

Messfehler, Fehlerberechnung und Fehlerabschätzung

1. Systematische Fehler

Systematische Fehler nennt man solche Fehleranteile, welche bei Wiederholung einer Messung unter identischen Messbedingungen einen konstanten Wert besitzen, d.h. jedes Mal in gleicher Größe und mit gleichem Vorzeichen auftreten. Daraus folgt, dass systematische Fehler durch Wiederholung der Einzelmessungen weder erkannt noch eliminiert werden können. Folgende Arten systematischer Fehler sind bei der Durchführung physikalisch-chemischer Messungen zu berücksichtigen:

Vernachlässigung von Umwelteinflüssen:

Auftrieb der Luft bei Wägungen, Abweichung der Kalibrier- von der Messtemperatur, ...

Unvollkommenheit der Messgeräte:

Eigenverbrauch elektrischer Messinstrumente, Nichtlinearität, Kalibrierfehler, altersbedingte Änderungen des Messgerätes, ...

Unzulänglichkeiten von Seiten des Experimentators:

Ungenügendes theoretisches Verständnis des Messvorganges, mangelnde Objektivität den eigenen Messungen gegenüber ("Wunschbeobachtungen"), regelmäßige Parallaxe beim Ablesen von Zeigerinstrumenten, ...

Zur Entdeckung systematischer Fehler ist es häufig nützlich, die Messbedingungen zu verändern, wobei auch diejenigen Parameter variiert werden sollten, die aufgrund der Theorie des Messvorganges keinen Einfluss auf die unbekannte Messgröße haben sollten. Noch wirkungsvoller wäre es, die Messmethode oder das Messprinzip völlig zu ändern. Eine Korrektur erkannter systematischer Fehler ist nicht immer mit einem vertretbaren Aufwand durch Verbesserung der Messmethodik zu erreichen. Oft ist es jedoch möglich, ihren Einfluss auf das Ergebnis durch eine, meist nachträglich durchgeführte Korrektur zu eliminieren.

2. Zufällige (oder statistische) Fehler

Auch bei größtem Bemühen um eine exakte Wiederholung von Messungen stellt man fest, dass die numerischen Resultate in einem gewissen Streubereich liegen und die Abweichungen nach Betrag und Vorzeichen zufallsbedingt schwanken. Die gemessenen Werte sind in der Regel statistisch um einen Mittelwert herum verteilt. Diese statistisch schwankenden Messfehler nennt man zufällige Fehler, sie unterliegen den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Um aus einer Stichprobe (n Wiederholungen einer Messung einer Größe z mit dem wahren Wert z_w) aus dem vorhandenen Zahlenmaterial den besten "Schätzwert" für die gesuchte Größe zu erhalten, wird in allgemeinen das arithmetische Mittel \bar{z} aller Messwerte z_i gebildet:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (1)$$

Die Abweichung der einzelnen Messwerte z_i vom Mittelwert nennt man die Fehler der einzelnen Messungen und bezeichnet sie mit u_i :

$$u_i = z_i - \bar{z} \quad (2)$$

Der mittlere Fehler (Standardabweichung) σ_z der Einzelmessungen bezüglich des wahren Wertes z_w ist gegeben durch:

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad (3)$$

Wenn man eine größere Anzahl von Stichproben der zu bestimmenden Messgröße bestimmt, dann bilden die zugehörigen Mittelwerte selbst wiederum eine Verteilung, die anders ist als die Messgrößenverteilung innerhalb einer Stichprobe, jedoch mit ihr in Beziehung steht. Der mittlere Fehler (Standardabweichung) σ_{mz} des Mittelwertes einer Stichprobe

$$\sigma_{mz} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad (4)$$

ist um den Faktor \sqrt{n} kleiner als der mittlere Fehler σ_z der Einzelmessung: Der zu bestimmende Messwert beträgt dann:

$$\bar{z} \pm \sigma_{mz} \quad \text{oder} \quad \bar{z} \pm \frac{\sigma_{mz}}{\bar{z}} \quad (5)$$

je nachdem, ob eine absolute oder die relative Angabe bevorzugt wird. Das ist weitgehend Geschmacksache, mit Ausnahme der Fehlerangabe bei der Fehlerfortpflanzung (s. Abschnitt 3). Hier kann die Berechnung des relativen Fehlers einfacher sein. Der Absolutfehler ist einheitenbehaftet, mit der gleichen Einheit wie die Messgröße. Der relative Fehler dagegen ist dimensionslos und wird häufig in Prozent angegeben. Man findet aber auch andere Angaben (reine Zahl – oft als Zehnerpotenz, ppm, ppt etc.)

Aus Gl. (5) folgt, dass es sich prinzipiell lohnt, jede Messung oft zu wiederholen, da sich der statistische Fehler des Mittelwertes durch entsprechenden Arbeitsaufwand verkleinern lässt. Eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 10 erfordert jedoch 100 zusätzliche Messungen. Ob dieser Arbeitsaufwand sinnvoll ist, kann erst entschieden werden, wenn man die zu erwartenden systematischen Messfehler beurteilt hat.

Normalverteilte zufällige Fehler reduzieren sich also durch wiederholte Messung. Ein einzelner Messpunkt weicht dabei im Durchschnitt um σ_z vom wahren Wert z_w ab, d.h. er hat die Wahrscheinlichkeit 0,683 (i.e. 68,3%), innerhalb des Intervalls $z_w \pm \sigma_z$ zu liegen. Der Mittelwert von n Messungen weicht im Durchschnitt nur um den um kleineren Betrag σ_{mz} ab. Damit liegt der Mittelwert von n Messungen mit der Wahrscheinlichkeit 0,683 in dem viel kleineren Intervall $z_w \pm \sigma_{mz}$. Die Sicherheit, mit der ein beliebiger Messwert aus einer Messreihe in einem bestimmten Bereich um den Mittelwert liegt, wird als statistische Sicherheit P bezeichnet. Ein bestimmter Messwert aus einer nach Gauß normalverteilten Messwertreihe liegt also mit einer statistischen Sicherheit von $P = 68,3\%$ in dem Bereich $z_w \pm \sigma_z$. Für den Bereich $z_w \pm 2\sigma_z$ beträgt $P = 95,4\%$ und für das Intervall $z_w \pm 3\sigma_z$ ist $P = 99,73\%$. In Laboratorien wird oft mit einer statistischen Sicherheit von $P = 95\%$ gerechnet, was einem Intervall von $z_w \pm 1,96\sigma_z$ entspricht.

Lassen sich während eines Versuchs zufällige Fehler aufgrund der begrenzten Zeit nicht durch Mehrfachmessungen erfassen, so ist er aus sinnvollen Annahmen abzuschätzen. Hierzu ist es wichtig, die vom Hersteller auf vielen Messgeräten (z.B. Pipetten, Messzylinder, Waagen) aufgedruckten Toleranzen zu notieren und für die anschließende Fehlerbetrachtung zu berücksichtigen. Stehen solche Angaben nicht zur Verfügung, so kann für die Ablesegenauigkeit von Analoggeräten (Thermometer, Zeigerinstrumente) die Hälfte des kleinsten, aufgedruckten Skalenteils als Fehler angenommen werden. Für ein Thermometer mit 0.1-Grad-Teilung würde eine Temperatur z.B. als $33.40 \pm 0.05^\circ\text{C}$ angegeben werden.

3. Fehlerfortpflanzung

a) Funktion einer Veränderlichen

Im Anhang ist ein Beispiel für die Fehlerfortpflanzung für eine Funktion mehrerer Veränderlicher (Abschnitt 3b) ausführlich durchgerechnet, während an dieser Stelle eine allgemeingültige (und eher formale) Formulierung im Vordergrund steht.

Nur selten wird das gewünschte Endergebnis aus nur einer mit Zufallsfehlern behafteten, direkt messbaren Größe erhalten. Häufig ist nur eine andere fehlerbehaftete Größe x direkt messbar, die anschließend indirekt die gewünschte Größe $z(x)$ ergibt. Der Zusammenhang $z(x)$ muss dabei natürlich bekannt sein. Für die direkt messbare Größe erhält man gemäß Kapitel 2 das Ergebnis $\bar{x} \pm \sigma_{mx}$.

Der Mittelwert der indirekt messbaren Größe $z(x)$ ergibt sich dann, indem einfach der direkt gemessene Mittelwert \bar{x} in die Funktionsgleichung $z(x)$ eingesetzt wird: $\bar{z} = z(\bar{x})$.

Für die Angabe des mittleren Fehlers σ_{mz} des Mittelwertes \bar{z} werden die (endlich kleinen) Standardabweichungen σ_{mz} und σ_{mx} mit den (unendlich kleinen) Differentialen dz und dx assoziiert. Dadurch wird der gesamte, mächtige Apparat der Differentialrechnung auf die Fehlerrechnung anwendbar.

Danach ist das Differential dz der abhängigen (indirekt gemessenen) Größe z über die Definition der 1. Ableitung $z'(x) = dz/dx$ mit dem Differential dx der unabhängigen (direkt gemessenen) Größe x verknüpft:

$$dz = z'(x) dx \quad (6)$$

Überträgt man diese Beziehung für die Differentiale auf die Standardabweichungen, so erhält man für die Standardabweichung σ_{mz} den Wert

$$\sigma_{mz} = z'(\bar{x})\sigma_{mx} \quad (7)$$

Die Standardabweichung der abhängigen Größe hängt also nicht nur vom Wert der Standardabweichung der unabhängigen Größe ab, sondern auch vom Mittelwert der unabhängigen Größe selbst, wie in Abb. 1 dargestellt. Die Steigung der Funktion $z(x)$ am Punkt des Mittelwertes \bar{x} vermittelt dabei zwischen den jeweiligen Standardabweichungen. Je größer die Steigung ist, desto empfindlicher reagiert die abhängige Größe auf kleine Fehler der unabhängigen Größe und umgekehrt. Dies ist gegebenenfalls vor der Planung eines Experiments zu berücksichtigen.

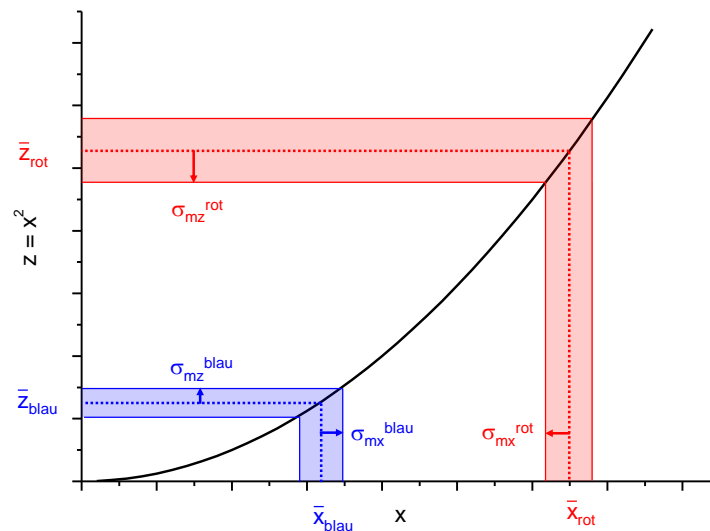


Abb. 1: Fehlerfortpflanzung für eine Funktion einer Veränderlichen am Beispiel $z(x) = x^2$.

b) Funktionen mehrerer Veränderlicher

Noch häufiger hängt eine nicht direkt messbare, interessierende Größe z nicht von einer, sondern von mehreren (insgesamt n) anderen Größen x_i ab, die einer direkten Messung zugänglich sind: $z = z(x_i)$, mit $i = 1, 2, \dots, n$. Für die Größen x_i lassen sich die Mittelwert \bar{x}_i und die Standardabweichungen σ_{mx_i} wieder gemäß Kapitel 2 bestimmen.

Auch hier ist die Standardabweichung σ_{mz} von z über das (jetzt totale) Differential dz definiert. Das totale Differential von z ist gegeben durch:

$$dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i \quad (8)$$

Auch hier vermitteln die (jetzt partiellen) Ableitungen $\partial z / \partial x_i$ zwischen den Fehlern der jeweiligen unabhängigen Größen x_i und dem Fehler in z . Allerdings unterscheidet das totale Differential nicht zwischen dem Fall der zufälligen Kompensation der Einzelbeiträge durch unterschiedliches Vorzeichen der partiellen Ableitungen und einer großen Robustheit des z -Werts aufgrund kleiner oder verschwindender partieller Ableitungen. Um diese qualitativ unterschiedliche Situationen erkennen zu können, verwendet man daher statt des totalen Differentials dz selbst für die Standardabweichung des Mittelwerts σ_{mz} folgende, an dz angelehnte Definition:

$$\sigma_{mz} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{mx_i}^2} \quad (9)$$

Die Summierung der Quadrate führt dabei zu einer besseren Abschätzung als die einfache Summe über die Beträge, die grundsätzlich auch möglich ist.

Die Angabe der gemessenen Größe für z erfolgt analog wie für die direkt gemessenen Größen als

$$\bar{z} \pm \sigma_{mz} \text{ (absolut) oder als } \bar{z} \pm \frac{\sigma_{mz}}{\bar{z}} \text{ (relativ)}$$

Die Berechnung der partiellen Ableitungen in Gl. (9) kann, je nach Form der Funktion z , mehr oder weniger aufwändig sein. In vielen Fällen kann man die Berechnung der Ableitungen jedoch umgehen, indem man von vorneherein den relativen Fehler berechnet anstatt des absoluten. Das ist immer dann möglich, wenn die Funktion z ein Produkt aus Potenzen der x_i ist, wobei die Exponenten auch negativ oder gebrochen rational sein können. D.h., auch Wurzelausdrücke und Brüche fallen darunter, aber keine Summen solcher Produkte oder transzendente Funktionen wie die häufig auftretenden Winkelfunktionen, die Exponential- oder die Logarithmusfunktion.

Die allgemeinste Form einer Funktion, die eine Fehlerrechnung über relative Fehler unter Umgehung der partiellen Ableitungen erlaubt, ist

$$z = C \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} \quad (10)$$

wobei k_i jede rationale Zahl sein kann.

Der relative Fehler berechnet sich für z zu

$$\frac{\sigma_{mz}}{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\sigma_{mx_i}^2}{\bar{z}^2}} \quad (11)$$

Die quadrierten partiellen Ableitungen an den Stellen der Mittelwerte sind:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 = \left(C k_i \bar{x}_i^{k_i-1} \prod_{j \neq i} \bar{x}_j^{k_j} \right)^2 = \frac{k_i^2 \bar{z}^2}{\bar{x}_i^2} \quad (12)$$

Einsetzen der Gl. (12) in Gl. (11) ergibt

$$\frac{\sigma_{mz}}{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{k_i^2 \bar{z}^2}{\bar{x}_i^2} \cdot \frac{\sigma_{mx_i}^2}{\bar{z}^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2 \frac{\sigma_{mx_i}^2}{\bar{x}_i^2}}$$

Der relative Fehler für z ergibt sich also aus den relativen Fehlern in den unabhängigen Variablen x_i , gewichtet mit dem jeweiligen Exponenten k_i . Insbesondere gilt für lineare Beziehungen ($z = Cx$), dass die relativen Fehler in z und x gleich sind, und für einfache Produkte ($z = Cxy$) oder Quotienten ($z = Cx/y$), dass der relative Fehler in z sich aus der Quadratsumme der relativen Fehler in x und y ergibt.

4. Ausgleichsrechnung

a) Lineare Regression

Gemessen seien die n Wertepaare (x_i, y_i) mit $i = 1 \dots n$. Von den Größen x und y sei bekannt, dass sie voneinander linear abhängen:

$$y = a + bx \quad (13)$$

so dass aus den Messungen die Größen a und b bestimmt werden sollen. Trägt man die gemessenen Wertepaare in ein Koordinatensystem ein, so liegen die Punkte wegen der zufälligen Fehler, die bei den Messungen auftreten, nicht genau auf einer Geraden. Um die "besten" Werte für a und b rechnerisch zu ermitteln, konstruiert man eine Ausgleichsgerade nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Hierzu soll angenommen werden, dass nur eine der Größen x und y fehlerbehaftet ist, nämlich y . Der allgemeine Fall, dass beide Größen x und y beliebig fehlerbehaftet sein können, ist deutlich komplizierter und soll an dieser Stelle nicht behandelt werden.

Zur Konstruktion der Ausgleichsgeraden betrachtet man zunächst den individuellen Fehler $u_i(a, b)$ eines jeden Messpunktes (x_i, y_i) , dessen Größe natürlich von der Lage der Geraden, d.h. von den Werten a und b abhängt:

$$u_i(a, b) = y_i - y(x_i) = y_i - a - bx_i \quad (14)$$

Jeder möglichen Geraden, also jeder Kombination (a, b) ist auf diese Weise eine Fehlerquadratsumme D zugeordnet:

$$D(a, b) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (15)$$

Diejenige Gerade, für die die Fehlerquadratsumme D den kleinsten Wert annimmt, ist die gesuchte Ausgleichsgerade. Da $D(a, b)$ eine quadratische Funktion in a und b ist, gibt es genau ein Minimum an der Stelle a_0, b_0 an der gilt, dass die beiden Steigungen (Ableitungen) gleichzeitig verschwinden:

$$\frac{\partial D(a_0, b_0)}{\partial a} = \frac{\partial D(a_0, b_0)}{\partial b} = 0 \quad (16)$$

Die Gleichungen (16) sind ein lineares Gleichungssystem mit einer eindeutigen Lösung. Diese ergeben sich zu

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (17)$$

$$b_0 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (18)$$

Die absolute Größe der Fehlerquadratsumme D spiegelt sich wieder in den mittleren Fehlern σ_{ma} und σ_{mb} (den Standardabweichungen) von a_0 und b_0 . Es gilt:

$$\sigma_{ma} = \sqrt{\frac{D}{n-2}} \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (19)$$

$$\sigma_{mb} = \sqrt{\frac{D}{n-2}} \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (20)$$

In vielen Taschenrechnern sind die für die lineare Regression notwendigen Beziehungen (17) bis (20) einprogrammiert, so dass nur noch die Wertepaare (x_i, y_i) eingegeben werden müssen. Gleiches gilt, allerdings bei deutlich unterschiedlicher Komfortabilität, für kommerzielle Software für wissenschaftliche (z.B. Origin™) und für Büroanwendungen (z.B. Microsoft Excel™), aber auch für Free- und Shareware-Programme (Curvexpert, Open Office Calc).

Wer keine eigenen Hilfsmittel zur Durchführung der linearen Regression besitzt, kann die auf den Auswerterechnern im Praktikum vorhandene Open Office-Datei "Lineare Regression" verwenden, in die die Messdaten eingegeben werden können und die die Parameter a und b sowie deren Standardabweichungen berechnet.

Eine Angabe von a oder b ohne den dazugehörigen mittleren Fehler σ_{ma} bzw. σ_{mb} ist unvollständig und schließt eine Testierung des Versuchsprotokolls aus!

Oft wird ein Korrelationskoeffizient r berechnet. Je näher dieser bei 1 liegt, um so besser gibt die berechnete Gerade den Funktionsverlauf wieder. Der Korrelationskoeffizient r darf jedoch nicht mit der Güte der den Daten zugrundeliegenden, Messung verwechselt werden, da systematische Fehler hierbei keine Berücksichtigung finden. Die Berechnung des Korrelationskoeffizienten ersetzt keine Fehlerbetrachtung!

b) "Fitten" nichtlinearer Zusammenhänge

Im Prinzip lässt sich der Grundgedanke der linearen Regressionsanalyse auf beliebige, nicht-lineare Zusammenhänge erweitern. Dabei kann die Zahl der Parameter beliebig groß werden. (Allerdings muss sie deutlich kleiner als die Zahl der Messpunkte sein, um eine physikalische Bedeutung zu haben.). Schwerer wiegt allerdings, dass das Gleichungssystem nichtlinear ist und im allgemeinen keine analytische Lösung besitzt. Somit kann die Lösung nur numerisch gefunden werden. Dafür gibt es entsprechende Software, z.B. die oben bereits erwähnten Programm "Origin" oder "Curvexpert".

Bei der Anwendung solcher Software muss sich der Bediener aber vorher einige Gedanken machen (Das ist im Gegensatz dazu bei der linearen Regression nicht notwendig). Es kann nämlich entweder mehrere lokale Minima für die Fehlerquadratsumme geben, von denen nur das tiefste (das globale) das gesuchte ist. Allein waagrechte partielle Ableitungen zu bestimmen reicht also nicht aus. Außerdem wird in der Regel das Optimierungsprogramm nicht konvergieren, wenn man zu weit entfernt vom globalen Minimum mit der Optimierung startet. Der Auswahl der Startwerte für die Fitparameter kommt somit eine wesentlich Rolle zu. Man muss also eine Vorstellung von der Größenordnung der Parameterwerte haben, die man gerne optimieren möchte.

Immer werden Parameter bzw. die entsprechende Funktionen an die Messwerte angepasst ("gefittet"), nie anders herum! (Das ist zwar auch möglich, aber keine Optimierungsmethode, sondern, wenn nicht Betrug, dann wenigstens unwissenschaftlich.)

c) Linearisierung nichtlinearer Zusammenhänge

Will man das Fitten nichtlinearer Zusammenhänge vermeiden oder verfügt man nicht über die benötigten Hilfsmittel dazu, so kann man in vielen Fällen einen nichtlinearen Zusammenhang linearisieren.

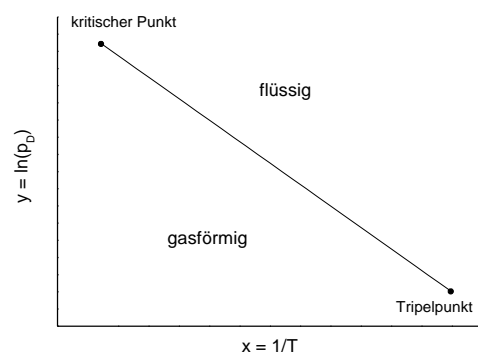
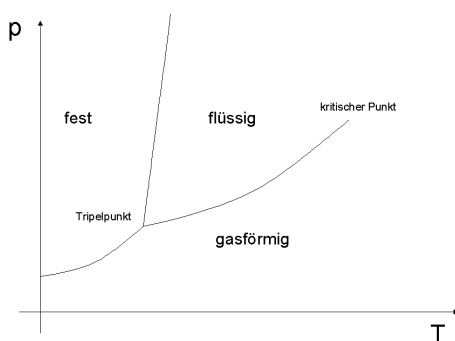
Als Beispiel sei die Clausis-Clapeyronsche Beziehung über die Temperaturabhängigkeit des Dampfdrucks p_D einer Flüssigkeit betrachtet:

$$p_D[T] = p_D[T_0] \cdot e^{-\frac{\Delta_v H}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} \quad (21)$$

mit der Verdampfungsenthalpie $\Delta_v H$ und der allgemeinen Gaskonstanten R . Gl. (21) beschreibt die Dampfdruckkurve in einem Phasendiagramm. Zur Linearisierung betrachtet man den Logarithmus des Dampfdrucks

$$\ln(p_D[T]) = \left\{ \ln(p_D[T_0]) + \frac{\Delta_v H}{RT_0} \right\} - \frac{\Delta_v H}{R} \cdot (1/T) \quad (22)$$

Ersetzt man jetzt $y = \ln(p_D[T])$, $a = \{ \ln(p_D[T_0]) + \Delta_v H/(RT) \}$, $b = \Delta_v H/R$ und $x = 1/T$, so erhält man aus (22) die gewünschte Beziehung $y = a + bx$, die man mit der Methode der linearen Regression bearbeiten kann.



Aus der Steigung b lässt sich zum Beispiel die Verdampfungsenthalpie $\Delta_v H = -bR$ bestimmen. Zur Ermittlung des Fehlers der Verdampfungsenthalpie ist eine Fehlerfortpflanzungsrechnung durchzuführen. In diesem einfachen Fall sind jedoch die relativen Fehler in b und in $\Delta_v H$ gleich groß, so dass bei Kenntnis dieses Zusammenhangs auf die Berechnung der Ableitung verzichtet werden kann (die hier allerdings auch sehr einfach ist).

5. Angabe signifikanter Stellen

Zur Angabe eines Messergebnisses gehört die Größe, der Zahlenwert, die Einheit und die Messunsicherheit. Der Zahlenwert soll die Genauigkeit der Messung widerspiegeln. Ein Messergebnis wird so gerundet, dass es genauso viele Nachkommastellen wie die absolute Messunsicherheit besitzt. Darüber hinaus gehende Stellen besitzen keine Signifikanz (Aussagekraft) und sind zu streichen. *Die letzte signifikante Stelle des Messwerts ist die erste von*

Null verschiedene Stelle des Fehlers! Je mehr signifikante Stellen also angegeben werden, umso genauer ist das Messergebnis.

Beispiel: Mittelwert und Standardabweichung einer Messreihe wurden nach Gleichung (1) und (3) bestimmt. Ihr Taschenrechner liefert Ihnen die Werte $\bar{x} = 43.74832799$ und $\sigma_{\text{mx}} = 0.17854275$, gemessen in einer beliebigen Einheit. Die letzte signifikante Stelle ist die erste hinter dem Komma (fett, kursiv):

$$43.\mathbf{7}4832799$$
$$0.\mathbf{1}7854275,$$

da sie die erste von Null verschiedene Stelle in der Standardabweichung ist. Der Mittelwert wird entsprechend gerundet, die anderen Stellen ohne Signifikanz werden nicht angegeben. Auch beim Fehler wird nur die letzte signifikante Stelle angegeben. Dabei ist grundsätzlich aufzurunden. Die korrekte Angabe ist also:

$$43.7 \pm 0.2.$$

Anhang

Indirekte Messung mit Fehlerfortpflanzung bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Ein einigermaßen realistisches Beispiel für diesen Fall ist die Berechnung der Masse eines (kubischen) Betonklotzes. Ihr Praktikumsassistent hat von einem Bauunternehmer als Dankeschön für die nachsichtige Bewertung der Praktikumsleistung eines seiner Söhne einen Betonklotz geschenkt erhalten, den er anstelle eines teuren Wägetisches für die Praktikumswaagen nutzen will. Der Betonklotz steht auf dem Parkplatz, und der Assistent weist Sie an, ihn in die Praktikumsräumlichkeiten zu transportieren. Angesichts der Ausmaße des Klotzes zweifeln Sie daran, ob Sie diese Aufgabe ohne fremde Hilfe erledigen können. Eine direkte Messung der Masse (nach Kapitel 2) scheidet aus, denn erstens erscheint Ihnen dieses Unterfangen zu Recht als mühselig und nicht ungefährlich und zweitens haben Sie ohnehin keine geeignete Waage zur Hand. So erinnern Sie sich, dass sich die Masse m als Produkt von Dichte ρ und Volumen V ergibt und dass das Volumen V eines Würfels die Seitenlänge L zur dritten Potenz ist. Die Messung der Seitenlängen können Sie einfach und bequem mit Ihrer Scheckkarte durchführen, von der Sie wissen, dass die lange Seite 86 mm lang ist. Sie messen ungefähr 5.5 ± 0.1 Scheckkartenlängen. Die Dichte von Beton googeln Sie mit Ihrem Notebook schnell aus. Sie finden heraus, dass die Dichte von Beton von der genauen Zusammensetzung abhängt, aber typischerweise zwischen 2000 und 2600 kg/m³ liegt.

Es sind also

$$\bar{\rho} = 2300 \pm 300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \text{d.h. } \sigma_{\rho} = 300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$\bar{r} = (5.5 \pm 0.1) \cdot 86 \text{ mm} = 0.473 \pm 0.009 \text{ m}, \quad \text{d.h. } \sigma_r = 9 \text{ mm}$$

Außerdem gilt:

$$\bar{m} = \bar{\rho} \bar{r}^3, \quad \frac{\partial m}{\partial \rho} = \bar{r}^3, \quad \frac{\partial m}{\partial r} = 3\bar{\rho} \bar{r}^2 \quad \text{und}$$

$$\sigma_{mm} = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial \rho}\right)^2 \sigma_{mp}^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2 \sigma_{mr}^2} = \sqrt{(\bar{r}^3)^2 \sigma_{mp}^2 + (3\bar{\rho} \bar{r}^2)^2 \sigma_{mr}^2}$$

Daraus erhält man $\bar{m} = 243.394779 \text{ kg}$ und $\sigma_{mm} = 34.65545 \text{ kg}$, also bei Angabe signifikanter Stellen eine Masse von $240 \pm 40 \text{ kg}$.

Sie wissen aus leidvoller Erfahrung, dass Sie bis zu 40 kg anheben und transportieren können, aber nicht mehr, ohne ein unverhältnismäßiges Risiko einzugehen. Sie brauchen also eine Verstärkung von mindestens 5 Ihrer Kommilitonen, um den Klotz zu transportieren. Zur Sicherheit sollten Sie aber einen sechsten hinzuziehen, falls es sich doch eher um Schwer- als um Leichtbeton handeln sollte, oder falls Ihre kreditkartengestützte Längenmessung ein wenig zu klein ausgefallen sein sollte (oder beides). Letzteres fällt allerdings kaum ins Gewicht (s. unten).

Die Berechnung des Fehlers in m hätte man einfacher auch nur über die relativen Fehler der unabhängigen Größen durchführen können. Danach wären also

$$\bar{\rho} = 2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \pm 13\%, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\sigma_{mp}}{\bar{\rho}} = 13\%$$

$$\bar{r} = (5.5 \pm 0.1) \cdot 86 \text{ mm} = 0.473 \text{ m} \pm 1.9\%, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\sigma_{mr}}{\bar{r}} = 1.9\%$$

Außerdem gilt:

$$\bar{m} = \bar{\rho} \bar{r}^3 \quad \text{und} \quad \frac{\sigma_{mm}}{\bar{m}} = \sqrt{\frac{\sigma_{mp}^2}{\bar{\rho}^2} + 9 \frac{\sigma_{mr}^2}{\bar{r}^2}}$$

Daraus erhält man wieder $\bar{m} = 243.4 \text{ kg}$ und $\sigma_{mm}/\bar{m} = 14\%$.

Auf diese Weise sind die Beiträge der Fehler jeweiligen Größen zum Gesamtfehler gut erkennbar. Obwohl der Längenfehler, da die Länge mit der dritten Potenz eingeht, 9 Mal so stark wiegt wie der Dichtefehler, ist der Gesamtfehler im wesentlichen durch die Dichteunsicherheit bestimmt. Es würde also kaum etwas bewirken, die Längenmessung zu verbessern, wohl aber, wenn die Dichte genauer bestimmt werden würde. Generell können bei mehreren unabhängigen, stark unterschiedlich großen Fehlerquellen die kleineren vernachlässigt werden. Nur wenn die relativen Fehler von ungefähr gleicher Größe sind, sind auch die kleineren Fehler relevant.