Die Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation – Geltung, Interpretation und Behandlung im Schulunterricht

Rainer Müller und Hartmut Wiesner

In den meisten Schulbüchern und Lehrbüchern der Quantenmechanik hat die Unbestimmtheitsrelation zwischen Energie und Zeit

$$\Delta E \, \Delta t \gtrsim \hbar/2 \tag{1}$$

ihren festen Platz. Gewöhnlich wird dabei ΔE als die Meßungenauigkeit bei einer Energiemessung und Δt als die zur Messung benötigte Zeit interpretiert. Mehr als den Hinweis, daß man der Relation (1) nicht den gleichen Rang wie der Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation zubilligen kann, findet man zu ihrem Status innerhalb der Quantenphysik kaum. Es erscheint daher angebracht, etwas tiefer auf die Geltung und die Interpretation der Gleichung (1) einzugehen. Wie schon in den vorangegangenen Arbeiten zur Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation [1, 2] sollen anschließend die Konsequenzen für die Behandlung im Unterricht diskutiert werden.

In seiner Originalarbeit [3] führt Heisenberg eine Unbestimmtheitsrelation der Form (1) ein. Sie wird an einem Gedankenexperiment illustriert. (Allerdings scheint Heisenberg auch an die Gültigkeit einer formalen Vertauschungsrelation zwischen Energie und Zeit (-Operatoren) zu denken). Er betrachtet die Messung der Energie in einem Stern-Gerlach-Experiment. Eine Abschätzung der Ablenkung bei diesem Versuch führt ihn zu dem folgenden Schluß: „Ebensowenig wie es sinnvoll ist, von der Frequenz einer Lichtwelle in einem bestimmten Augenblick zu zu sprechen, kann von der Energie eines Atoms in einem bestimmten Moment gesprochen werden. Dem entspricht im Stern-Gerlach-Versuch der Umstand, daß die Genauigkeit der Energiemessung um so geringer wird, je kürzer die Zeitspanne ist, in der die Atome unter dem Einfluß der ablenkenden Kraft stehen“ [3]. Diese Interpretation, die Frage ihrer theoretischen Ableitbarkeit und ihres Gültigkeitsbereiches waren in der Zeit seither Gegenstand umfangreicher Debatten.

Zuerst wurde Klarheit darüber geschaffen (weitgehend von Pauli), daß es keinen hermiteschen Zeitoperator $\hat{Z}$ geben kann, der mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ die Vertauschungsrelation

$$[\hat{Z}, \hat{H}] = i\hbar \tag{2}$$

erfüllt (die beste Übersicht findet sich bei Allcock [4] und Jammer [5]). Aus einer Vertauschungsrelation der Form (2) ließe sich über die allgemeine Form der Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta Z \Delta H \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{Z}, \hat{H}] \rangle| \tag{3}$$

die Beziehung (1) formal genauso streng herleiten wie die Orts-Impuls-Relation. Sie ist auch naheliegend, wenn man an eine relativistische Verallgemeinerung der Quantenmechanik denkt, denn in der speziellen Relativitätstheorie werden ja Ort und Zeit einerseits und Impuls und Energie andererseits zu Vierervektoren zusammengefaßt.

Was wäre die physikalische Bedeutung eines solchen Zeitoperators $\hat{Z}$? Sicherlich würde er nicht den gewöhnlichen universellen Zeitparameter t verallgemeinern, der in der Schrödingergleichung vorkommt, denn er wäre ja, wie der Ortsoperator auch, einem bestimmten physikalischen Objekt zugeordnet. Vielmehr handelte es sich um eine Art „innere Zeit“ Z, der etwa dem Zeitpunkt eines bestimmten Ereignisses zugeordnet wäre. Die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $\hat{Z}$ lautete

$$\frac{d}{dt}\hat{Z} = [\hat{Z}, \hat{H}]/(i\hbar) = 1,$$

so daß $Z = t+$ const gälte. Die innere Zeit Z liefe also mit der äußeren Zeit t synchron.

Gleichwohl konnte Pauli zeigen, daß die Einführung eines Zeitoperators in dieser Form nicht möglich ist. Er stützte seinen Beweis auf die folgende Tatsache: Setzt man die Vertauschungsrelationen (2) voraus und nimmt an, daß die Eigenwerte des Zeitoperators ein kontinuierliches Spektrum von $-\infty$ bis $+\infty$ bilden, so folgt, daß das Spektrum des Hamiltonoperators (d. h. die möglichen Energiewerte) ebenfalls kontinuierlich ist und von $-\infty$ bis $+\infty$ reicht. Das ist aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß jedes physikalische System einen Grundzustand und damit einen niedrigsten Energiewert besitzt. Außerdem ist es wohlbekannt, daß viele Systeme diskrete Energiezustände besitzen, ebenfalls im Widerspruch zu der Folgerung.

Da man nun auf eine formale Herleitung der Unbestimmtheitsrelation (1) verzichten muß, bei der den Größen ΔE und Δt eine wohldefinierte Bedeutung als Standardabweichungen einer Meßgröße zugekommen wäre, kann man versuchen, eine heuristische Rechtfertigung der Gleichung (1) zu finden. Dieser Weg wird in den meisten Darstellungen beschritten, und es überraschend, bei wie vielen physikalisch verschiedenen Anwendungen eine Relation der Form (1) auftritt und wie unklar ihre Deutung ist. Man kann verschiedene Kategorien unterscheiden (s. z. B. [6], [7], [4]):

1. Durchgangsdauer und Energieunschärfe

In dieser Fassung, die auf Bohr [8] zurückgeht, untersucht man die Zeitdauer, die ein Wellenpaket zum Durchqueren einer bestimmten Region benötigt. Man betrachtet ein Wellenpaket, daß durch Überlagerung von ebenen Wellen der Form $\exp(i(px - Et)/\hbar)$ entsteht. Es wird angenommen, daß die verschiedenen Fourierkomponenten (also die verschiedenen Energiewerte E) innerhalb eines Intervalls ΔE liegen. Dann betrachtet man die Interferenz der verschiedenen Komponenten an einem gegebenen Punkt x. Die Durchgangszeit Δt wird definiert als das Zeitintervall zwischen konstruktiver Interferenz (dem Passieren des Maximums des Wellenpakets) und destruktiver Interferenz (Minimum des Wellenpakets). Aus den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt, daß diese Zeit nicht kleiner sein kann als $\hbar/(\Delta E)$, woraus

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar \tag{4}$$

folgt. Man muß nicht betonen, daß diese Überlegung sehr heuristisch ist, und insbesondere die Definition der Durchgangszeit kann strengen Maßstäben sicherlich nicht genügen.

Eine etwas formalere Ausarbeitung der gleichen Idee geht auf Mandelstam und Tamm zurück und hat in zahlreiche Lehrbücher Eingang gefunden. Sie benutzt das Heisenberg-Bild, in dem die Operatoren zeitabhängig sind, und in dem Analogien zur klassischen Physik leichter formuliert werden können als im Schrödinger-Bild. In der klassischen Mechanik ist die Durchgangszeit Δt, die ein Teilchen braucht, um eine Strecke Δx zu durchqueren, durch $\Delta t = \Delta x/v$ gegeben, falls das Teilchen seine Geschwindigkeit nicht ändert. Entsprechend kann man versuchen, die Durchgangszeit in der Quantenmechanik wie folgt zu definieren:

$$\Delta t = \Delta x/|\langle \dot{x} \rangle|. \tag{5}$$

(Nach Mandelstam und Tamm kann man statt dem Ort eines Teilchens auch eine andere Variable benutzen, um mit Hilfe von deren Änderung eine „typische Zeitskala“ zu definieren, z. B. die

Position eines Zeigers). Nach der allgemeinen Unbestimmtheitsrelation (3) gilt

$$\Delta x \Delta H \geq \frac{1}{2}|\langle [H, x] \rangle| = \hbar/2|\langle \dot{x} \rangle|,$$

wobei im letzten Schritt die Heisenbergsche Bewegungsgleichung $\dot{x} = [x, H]/(i\hbar)$ benutzt wurde. Setzt man jetzt die Definition von Δt ein, so ergibt sich die Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta t \Delta H \geq \hbar/2.$$

2. Heuristische Zurückführung auf die Orts-Impuls-Relation

Eine verkürzte Version der vorangegangenen Ableitung findet man in vielen Schulbüchern. Dort wird folgendermaßen argumentiert: Ähnlich wie in (5) definiert man eine „Zeitunschärfe" $\Delta t = \Delta x / v$. Dabei soll v die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes darstellen. Im Hinblick auf die klassische Beziehung $E_{kin} = p^2/(2m) = vp/2$ wird die „Energieunschärfe" $\Delta E = \frac{1}{2} v \Delta p$ definiert. Für das Produkt dieser beiden Größen findet man

$$\Delta t \, \Delta E = \frac{1}{2} \Delta x \, \Delta p.$$

An dieser Stelle greift man auf die Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation zurück und eine Ungleichung der Gestalt (4).

Beurteilt man diese „Ableitung" aus fachlicher Perspektive, stellt man erhebliche Mängel fest. Daß die Definition der Zeitunschärfe nur heuristischen Wert haben kann, wurde oben schon festgestellt. Bei der Definition der Energieunschärfe wird darüber hinaus nur die kinetische Energie berücksichtigt. Schwerer noch wiegt der Einwand, daß bei der Aufspaltung von p^2/m in $v\dot{p}$ von den beiden (a priori gleichberechtigten) Faktoren nur p mit einer Unschärfe versehen wird, während v als Konstante gedeutet wird. („Retten" könnte man dieses Vorgehen dadurch, daß man E_{kin} und p als voneinander abhängige statistische Variable deutet und ΔE_{kin} und Δp wie beim Fehlerfortpflanzungsgesetz verknüpft: $\Delta E = (dE/dp) \, \Delta p = (\bar{p}/m) \Delta p$).

Generell erweckt die Rückführung der Energie-Zeit- auf die Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation den Eindruck, daß die einzelnen Schritte der Herleitung nur durch das gewünschte Ergebnis gerechtfertigt sind. Physikalisch ist es auch für die Schülerinnen und Schüler nicht plausibel, weshalb z. B. eine Ortsunschärfe immer mit einer Zeitunschärfe verknüpft sein soll.

3. Dauer einer Energiemessung und Energieunschärfe

Wie schon erwähnt, ist die verbreitetste Interpretation der Relation (1), daß die Genauigkeit einer Energiemessung und die zur Messung mindestens benötigte Zeitspanne über (1) verknüpft sind. Ein Beispiel dafür ist das von Heisenberg angegebene Stern-Gerlach-Gedankenexperiment.

Ein weiteres, viel diskutiertes Gedankenexperiment stammt von Landau und Peierls [9] (s. auch [10]). Sie untersuchen die Energiemessung durch den Stoß zweier Teilchen, von denen eines als zu messendes Objekt, das andere als Detektor dient. Aus der Störungstheorie läßt sich eine Unbestimmtheitsrelation der Form (1) herleiten, die jedoch etwas anders interpretiert wird: „[Die zur Messung notwendige] Zeit wird durch die Relation $\Delta E \Delta t > h$ begrenzt, die schon sehr oft aufgestellt, aber nur von Bohr richtig interpretiert wurde. Diese Relation bedeutet evidenterweise *nicht*, daß die Energie nicht zu einer bestimmten Zeit genau bekannt sein kann (sonst hätte der Energiebegriff überhaupt keinen Sinn), sie bedeutet aber auch nicht, daß die Energie nicht innerhalb einer kurzen Zeit mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden kann" [9]. (Die hier erwähnte Interpretation von Bohr ist die oben unter 1. wiedergegebene). Landau und Peierls versuchen nun zu zeigen, daß sich die von ihnen abgeleitete Relation auf den Unterschied zwischen der vom Meßgerät angezeigten Energie und der Energie des gemessenen Objekt nach der Messung bezieht. Mit anderen Worten: Energiemessungen sind nicht reproduzierbar, und zwar um so weniger, je kürzer sie dauern.

Die allgemeine Auffassung der Beziehung zwischen der Dauer einer Energiemessung und der Energieunschärfe wurde von Aharonov und Bohm [7] kritisiert, die bemängelten, daß dieser Standpunkt nur auf der Diskussion von Beispielen beruht und daß diese Beispiele zu speziell gewählt seien. Als Beleg für ihre These geben sie ein explizites theoretisches Modell einer hypothetischen Energiemessung an, bei dem die Energie bei geeigneter Wahl der Parameter in einer beliebig kurzen Zeit beliebig genau gemessen werden kann, im Widerspruch zur allgemeinen Ansicht. Zudem ist die Messung reproduzierbar, d. h. auch die Interpretation von Landau und Peierls läßt sich nicht aufrechterhalten.

4. Lebensdauer eines angeregten Zustands und Breite der Spektrallinien

Betrachten wir ein Atom in einem angeregten Zustand. Nach einer gewissen Zeit wird es durch spontane Emission in einen tieferliegenden Zustand zerfallen und dabei ein Photon emittieren. Seine mittlere Lebensdauer bezeichnen wir mit τ. Es ist bekannt, daß die Photonen, die dabei emittiert werden, nicht alle exakt die gleiche Energie haben. Stattdessen zeigt die Beobachtung, daß alle Spektrallinien eine gewisse Breite ΔE aufweisen, selbst wenn man alle sonstigen störenden Einflüsse ausschaltet. Diese *natürliche Linienbreite* ist eng mit der endlichen Lebensdauer des angeregten Zustands verknüpft. Die explizite Rechnung zeigt nämlich [11, 12], daß die Spektrallinien die Form einer Lorentz-Kurve besitzen, deren Breite genau das Inverse der Lebensdauer des angeregten Zustands ist:

$$\Delta E = \hbar/\tau. \tag{6}$$

Heuristisch kann man das folgendermaßen verstehen [13]: Modelliert man das Atom als ein schwingendes System, dessen Amplitude durch den Zerfall exponentiell abklingt, wird die emittierte elektromagnetische Strahlung die Form einer exponentiell gedämpften Welle haben (mit der Abklingzeit τ). Ihr Spektrum (also die Fouriertransformierte) hat dann die Form einer Lorentzverteilung mit der Breite $\Delta\omega = 1/\tau$, was sofort auf (6) führt.

Das Bemerkenswerte an diesem Zusammenhang ist, daß er nicht nur für Atome gilt, sondern für alle zerfallenden Systeme, die einem exponentiellen Zerfallsgesetz gehorchen. In der Elementarteilchenphysik zum Beispiel entsteht die gleiche Resonanzkurve, wenn unstabile Teilchen wie Myonen oder Pionen zerfallen [14]. In der Tat kann man mit Hilfe von (6) aus der Breite der Resonanzkurve die Lebensdauer der Ausgangsteilchen ermitteln.

5. Konsequenzen für den Schulunterricht

Versucht man aus fachdidaktischer Perspektive, den Status der Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation innerhalb der Quantenmechanik zu bestimmen, findet man mehrere Ursachen zur Skepsis: Zum einen die Tatsache, daß eine Relation der Form (1) nicht sauber aus der Theorie abgeleitet werden kann, sondern nur anhand von Beispielen mehr oder weniger plausibel gemacht werden kann. Dies läßt schon einige Zweifel an dem fundamentalen Charakter einer solchen Relation aufkommen, die sich noch verstärken, wenn man sich die Art der illustrierenden Gedankenexperimente genauer betrachtet. Abgesehen von der Relation zwischen Lebensdauer und Linienbreite gewinnt man nicht den Eindruck, daß es sich um besonders allgemeingültige Beispiele handelt. Insbesondere zeigt das Gegenbeispiel von Aharonov und Bohm, daß die verbreitetste Auffassung nicht haltbar ist.

Es stellt sich daher die Frage, ob man der Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation in der Schule tatsächlich einen prominenten Platz im Unterricht der Quantenphysik zugestehen will. Sie hat einen völlig anderen logischen Status als die Relation für Ort und Impuls, und Δt ist auch theoretisch nicht eindeutig definiert. Dies spricht dafür, sie im Unterricht nicht zu behandeln. Falls man sich dennoch dafür entscheidet, sollte man jedenfalls auf eine fachlich korrekte Formulierung ihrer Interpretation zurückgreifen. Für die Schule bietet sich die Fassung von Bohr an, die die zeitliche Ausdehnung von Wellenpaketen durch den Wechsel von konstruktiver zu destruktiver Interferenz erklärt. Nur als Ergebnis mitteilen läßt sich dagegen der Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Linienbreite, der jedoch gerade wegen seiner allgemeinen Geltung interessant ist.

Die oftmals in Schulbüchern anzutreffende Rückführung der Energie-Zeit- auf die Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation sollte wegen ihrer schwerwiegenden fachlichen Mängel nicht im Unterricht verwendet werden. Ihre Ableitung ist quantenmechanisch höchst fragwürdig und führt eher zu Verwirrung. Darüber hinaus verschleiert sie den fundamental verschiedenen theoretischen Status der beiden Relationen.

Literatur

[1] R. Müller, H. Wiesner, *Die Interpretation der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation*, Physik in der Schule **35**, 218 (1997).

[2] R. Müller, H. Wiesner, *Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation im Unterricht*, Physik in der Schule **35**, 380 (1997).

[3] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantenmechanischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. **43**, 172 (1927).

[4] G. R. Allcock, *The Time of Arrival in Quantum Mechanics*, Annals of Physics **53**, 253 (1969).

[5] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, New York 1974.

[6] F. Schwabl, *Quantenmechanik*, Berlin 1992.

[7] Y. Aharonov, D. Bohm, *Time in Quantum Theory and the Uncertainty Relation for Time and Energy*, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961).

[8] N. Bohr, *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik*, Naturwiss. **16**, 245 (1928); abgedruckt in: K. v. Meyenn, K. Stolzenburg, R. U. Sexl (Hrsg.), *Niels Bohr 1885-1962 – Der Kopenhagener Geist in der Physik*, Braunschweig 1985.

[9] L. Landau, R. Peierls, *Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie*, Z. Phys. **69**, 56 (1931).

[10] L. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. III: Quantenmechanik*, Berlin 1988.

[11] A. Messiah, *Quantenmechanik Bd. II*, Berlin 1985.

[12] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom-photon interactions - basic processes and applications*, New York, 1992.

[13] T. Mayer-Kuckuk, *Atomphysik*, Stuttgart 1985.

[14] K. Gottfried, V. F. Weisskopf, *Concepts of Particle Physics Vol. II*, Oxford 1986.

Adressen der Autoren
Dr. Rainer Müller, Sektion Physik der Universität München, Theresienstr. 37, 80333 München.

Prof. Dr. Dr. Hartmut Wiesner, Lehrstuhl für Didaktik der Physik,
Sektion Physik der Universität München, Schellingstr. 4, 80799 München.