Die Mathematik des Wichtelns

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der Teilnehmer beim beliebten „Weihnachts-Wichteln" sein eigenes Geschenk zieht?

- *Welchen Einfluss hat die Gruppengröße?*
-

Weihnachts-Rätsel

Die Mathematik des Wichtelns

Stephan Kipp

Das „Wichteln" erfreut sich bei Weihnachtsfeiern oder im Freundeskreis zunehmender Beliebtheit. Es gibt eine Vielzahl von Varianten des „Verschenkens von Kleinigkeiten". Dabei kommt es häufig vor, dass der Geschmack des Beschenkten überhaupt nicht getroffen wird. Somit ist es im Interesse des „Gruppenfriedens" oft wünschenswert, die Anonymität des Schenkenden sicherzustellen – insbesondere bei dem besonders beliebten „Schrott-Wichteln". Möchte man darüber hinaus nicht, dass jemand sein eigenes Geschenk mit nach Hause nehmen muss, so sollte man entsprechende Maßnahmen ergreifen!

Das klassische „Wichteln aus dem Sack" ist die mit Abstand verbreitetste Variante: Alle Teilnehmer legen ihr Geschenk anonym in einen nicht einsehbaren Beutel und ziehen anschließend in beliebiger Reihenfolge ein Geschenk, ohne dabei in den Beutel hineinzusehen. Dabei kann es vorkommen, dass ein Teilnehmer sein eigenes Geschenk zieht und sich als Schenkender zu erkennen geben müsste.

In dieser kurzen Abhandlung soll es darum gehen, festzustellen, wie wahrscheinlich es ist, dass eben dies geschieht.

Um den Überraschungseffekt zu erhalten, denken Sie bitte zunächst über folgende Frage nach, ohne zuvor im Text weiter zu lesen:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim klassischen Wichteln mit 50 Teilnehmern mindestens einer der Schenkenden sein eigenes Geschenk zieht:

a) nahezu 0 %
b) Exakt 2 %
c) deutlich über 50 %
d) nahezu 100 % ?

Wenn Sie spontan Lösung a) gewählt haben, so haben Sie sich so entschieden wie ca. 40 Prozent der Bevölkeung. Sie denken, dass das Eintreten des „Negativfalles" mit steigender Anzahl der Teilnehmer immer unwahrscheinlicher wird. Das ist jedoch bereits ab 5 Teilnehmern nicht mehr der Fall; die Wahrscheinlichkeit der Selbstbeschenkung ändert sich also praktisch nicht mehr mit der Größe der Gruppe.

Die Lösung b) wird ebenfalls von ca. 40 Prozent der Befragten favorisiert. Diese Lösung wird meist dann gewählt, wenn die Befragten über ein Basiswissen in Kombinatorik verfügen und Wahrscheinlichkeiten nach der einfachen Formel:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der (un)günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

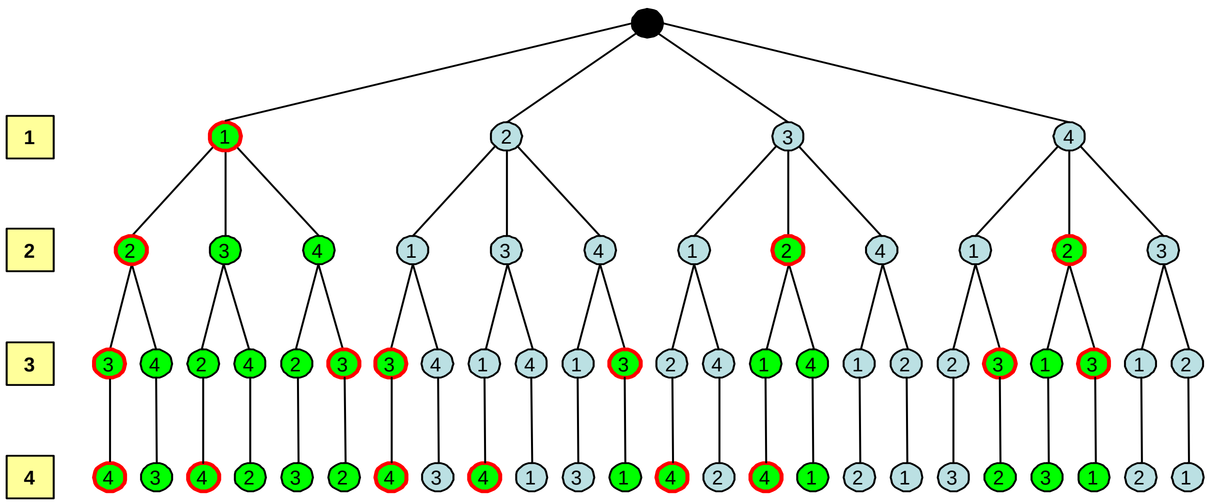
berechnen. Diese Berechnung wäre jedoch eher als „egoistisch" zu bezeichnen, denn das wäre exakt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie selbst Ihr eigenes Geschenk erhalten, unabhängig davon, wie es allen anderen Teilnehmern ergeht. Dass auch andere Teilnehmer ihr eigenes Geschenk ziehen können, haben Sie vernachlässigt.

Die richtige Lösung c) wird nur von ca. 15% der Befragten ausgewählt; vielleicht nur als geratene Antwort oder nach intensiverem Nachdenken über dieses Problem. Jedoch selbst dann ist kaum jemand ohne Literaturstudie in der Lage, die exakte Formel zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit ad hoc anzugeben.

Die Lösung d), für die sich ca. 5% entscheiden, werden Sie nach kurzem Überlegen selbst wieder verwerfen. Sie haben vermutlich die Frage nicht genau gelesen.

Die korrekte Antwort ist also Lösung c). Der exakte Wert für die gefragte Wahrscheinlichkeit der Selbstbeschenkung $\mathbf{P_{S,\infty}}$ liegt bei knapp über 63%, also einem für viele unerwartet großen Wert. Es folgen einige Betrachtungen, die dieses Ergebnis etwas näher beleuchten und einsichtiger machen sollen:

Die folgende Abbildung zeigt einen „Ereignisbaum" für ein Spiel mit 4 Teilnehmern. Es ist einfach zu erkennen, dass es insgesamt 24, also 4-Fakultät (4!) Möglichkeiten gibt, wie sich die Geschenke verteilen lassen. In der Abbildung sind die Teilnehmer in gelb unterlegten Kästchen gezeichnet, die gezogenen Geschenke in farbig unterlegten Kreisen. Dabei bedeutet die grüne Farbe, dass mindestens einer der Teilnehmer sein eigenes Geschenk erhält; welche das sind, ist mit der roten Umrandung markiert.



Für die Berechnung der Gesamtwahrscheinlichkeit $\mathbf{P_{S,n}}$ haben wir den Nenner der Funktion bereits als **n!** definiert

$$P_{S,n} = N_{S,n} \,/\, n! \quad .$$

Unbekannt ist jetzt lediglich noch die Größe $\mathbf{N_{S,n}}$, die Anzahl der Kombinationen, bei denen mindestens ein Teilnehmer sein eigenes Geschenk erhält.

Diese Zahlen erhält man zunächst durch einfaches Abzählen im jeweiligen „Ereignisbaum", und es ergibt sich die tabellierte Folge für $\mathbf{N_{S,n}}$:

Tab. 1	n	$N_{S,n}$	n!	$P_{S,n}$
	1	1	1	1,000
	2	1	2	0,500
	3	4	6	0,667
	4	15	24	0,625
	5	76	120	0,633
	6	455	720	0,632
	n	s.u.	n!	0,632

Betrachtet man die Zahlenfolge ($\mathbf{N_{S,n}}$):

1 – 1 – 4 – 15 – 76 – 455 - … ,

so ist zunächst keine einfache Formel ersichtlich, die das nachfolgende Element berechnen lässt. Aber stellt man iterative Betrachtungen an, so erhält man nach einigen Vereinfachungen.

$$N_{S,n} = -n! \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} (-1)^i \quad .$$

Dies entspricht folgenden Ausdrücken:

$N_{S,6}$ (**g**) = 2·3·4·5·6 - 3·4·5·6 +4·5·6 - 5·6 +6 - 1
$N_{S,5}$ (**u**) = 2·3·4·5 - 3·4·5 + 4·5 - 5 +1
$N_{S,4}$ (**g**) = 2·3·4 - 3·4 +4 - 1
$N_{S,3}$ (**u**) = 2·3 - 3 +1
$N_{S,2}$ (**g**) = 2 – 1
$N_{S,1}$ (**u**) = +1

Wie man am markierten Beispiel (4 Personen) leicht erkennt, repräsentieren die einzelnen Summanden jeweils die Anzahl der Knoten einer horizontalen Ebene im „Ereignisbaum".

Führt man die bisherigen Ergebnisse zu der gesuchten Formel zusammen, so ergibt sich folgende Reihe:

$$P_{S,n} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} (-1)^i = 1 - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} - \tfrac{1}{4!} \pm \dots \tfrac{1}{n!}$$

Zieht man des weiteren in Betracht, dass der Kehrwert der EULERschen Zahl e ≅ 2,718 wie folgt geschrieben werden kann

$$\tfrac{1}{e} = 1 - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} - \tfrac{1}{5!} + \cdots \quad ,$$

so ergibt sich bei unendlich vielen Teilnehmern die gesuchte Wahrscheinlichkeit als

$$P_{S,\infty} = 1 - 1\,/e \quad .$$

Diese Formel erscheint verblüffend einfach; insbesondere, dass die e-Funktion auftaucht, ist überraschend.

Recherchiert man hinsichtlich der in dieser Arbeit behandelten Fragestellung im Internet, so findet man so gut wie keine oder aber falsche Lösungen. So lässt sich beispielsweise der Grenzwert für $\mathbf{P_{S,\infty}}$ auch unter Verwendung der folgenden Funktion berechnen

$$1 - \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \tfrac{1}{e} \quad .$$

Diese Formel liefert für unendlich viele Teilnehmer den korrekten Wert, versagt jedoch bei kleinen Teilnehmerzahlen. Dies kann man leicht an der Wahrscheinlichkeit bei 2 Teilnehmern überprüfen. Hier berechnet sich mit der Formel ein Wert von 75% gegenüber der korrekten Wahrscheinlichkeit von $\mathbf{P_{S,2}}$ = 50%.

Man könnte sich ebenfalls fragen, wie viele Personen ihr eigenes Geschenk ziehen, um möglicherweise zu einem anderen Ansatz zu gelangen. Stellt man die entsprechende Tabelle auf, so wird man viele Abhängigkeiten finden, jedoch nicht ohne weiteres jedes neue Element vorhersagen können:

Tab. 2	**Teilnehmer mit eigenem Geschenk**							
n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**0**
1	1	-	-	-	-	-	-	0
2	0	1	-	-	-	-	-	1
3	3	0	1	-	-	-	-	2
4	8	6	0	1	-	-	-	9
5	45	20	10	0	1	-	-	44
6	264	135	40	15	0	1	-	265
				+ (n-1) * (n-2)	+(n-1)	=	=	

Interessant ist, dass die Anzahl der Möglichkeiten (in der Tabelle markiert), bei denen entweder kein oder genau ein Teilnehmer sein eigenes Geschenk erhält, stets bis auf ±1 identisch sind. Die in der letzten Spalte aufgeführte Zahlenreihe wird uns in den folgenden Betrachtungen noch mehrmals begegnen.

Die Zahlenfolge 0, 1, 2, 9, 44, 265, … und die Lösung für das geschilderte Problem ist Mathematikern selbstverständlich seit langem bekannt und ist in den spezielleren Lehrbüchern[1] der Kombinatorik als „le problème de rencontres" abgehandelt. Die Lösung wurde erstmalig von Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) vorgestellt, ist aber weitgehend unbekannt geblieben.

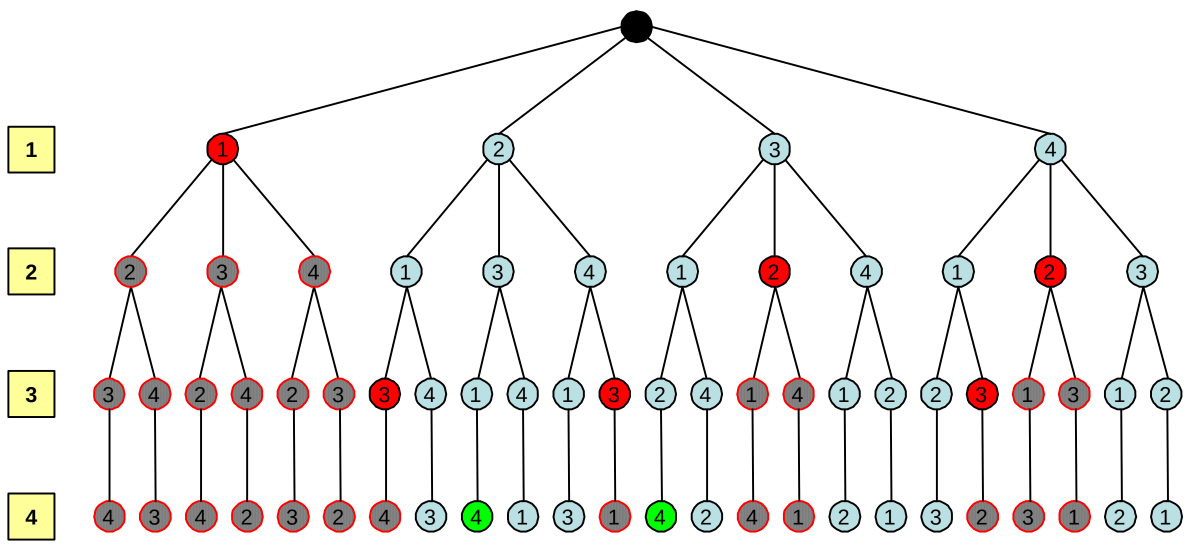
Was könnten Sie nun tun, damit die Wahrscheinlichkeit der Selbstbeschenkung auf Ihrer Weihnachtsfeier möglichst gering wird, ohne aber die Regeln signifikant zu verändern? Eine Möglichkeit wäre, die Teilnehmer ihr Geschenk ziehen zu lassen und dann, ohne, dass die anderen Teilnehmer dies sehen, zurücklegen zu lassen, falls es das eigene Geschenk ist. In diesem Fall könnte lediglich der allerletzte Mitspieler Pech haben.

Die Wahrscheinlichkeit der Selbstbeschenkung $\mathbf{P'_{S,n}}$ ist dann sicherlich kleiner als beim klassischen Wichteln, liegt aber nicht bei

$$\mathbf{P'_{S,n} \neq 1/n} \quad ,$$

wie es – wiederum irrtümlich – von den meisten Rätselfreunden angenommen wird. Deshalb auch hier eine kurze Erklärung. Entscheidend ist, dass eine Vielzahl von Verteilungsmöglichkeiten existiert, bei denen der allerletzte Teilnehmer sein eigenes Geschenk erhält. Gleichzeitig entfällt eine Vielzahl von möglichen Wegen im Ereignisbaum, da beispielsweise der 1. Teilnehmer das Geschenk Nr. 1 gar nicht ziehen kann (weil er es zurücklegen müsste). So reduziert sich die Gesamtzahl der Möglichkeiten auf $\mathbf{N'_{G,n}}$. Dies ist in der folgenden Abbildung illustriert. Die schwach eingefärbten Kreise repräsentieren „unmögliche" Äste; die mit grünen Kreisen dargestellten Knoten ($\mathbf{N'_{S,n}}$) stellen erlaubte Varianten dar, bei denen der letzte Teilnehmer sein Geschenk erhält.

Die sich tatsächlich ergebenden Wahrscheinlichkeiten liegen dann (wenn auch knapp) niedriger als 1/n, und es ergeben sich für die reduzierte Gesamtzahl der Möglichkeiten $\mathbf{N'_{G,n}}$ und $\mathbf{N'_{S,n}}$ Zahlenfolgen, die nachfolgend näher besprochen werden sollen.



[1] z.B. D.I.A. Cohen, *Basic techniques of combinatorial theory*, John Wiley & Sons, New York (1978).

Tab. 3	n	$N'_{S,n}$	$N'_{G,n}$	$P'_{S,n}$
	1	-	-	-
	2	0	1	0,000
	3	1	3	0,333
	4	2	11	0,182
	5	9	53	0,170
	6	44	309	0,142
	n	s.u.	s.u.	1/(n+1)

Auf die Zahlenfolge für $\mathbf{N'_{S,n}}$ sind wir bereits aufmerksam geworden. Es handelt sich um die Anzahl der Fälle beim klassischen Wichteln, wenn keiner der Teilnehmer sein eigenes Geschenk (siehe Tabelle 2: rechte, gelb unterlegte Spalte) ziehen soll – lediglich bei einer um eins reduzierten Gruppengröße (daher: „n-1" in der nächsten Formel). Sie lässt sich wie folgt beschreiben, beziehungsweise für 6 Teilnehmer als Reihe formulieren:

$$N'_{S,n} = (n-1)! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}(-1)^i$$

$N'_{S,6} = 5!/0! - 5!/1! + 5!/2! - 5!/3! + 5!/4! - 5!/5! = 44$.

Betrachtet man die Folge für die Gesamtzahl der Möglichkeiten $\mathbf{N'_{G,n}}$, so erkennt man, dass es sich stets um die Summe von $\mathbf{N'_{S,n}}$ + $\mathbf{N'_{S,(n+1)}}$ handelt. Es ergibt sich also:

$$N'_{G,n} = \left[n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(-1)^i \right] + \left[(n-1)! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}(-1)^i \right].$$

Zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit wird der Quotient dieser beiden Ausdrücke gebildet, und für große n konvergiert dieser Ausdruck gegen

$$P'_{S,n} = 1 / (n+1)$$.

Dies ist wiederum ein einfacher Ausdruck, der die tatsächliche Wahrscheinlichkeit bereits ab 6 Teilnehmern hinreichend genau beschreibt. Bei dieser Variante des Wichtelns wird die Wahrscheinlichkeit der unerwünschten Selbstbeschenkung deutlich verringert – UND: Je größer die Gruppe wird, desto unwahrscheinlicher wird dieses Ereignis!

Eine spannende Alternative kann man einführen, indem dem klassischen („blinden") Ziehen eine „Tauschrunde" nachgeschaltet wird. In der gleichen Reihenfolge wie zuvor muss jeder Teilnehmer mit einem beliebigen Mitspieler, der nach ihm an der Reihe ist, sein Geschenk austauschen. Er darf selbstverständlich nicht sein eigenes Geschenk auswählen, muss dies aber tun, wenn keine andere Möglichkeit besteht (letzter Tausch).

Sollten Sie selbst versuchen, einen „Ereignisbaum" für diese Spielvariante zu erstellen, werden Sie schnell die Komplexität erkennen. Die Anzahl der Ereignisse mit Selbstbeschenkung $\mathbf{N''_{S,n}}$ ist abhängig von der Reihenfolge des Tauschens, und es kann am Ende sogar vorkommen, dass gleich zwei der Teilnehmer ihr eigenes Geschenk erhalten.

Geht man ins Detail, so stößt man bei der Herleitung wiederum auf Elemente der oben genannten Zahlenfolge (0, 1, 2, 9, 44, ...); in diesem Fall jedoch auf Summen eben dieser Zahlen. Als Formel ergibt sich:

$$P''_{S,n} = \frac{2 \cdot N'_{S,n} + N'_{S,(n-1)}}{N'_{S,(n+1)} + 2 \cdot N'_{S,n} + N'_{S,(n-1)}}$$

Bei 5 Teilnehmern ergibt sich also für die Wahrscheinlichkeit der Selbstbeschenkung:

$$P''_{S,5} = \frac{9+9+2}{44+9+9+2} = \frac{20}{64} \approx 0,31$$.

Die Funktion für $P''_{S,n}$ konvergiert für große n ebenfalls gegen eine einfache Funktion, die den korrekten Wert bereits ab 6 Teilnehmern hinreichend genau liefert:

$$P''_{S,n} = 1/(n+1) + 1/(n+2)$$.

Sie sehen, dass durch die nachgeschaltete Tauschrunde ein zusätzliches Spannungselement integriert und die mathematische Komplexität der Beschreibung erhöht wird, das eigentliche Ziel - die signifikante Verringerung der Wahrscheinlichkeit der Selbstbeschenkung gegenüber der vorigen Variante - jedoch verfehlt wurde. Diese Wahrscheinlichkeit sinkt zwar mit steigender Teilnehmerzahl, ist jedoch fast exakt doppelt so groß wie im Beispiel zuvor.

Ich hoffe, Ihnen wieder einmal anhand eines sehr einfachen, praktischen Beispiels die „Faszination Mathematik" vermittelt zu haben.

Ich danke Oliver Bartels für die Erstellung der Vorlage für die „Ereignisbäume".

Der Autor

Dr. Stephan Kipp, Jahrgang 1967, studierte Chemie an der Technischen Universität Braunschweig und promovierte dort auf dem Gebiet der Physikalischen Chemie, wo er sich häufig mit mathematischen Fragestellungen beschäftigen musste.

Die Idee zu diesem Artikel entstand tatsächlich bei der Vorbereitung einer Weihnachtsfeier. Dabei kam die Frage der Wahrscheinlichkeit einer Selbstbeschenkung auf. Spontan war niemand in der Lage, eine exakte Lösung für das Problem zu formulieren; nachdem dies dann nach langem Überlegen und vielen erfolglosen Lösungsansätzen (ohne die Kenntnis der Literatur) gelungen war, fiel die Entscheidung, das für viele überraschende Ergebnis zu publizieren.

Kontakt: s.kipp@tu-braunschweig.de