheiben bzw. Kegelstümpfe verwendet, die außerdem zur besseren Darstellung versetzt gezeichnet wurden. *Mitte*: Eine typische Scheibe S_j mit kleiner Dicke Δx und Fußpunkt x_j .

heuristische Herleitung der Volumenformel Wir wenden das Prinzip von Cavalieri (siehe das Bild) auf die äquidistante Zerlegung²²

$$\Delta x := \frac{b-a}{n}, \quad x_j := a + (\Delta x)j, \quad j \in \{0, \dots, n\}$$

an, die $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle aufspaltet. Mit schulmathematischem Wissen (siehe auch das Beispiel zu Kegelstümpfen) berechnen wir das Volumen der j -ten Scheibe S_j zu

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_j) &= \frac{\pi \Delta x}{3} \left((f(x_j - \Delta x))^2 + f(x_j - \Delta x) f(x_j) + (f(x_j))^2 \right) \\ &= \pi (f(x_j))^2 \Delta x + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

²¹Das Symbol ∂ repräsentiert auch den kleinen griechischen Buchstaben *Delta* und bezeichnet in der Mathematik unter anderem den *Randoperator*.

²²Die Teilpunkte hatten wir am Anfang dieses Kapitels mit x_k^* bezeichnet, aber in diesem Abschnitt lassen wir der Einfachheit halber den oberen Index weg und wählen j anstelle von k als Laufindex. Beachte auch, dass Δx gerade die Feinheit der äquidistanten Zerlegung ist.

wobei wir in der zweiten Umformung die Taylor-Approximation nullter Ordnung, also die Formel

$$f(x_j - \Delta x) = f(x_j) + O(\Delta x)$$

eingesetzt haben.²³ Durch Summation über j erhalten wir

$$\pi^{-1} \sum_{j=1}^n \text{vol}(S_k) = \Delta x \sum_{j=1}^n \left((f(x_j))^2 + O(\Delta x) \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j))^2 + O(1/n),$$

wobei $n \Delta x = b - a$ sowie $O(\Delta x) = O(1/n)$ verwendet wurde. Der führende Term auf der rechten Seite ist die Riemann-Summe eines Integrales und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (bzw. $\Delta x \rightarrow 0$) liefert

$$\text{vol}(C) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

als Formel für das Volumen von C .

heuristische Herleitung der Oberflächenformel Die Mantelfläche des j -ten Kreiskegelstumpfes S_j ist durch

$$\text{area}_M(S_j) = \pi (f(x_j - \Delta x) + f(x_j)) \sqrt{(f(x_j) - f(x_j - \Delta x))^2 + (\Delta x)^2}$$

gegeben und mit dem Satz von Taylor können wir diese Formel vereinfachen, wobei unter der Wurzel bzw. im Vorfaktor der führende Term der ersten bzw. nullten Ordnungsapproximation von f in x_j entspricht. Genauer gesagt, es gilt

$$\begin{aligned} \text{area}_M(S_j) &= \pi \left(2f(x_j) + O(\Delta x) \right) \sqrt{(\Delta x)^2 \left((f'(x_j) + O(\Delta x))^2 + 1 \right)} \\ &= 2\pi f(x_j) \sqrt{1 + (f'(x_j))^2} \Delta x + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

und das Prinzip von Cavalieri liefert

$$\text{area}_M(C) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

als Formel für die Mantelfläche von C . Die Summe aus Grund- und Deckfläche ist offensichtlich durch

$$\text{area}_{GD}(C) = \pi \left((f(a))^2 + (f(b))^2 \right),$$

gegeben und durch Addition erhalten wir die Gesamtoberfläche von C .

²³Die Landau-Symbole hatten wir weiter oben eingeführt. Insbesondere bezeichnet $O(\Delta x)$ kleine Fehlerterme, die im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ verschwinden.

Beispiel: Kreiszyylinder und Kreiskegelstumpf

1. Mit der konstanten Funktion $f(x) = c_0$ erhalten wir via

$$\begin{aligned}\text{vol}(C) &= \pi \int_a^b c_0^2 dx = \pi (b-a) c_0^2, \\ \text{area}_M(C) &= 2\pi \int_a^b c_0 \sqrt{1+0} dx = 2\pi c_0 (b-a)\end{aligned}$$

die bekannten Formeln für den Kreiszyylinder mit Radius c_0 und Höhe $b-a$.

2. Für $f(x) = c_1 x + c_0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\text{vol}(C) &= \pi \int_a^b (c_1^2 x^2 + 2c_1 c_0 x + c_0^2) dx \\ &= \pi \frac{1}{3} c_1^2 (b^3 - a^3) + \pi c_1 c_0 (b^2 - a^2) + c_0^2 (b-a)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\text{area}_M(C) &= 2\pi \int_a^b (c_1 x + c_0) \sqrt{1+c_1^2} dx \\ &= 2\pi \sqrt{1+c_1^2} \left(\frac{1}{2} c_1 (b^2 - a^2) + c_0 (b-a) \right).\end{aligned}$$

Nach elementaren Umformungen können wir auch

$$\text{vol}(C) = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2), \quad \text{area}_M(C) = \pi (r_1 + r_2) \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + h^2}$$

schreiben, wobei $h := b-a$ die Höhe und

$$r_1 := f(a) = c_1 a + c_0, \quad r_2 := f(b) = c_1 b + c_0$$

die beiden Radien des entsprechenden Kreiskegelstumpfes sind.

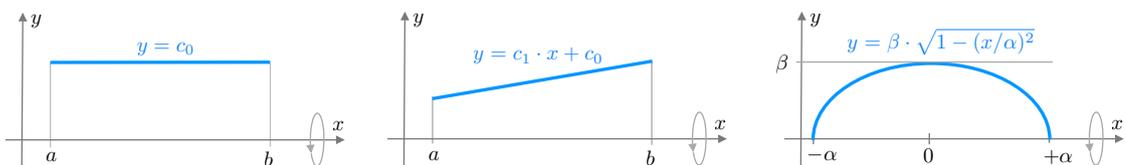


Abbildung Die Funktionen für einen Kreiszyylinder, einen Kreiskegelstumpf und einen Ellipsoiden, wie sie in den Beispielen verwendet werden.

Beispiel: Rotationsellipsoid* Wie betrachten die Funktionen

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + x^2},$$

wobei α und β positive Parameter sind und wir das Intervall $[-\alpha, +\alpha]$ als Definitionsbereich verwenden, sodass es keine Grund- oder Deckfläche gibt (siehe das Bild). Das Volumen berechnen wir mit der Substitution $x = \alpha s$ zu

$$\begin{aligned}\text{vol}(C_{\alpha,\beta}) &= \pi \beta^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right) dx = \pi \alpha \beta^2 \int_{-1}^1 (1 - s^2) ds \\ &= \pi \alpha \beta^2 \left[s - \frac{1}{3} s^3 \right]_{s=-1}^{s=+1} = \frac{4}{3} \pi \alpha \beta^2\end{aligned}$$

und erhalten im Spezialfall $\alpha = \beta = \varrho$ mit

$$\text{vol}(C_{\varrho,\varrho}) = \frac{4}{3} \pi \varrho^3$$

die bekannte Formel für das Volumen der Kugel vom Radius ϱ . Wegen

$$f'_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \frac{\beta x}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

und

$$\sqrt{1 + (f'_{\alpha,\beta}(x))^2} = \frac{\sqrt{\alpha^4 + (\beta^2 - \alpha^2)x^2}}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

gilt außerdem

$$\text{area}(C_{\alpha,\beta}) = \text{area}_M(C_{\alpha,\beta}) = \frac{2\pi\beta}{\alpha^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sqrt{\alpha^4 + (\beta^2 - \alpha^2)x^2} dx,$$

wobei wir diese vorläufige Formel für die Oberfläche weiter vereinfachen wollen. Für $\alpha = \beta = \varrho$ hängt der Integrand nicht von x ab und liefert mit

$$\text{area}(C_{\varrho,\varrho}) = \frac{2\pi}{\varrho} 2\varrho \sqrt{\varrho^4} = 4\pi \varrho^2$$

das erwartete Ergebnis. Im Fall von $\beta < \alpha$ substituieren wir $x = \alpha^2 s / \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\text{area}(C_{\alpha,\beta}) &= \frac{2\pi\beta\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \int_{-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\alpha}^{+\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\alpha} \sqrt{1 - s^2} ds \\ &= \frac{2\pi\beta\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \left[s \sqrt{1 - s^2} + \arcsin(s) \right]_{s=-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\alpha}^{s=+\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\alpha} \\ &= \frac{2\pi\beta\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}\right) \right) \\ &= 2\pi\beta^2 + \frac{2\pi\beta\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}\right),\end{aligned}$$

wobei wir die Integralformel $\int \sqrt{1 - s^2} ds = \frac{1}{2} s \sqrt{1 - s^2} + \frac{1}{2} \arcsin(s) + C$ verwendet haben. Im Fall von $\beta > \alpha$ ergibt sich hingegen

$$\text{area}(C_{\alpha,\beta}) = 2\pi\beta^2 + \frac{2\pi\beta\alpha^2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha}\right)$$

durch ähnliche Rechnungen.

10.6 Uneigentliche Integrale

Vorbemerkung Wir haben oben das Riemann-Integral für Funktionen f eingeführt, die auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert sind. In diesem Abschnitt studieren wir die folgenden allgemeineren Fälle:

1. halb-offene Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$ bzw. $[a, +\infty)$ und $(-\infty, b]$,
2. offene Intervalle (a, b) , $(-\infty, +\infty)$ und $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$,
3. Definitionsbereiche mit isolierten Lücken.

Die entstehende Verallgemeinerung des Riemannsches Integralbegriffs ist sowohl für die Mathematik als auch für die Anwendungswissenschaften sehr nützlich.

halboffene Intervalle Ist f auf $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ definiert, so nennen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_{\alpha}^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

das uneigentliche Riemann-Integral von f , sofern der einseitige Grenzwert im Sinne der eigentlichen Konvergenz existiert, d.h. wenn er als reelle Zahl wohldefiniert ist. Dabei ist der Fall $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$ ausdrücklich zugelassen.

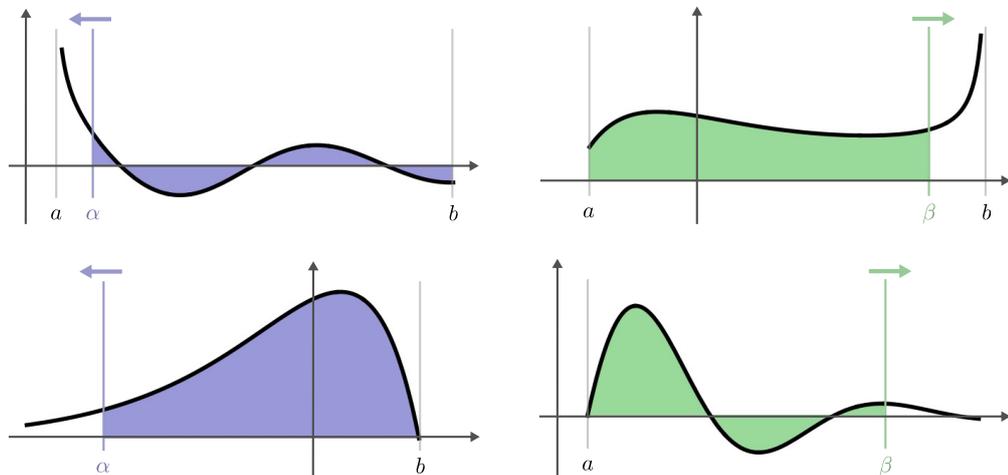


Abbildung Das uneigentliche Integral auf den halboffenen Intervallen $(a, b]$ (links) bzw. $[a, b)$ (rechts) ist als einseitiger Grenzwert von Integralen über kompakten Intervallen definiert, wobei a bzw. b endlich (oben) oder unendlich (unten) sein kann.

Klarstellung Wenn a eine reelle Zahl ist und f nicht nur auf $(a, b]$, sondern auf einem größeren Intervall $[a - \varepsilon, b]$ mit $\varepsilon > 0$ definiert und dort auch stetig ist, so ist die obige Definition nutzlos, denn die zu untersuchende Konvergenzaussage ergibt sich unmittelbar aus der Gebietsadditivität und den Standardabschätzungen des Riemann-Integrals. Wenn jedoch a nicht endlich ist oder wenn f in a nicht definiert ist, so liefert der uneigentliche Integralbegriff eine echte Verallgemeinerung der bisherigen Theorie. Analoge Aussagen gelten für b .

Beispiele

1. Wir betrachten das verallgemeinerte Monom $f(x) = x^r$ mit reellem Parameter r auf dem Intervall $[a, \infty)$ für gegebenes $a > 0$.

(a) Für $r < -1$ folgt die uneigentliche Integrierbarkeit von f aus

$$\int_a^\beta x^r dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_{x=a}^{x=\beta} = \frac{\beta^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} \xrightarrow{\beta \nearrow \infty} -\frac{a^{r+1}}{r+1},$$

wobei der Grenzwert auf der rechten Seite den Wert des uneigentlichen Integrals liefert.

(b) Im Fall $r \geq -1$ ist f jedoch nicht uneigentlich integrierbar. Für $r > -1$ ergibt sich dies wegen $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^{r+1} = +\infty$ unmittelbar aus der Formel für das Integral über $[a, \beta]$ und im Sonderfall $r = -1$ liefert

$$\int_a^\beta x^{-1} dx = \left[\ln(x) \right]_{x=a}^{x=\beta} = \ln(\beta) - \ln(a) \xrightarrow{\beta \nearrow \infty} \infty$$

die Begründung.²⁴

Interpretation: Nur für $r < -1$ klingt die Funktion im Unendlichen so schnell ab, dass der Flächeninhalt unter dem Graphen immer noch endlich ist. Für $-1 \leq r < 0$ ist das Abklingen jedoch vergleichsweise schwach und für $r \geq 0$ klingt die Funktion gar nicht ab.

2. Analog zeigen wir

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \int_a^\beta \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{\beta \nearrow \infty} \left(\ln(\ln(\beta)) - \ln(\ln(a)) \right) = \infty,$$

d.h. $1/(x \ln(x))$ klingt für $x \rightarrow \infty$ zwar schon schneller ab als $1/x$, aber dieses schnellere Abklingen reicht noch nicht, um die Integrierbarkeit sicherzustellen.

3. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^{+\infty} x \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} e^{-a^2},$$

denn mit der Substitution $y = x^2$ ergibt sich $dy = 2x dx$ sowie

$$\int_a^\beta x e^{-x^2} dx = \int_{a^2}^{\beta^2} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-y} \right]_{y=a^2}^{y=\beta^2} = \frac{1}{2} (e^{-a^2} - e^{-\beta^2})$$

und der Grenzübergang $\beta \nearrow \infty$ liefert die Behauptung.

²⁴Wir schreiben oftmals auch $\int_a^\infty x^r dx = \infty$ für $r \geq -1$, aber dies ist nur eine Abkürzung und meint nicht uneigentliche Integrierbarkeit im Sinne der obigen Definition.

4. Für jedes feste $b > 0$ gilt

$$\int_{\alpha}^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - \alpha^{r+1}}{r+1} \xrightarrow{\alpha \searrow 0} \begin{cases} \frac{b^{r+1}}{r+1} & \text{für } r > -1, \\ \infty & \text{für } r \leq -1, \end{cases}$$

d.h. das verallgemeinerte Monom $f(x) = x^r$ ist dann und nur dann auf dem Intervall $(0, b]$ im uneigentlichen Sinne integrierbar, wenn $r > -1$ gilt.

5. Die Funktion $f(x) = x/(1-x^2)$ ist auf dem Intervall $[0, 1)$ nicht uneigentlich integrierbar, denn der Grenzwert

$$\int_0^{\beta} \frac{x}{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \right]_{x=0}^{x=\beta} = -\frac{1}{2} \ln(1-\beta^2) \xrightarrow{\beta \nearrow 1} \infty$$

ist keine reelle Zahl, sondern existiert nur im uneigentlichen Sinne.

Integralkriterium für unendliche Summen Als spezielle, aber sehr wichtige Anwendung uneigentlicher Integrale ergibt sich die Implikation

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty \iff \int_m^{\infty} f(x) dx < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und jede monoton fallende Funktion $f: [m, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Der Beweis beruht auf der Doppelungleichung

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$$

und benutzt, dass die linke bzw. die rechte Seite eine Unter- bzw. Obersumme von f ist, wobei eine äquidistante Zerlegung von $[m, n]$ in $n-m$ Teilintervalle der Länge 1 zugrunde liegt (siehe die blaue bzw. rote Fläche im Bild).

Beispiel: Für alle $s > 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s} = 1 + \left[-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}} \right]_{x=1}^{x=n} = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$$

und nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ im eigentlichen Sinne konvergiert. Analog impliziert

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_{x=1}^{x=n+1} = \ln(n+1)$$

die Divergenz bzw. die uneigentliche Konvergenz der harmonischen Reihe.

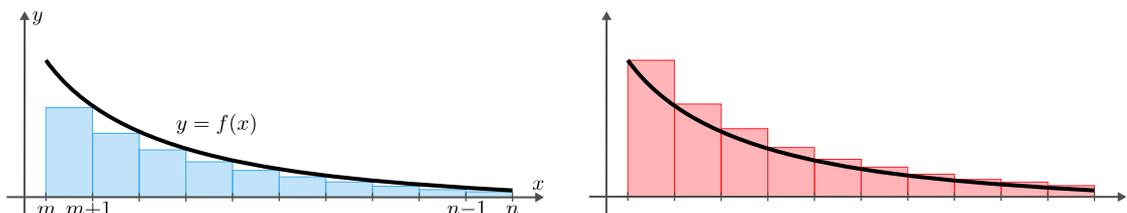


Abbildung Mit dem Integralkriterium kann für viele monoton fallende und nichtnegative reelle Zahlenfolgen die Konvergenz bzw. Divergenz der entsprechenden Reihe durch die Berechnung von uneigentlichen Integralen bewiesen werden.

Gamma-Funktion Für jede reelle Zahl $\xi > 0$ ist

$$\Gamma(\xi) := \int_0^{\infty} x^{\xi-1} \exp(-x) dx$$

als unbestimmtes Integral auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ wohldefiniert. Mit partieller Integration verifizieren wir die *Rekursionsformel*

$$\Gamma(\xi + 1) = [x^{\xi} \exp(-x)]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} \xi x^{\xi-1} \exp(-x) dx = \xi \Gamma(\xi),$$

wobei wir die Wahl $u'(x) = \exp(-x)$, $v(x) = x^{\xi}$ verwendet und die Grenzwertformel $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\xi} \exp(-x) = 0$ benutzt haben. In Kombination mit

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \exp(-x) dx = [-\exp(-x)]_{x=0}^{x=\infty} = 1$$

folgt damit $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Gamma-Funktion ist eine natürliche Erweiterung der Fakultät. Wir können die Rekursionsformel aber auch verwenden, um die Gamma-Funktion schrittweise via $\Gamma(\xi) := \Gamma(\xi+1)/\xi$ für negative, aber nicht ganzzahlige Argumente zu definieren. Zum Beispiel gilt

$$\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right) := -\frac{3}{2} \Gamma\left(+\frac{1}{3}\right), \quad \Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) := -\frac{3}{5} \Gamma\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \frac{3}{2} \Gamma\left(+\frac{1}{3}\right).$$

Die Gamma-Funktion besitzt viele Anwendungen, zum Beispiel in der mathematischen Physik und in der Stochastik.

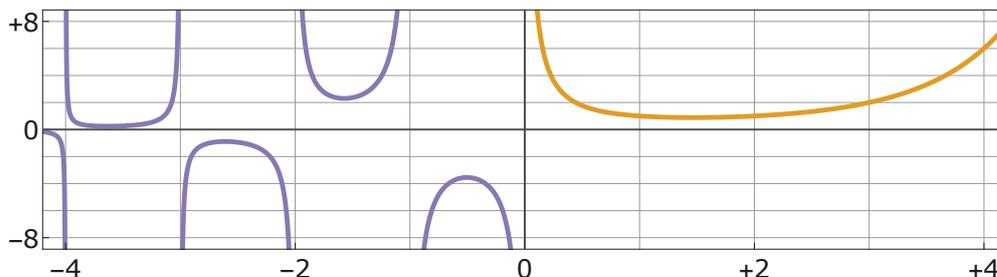


Abbildung Der Graph der Gamma-Funktion, die im Ursprung und in den negativen ganzen Zahlen nicht definiert ist, sondern jeweils eine Singularität besitzt. Für positive Argumente (gelber Zweig) ist $\Gamma(\xi)$ als unbestimmtes Integral wohldefiniert, aber für $\xi < 0$ (violette Zweige) muss die Rekursionsformel verwendet werden, da der Integrand $f(x) = x^{\xi-1} \exp(-x) = x^{\xi-1}(1 + O(x))$ dann eine nicht-integrierbare Singularität aufweist.

offene Intervalle Für ein offenes Intervall (a, b) ist das uneigentliche Integral von f durch die Formel

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_{\alpha}^{\xi} f(x) dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_{\xi}^{\beta} f(x) dx$$

definiert, wobei die Grenzfälle $a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$ wieder zugelassen sind und $\xi \in (a, b)$ eine beliebig gewählte Zwischenstelle ist. Insbesondere müssen nun

immer **zwei unabhängige** Grenzwerte im eigentlichen Sinne existieren.²⁵ Mithilfe der Gebietsadditivität können wir aber zeigen, dass die Wahl von ξ keine Rolle spielt bzw. dass jede andere Wahl dieselben Ergebnisse liefert (Übungsaufgabe).

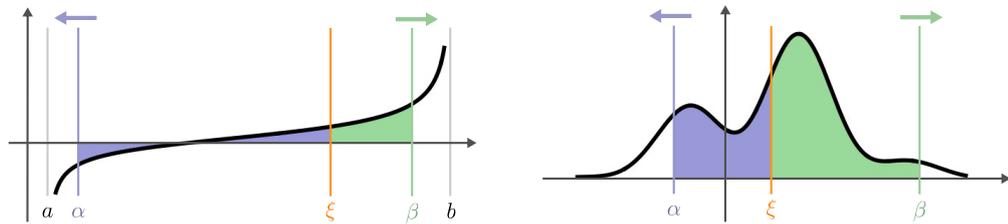


Abbildung Uneigentliche Integrale auf den offenen Intervallen (a, b) und $(-\infty, \infty)$ erfordern die Berechnung zweier unabhängiger einseitiger Grenzwerte (blau und grün), wobei die Zwischenstelle ξ (an der das Intervall zerteilt wird) beliebig gewählt werden darf. Analoges gilt für $(-\infty, b)$ und $(a, +\infty)$.

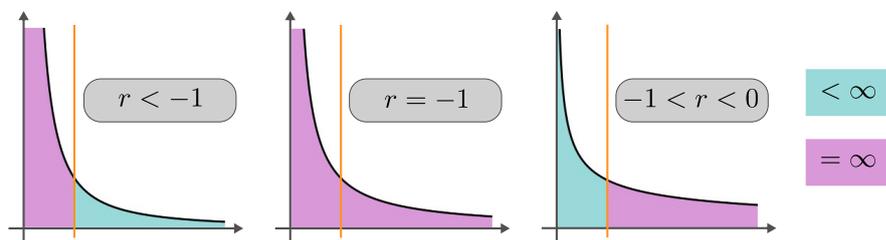


Abbildung Die Gesamtfläche unter dem Graph von x^r auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist für keinen Wert von $r \in \mathbb{R}$ endlich, wobei dies hier für negative Exponenten illustriert ist.

Beispiele

- Das verallgemeinerte Monom $f(x) = x^r$ ist für keinen Wert des Parameters $r \in \mathbb{R}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ uneigentlich integrierbar, denn für jede Wahl von ξ gilt

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \int_{\alpha}^{\xi} x^r dx = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{\beta \nearrow \infty} \int_{\xi}^{\beta} x^r dx = \infty,$$

je nachdem ob $r \leq -1$ oder $r \geq -1$ ist (siehe auch das entsprechende Bild).

- Die asymptotischen Eigenschaften der Gaußschen Fehlerfunktion erf implizieren

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \int_{\alpha}^0 e^{-x^2} dx + \lim_{\beta \nearrow +\infty} \int_0^{\beta} e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{\beta \nearrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\beta) - \lim_{\alpha \searrow -\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(\operatorname{erf}(+\infty) - \operatorname{erf}(-\infty) \right) = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

wobei wir in der Vorlesung *Analysis 3* sehen werden, dass man den Wert dieses sehr wichtigen uneigentlichen Integrals auch anders (und viel eleganter) herleiten kann.

²⁵Bei den weiter unten diskutierten Cauchyschen Hauptwerten ist das anders: Dort werden die Grenzübergänge nicht unabhängig voneinander, sondern in gekoppelter Weise ausgeführt.

3. Einfacher zu rechnen ist der Fall

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \int_{\alpha}^0 x e^{-x^2} dx + \lim_{\beta \nearrow +\infty} \int_0^{\beta} x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \frac{1}{2} \left(-1 + e^{-\alpha^2} \right) + \lim_{\beta \nearrow +\infty} \frac{1}{2} \left(+1 - e^{-\beta^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir für jede andere Wahl der Zwischenstelle dasselbe Endergebnis erhalten.

4. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\alpha \searrow -1} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\beta \nearrow +1} \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\alpha \searrow -1} \left(\arcsin(0) - \arcsin(\alpha) \right) + \lim_{\beta \nearrow +1} \left(\arcsin(\beta) - \arcsin(0) \right) \\ &= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = \pi \end{aligned}$$

im Sinne uneigentlicher Integrale. Insbesondere besitzt der Integrand an den Intervallrändern $x = -1$ und $x = +1$ *integrierbare Singularitäten*, wobei wir dies auch aus den Taylor-Entwicklungen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(1 + O(1-x) \right) \quad \text{für } x \lesssim +1$$

sowie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(1 + O(1+x) \right) \quad \text{für } x \gtrsim -1,$$

ablesen können.²⁶

5. Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

berechnen wir

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=\alpha}^{x=\beta} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2} \right).$$

Dies impliziert

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \searrow -\infty} -\infty, \quad \int_{\xi}^{\beta} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \nearrow \infty} \infty$$

für jedes feste $\xi \in \mathbb{R}$ und wir schließen, dass f nicht uneigentlich integrierbar auf \mathbb{R} ist.

²⁶Die Bezeichnung $x \gtrsim -1$ meint $x \approx -1$ und $x > -1$, d.h. x ist ungefähr -1 , aber auch größer als -1 . Analog ist $x \lesssim +1$ zu interpretieren.

Lücken im Definitionsbereich Ist f wohldefiniert auf $[a, x_*) \cup (x_*, b]$, so nennen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \nearrow x_*} \int_a^\alpha f(x) dx + \lim_{\beta \searrow x_*} \int_\beta^b f(x) dx$$

das entsprechende uneigentliche Integral, sofern die Grenzwerte auf der rechten Seite beide im eigentlichen Sinne existieren.

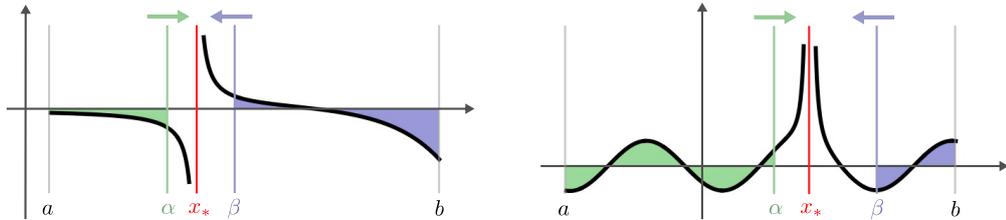


Abbildung Auch bei einer isolierten Lücke x_* im Definitionsbereich wird das uneigentliche Integral mithilfe zweier unabhängiger Grenzübergänge (wieder grün und blau) definiert.

Beispiele

- Die Funktion $f(x) = (x - x_*)^j$ ist für alle ganzen Exponenten $j \in \mathbb{Z}$ mit $j < -1$ auf dem Intervall $[a, b]$ nicht uneigentlich integrierbar, denn

$$\int_a^\alpha (x - x_*)^j dx = (-1)^j \frac{(x_* - a)^{j+1} - (x_* - \alpha)^{j+1}}{j + 1}$$

bzw.

$$\int_\beta^b (x - x_*)^j dx = \frac{(b - x_*)^{j+1} - (\beta - x_*)^{j+1}}{j + 1}$$

konvergiert für $\alpha \nearrow x_*$ bzw. $\beta \searrow x_*$ nicht gegen eine reelle Zahl, sondern nur im uneigentlichen Sinne gegen $-\infty$ oder $+\infty$.

- Mit ähnlichen Betrachtungen und unter sorgfältiger Beachtung aller Vorzeichen zeigen wir, dass

$$f(x) = |x - x_*|^r$$

für reelle Exponenten $r < -1$ nicht uneigentlich integrierbar ist, wobei dies auch für $r = -1$ gilt, aber durch Rechnungen mit dem Logarithmus begründet wird. Für $r > -1$ erhalten wir jedoch

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b - x_*)^{r+1} + (x_* - a)^{r+1}}{r + 1}$$

für das entsprechende uneigentliche Integral.

***Cauchysche Hauptwerte** Wir wollen diese Verallgemeinerung des bestimmten Integralbegriffs hier nur streifen, indem wir zwei typische Beispiele studieren.

Beispiel auf einem offenen Intervall: Die Funktion

$$f(x) = (x + 2)/(x^2 + 1)$$

ist auf $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar, da sie im Unendlichen zu langsam abklingt und daher die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \searrow -\infty} \int_{\alpha}^{\xi} f(x) dx = -\infty, \quad \lim_{\beta \nearrow +\infty} \int_{\xi}^{\beta} f(x) dx = +\infty$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ nicht im eigentlichen, sondern nur im uneigentlichen Sinne existieren. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \int_{-\zeta}^{+\zeta} f(x) dx &= \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \left(\int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{2}{x^2 + 1} dx \right) \\ &= \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \left(\left[\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_{x=-\zeta}^{x=+\zeta} + \left[2 \arctan(x) \right]_{x=-\zeta}^{x=+\zeta} \right) \\ &= 2 \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \left(\arctan(+\zeta) - \arctan(-\zeta) \right) = 2\pi, \end{aligned}$$

wobei der Grenzwert auf der linken Seite bzw. die angegebene Zahl auf der rechten Seite der *Cauchysche Hauptwert* von f genannt wird.

Beispiel mit einer Lücke im Definitionsbereich: Analog ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x + 1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

im Sinne der obigen Definition nicht uneigentlich integrierbar auf $[-1, 0) \cup (0, +1]$, aber wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{+\varepsilon}^{+1} f(x) dx \right) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\left[x + \ln|x| \right]_{x=-1}^{x=-\varepsilon} + \left[x + \ln|x| \right]_{x=+\varepsilon}^{x=+1} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left((-\varepsilon + \ln \varepsilon + 1) + (1 - \ln \varepsilon - \varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2 - 2\varepsilon) = 2 \end{aligned}$$

existiert wieder ein Cauchyscher Hauptwert.

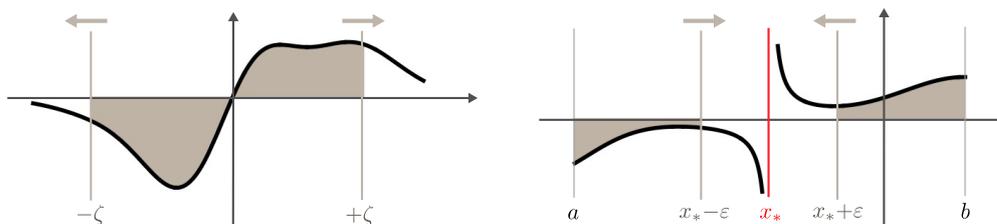


Abbildung Beim Cauchyschen Hauptwert wird statt zweier separater Grenzwerte nur ein Limes betrachtet. Dieses Konzept ist schwächer als das uneigentliche Integral, da es Auslöschungseffekte geben kann, bei denen sich positive und negative Beiträge gegenseitig aufheben.

Kapitel 11

Funktionenfolgen

Vorlesungswoche 14

Vorbemerkung Wir haben bisher Zahlenfolgen studiert, aber in sehr naheliegender Weise können Folgen auch aus anderen Entitäten gebildet werden. In diesem Kapitel betrachten wir Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bei denen das n -te Glied keine Zahl, sondern eine Funktion $f_n : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Das Intervall J ist dabei fixiert, kann aber zunächst offen oder abgeschlossen sowie endlich oder unendlich sein.

Funktionenfolgen sind ausgesprochen wichtig in der Mathematik, aber sie sind in vielen Aspekten deutlich komplizierter und schwieriger zu verstehen als Folgen von reellen oder komplexen Zahlen:

1. Eine naheliegende Frage ist, ob die Funktionen f_n für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzfunktion $f_\infty : J \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren oder nicht.¹ Es wird sich zeigen, dass es — im Gegensatz zu Zahlenfolgen — mehrere sinnvolle, aber nicht äquivalente Konvergenzbegriffe gibt.
2. Eine weitere Frage betrifft die analytischen Eigenschaften der Grenzfunktion (so sie existiert), zum Beispiel ihre Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit. Auch hier gibt es keine einfachen Antworten, denn es kann zum Beispiel durchaus passieren, dass eine Folge stetiger Funktionen gegen eine unstetige Grenzfunktion konvergiert.

11.1 Beispiele und punktweise Konvergenz

Definition Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise (auf dem Intervall J) gegen die Grenzfunktion f_∞ , falls

$$f_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für jedes $x \in J$ im Sinne konvergenter Zahlenfolgen gilt.

Bemerkung

1. Die Grenzwertformel kann auch als Definition von f_∞ verstanden werden: Wenn für jedes $x \in J$ die reelle Zahlenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (deren Glieder durch Auswertung der Funktionen f_n im Punkt x entstehen) für $n \rightarrow \infty$ konvergiert, so ist $f_\infty(x)$ gerade der entsprechende Grenzwert.

¹Die Grenzfunktion bezeichnen wir auch als *Limesfunktion* oder als *Limes der Funktionenfolge*.

2. Wir hatten in der Theorie konvergenter Zahlenfolgen schon gesehen, dass die Bedingung

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

äquivalent zu $f_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ist.

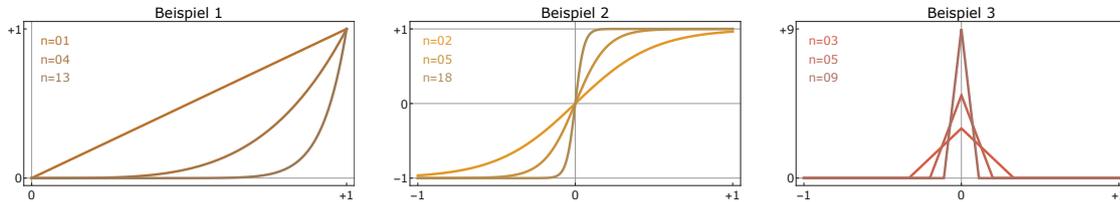


Abbildung Illustration der Funktionenfolgen aus den ersten drei Beispielen, wobei jeweils die Graphen dreier Folgenglieder f_n zusammen dargestellt sind.

Beispiele

1. Auf dem Intervall $J = [0, 1]$ wird durch

$$f_n(x) := x^n$$

eine Folge stetiger Funktionen definiert, die punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

konvergiert, die allerdings nicht mehr stetig ist. Beachte auch, dass hier wegen $f_n(0)$ und $f_n(1) = 1$ alle Funktionen am linken und am rechten Rand immer denselben Wert annehmen und dass für jedes x mit $0 < x < 1$ die Konvergenz $x^n \rightarrow 0$ monoton bzgl. n ist. Siehe dazu auch das Bild.

2. Die durch

$$f_n(x) := \tanh(nx) = \frac{\sinh(nx)}{\cosh(nx)} = \frac{e^{+nx} - e^{-nx}}{e^{+nx} + e^{-nx}}$$

definierte Funktionenfolge auf $J = \mathbb{R}$ erfüllt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$f_n(x) = \frac{e^{+2nx} - 1}{e^{+2nx} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \quad \text{bzw.} \quad f_n(x) = \frac{1 - e^{-2nx}}{1 + e^{-2nx}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +1$$

für $x < 0$ bzw. $x > 0$. Insbesondere gilt $f_\infty = \text{sgn}$, d.h. diese Folge konvergiert für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen die Signumsfunktion.

3. Für die Folge mit

$$f_n(x) := n \max\{1 - |nx|, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ n + n^2 x & \text{für } -1/n < x < 0 \\ n & \text{für } x = 0 \\ n - n^2 x & \text{für } 0 < x < +1/n \\ 0 & \text{für } x \geq +1 \end{cases}$$

erhalten wir (siehe auch das Bild) die Konvergenzaussage

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit kleinen Nebenrechnungen. Insbesondere liegt hier wegen des uneigentlichen Grenzwertes im Ursprung *keine* punktweise Konvergenz vor.

Ausblick*: Mithilfe der Rechenregeln für Integrale können wir zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(0)$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Aus dieser Formel werden wir später — zum Beispiel in der Vorlesung *Funktionalanalysis* — schließen, dass f_n im *distributionellen Sinne* gegen die *Diracsche Delta-Distribution* konvergiert.²

4. Spezielle Funktionenfolgen entstehen, wenn wir bei festgehaltenem Entwicklungspunkt für eine gegebene, unendlich oft differenzierbare Funktion ihre Taylor-Polynome mit wachsendem Grad betrachten. Für den Sinus und $x_* = \pi/4$ ergibt sich zum Beispiel

$$f_n(x) := T_{\sin, n, \pi/4}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin^{(k)}(\pi/4)}{k!} (x - \pi/4)^k$$

und die Potenzreihendarstellung des Sinus impliziert die punktweise Konvergenz gegen die Grenzfunktion $f_\infty = \sin$.

Bemerkung: In diesem Beispiel ist die betrachtete Funktionenfolge eigentlich die Partialsummenfolge einer anderen Funktionenfolge, d.h. es gilt $f_n = \sum_{k=0}^n g_k$, wobei im konkreten Fall das n -te Glied von $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Monom vom Grad n ist. Analog zur Theorie von Zahlenfolgen können wir Reihen bzw. unendliche Summen von Funktionen definieren und untersuchen. Siehe dazu auch den Abschnitt über Fourier-Reihen.

5. Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \frac{\lceil nx \rceil}{n}$$

sind stückweise konstant und insbesondere nicht stetig, wobei $\lceil \cdot \rceil$ wieder die Gauß-Klammer des Aufrundens ist. Aus $0 \leq \lceil nx \rceil - nx \leq 1$ folgt $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq 1/n$ mit $f_\infty(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir schließen, dass der punktweise Grenzwert von f_n für $n \rightarrow \infty$ die lineare Funktion f_∞ ist. Siehe das entsprechende Bild.

6. Die durch

$$f_n(x) := \exp(\sin(2\pi n x))$$

definierten Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ weisen mit wachsendem n immer mehr Oszillationen auf und können daher für $n \rightarrow \infty$ nicht punktweise konvergieren.

²Die *Distributionentheorie* ist ein Meilenstein der modernen Analysis und spielt auch in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine herausragende Rolle. Eine Distribution kann als eine verallgemeinerte Funktion angesehen werden und die Diracsche Delta-Distribution ist das vielleicht wichtigste Beispiel. Die Funktion φ aus der angegebenen Integralformel wird in diesem Kontext auch *Testfunktion* genannt und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Beispiel für eine *Standard-Dirac-Folge*.

*Ausblick**: In der der Vorlesung *Funktionalanalysis* werden wir sehen, dass f_n im *schwachen Sinne* gegen die konstante Funktion f_∞ mit

$$f_\infty(x) = \int_0^1 \exp(2\pi \sin(y)) dy \approx 1.67$$

konvergiert. Der Grund ist, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty(x) \varphi(x) dx$$

für alle stetigen Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, die im Unendlichen, d.h. für $x \rightarrow \pm\infty$, hinreichend schnell abklingen.

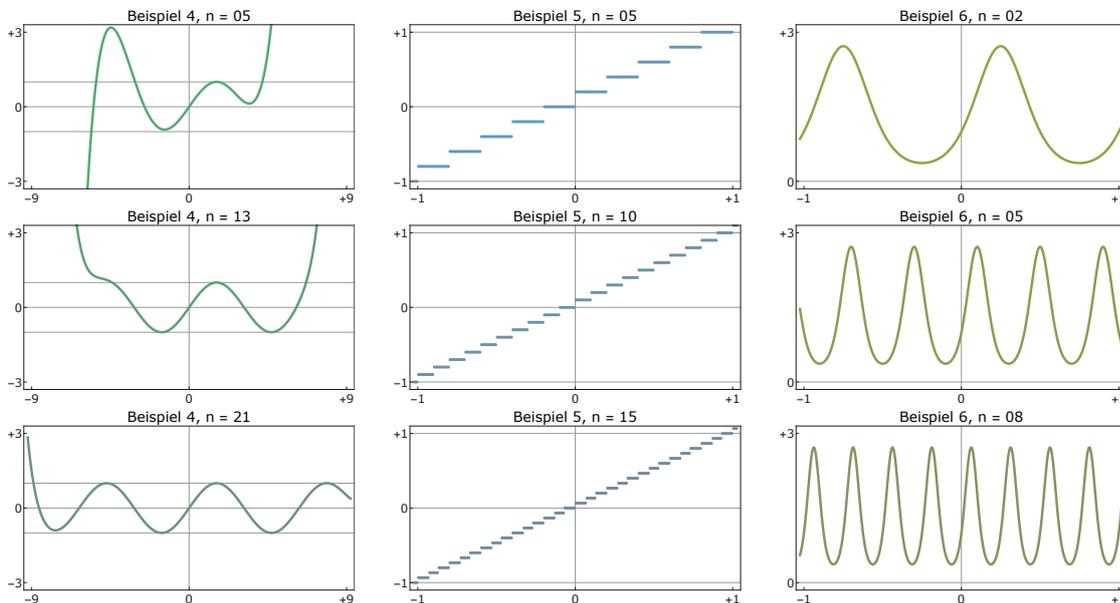


Abbildung Die Funktionenfolgen aus den letzten drei Beispielen, wobei diesmal für jeweils drei Glieder f_n die entsprechenden Graphen untereinander gezeichnet wurden.

Merkregel Der punktweise Grenzwert von stetigen/differenzierbaren/integrierbaren Funktionen wird im Allgemeinen nicht stetig/differenzierbar/integrierbar sein.

Cantor-Funktion und Cantor-Menge* Eine wichtige Rolle spielen auch rekursiv definierte Funktionenfolgen. Ein prominentes Beispiel auf dem Intervall $J = [0, 1]$ sind die durch

$$f_1(x) := x \quad f_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x - 2) & \text{für } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definierten Funktionen f_n , die für $n \rightarrow \infty$ punktweise konvergieren (siehe das erste Bild). Die Grenzfunktion f_∞ besitzt einige seltsam anmutende Eigenschaften und wird Cantor-Funktion oder *Teufelstreppe* genannt. Sie ist Hölder-stetig und außerhalb der Cantor-Menge M_∞ (siehe das zweite Bild) differenzierbar, wobei ihre Ableitung dort in jedem Punkt verschwindet. Insbesondere gilt $f'_\infty(x) = 0$ in *fast allen* Punkten $x \in [0, 1]$.

Trotzdem ist f_∞ keine konstante Funktion, denn es gilt zum Beispiel $f_\infty(0) = 0$, $f_\infty(1/2) = 1/2$ und $f_\infty(1) = 1$. Die heuristische Erklärung ist, dass f_∞ nur in den Punkten aus M_∞ wächst, aber dort jeweils mit unendlich großer Ableitung.

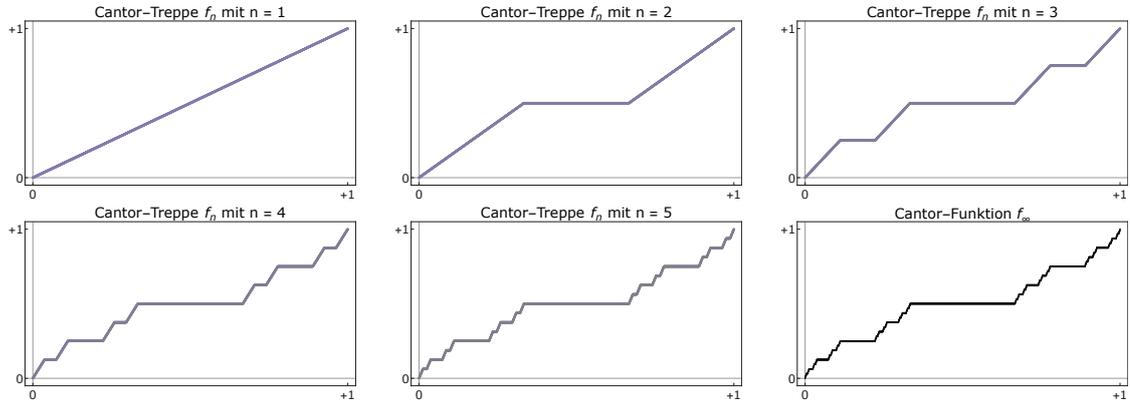


Abbildung Die Cantor-Funktion f_∞ (rechts unten) ist der punktweise Limes einer rekursiv definierten Folge stetiger und stückweise affiner Funktionen, wobei f_{n+1} aus f_n gewonnen wird, indem für jeden linear wachsenden Zweig in der Mitte ein weiteres konstantes Plateau eingebaut wird (analog zum Übergang von f_1 zu f_2).



Abbildung Die Cantor-Menge $M_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty M_n$ kann als Limes einer rekursiv definierten Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen des Intervalls $[0, 1]$ betrachtet werden, wobei $M_1 = [0, 1]$ gilt und M_{n+1} aus M_n dadurch gewonnen wird, dass in jedem Teilintervall von M_n das mittlere Drittel entfernt wird. Die Cantormenge ist eine fraktale Menge und spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen der Mathematik. Sie ist in einem gewissen Sinne immer noch sehr groß (sie enthält überabzählbar viele Elemente), aber gleichzeitig auch extrem klein. Sie ist nämlich eine sogenannte *Nullmenge*, d.h. ihr eindimensionales Volumen ist 0, wohingegen ihr Komplement $[0, 1] \setminus M_\infty$ sowie das Intervall $[0, 1]$ beide das Volumen 1 besitzen.

11.2 gleichmäßige Konvergenz

Vorbemerkung Wir werden nun einen stärkeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen einführen, der aus analytischer Sicht wesentlich bessere Eigenschaften besitzt und insbesondere die punktweise Konvergenz impliziert.

Definition Für eine beschränkte Funktion $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ wird

$$\|g\| := \sup_{x \in J} |g(x)| = \sup \{ |g(x)| : x \in J \}$$

die Supremumsnorm von g genannt.

Bemerkungen

1. Wenn die Funktion $|g| : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|g|(x) = |g(x)|$ ihr Maximum auf J annimmt, so können wir \max statt \sup schreiben. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn J kompakt und g stetig ist.
2. Für unbeschränkte Funktionen schreibt man oftmals $\|g\| = \infty$, aber dieser Fall wird bei uns keine Rolle spielen.

Definition Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f_∞ , wenn

$$\|f_n - f_\infty\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

im Sinne der Konvergenz reeller Zahlen gilt.

Bemerkungen

1. Es gilt offensichtlich

$$0 \leq |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \|f_n - f_\infty\|$$

für alle $x \in J$ und deshalb impliziert die gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz.

2. Die umgekehrte Aussage gilt im Allgemeinen nicht (siehe auch die Gegenbeispiele unten), wobei wir dies heuristisch wie folgt verstehen können: Bei punktweiser Konvergenz konvergiert die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n \rightarrow \infty}$ gegen $f_\infty(x)$ für jedes $x \in J$, aber die Konvergenzgeschwindigkeit kann für verschiedene Werte von x sehr unterschiedlich ausfallen. Insbesondere existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$ gilt, aber dieses N darf nicht nur von ε , sondern eben auch von x abhängen. Bei gleichmäßiger Konvergenz können wir jedoch N unabhängig von x wählen, sodass

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f_\infty(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$ gilt.

3. In der Definition ist stillschweigend vorausgesetzt, dass $f_n - f_\infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Beispiel Die Funktionenfolge

$$f_n(x) := n^{-1} \ln(\cosh(nx))$$

konvergiert auf $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ gleichmäßig gegen die Betragsfunktion $f_\infty(x) = |x|$.

Beweis: Die Differenzfunktion $g_n := f_\infty - f_n$ ist gerade und auf der positiven Halbachse außerdem monoton wachsend und positiv, denn dort gilt $g'_n(x) = 1 - \tanh(nx) > 0$ sowie

$$\begin{aligned} g_n(x) &= n^{-1} \left(nx - \ln(\cosh(nx)) \right) = n^{-1} \left(\ln(\exp(nx)) - \ln(\cosh(nx)) \right) \\ &= n^{-1} \ln \left(\frac{2 \exp(+nx)}{\exp(+nx) + \exp(-nx)} \right) = n^{-1} \ln \left(\frac{2}{1 + \exp(-2nx)} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|g_n\| = \lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = n^{-1} \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f_∞ . □

Bemerkung: Es gilt

$$f'_n(x) = \tanh(nx)$$

und wir hatten oben schon gesehen, dass f'_n für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen die Signumsfunktion konvergiert. Mit dem nachfolgenden Theorem können wir schließen, dass diese Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann, denn andernfalls müsste die Signumsfunktion stetig sein, was sie aber nicht ist.

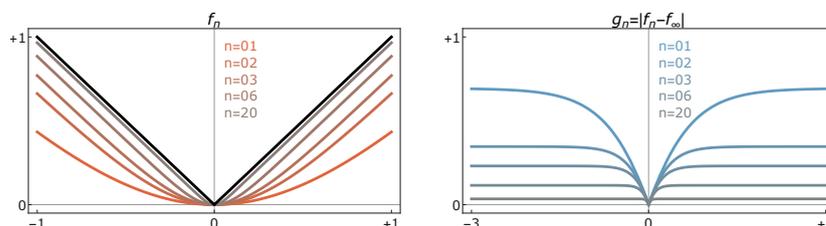


Abbildung Die Graphen der Funktionen f_n und g_n aus dem Beispiel, wobei die schwarze Kurve im linken Bild den Grenzwert f_∞ repräsentiert, die im Ursprung nicht differenzierbar ist.

Gegenbeispiele

1. Die Funktionenfolge aus dem ersten Beispiel in diesem Kapitel konvergiert zwar punktweise, aber nicht gleichmäßig.

Beweis: Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir $|f_n(1) - f_\infty(1)| = |1^n - 1| = 0$ sowie

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| = |x^n - 0| = x^n \leq 1 \quad \text{für } x \in [0, 1],$$

und die Supremumsbildung bzgl. $x \in [0, 1]$ liefert $\|f_n - f_\infty\| \leq 1$. Andererseits gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \lim_{x \nearrow 1} |x^n - 0| = \lim_{x \nearrow 1} x^n = 1$$

und damit $\|f_n - f_\infty\| \geq 1$. Insgesamt haben wir gezeigt, dass

$$\|f_n - f_\infty\| = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Auf dem Intervall $J = [0, 1]$ konvergiert die Funktionenfolge

$$f_n(x) := nx \exp(1 - nx) - 2x^2 + 4x$$

punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f_\infty(x) = -2x^2 + 4x$.

Beweis: Die Differenzfunktionen $g_n := f_n - f_\infty$ sind alle nicht-negativ und konvergieren für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen die Nullfunktion, wobei dies für $x = 0$ offensichtlich ist und im Fall von $0 < x \leq 1$ aus den Grenzwertformeln der Exponentialfunktion hergeleitet werden kann.³ Für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$g'_n(x) = \exp(1 + nx)(n - n^2x)$$

³Alternativ können wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{\exp(nx - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x \exp(nx - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(1 - nx) = 0,$$

aus der Regel von de l'Hospital ableiten, wobei wir im zweiten Schritt den Zähler und den Nenner nach der Variablen n differenziert haben.

und damit auch $g'_n(1/n) = 0$ sowie

$$g'_n(x) > 0 \quad \text{für } 0 \leq x < 1/n, \quad g'_n(x) < 0 \quad \text{für } 1/n < x \leq 1.$$

Wir schließen, dass g_n im Punkt $x = 1/n$ sein Maximum annimmt und erhalten

$$\|g_n\| = g_n(1/n) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt die Behauptung. \square

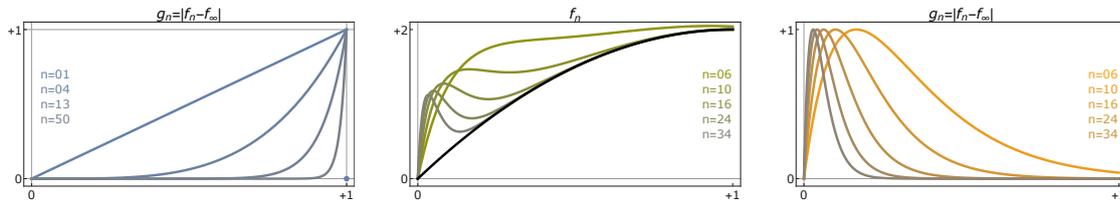


Abbildung Links: Die Funktionen $g_n = f_n - f_\infty$ aus dem ersten Gegenbeispiel, wobei $g_n(1) = 0$ sowie $\lim_{x \nearrow 1} g_n(x) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mitte und rechts: Die Funktionen aus dem zweiten Gegenbeispiel.

Theorem (gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen f_∞ konvergieren, so ist auch f_∞ stetig.

Beweis Seien $x_* \in J$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Nach Voraussetzung existiert ein $n_* \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{n_*} - f_\infty\| < \frac{1}{3} \varepsilon$$

und weil f_{n_*} nach Voraussetzung stetig ist, können wir $\delta > 0$ so wählen, dass

$$|f_{n_*}(x) - f_{n_*}(x_*)| < \frac{1}{3} \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $|x - x_*| < \delta$ erfüllt ist. Für diese Punkte x gilt außerdem

$$|f_\infty(x) - f_\infty(x_*)| \leq |f_\infty(x) - f_{n_*}(x)| + |f_{n_*}(x) - f_{n_*}(x_*)| + |f_{n_*}(x_*) - f_\infty(x_*)|$$

nach der Dreiecksungleichung, wobei wir den ersten und den letzten der drei Summanden aufgrund der Wahl von n_* , den zweiten aber durch der Wahl von δ nach oben abschätzen können. Insgesamt erhalten wir

$$|f_\infty(x) - f_\infty(x_*)| < \|f_{n_*} - f_\infty\| + \frac{1}{3} \varepsilon + \|f_{n_*} - f_\infty\| < \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $|x - x_*| < \delta$. Da ε beliebig war, ergibt sich die Stetigkeit von f_∞ im Punkt x_* , und weil x_* auch beliebig war, folgt schließlich die Behauptung. \square

Bemerkungen

1. Wir hatten in den Beispielen schon gesehen, dass der punktweise Limes stetiger Funktionen nicht stetig sein muss.
2. Mit etwas mehr Aufwand können wir ein analoges Resultat für die Integrierbarkeit beweisen, d.h. der gleichmäßige Limes einer Folge integrierbarer Funktionen ist selbst integrierbar.
3. Die analoge Aussage mit Differenzierbarkeit statt Stetigkeit gilt jedoch nicht, wie wir im letzten Beispiel gezeigt haben.

Ausblick* Die Supremumsnorm $\|g\|$ wird in der Literatur meist als $\|g\|_\infty$ bezeichnet, denn es handelt sich eigentlich um den Grenzfalle in einer ganzen Familie von Normen. Für eine stetige Funktion g auf einem kompakten Intervall $J = [a, b]$ wird zum Beispiel für jeden Parameter $p \in (1, \infty)$ durch

$$\|g\|_p := \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

die entsprechende p -Norm definiert, wobei der Fall $p = 2$ besonders wichtig ist und wir außerdem

$$\|g\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|g\|_\infty$$

zeigen können.⁴ Die Eigenschaften von sogenannten *normierten Räumen* werden wir in den Vorlesungen *Analysis 2* und *Funktionalanalysis* weiter untersuchen.⁵ Besonders wichtig und interessant sind dabei die verschiedenen *Funktionsräume*, die jeweils in natürlicher Weise zu einem anderen Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen führen.⁶

Vertauschung von Grenzübergängen

Vorbemerkung In der Analysis tritt häufig die Frage auf, ob zwei Grenzübergänge miteinander vertauscht werden dürfen oder nicht. Wir wollen hier einige Beispiele und erste Ergebnisse vorstellen, können die Frage aber nicht erschöpfend diskutieren. Beachte dabei, dass Ableitungen und Integrale von Funktionen jeweils durch einen Grenzübergang definiert sind.

Analogie aus der realen Welt Wir wollen Wasser über eine Distanz l mit einem Eimer transportieren, dessen Boden ein Loch vom Durchmesser d aufweist, wobei wir das Loch beim Befüllen, aber nicht mehr danach zuhalten können. Wenn wir den prozentualen Füllstand nach dem Transport mit $s_{l,d}$ bezeichnen, so gilt

$$\lim_{d \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow \infty} s_{l,d} = 0 \%,$$

denn egal wie klein das Loch ist, bei einer hinreichend langen Strecke wird das ganze Wasser ausgelaufen sein. Andererseits gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow 0} s_{l,d} = 100 \%,$$

denn ein Eimer ohne Loch wird kein Wasser verlieren, egal wie lang der Transportweg auch ist. Für jede endliche Distanz $0 < l_* < \infty$ gilt aber

$$\lim_{d \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow l_*} s_{l,d} = \lim_{l \rightarrow l_*} \lim_{d \rightarrow 0} s_{l,d} = 100 \%$$

und wir schließen, dass die Frage nach der Vertauschbarkeit von Grenzübergängen nicht universell beantwortet werden kann.

⁴Beachte, dass es sich hierbei um Konvergenz bzgl. Parameters $p \in \mathbb{R}$ handelt.

⁵In der modernen Mathematik meint *Raum* nichts anderes als *Menge mit Struktur*, wobei diese Struktur von algebraischer und/oder analytisch-topologischer Natur sein kann. Die Verbindung zum physikalischen Raumkonzept ist dabei eigentlich immer vorhanden, aber manchmal erst auf den zweiten oder dritten Blick zu erkennen.

⁶Prominente Beispiele sind die *Lebesgue-Räume* und die *Sobolev-Räume*, die jeweils alle Funktionen mit gewissen Eigenschaften enthalten.

Lemma (gleichmäßige Konvergenz und andere Grenzwertbildungen) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_*} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_*} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x_*)$$

für jedes $x_* \in J$ sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_\infty(x) dx$$

für alle a, b mit $[a, b] \subseteq J$.

Beweis *Teil 1:* Wir berechnen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_*} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_*) = f_\infty(x_*),$$

wobei wir zuerst die Stetigkeit von f_n und danach die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge ausgewertet haben. Andererseits ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_*} f_\infty(x) = f_\infty(x_*),$$

aus der punktweisen Konvergenz sowie der Stetigkeit von f_∞ . Letztere ergibt sich aus dem Theorem, weil f_n für $n \rightarrow \infty$ nicht nur punktweise, sondern sogar gleichmäßig konvergiert.

Teil 2: Die Standardabschätzungen für das Riemann-Integral liefern

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_\infty(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f_\infty(x)| dx \leq \|f_n - f_\infty\| (b - a)$$

und damit die zweite Behauptung. □

Bemerkung Das Lemma besagt, dass die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen mit der Konvergenz von Argumenten ($x \rightarrow x_*$) sowie mit der Integration (auch ein Grenzprozess) verträglich ist. Für die Differentiation gilt dies jedoch nicht, denn der gleichmäßige Limes differenzierbarer Funktionen muss nicht differenzierbar sein (siehe das Beispiel weiter oben).

Gegenbeispiel Wir betrachten noch einmal die stetigen Funktionen $f_n(x) = x^n$ auf dem Intervall $J = [0, 1]$, die für $n \rightarrow \infty$ punktweise, aber eben nicht gleichmäßig konvergieren (siehe das erste Beispiel sowie das entsprechende Bild). Mit einfachen Rechnungen erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \nearrow 1} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \nearrow 1} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1 = f_\infty(1)$$

sowie

$$\lim_{x \nearrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \nearrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \nearrow 1} 0 = 0 \neq f_\infty(1).$$

Hier ist also die Reihenfolge der Grenzübergänge wichtig und eine Vertauschung liefert ein anderes Ergebnis.

Merkregel Zwei Grenzübergänge dürfen im Allgemeinen nicht vertauscht werden bzw. nur dann, wenn dies durch ein entsprechendes Theorem abgedeckt ist.⁷

⁷Dieses Prinzip ist einer der roten Fäden, die sich durch die ganze mathematische Analysis ziehen.

11.3 Fourier-Reihen

Vorbemerkung Eine für die mathematische Analysis sehr fruchtbare Beobachtung ist, dass jede hinreichend gute Funktion als eine Überlagerung von *Schwingungen* interpretiert werden kann. Im Allgemeinen führt dieses Konzept auf die *Fourier-Transformation*, die eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik, in der Physik (vor allem in der Quantenmechanik) und in allen Ingenieurwissenschaften spielt. Zum Beispiel beruhen viele Algorithmen in der Bild-, Ton- und Signalverarbeitung auf Fourier-Methoden oder ihren Verallgemeinerungen.

In diesem Abschnitt diskutieren wir den Spezialfall periodischer Funktionen, für die sich die Theorie deutlich vereinfacht und zu den *Fourier-Reihen* führt, die Sie im Fortgang Ihres mathematischen oder physikalischen Studiums häufig verwenden werden. Wir können dabei keine mathematisch rigorose Darstellung geben, sondern beschränken uns auf die Diskussion der zentralen Ideen sowie wichtiger Beispiele. Zum Abschluss formulieren wir das zentrale Konvergenztheorem für die zugrunde liegenden Partialsummen von Funktionenfolgen, können aber den Beweis mit den uns bekannten Methoden noch nicht führen.

Alle im Folgenden betrachteten Funktionen sind zumindest stückweise stetig und damit auf jedem kompakten Intervall integrierbar.

periodische Funktionen

Definition Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $2X$ -periodisch, falls

$$f(x + 2X) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $2X > 0$ die Periode von f genannt wird.⁸

Bemerkungen

1. Die Summe und das Produkt $2X$ -periodischer Funktionen sind wieder $2X$ -periodisch.
2. Ist f eine $2X$ -periodische Funktion und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $\varphi \circ f$ periodisch mit Periode $2X$.
3. Jede $2X$ -periodische Funktion besitzt auch die Perioden $4X$, $6X$, $8X$ usw..

periodische Fortsetzung Jede $2X$ -periodische Funktion ist bereits eindeutig durch ihre Werte auf einem halboffenen Intervall der Länge $2X$ festgelegt. So wird zum

⁸Der Parameter X bezeichnet bei uns also die halbe Periode und nicht etwa die ganze Periode. Mit dieser Konvention schreiben sich einige der Formeln einfacher.

Beispiel auf der rechten Seite der Formel

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ f(x+4X) & \text{für } x_* - 4X < x \leq x_* - 2X \\ f(x+2X) & \text{für } x_* - 2X < x \leq x_* \\ f(x) & \text{für } x_* < x \leq x_* + 2X \\ f(x-2X) & \text{für } x_* + 2X < x \leq x_* + 4X \\ f(x-4X) & \text{für } x_* + 4X < x \leq x_* + 6X \\ \dots & \dots \end{cases}$$

die Funktion f immer nur in Punkten ausgewertet, die zwischen x_* und $x_* + 2X$ liegen. Wir können also eine $2X$ -periodische Funktion f dadurch definieren, dass wir ihre Werte auf der Periodizitätszelle $(x_*, x_* + 2X]$ vorschreiben. Dabei kann $x_* \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden, obwohl wir in der Praxis meist $x_* = 0$ oder $x_* = -X$ setzen.

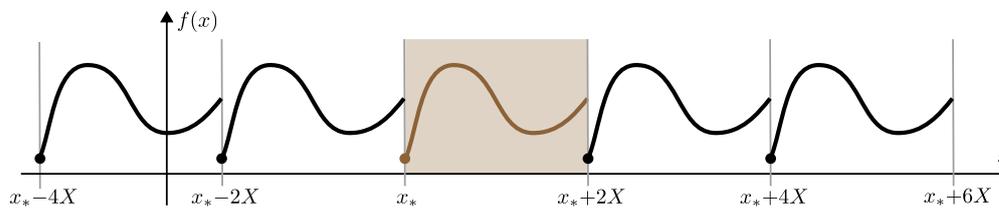


Abbildung Jede Funktion auf einem halboffenen Intervall der Bauart $(x_*, x_* + 2X]$ kann in eindeutiger Weise zu einer $2X$ -periodischen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden. Dabei können Unstetigkeiten in den Punkten $x = x_* + k \cdot 2X$ mit $k \in \mathbb{Z}$ entstehen.

Lemma (nützliche Integralformeln) Für jede $2X$ -periodische Funktion f gilt

$$\int_{x_*}^{x_*+2X} f(x) dx = \int_0^{2X} f(x) dx = \int_{-X}^{+X} f(x) dx, \quad \int_0^{n \cdot 2X} f(x) dx = n \int_0^{2X} f(x) dx$$

für alle $x_* \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Alle Aussagen ergeben sich unmittelbar aus der $2X$ -Periodizität von f sowie der Gebietsadditivität von Integralen (Übungsaufgabe).⁹ \square

harmonische Funktionen Die wichtigsten Beispiele $2X$ -periodischer Funktionen sind

$$1 = \cos(0 \kappa x), \quad \cos(m \kappa x), \quad \sin(m \kappa x)$$

mit $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, wobei die Kreiswellenzahl¹⁰ durch

$$\kappa := \frac{\pi}{X} = \frac{2\pi}{2X}$$

gegeben ist. Sie sind, wie wir sehen werden, die Bausteine der Fourier-Reihen und beschreiben die Elementarschwingungen.

⁹Die Formeln können auch direkt aus dem Bild zur periodischen Fortsetzung abgelesen werden.

¹⁰Wenn x die Interpretation einer Länge besitzt, so ist κ eine inverse Länge und $1/(2X) = \kappa/(2\pi)$ die *Wellenzahl*. In der Physik und der ingenieurwissenschaftlichen Systemtheorie werden oftmals die Buchstaben t bzw. T anstelle von x bzw. X verwendet und als *Zeitvariable* bzw. *Periodenhalbdauer* angesehen. In diesem Kontext wird dann κ durch die *Kreisfrequenz* $\omega = \pi/T = (2\pi)/(2T)$ ersetzt. Die Mathematik der Fourier-Reihen ändert sich aber durch den Wechsel in der Notation nicht.

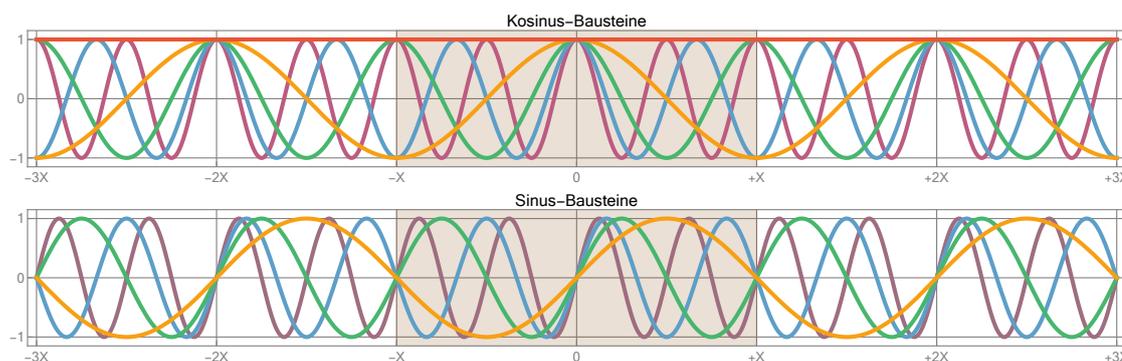


Abbildung Die harmonischen Funktionen für $m = 1$ (gelb), $m = 2$ (grün), $m = 3$ (blau), $m = 4$ (lila) sowie die konstante Funktion für $m = 0$ (rot).

Lemma (Orthogonalitätsrelationen) Für jedes $X > 0$ und alle $m, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-X}^{+X} \cos(m \kappa x) \sin(l \kappa x) dx = 0$$

sowie

$$\int_{-X}^{+X} \cos(m \kappa x) \cos(l \kappa x) dx = \int_{-X}^{+X} \sin(m \kappa x) \sin(l \kappa x) dx = X \delta_{m,l},$$

wobei

$$\delta_{m,l} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = l \\ 0 & \text{für } m \neq l \end{cases}$$

das sogenannte Kronecker-Delta ist. Außerdem ist

$$\int_{-X}^{+X} 1 dx = 2X, \quad \int_{-X}^{+X} \cos(l \kappa x) dx = 0, \quad \int_{-X}^{+X} \sin(l \kappa x) dx = 0$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Beweis Alle Formeln können direkt nachgerechnet werden, wobei zweifache partielle Integration hilfreich ist (Übungsaufgabe). Beachte auch, dass der allgemeine Fall mittels der Substitution $\tilde{x} = \kappa x$ auf den Spezialfall $X = \pi$ und $\kappa = 1$ zurückgeführt werden kann. \square

Bemerkungen

1. Wir können in allen Integralen auch von 0 bis $2X$ integrieren. Siehe dazu das Lemma über die nützlichen Integralformeln.
2. Wir werden sehen, dass die Orthogonalitätsrelationen und ihre Herleitung im Rahmen komplexwertiger Funktionen einfacher zu verstehen sind.

3. *Ausblick**: Die Formeln aus dem Lemma können mithilfe der Abkürzungen

$$c_m(x) := \sqrt{2} \cos(m \kappa x), \quad s_m(x) := \sqrt{2} \sin(m \kappa x)$$

als

$$\langle c_m, s_l \rangle = 0, \quad \langle c_m, c_l \rangle = \langle s_m, s_l \rangle = \delta_{m,l}, \quad \langle 1, 1 \rangle = 1, \quad \langle 1, c_l \rangle = \langle 1, s_l \rangle = 0$$

geschrieben werden, wobei

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} u(x) v(x) dx$$

das Skalarprodukt in einem geeignet definierten reellen *Funktionsraum* ist.¹¹ Insbesondere bilden die Funktionen

$$\{1, c_1, s_1, c_2, s_2, c_3, s_3, \dots\}$$

in diesem unendlich-dimensionalen Raum eine vollständige *Orthonormalbasis*.

heuristische Definition

Überblick Die zentrale Idee der Fourier-Analyse ist, dass sich jede hinreichend gute X -periodische Funktion als Reihe

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m \kappa x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m \kappa x)$$

mit geeigneten Koeffizienten a_m und b_m schreiben lässt. Es stellen sich nun die folgenden Fragen:

1. Für welche Funktionen f ist die Reihendarstellung möglich?
2. Wie berechnen sich die Koeffizienten?

Die zweite Frage können wir vergleichsweise einfach beantworten (siehe die folgenden Rechnungen), aber die erste ist deutlich subtiler. Wir werden daher zunächst die entsprechenden Partialsummenfolgen einführen.

Notwendige Bedingungen für die Koeffizienten Wir multiplizieren beide Seiten der Reihendarstellung mit einer der harmonischen Funktionen, integrieren über eine Periodenlänge, vertauschen die Integration und die Reihenbildung¹², und setzen

¹¹Es handelt sich, etwas vereinfacht gesprochen, um den Lebesgue-Raum L^2 auf dem Intervall $[0, 2X]$, den wir in der Vorlesung *Funktionalanalysis* genauer studieren werden. Er ist eines der Standard-Beispiele für einen sogenannten Hilbert-Raum und spielt eine zentrale Rolle in der modernen Mathematik und Physik.

¹²Da sowohl unendliche Summen als auch bestimmte Integrale als Grenzwerte definiert sind, ist diese Vertauschung im allgemeinen problematisch und erfordert eigentlich eine eigene Begründung. Im Moment rechnen wir aber formal und setzen dabei stillschweigend voraus, dass die Funktion f hinreichend gut ist bzw. dass die Koeffizienten a_m und b_m für $m \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abklingen.

schließlich die Orthogonalitätsrelationen ein. Für den konstanten Baustein liefert dieses Verfahren die Formel

$$\begin{aligned} \int_{-X}^{+X} f(x) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-X}^{+X} 1 dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-X}^{+X} \cos(m \kappa x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-X}^{+X} \sin(m \kappa x) dx \\ &= a_0 X + \sum_{m=0}^{\infty} a_m 0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m 0 \\ &= X a_0 \end{aligned}$$

und damit eine notwendige Integraldarstellung von a_0 . Für den l -ten Kosinus-Baustein erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-X}^{+X} f(x) \cos(l \kappa x) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-X}^{+X} \cos(l \kappa x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-X}^{+X} \cos(m \kappa x) \cos(l \kappa x) dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-X}^{+X} \sin(m \kappa x) \cos(l \kappa x) dx \\ &= \frac{1}{2} a_0 0 + \sum_{m=0}^{\infty} a_m X \delta_{l,m} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m 0 \\ &= X a_l, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass alle Summanden in der zweiten Reihe verschwinden und in der ersten Reihe nur der Summand mit $m = l$ einen Beitrag liefert. Analog verifizieren wir die Formel

$$\int_{-X}^{+X} f(x) \sin(l \kappa x) dx = X b_l,$$

die wir anschließend nach b_l umstellen können.

Fourier-Koeffizienten und Fourier-Polynome Wir betrachten die notwendigen Bedingungen als Definition der Koeffizienten, d.h. wir setzen

$$a_0 := \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} f(x) dx, \quad a_m := \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} f(x) \cos(m \kappa x) dx$$

sowie

$$b_m := \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} f(x) \sin(m \kappa x) dx$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren außerdem

$$F_n(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos(m \kappa x) + \sum_{m=1}^n b_m \sin(m \kappa x)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und können den Fragenkatalog von oben wie folgt erweitern und konkretisieren:

1. Für welche Werte von x existiert der Limes $F_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$?
2. In welchem Sinne konvergiert die Funktionenfolge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Wie schnell/langsam ist die Konvergenz?
4. Für welche Werte von x gilt $F_\infty(x) = f(x)$?

Wir werden nun zunächst einige Beispiele studieren und erst später zu den allgemeinen Antworten zurückkehren. Dabei wird immer $X = \pi$ gelten, sodass die Formeln wegen $\kappa = 1$ etwas einfacher werden.

Bemerkungen

1. *Hinweis*: Merken Sie sich nicht die Formeln der Fourier-Koeffizienten, sondern den Weg ihrer Herleitung.
2. Wie schon bei den Orthogonalitätsrelationen können wir in den Integralformeln für die Koeffizienten a_m, b_m auch 0 bzw. $2X$ als untere bzw. obere Integralgrenze verwenden.
3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion F_n offensichtlich $2X$ -periodisch und außerdem unendlich oft differenzierbar. Mithilfe der Additionstheoreme

$$\sin(2\kappa x) = \sin(\kappa x) \cos(\kappa x), \quad \cos(2\kappa x) = \cos^2(\kappa x) - \sin^2(\kappa x), \quad \text{usw.}$$

können wir auch zeigen, dass F_n sich als trigonometrisches Polynom schreiben lässt, d.h. als Linearkombination von Produkten/Potenzen von $\sin(\kappa x)$ und $\cos(\kappa x)$. Die genauen Formeln interessieren uns hier aber nicht.

4. Aus theoretischer Sicht wäre es besser, $F_{f,n}(x)$ und $a_{f,m}, b_{f,m}$ statt $F_n(x)$ und a_m, b_m zu schreiben, da diese Größen natürlich von f abhängen. Um die Formeln übersichtlicher zu halten, werden wir aber im Folgenden diese Notation nicht verwenden.

typische Beispiele

Sägezahnfunktion Wir definieren f als 2π -periodische Fortsetzung der linearen Funktion auf dem Intervall $(-\pi, +\pi)$. Diese Fortsetzung ist in allen ungeraden Vielfachen von π unstetig, aber für die Fourier-Analyse wird es am Ende nicht wichtig sein, welchen Wert Sie dort annimmt (wir weisen ihr der Einfachheit halber den Wert 0 zu).¹³ Da f ungerade ist,¹⁴ ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = 0, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(mx) dx = 0$$

¹³Wir können mithilfe von Gauß-Klammern auch explizite Formeln angeben, zum Beispiel

$$f(x) = x - 2\pi \left\lfloor \frac{x - \pi}{2\pi} \right\rfloor.$$

Wegen des Aufrundens wird dabei in den Unstetigkeitsstellen der Wert π (und nicht 0) angenommen, aber die Fourier-Koeffizienten bleiben davon unberührt.

¹⁴*Erinnerung*: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird *gerade* bzw. *ungerade* genannt, sofern $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Beachte, dass das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Funktionen gerade ist, wohingegen die Multiplikation einer geraden mit einer ungeraden Funktion ein ungerades Ergebnis liefert.

für alle $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin berechnen wir mithilfe partieller Integration die anderen Fourier-Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \sin(mx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos(mx)}{m} \right]_{x=-\pi}^{x=+\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(mx)}{m} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos(mx)}{m} \right]_{x=-\pi}^{x=+\pi} = -2 \frac{\cos(m\pi)}{m} = (-1)^{m+1} \frac{2}{m} \end{aligned}$$

und erhalten insgesamt

$$F_\infty(x) = 2 \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right)$$

als explizite Formel für die Fourier-Reihe von f sowie die entsprechenden Ausdrücke für die Partialsummen $F_n(x)$ (siehe Bild).

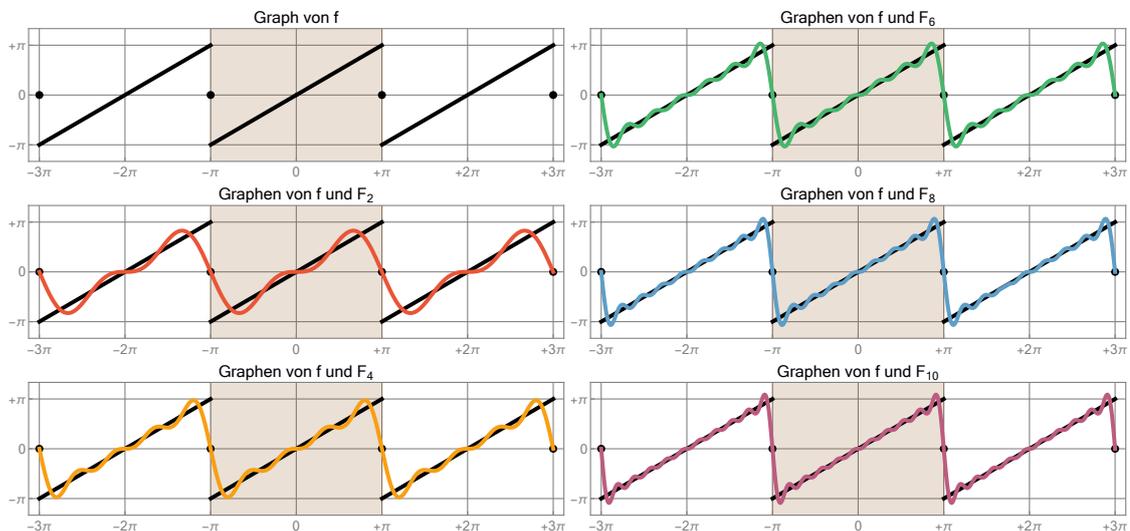


Abbildung Beispiel 1: Die Sägezahnfunktion (schwarz) sowie fünf ihrer Fourier-Approximationen (farbige Kurven), wobei die braun schraffierte Box die Periodizitätszelle $(-\pi, +\pi]$ repräsentiert. Beachte, dass jedes halboffene Intervall der Länge 2π genau eine Sprungstelle von f enthält. In den Ingenieurwissenschaften beschreibt diese Funktion eine *Kippschwingung*.

Rechtecksfunktion Die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) := -1 \text{ für } -\pi < x < 0, \quad f(x) := +1 \text{ für } 0 < x < +\pi$$

kann als periodische Version der Signumsfunktion betrachtet werden, wobei die in den Vielfachen von π angenommenen Werte nicht wichtig sind, da die Funktion dort unstetig ist. Da f ungerade ist, ergibt sich $a_0 = 0$ sowie $a_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und die direkten Rechnungen

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(mx) \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(mx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \sin(mx) \, dx \\ &= \left[\frac{\cos(mx)}{m\pi} \right]_{x=-\pi}^{x=0} - \left[\frac{\cos(mx)}{m\pi} \right]_{x=0}^{x=+\pi} = \frac{2}{m\pi} - \frac{2\cos(m\pi)}{m\pi} \\ &= \frac{4}{m\pi} \begin{cases} 1 & \text{für ungerade } m \\ 0 & \text{für gerade } m \end{cases} \end{aligned}$$

liefern

$$F_\infty(x) = \frac{4 \sin(x)}{\pi} + \frac{4 \sin(3x)}{3\pi} + \frac{4 \sin(5x)}{5\pi} + \dots = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin((2j-1)x)}{2j-1}$$

als die unendliche Summenformel der entsprechenden Fourier-Reihe.

Nebenresultat Wir werden weiter unten sehen, dass die Stetigkeit von f im Punkt $x = \pi/2$ die Formel $f(\pi/2) = F_\infty(\pi/2)$ garantiert. Nach Einsetzen von $f(\pi/2) = 1$ und Reihendarstellung von $F_\infty(\pi/2)$ sowie kleineren Umformungen erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Bemerkung: Durch das Studium von Fourier-Reihen können viele unendliche Summenformeln der Analysis hergeleitet werden, obwohl das weder die ursprüngliche Motivation noch die wichtigste Anwendung der Theorie ist.

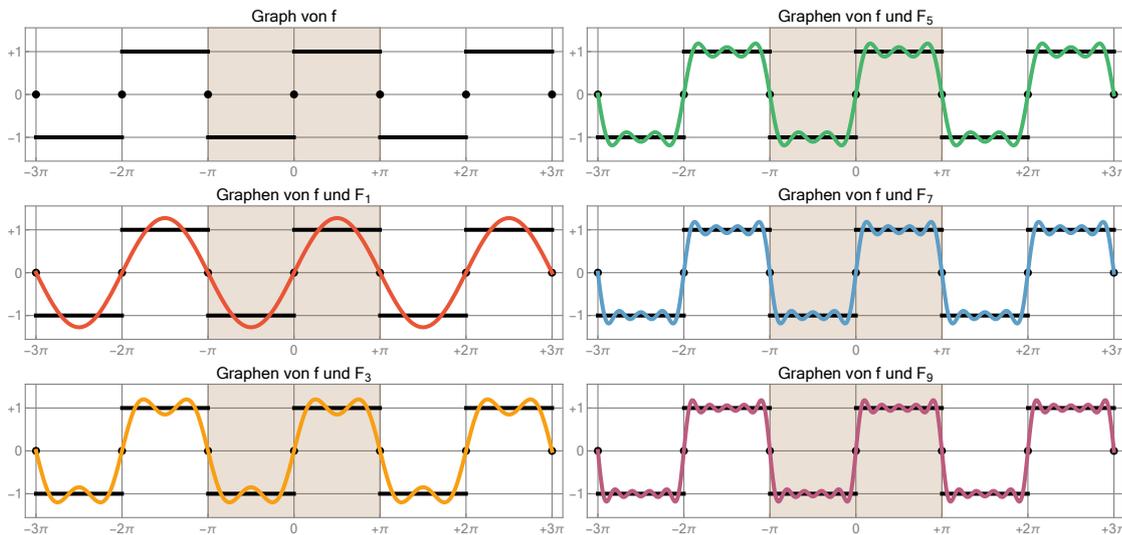


Abbildung Beispiel 2: Die Rechteckfunktion und ihre Fourier-Approximationen, die ebenfalls in der Schwingungslehre eine wichtige Rolle spielen. Beachte, dass f hier in jedem halboffenen Intervall der Länge 2π genau zwei Sprungstellen besitzt.

Parabelbogenfunktion Die 2π -periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x^2 \quad \text{für} \quad -\pi < x \leq \pi$$

ist stetig auf ganz \mathbb{R} . Da es sich außerdem um eine gerade Funktion handelt, gilt

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(mx) dx = 0,$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Die anderen Koeffizienten berechnen sich zu

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3\pi} \right]_{x=-\pi}^{x=+\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

und

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos(mx) \, dx = (-1)^m \frac{4}{m^2},$$

wobei wir zweifache partielle Integration verwendet haben. Nach Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} F_\infty(x) &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos(x)}{1} + \frac{4 \cos(2x)}{4} - \frac{4 \cos(3x)}{9} + \dots \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(mx)}{m^2} \end{aligned}$$

für die Fourier-Reihe.

Nebenresultat Wenn wir die berechnete Reihendarstellung von $F_\infty(\pi)$ in die Gleichung $F_\infty(\pi) = f(\pi)$ (siehe unten) einsetzen, ergibt sich wegen $\cos(m\pi) = (-1)^m$ und $f(\pi) = \pi^2$ nach kleineren Umstellungen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und damit eine der bekanntesten Summenformeln für Reihen.

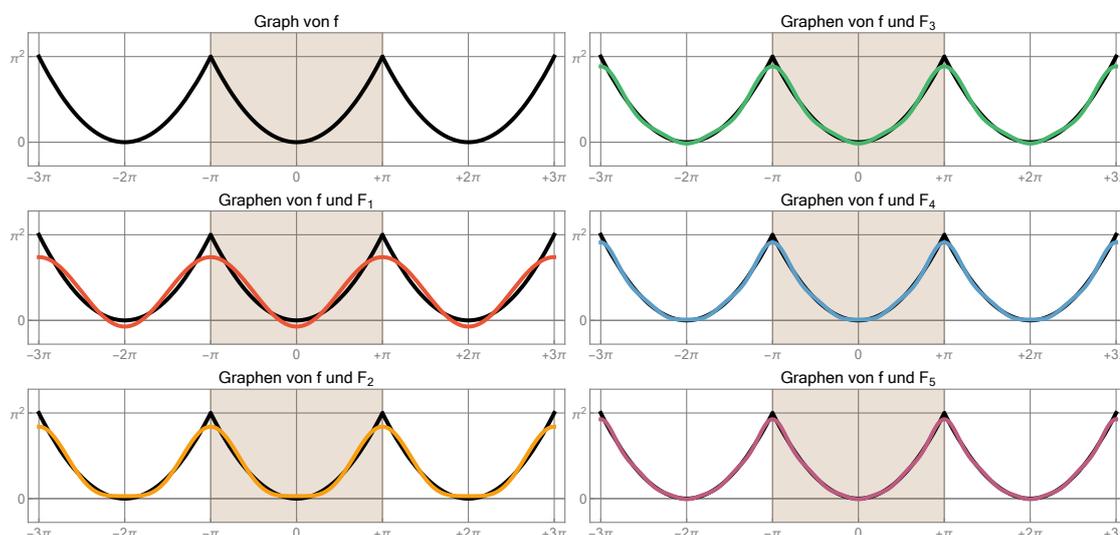


Abbildung Beispiel 3: Die periodische Fortsetzung der Parabel als prototypisches Beispiel für eine stetige Funktion, die pro Periodizitätzelle genau eine Knickstelle aufweist.

weitere Beispiele Für viele Funktionen ist die exakte Berechnung der Fourier-Koeffizienten nicht möglich. Mithilfe numerischer Approximationsverfahren können die entsprechenden bestimmten Integrale jedoch näherungsweise mit fast beliebiger Genauigkeit ermittelt werden. In den folgenden beiden Bildern haben wir dies für zwei Funktionen illustriert, wobei die Periode wieder durch $2X = 2\pi$ gegeben ist. Beachte, dass in diesen Beispielen die Funktion f jeweils unendlich oft differenzierbar ist und weder Unstetigkeits- noch Knickstellen aufweist. Die Konvergenz der Fourier-Reihe wird daher deutlich besser sein (siehe dazu weiter unten).

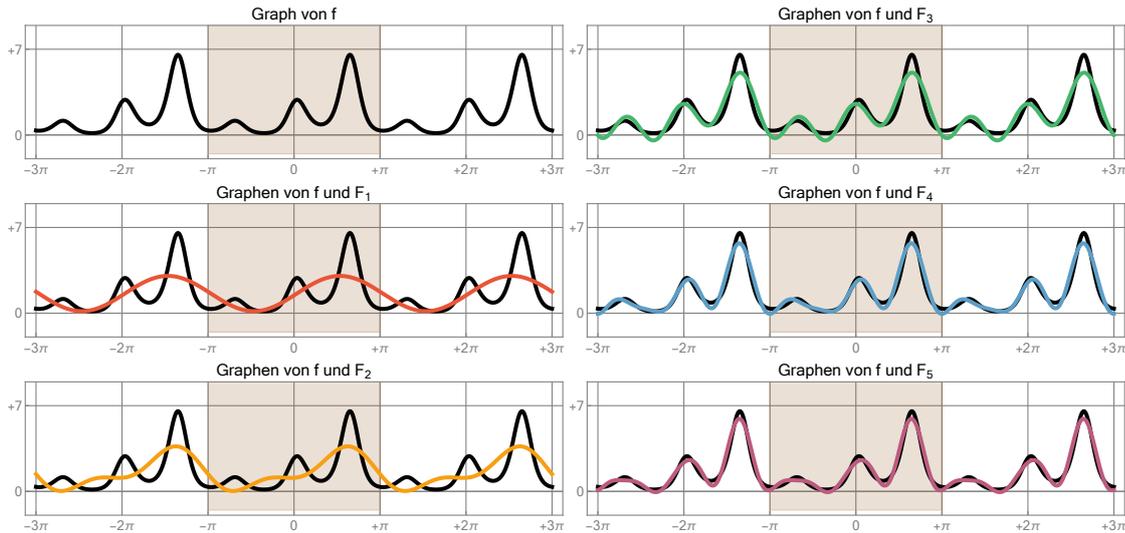


Abbildung Beispiel 4: Die Fourier-Funktionen für $f(x) = \exp(\sin(x) + \cos(3x))$, wobei die Fourier-Koeffizienten numerisch berechnet wurden.

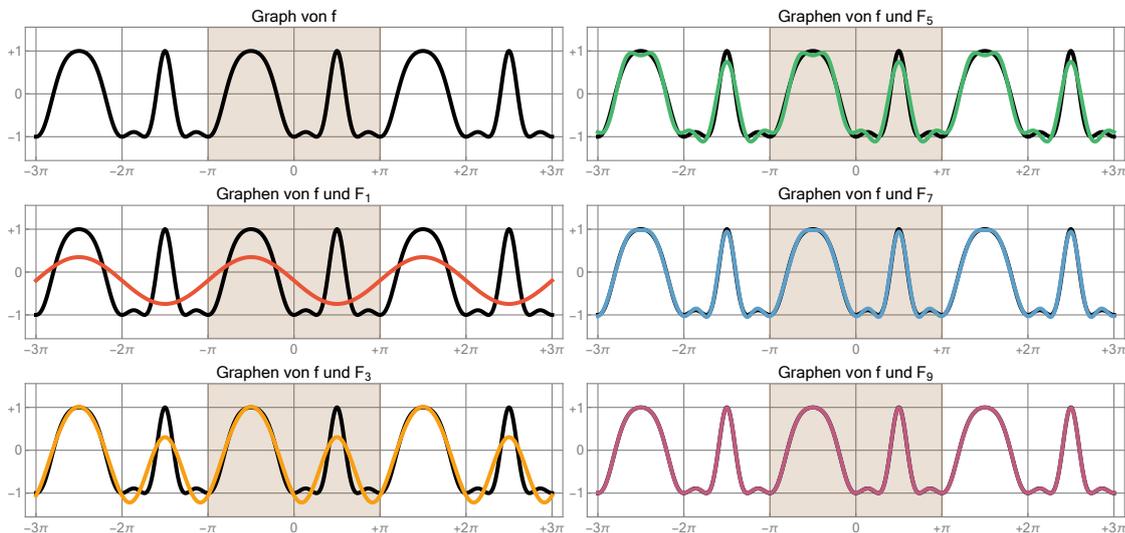


Abbildung Beispiel 5: Zur Fourier-Approximation der Funktion $f(x) = \cos(\sin(2x) + \pi \cos(x))$, die unendlich oft differenzierbar ist.

Spektraldarstellung* In den Anwendungswissenschaften wird oftmals eine andere Darstellung der Fourier-Reihe verwendet, die auf dem Ansatz

$$a_m \cos(m \kappa x) + b_m \sin(m \kappa x) = \varrho_m \sin(m \kappa x + \theta_m)$$

bzw.

$$F_\infty(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m \sin(m \omega t + \theta_m)$$

beruht. Einfache Rechnungen liefern

$$\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = \varrho_m \begin{pmatrix} \sin(\theta_m) \\ \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \varrho_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \quad \tan(\theta_m) = \frac{b_m}{a_m},$$

d.h. für jedes m sind ϱ_m und θ_m gerade die Polarkoordinaten, die dem kartesischen Punkt (a_m, b_m) entsprechen. Wird nun ϱ_m bzw. θ_m über m geplottet, entsteht das

Amplitudenspektrum bzw. das *Phasenspektrum* von f , wobei aus dem ersteren sehr leicht abgelesen werden kann, welche Schwingungsmoden wie stark angeregt sind. Dabei gilt die folgende Daumenregel: Je mehr Ableitungen f besitzt, umso schneller wird ϱ_m für $m \rightarrow \infty$ abklingen.

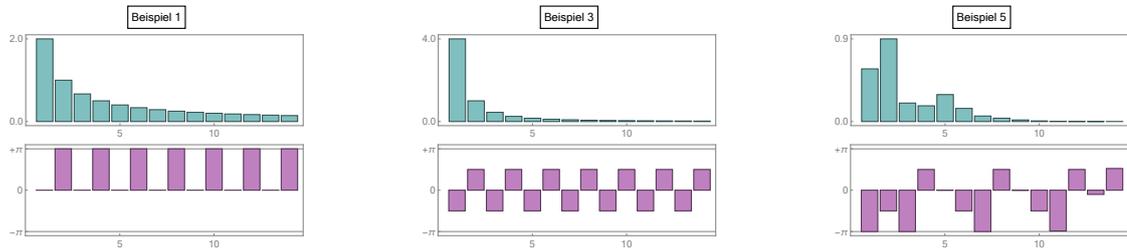


Abbildung Das Amplitudenspektrum (türkis) und das Phasenspektrum (lila) für drei der Beispiele, jeweils dargestellt als Balkendiagramm. Im ersten Beispiel gilt $\varrho_m = 2/m$ und das Abklingen der Amplituden ist aufgrund der Sprungstellen vergleichsweise langsam. Die Phasen θ_m werden für $m \rightarrow \infty$ in aller Regel nicht abklingen.

Ausblick auf die Theorie

Definition Eine $2X$ -periodische Funktion f wird stückweise stetig differenzierbar genannt, falls sie entweder auf ganz \mathbb{R} stetig differenzierbar ist oder die folgende Eigenschaft besitzt: Es existieren endliche viele reelle Zahlen $x_0 < x_1 < \dots < x_K$ mit $x_K - x_0 = 2X$, sodass

1. f auf jedem Intervall (x_{k-1}, x_k) stetig differenzierbar ist, und
2. in jedem Punkt x_k die einseitigen Grenzwerte

$$f(x_k \pm 0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x \pm \varepsilon), \quad f'(x_k \pm 0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f'(x_k \pm \varepsilon)$$

im eigentlichen Sinne existieren.

Wie nennen jeden Punkt x_k eine Sprungknickstelle, da f dort einen Sprung und/oder einen Knick (also einen Sprung in der Ableitung) aufweisen kann.

Bemerkungen

1. Beispiele: Die Sägezahnfunktion und die Parabelbogenfunktion erfüllen beide die Definition mit $K = 1$, $x_0 = -\pi$, $x_1 = +\pi$, die Rechtecksfunktion mit $K = 2$, $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$, $x_2 = +\pi$.
2. Im zweiten Fall der Definition existieren in jeder Periodizitätszelle $(x_*, x_* + 2X]$ genau K Sprungknickstellen, in denen aber jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f und f' wohldefiniert sind. Aufgrund der Periodizität von f muss es dann auf \mathbb{R} unendliche viele solcher Stellen geben, aber zwischen zwei benachbarten Sprungknickstellen ist f stetig differenzierbar. Der erste Fall entspricht $K = 0$, d.h. es gibt überhaupt keine Sprung- oder Knickstellen.
3. Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion sind

$$f(x \pm 0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x \pm \varepsilon), \quad f'(x \pm 0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f'(x \pm \varepsilon)$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, wobei

$$f(x - 0) = f(x + 0) = f(x), \quad f'(x - 0) = f'(x + 0) = f'(x)$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt, der weder Sprung- noch Knickstelle von f ist.

Theorem (Hauptsatz über die Konvergenz von Fourier-Reihen) Für jede $2X$ -periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion f ist die Fourier-Reihe F_∞ als Funktion auf ganz \mathbb{R} wohldefiniert und durch

$$F_\infty(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

gegeben. Darüber hinaus gelten die folgenden Aussagen:

1. (punktweise Konvergenz) Es gilt

$$|F_n(x) - F_\infty(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

2. (lokal gleichmäßige Konvergenz) Ist f stetig auf dem offenen Intervall J , so gilt

$$\sup_{x \in K} |F_n(x) - F_\infty(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jedes kompakte Teilintervall $K \subset J$.

3. (Konvergenz in Integralnormen) Es gilt

$$\|F_n - F_\infty\|_p := \left(\int_{-X}^{+X} |F_n(t) - F_\infty(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jeden Exponenten p mit $1 \leq p < \infty$.

Bemerkungen

- Wir können diesen Beweis mit unserem gegenwärtigen Kenntnisstand noch nicht führen.¹⁵
- In jeder Stetigkeitsstelle x konvergiert $F_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x)$. Wir werden weiter unten heuristisch argumentieren, dass die Geschwindigkeit dieser Konvergenz davon abhängt, wie viele Ableitungen die Funktion f besitzt, d.h. wie oft sie differenziert werden kann.
- In einer Unstetigkeitsstelle x konvergiert $F_n(x)$ zwar immer noch, nämlich gegen den arithmetischen Mittelwert von $f(x-0)$ und $f(x+0)$, aber diese Konvergenz wird in gewisser Weise sehr schlecht sein. Siehe dazu die Bilder sowie die Diskussion des Gibbs-Phänomens.

¹⁵Eine Schlüsselidee im Beweis ist, dass jede stückweise stetig differenzierbare Funktion sich als eine endliche Summe von anderen Funktionen schreiben lässt, wobei genau einer der Summanden stetig differenzierbar ist und jeder andere als affine Transformation der Sägezahnfunktion oder der Parabelbogenfunktion betrachtet werden kann. Aufgrund dieser Erkenntnis reicht es, die Aussagen des Theorems in drei Spezialfällen separat herzuleiten: (1) für stetig differenzierbare Funktionen f , (2) für die Sägezahnfunktion (als Prototyp einer einzelnen Sprungstelle), und (3) für die Parabelbogenfunktion (als Prototyp einer einzelnen Knickstelle).

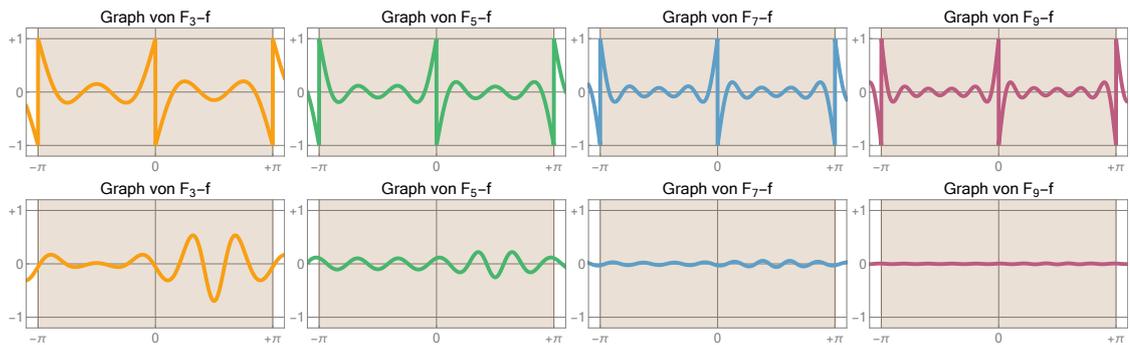


Abbildung Der Approximationsfehler $F_n - f$ als Funktion in x für das zweite (oben) und das fünfte (unten) Beispiel, wobei sich durch Integration über $[-\pi, +\pi]$ die folgende Werte ergeben:

	$\ F_1 - f\ _1$	$\ F_3 - f\ _1$	$\ F_5 - f\ _1$	$\ F_7 - f\ _1$	$\ F_9 - f\ _1$	$\ F_{11} - f\ _1$	$\ F_{13} - f\ _1$
Beispiel 2	2.1549	1.3704	1.0259	0.8285	0.6993	0.6075	0.5386
Beispiel 5	3.6080	1.1467	0.5753	0.1453	0.0242	0.0040	0.0008

Die Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ ist in Beispiel 2 deutlich schlechter als in Beispiel 5, da die Funktion f in Beispiel 2 Sprünge aufweist, wohingegen sie in Beispiel 5 unendlich oft differenzierbar ist.

Ableitungen und Fourier-Reihen Ist f stetig differenzierbar, so ergeben sich die Formeln

$$\int_{-X}^{+X} f'(x) \cos(m \kappa x) dx = +m \kappa \int_{-X}^{+X} f(x) \sin(m \kappa x) = +m \kappa b_m$$

und

$$\int_{-X}^{+X} f'(x) \sin(m \kappa x) dx = -m \kappa \int_{-X}^{+X} f(x) \cos(m \kappa x) = -m \kappa a_m$$

mit partieller Integration, wobei wir benutzt haben, dass aufgrund der Periodizität aller beteiligter Funktionen die anderen Beiträge via

$$\left[f(x) \cos(m \kappa x) \right]_{x=-X}^{x=+X} = 0 = \left[f(x) \sin(m \kappa x) \right]_{x=-X}^{x=+X}$$

verschwinden. Insbesondere lassen sich die Fourier-Koeffizienten für f' sehr leicht aus denen von f berechnen.¹⁶ Ist f sogar zweimal stetig differenzierbar, so können wir das Theorem nicht nur auf f , sondern sinngemäß auch auf f' anwenden und erhalten

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \kappa b_m \cos(m \kappa x) - \sum_{m=1}^{\infty} m \kappa a_m \sin(m \kappa x)$$

wobei die rechte Seite nach Vertauschung der beiden Summen gerade die gliedweise Differentiation von $F_{\infty}(x)$ beschreibt. Durch mehrfache partielle Integration und mittels der Standardabschätzungen für Integrale können wir außerdem zeigen, dass

$$\max \{ |a_m|, |b_m| \} \leq \frac{C_k}{m^k} = O\left(\frac{1}{m^k}\right), \quad C_k := \frac{1}{\kappa^k} \int_{-X}^{+X} |f^{(k)}(x)| dx$$

¹⁶Man schreibt oftmals $a'_0 = 0$, $a'_m = +m \kappa b_m$ und $b'_m = -m \kappa a_m$, wobei ' hier nicht meint, dass die Zahl a_m differenziert wird, sondern dass a'_m der Fourier-Koeffizient zu f' ist.

für jede $2X$ -periodische Funktion gilt, die in jedem Punkt aus \mathbb{R} mindestens k -mal stetig differenzierbar ist. Diese Abschätzung impliziert, dass die Fourier-Koeffizienten von f im Limes $m \rightarrow \infty$ mindestens so schnell wie $1/m^k$ abklingen.¹⁷

Daumenregel Je mehr Ableitungen f besitzt, umso schneller klingen die Fourier-Koeffizienten ab und um so besser ist die Konvergenz der Fourier-Reihe.

Gibbs-Phänomen Um das Konvergenzverhalten in der Nähe von Sprungstellen genauer zu untersuchen, betrachten wir als prototypisches Beispiel die Rechteckfunktion und studieren das Verhalten der ungeraden Funktion F_n in der Nähe von $x = 0$. Auf dem Intervall $(0, \pi)$ gilt

$$F_{2l-1}(x) = F_{2l}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^l \frac{\sin((2j-1)x)}{2j-1}$$

und aufgrund von Additionstheoremen kann die Ableitung als

$$F'_{2l}(x) = F'_{2l-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^l \cos((2j-1)x) = \frac{2 \sin(2lx)}{\pi \sin(x)}$$

geschrieben werden. Insbesondere ist $x_l := \pi/(2l)$ die erste lokale Extremstelle von F_{2l} , in der der Wert

$$F_{2l-1}(x_l) = \int_0^{x_l} F'_{2l}(x) dx = \int_0^{\pi/2l} \frac{2 \sin(2lx)}{\pi \sin(x)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{y} \frac{x_l y}{\sin(x_l y)} dy$$

angenommen wird, wobei wir im letzten Schritt die Substitution $y = x/x_l$ verwendet haben. Aus den Eigenschaften des Sinus ergibt sich

$$F_{2l-1}(x_l) = F_{2l}(x_l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{y} dy \approx 1.1789797445 \approx 1.18,$$

wobei der Grenzwert auf der rechten Seite mit

$$1 = f(0+0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) \quad \text{bzw.} \quad 2 = f(0+0) - f(0-0)$$

zu vergleichen ist.

Interpretation Die Fourier-Approximationen F_n *überschwingen* für jedes n in der Nähe von $x = 0$ die Funktion f , wobei für große Werte von n die maximale Amplitude dieses Überschwingens ca. 9% der Sprunghöhe beträgt. Diese sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht sehr wichtige Eigenschaft wird als Gibbs-Phänomen bezeichnet und tritt nicht nur bei der Rechteckfunktion, sondern analog auch in den Unstetigkeitsstellen jeder anderen Funktion auf. Insbesondere folgern wir, dass für eine unstetige Funktion f die Funktionenfolge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niemals gleichmäßig konvergieren kann.

¹⁷Die Frage, wie schnell die Fourier-Koeffizienten wirklich abklingen ist deutlich schwieriger zu beantworten, denn es gibt keine einfachen unteren Abschätzungen für $|a_m|$ und $|b_m|$.

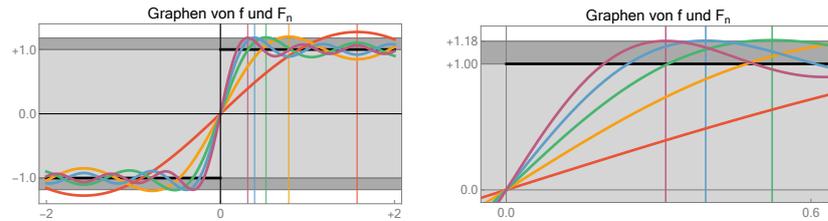


Abbildung Das Gibbs-Phänomen im zweiten Beispiel, wobei im linken und im rechten Bild zwei unterschiedliche Ausschnitte gezeigt werden und die vertikalen Linien die Extremstellen x_l repräsentieren. Beachte, dass das Verhältnis zwischen der Höhe eines dunkelgrauen Streifens und der Höhe des hellgrauen Streifens durch eine universelle Konstante festgelegt ist und ungefähr 0.089489872 bzw. ca. 9% beträgt.

Komplexe Version der Fourier-Reihen

Lemma (alternative Darstellung der Fourier-Approximationen) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_n(t) = \sum_{j=-n}^{+n} \gamma_j \exp(+i j \kappa x),$$

wobei der Index $j \in \mathbb{Z}$ nun eine ganze Zahl ist und der entsprechende Koeffizient

$$\gamma_j = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} f(x) \exp(-i j \kappa x) dx$$

Werte in \mathbb{C} annimmt.

Beweis Die Euler-Formel sowie die Linearität des Integrals implizieren

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad \gamma_{+m} = \frac{a_m - i b_m}{2}, \quad \gamma_{-m} = \frac{a_m + i b_m}{2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und wir erhalten via

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-n}^{+n} \gamma_j \exp(i j \kappa x) \\ &= \gamma_0 + \sum_{m=1}^n (\gamma_{-m} \exp(-i m \kappa x) + \gamma_{+m} \exp(+i m \kappa x)) \\ &= \gamma_0 + \sum_{m=1}^n (+\gamma_{-m} + \gamma_{+m}) \cos(m \kappa x) + \sum_{m=1}^n (-\gamma_{-m} + \gamma_{+m}) i \sin(m \kappa x) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos(m \kappa x) + \sum_{m=1}^n b_m \sin(m \kappa x) \end{aligned}$$

die behauptete Gleichheit der beiden Formeln für F_n . □

Bemerkung

1. Die komplexe Variante kann auch auf periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ angewendet werden, d.h. $f(x)$ darf komplexe Werte annehmen. Die Variable x muss aber immer reell sein.

2. Im Komplexen gilt

$$F_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \exp(+i j \kappa x),$$

d.h. die Fourier-Reihe ist eigentlich eine sogenannte *Doppelreihe*.

3. In der Mathematik schreibt man oft \hat{f}_j statt γ_j und bezeichnet die doppelt-unendliche Folge $(\hat{f}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ als die Fourier-Transformierte von f . Insbesondere entspricht jeder hinreichend guten $2X$ -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ und umgekehrt.

4. Es hat sich leider weder innerhalb der Mathematik noch in den Anwendungswissenschaften eine einheitliche Notation für Fourier-Reihen (und allgemeiner für die Fourier-Methoden) herausgebildet, sondern die Formeln — vor allem die verwendeten Vorzeichenkonventionen und Normierungsfaktoren — variieren in der Literatur. Die zugrunde liegende Idee ist aber immer dieselbe: Eine Funktion/ein Signal wird in seine harmonischen Bausteine zerlegt.

komplexe Orthogonalitätsrelationen* Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} \exp(i j \kappa x) \overline{\exp(i l \kappa x)} dx &= \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} \exp(i(j-l)\kappa x) dx \\ &= \frac{1}{\kappa 2X} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(i(j-l)y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \left[\frac{\exp(i(j-l)y)}{i(j-l)} \right]_{y=-\pi}^{y=+\pi} & \text{für } j \neq l \\ 2\pi & \text{für } j = l \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq l \\ 1 & \text{für } j = l \end{cases} \\ &= \delta_{j,l}, \end{aligned}$$

wobei wir in der Integralberechnung $y = \kappa x$ substituiert und die Formel $\kappa = \pi/X$ eingesetzt haben. Die komplex-harmonischen Funktionen $\exp(i j \kappa x)$ bilden daher orthonormale Basis bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Mithilfe dieser Gleichung und unter Verwendung der Euler-Formel können die reellen Orthogonalitätsrelationen sehr leicht bewiesen bzw. nachgeprüft werden. Außerdem können wir die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} |f(x)|^2 dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^{+n} |\gamma_j|^2$$

herleiten, die als ein unendlich-dimensionales Analogon zum Satz des Pythagoras verstanden werden kann und eine wesentliche Rolle in der Theorie der Fourier-Reihen spielt.

Anhang

wichtige unbestimmte Integrale

$$\begin{aligned}
 (!) \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + C && \text{für } p \neq -1 \\
 (!) \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C && \text{für } x \neq 0 \\
 (!) \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C \\
 (!) \int \cos(x) dx &= \sin(x) + C \\
 \int \tan(x) dx &= -\ln|\cos(x)| + C && \text{für } \cos(x) \neq 0 \\
 \int \cot(x) dx &= \ln|\sin(x)| + C && \text{für } \sin(x) \neq 0 \\
 \int \frac{dx}{\cos^2(x)} &= \tan(x) + C && \text{für } x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z} \\
 \int \frac{dx}{\sin^2(x)} &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C && \text{für } |x| > 1 \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan(x) + C \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C && \text{für } |x| \neq 1 \\
 (!) \int \exp(px) dx &= \frac{\exp(px)}{p} + C && \text{für } p \neq 0 \\
 (!) \int p^x dx &= \frac{p^x}{\ln(p)} + C && \text{für } p > 0 \text{ mit } p \neq 1 \\
 (!) \int \ln|x| dx &= x \ln|x| - x + C && \text{für } x \neq 0 \\
 (!) \int \sinh(x) dx &= \cosh(x) + C \\
 (!) \int \cosh(x) dx &= \sinh(x) + C \\
 \int \tanh(x) dx &= \ln(\cosh(x)) + C \\
 \int \coth(x) dx &= \ln|\sinh(x)| + C && \text{für } x \neq 0
 \end{aligned}$$

Bemerkungen

1. Alle Formeln können mittels Differentiation bzgl. x überprüft werden.
2. Der Parameter p ist immer reell und die (!)-Einträge sind besonders wichtig.
3. Umfangreichere Listen gibt es in der Literatur (siehe die eBook-Links in Stud.IP).