INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

THERMODYNAMIK UND QUANTENSTATISTIK — WS 09/10

3. Übungsblatt — Abgabe: Do, 05.11.09 bis 13.15 Uhr im Kasten vor A317

**Fragen zu den Aufgaben:** H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

6. **Harmonischer Oszillator I** **(3 Punkte)**
Ein quantenmechanischer Oszillator hat Quantenzustände der Energie

$$U_s = \left(s + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad ; \quad s = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Berechnen Sie die Entartungsfunktion $g(N, n)$ für $N$ unterscheidbare, nicht wechselwirkende Oszillatoren gleicher Frequenz $\omega$ mit der Gesamtenergie

$$U = \frac{1}{2}N\hbar\omega + n\hbar\omega \quad , \tag{1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben ist.
*Hinweis:* Da der erste Summand $\frac{1}{2}N\hbar\omega$ die Nullpunktsenergie der $N$ Oszillatoren darstellt, besagt Gl. (1), dass dem System insgesamt $n$ Energiequanten $\hbar\omega$ zugeführt wurden.

7. **Kettenregel und partielle Ableitungen I** **(6 Punkte)**
Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f(x, y, z)$ mit der Eigenschaft, dass in einem geeigneten Gebiet die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach einer jeden der drei Variablen $x$, $y$ oder $z$ eindeutig als stetig differenzierbare Funktion der beiden anderen Variablen aufgelöst werden kann. Dann gilt:

   (a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \quad ;$

   (b) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad ;$

   (c) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad .$

Verifizieren Sie diese Beziehungen zunächst anhand eines konkreten Beispiels:

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z = 0$$

Zeigen Sie deren Gültigkeit anschließend allgemein.

*Bitte wenden* $\longrightarrow$

8. **Differentialformen** **(11 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen einige Grundbegriffe über Differentialformen wiederholt werden.

(a) Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subset \mathbb{R}^3$ sei eine Differentialform

$$\delta F = F_1(\underline{x})\mathrm{d}x + F_2(\underline{x})\mathrm{d}y + F_3(\underline{x})\mathrm{d}z$$

mit stetig differenzierbaren Koeffizienten $F_1(\underline{x})$, $F_2(\underline{x})$ und $F_3(\underline{x})$ gegeben. Zeigen Sie: Für $\delta F$ existiert nur dann ein Potential $\phi(\vec{x})$ mit

$$\delta F = \mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z \quad ,$$

wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \underline{F} = 0$$

erfüllt ist, wobei $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ als Vektorfeld im üblichen Sinne zu lesen ist. Ein solches $\delta F$ heißt *vollständig* oder *exakt*. Wie lautet die Integrabilitätsbedingung in zwei Dimensionen?

Analog zur Mechanik kann die Existenz einer Stammfunktion auch als äquivalent zur Wegunabhängigkeit der Integration über die Differentialform betrachtet werden:

$$\delta F \quad \text{exakt} \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma \delta F = \int_\gamma \underline{F}\mathrm{d}\underline{x} = 0$$

für jeden (stückweise stetigen) geschlossenen Weg $\gamma$. Wie in der Vorlesung später noch behandelt wird, entspricht der Wegunabhängigkeit der Integration in der Thermodynamik gerade die Unabhängigkeit von der konkreten Prozessführung.

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Formen vollständige Differentiale darstellen:

i. $\delta A = \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \ln\left(\frac{x}{y^{\alpha+1}}\right)\,\mathrm{d}y \quad ; \quad x, y > 0 \quad , \quad \alpha = \text{const}$

ii. $\delta B = C\mathrm{d}x + \frac{x}{y}\mathrm{d}y \quad , \quad C = \text{const} \quad .$

(c) Bestimmen Sie für das vollständige Differential aus (b) ein Potential $\phi(\vec{x})$.

(d) Betrachten Sie nun das nicht vollständige Differential aus (b) und bestimmen Sie eine nichtverschwindende Funktion $h(x, y)$ so, dass das Produkt $h(x, y)\,\delta F$ ein vollständiges Differential ist. Die Funktion $h(x, y)$ heißt *integrierender Faktor* für $\delta F$. Geben Sie ein Potential $\phi$ zu $h(x, y)\,\delta F$ an.

(e) Es lässt sich jedoch nicht immer ein von Null verschiedener integrierender Faktor finden: Zeigen Sie zunächst allgemein, dass eine Differentialform $\delta F$ mit von Null verschiedenem integrierenden Faktor der „Frobeniusschen Integrabilitätsbedingung“

$$\vec{F} \cdot \left(\operatorname{rot} \vec{F}\right) = 0$$

genügen muss. Zeigen Sie anschließend, dass

$$\delta F = y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$$

nicht exakt und die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist.

<u>*Hinweis:*</u> Folgende Vektoridentität könnte nützlich sein:

$$\operatorname{rot}(\psi \underline{A}) = \psi \operatorname{rot} \underline{A} - \underline{A} \times (\operatorname{grad} \psi)$$