Die Interpretation der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation

Rainer Müller und Hartmut Wiesner

Einleitung

Würde man eine Umfrage durchführen, um die wichtigste Erkenntnis der Quantenmechanik zu ermitteln, würde die „Unbestimmtheit“ sicher einen der vorderen Plätze belegen. Aber was hat man eigentlich unter dieser Unbestimmtheit in der Mikrowelt zu verstehen, die ihren formalen Ausdruck in den Heisenbergschen Ungleichungen findet? Über diese Fragen würden die Meinungen wohl weit auseinandergehen. Handelt sich um Unschärfen in dem Sinn, daß unsere Meßgeräte prinzipiellen Beschränkungen unterworfen sind, die sie daran hindern, Ort und Impuls gleichzeitig scharf zu messen? Ist die Heisenbergsche Ungleichung vielleicht eine subjektive Aussage über unser maximal mögliches Wissen von den Quantenobjekten? Oder ist sie eine tiefgehende Erkenntnis über die Natur der Dinge und drückt eine absolute Unbestimmtheit im Bereich der Quantenwelt aus?

Alle diese Positionen wurden von Physikern vertreten, und keine davon ist als offensichtlich falsch von der Hand zu weisen (obwohl im Prozeß der wissenschaftlichen Meinungsbildung sich einige Auffassungen gegenüber anderen durchsetzen konnten). Mario Bunge nennt die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation „vermutlich die kontroverseste Formel der gesamten theoretischen Physik“ [1]. Dabei ist die Interpretation der Unbestimmtheitsrelation aufs engste mit der Frage verknüpft, wie die Quantenmechanik überhaupt zu interpretieren ist [2, 3], und sie bildet deshalb ein interessantes Thema für Diskussionen.

Für den Unterricht der Quantenphysik in der Schule stellt der Sachverhalt der unabgeschlossenen Interpretation einerseits ein Problem dar, denn letztgültig kann die Frage, welches denn die richtige Auffassung sei, nicht beantwortet werden. Andererseits wurde schon wiederholt betont [4], daß die Diskussion solcher offenen Interpretationsfragen in der Schule eine Bereicherung bilden kann. Sie kann dazu beitragen, die Physik nicht als ein totes Gebäude fester Lehrsätzen zu sehen, sondern als eine lebendige und sich entwickelnde Wissenschaft.

Der vorliegende Beitrag ist der erste von zwei Teilen, die sich mit den verschiedenen Aspekten der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation beschäftigen. Im ersten Teil geht es hauptsächlich um die gerade angesprochenen Fragen der Interpretation. Die verschiedenen Interpretationsansätze werden in ihrer historischen Entwicklung vorgestellt und ihre Bedeutung diskutiert. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den fachdidaktischen Problemen, die bei der Herleitung und der Vermittlung der Unbestimmtheitsrelation auftreten.

Die historischen Wurzeln der Unbestimmtheitsrelationen: Heisenberg und Bohr

In der Mitte des Jahres 1926 war die formale Entwicklung der Quantenmechanik schon weit gediehen: Die auf Heisenberg zurückgehende Matrizenmechanik lag vor, Schrödinger hatte seine Wellenmechanik entwickelt und ihre formale Äquivalenz zur Matrizenmechanik gezeigt. Dirac, Jordan und Born arbeiteten an einem umfassenderen Formalismus, der sogenannten Transformationstheorie. Über die Deutung der neu entstehenden Theorie war aber noch keine Einigkeit gewonnen. Bei einem Besuch Schrödingers in Kopenhagen, der für die Interpretation der Quantenmechanik weitreichende Konsequenzen haben sollte, traten die Differenzen zwischen Bohr und Heisenberg auf der einen Seite und Schrödinger auf der anderen deutlich zutage. Schrödinger hoffte, mit seiner Kontinuumstheorie die Quantenmechanik auf eine weitgehend klassische Grundlage gestellt zu haben, und der „verdammten Quantenspringerei“ endlich ein Ende bereitet zu haben. Es gelang ihm jedoch nicht, Bohr von dieser Vorstellung zu überzeugen. Sein Besuch führte aber zu intensiven Diskussionen zwischen Bohr und Heisenberg, in deren Verlauf zum einen die Grundzüge der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik entwickelt und zum anderen die Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen formuliert wurden.

Heisenberg versuchte, seinem abstrakten matrizentheoretischen Formalismus eine ähnliche Anschaulichkeit abzugewinnen wie sie die Schrödingersche Materiewellen-Mechanik besaß. Bisher war es etwa ganz unerklärt, wie man im Rahmen der Heisenbergschen Quantenmechanik die Bewegung von Elektronen in einer Wilsonschen Nebelkammer beschreiben konnte, die ja scheinbar einer wohldefinierten Bahn folgen. Nach einigen erfolglosen Versuchen, den erfolgreichen mathematischen Formalismus mit diesen empirischen Beobachtungen in Einklang zu bringen, wandte er sich einer grundlegenden Revision klassischer Begriffe wie Ort, Bahn, Geschwindigkeit oder Energie zu. Im Zuge dieser Überlegungen gelangte er zu den fundamentalen Beschränkungen, die einen der Grundzüge der Quantenmechanik ausmachen.

In seiner im März 1927 fertiggestellten Arbeit „Über den anschaulichen Inhalt der quantenmechanischen Kinematik und Mechanik“ [5] schreibt Heisenberg: „Wenn man sich darüber klar werden will, was unter dem Worte ‘Ort des Gegenstandes’, z. B. des Elektrons [...], zu verstehen sei, so muß man bestimmte Experimente angeben, mit deren Hilfe man den ‘Ort des Elektrons’ zu messen gedenkt; anders hat dieses Wort keinen Sinn“ [5]. Demgemäß gibt er Beispiele an, wie eine Ortsmessung im Prinzip durchführbar ist, etwa das bekannte Gammastrahlen-Mikroskop. Weiterhin definiert er den Begriff „Geschwindigkeit“ ebenfalls über Meßvorschriften, wie z. B. über den Doppler-Effekt. Auf diese Weise schafft er die begriffliche Ausgangsbasis, die ihm anschließend die Diskussion seiner Unbestimmtheitsbeziehungen erlaubt.

Man bemerkt, daß sein Vorgehen ganz der positivistischen Grundhaltung entsprach, die ihn schon bei der Konstruktion seiner Theorie geleitet hatte und nach der nur beobachtbare Größen in die Beschreibung eingehen sollten. Sein erklärtes Vorbild dabei war Einstein, der bei der Begründung der Relativitätstheorie eine operationale Definition des Begriffs der Gleichzeitigkeit gegeben und auf diese Weise die Grenzen der Anwendbarkeit dieses Begriffs aufgezeigt hatte. Bestärkt wurde Heisenberg durch die Äußerung Einsteins daß „erst die Theorie darüber entscheidet, was man beobachten kann“ (obwohl Einstein die positivistische Einstellung Heisenbergs nicht teilte).

In seiner Arbeit gibt Heisenberg zwei Begründungen für die Unbestimmtheitsrelation: Einerseits ein formales Argument (allerdings keine Herleitung), in dem ein Gaußsches Wellenpaket betrachtet wird, dessen Wellenfunktion nur in einem bestimmten Raumbereich der Breite Δx merklich von Null verschieden ist. Mit Hilfe der Dirac-Jordanschen Transformationstheorie geht er in eine Impulsraum-Darstellung über und findet, daß die Impulsverteilung eine Breite Δp aufweist, die mit Δx über

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{h}{2\pi}$$

zusammenhängt.

Das Gedankenexperiment, das Heisenberg als zweite Illustration der Unbestimmtheitsrelation diente, ist wohlbekannt und schon oft wiedergegeben worden (s. auch [6]): Man versucht, den Ort eines freien Teilchens durch Betrachtung in einem Mikroskop zu ermitteln. Die Genauigkeit Δx der Ortsbestimmung ist durch das Auflösungsvermögen des Mikroskops gegeben und nimmt zu, wenn man die Frequenz der Strahlung erhöht, mit der man das Teilchen beleuchtet. Andererseits erhält das Teilchen bei der Streuung des Lichts wegen des Compton-Effekts einen Rückstoß Δp, der nicht genau bekannt ist, da das emittierte Lichtquant innerhalb des Strahlenbündels, das die Linse des Mikroskops passiert, eine beliebige Richtung haben kann. Die quantitative Analyse ergibt die Relation

$$\Delta x \, \Delta p \approx h$$

Heisenberg schreibt: „Im Augenblick der Ortsbestimmung, also dem Augenblick, in dem das Lichtquant vom Elektron abgebeugt wird, verändert das Elektron seinen Impuls unstetig. Diese Änderung ist um so größer, je kleiner die Wellenlänge des benutzten Lichtes, d. h. je genauer die Ortsbestimmung ist. In dem Moment, in dem der Ort des Elektrons bekannt ist, kann daher sein Impuls nur bis auf Größen, die jener unstetigen Änderung entsprechen, bekannt sein; also je genauer der Ort bestimmt ist, desto ungenauer ist der Impuls bekannt und umgekehrt“ [5].

Damit hat Heisenberg auch gleich zur *Bedeutung* der Unbestimmtheitsrelation Stellung genommen. Seine Position wird in dem folgenden Zitat noch etwas deutlicher: „Die Unbestimmtheitsrelationen beziehen sich auf den Genauigkeitsgrad unserer gegenwärtigen [...] Kenntnis der verschiedenen quantentheoretischen Größen. Da diese Relationen nicht die Genauigkeit z. B. einer Ortsmessung allein oder einer Geschwindigkeitsmessung allein beschränken, so äußert sich ihre Wirkung nur darin, dass jedes Experiment, das eine Messung etwa des Ortes ermöglicht, notwendig die Kenntnis der Geschwindigkeit in gewissen Grade stört“ [6].

Fassen wir die Hauptmerkmale seiner Auffassung zusammen:

1. Die Unbestimmtheitsrelationen beziehen sich offensichtlich auf einzelne Quantenobjekte.

2. Seine Interpretation ist subjektivistisch: Die Größen Δx und Δp hängen nicht mit unmittelbaren Eigenschaften des beobachteten Quantenobjekts zusammen. Stattdessen beziehen sie sich auf unsere *Kenntnis*, die wir durch Messungen von ihm erlangen. Die Unbestimmtheitsrelationen beziehen sich also auf unser *Wissen*, das wir von einem Quantenobjekt besitzen.

Die von Heisenberg angegebenen Gedankenexperimente verwenden eine Störungsvorstellung, das heißt die zur Messung einer Größe durchgeführten Experimente beeinflussen den Wert einer anderen Größe. Das kann aber die Vorstellung nahelegen, daß diese andere Größe unmittelbar vor der Messung einen festen Wert besessen hat. Heisenberg wendet sich aber gegen eine solche Auffassung: „Die Relationen (6) [die Unbestimmtheitsrelationen] geben die Grenzen an, bis zu denen die Begriffe der Partikeltheorie angewendet werden können. Ein über Gleichung (6) hinausgehender, genauerer Gebrauch der Wörter ‘Ort, Geschwindigkeit’ ist ebenso inhaltslos, wie die Anwendung von Wörtern, deren Sinn nicht definiert worden ist“ [6]. Natürlich drängt sich die Frage auf, was der Ort x eines Teilchens mit einer Unbestimmtheit $\Delta x > 0$ ist (entsprechend für den Impuls) und was Δx bedeutet. Gibt Δx z. B. das Intervall an, in dem der „wahre“ Wert x liegt?

In der Frage der Interpretation der Unbestimmtheitsrelationen gab es zwischen Bohr und Heisenberg starke Differenzen. Obwohl Bohr in den Diskussionen, die der Entdeckung der Heisenbergschen Relation folgten, die formalen Schlußfolgerungen Heisenbergs akzeptierte, vertrat er bezüglich ihrer Deutung eine vollkommen andere Position. Die Auseinandersetzungen über dieses Thema wurden von Heisenberg als bitter und sehr unangenehm beschrieben [7].

Bohr wollte die Unbestimmtheitsrelationen in den weit umfassenderen Rahmen seiner erkenntnistheoretischen Deutung der Quantenmechanik eingebettet wissen, die er später als „Komplementarität“ bezeichnet hat (über Bohrs Verständnis der Quantenmechanik wurde ausführlich in [2] berichtet). Der Platz, den die Heisenbergschen Relationen in seinem System einnehmen, kommt in der folgenden Passage zum Ausdruck: „Im Rahmen der klassischen Physik können im Prinzip alle charakteristischen Eigenschaften eines gegebenen Objekts mittels einer einzigen

Versuchsanordnung festgestellt werden, obgleich in der Praxis zuweilen mehrere Anordnungen zum Studium verschiedener Aspekte des Phänomens bequemer sind. Auf diese Weise gewonnene Erkenntnise ergänzen einfach einander und können in einem zusammenhängenden Bild des Verhaltens des zu untersuchenden Objekts zusammengefaßt werden. In der Quantenphysik stehen dagegen die mit Hilfe verschiedener Versuchsanordnungen gewonnenen Erfahrungen in einer neuartigen komplementären Beziehung zueinander. [...] Weit davon entfernt, unseren Bemühungen, der Natur Fragen in Form von Experimenten zu stellen, eine Grenze zu setzen, charakterisiert der Begriff *Komplementarität* einfach die Antworten, die wir auf eine solche Fragestellung in jenen Fällen erhalten, wo die Wechselwirkung zwischen den Meßgeräten und den Objekten einen integrierenden Teil des Phänomens bildet. [...]

Die Feststellung des Vorhandenseins eines atomaren Teilchens in einem begrenzten raumzeitlichen Volumen verlangt in der Tat eine Versuchsanordnung, die mit der Überführung von Impuls und Energie auf Körper wie feste Maßstäbe und synchronisierte Uhren verbunden ist, der nicht Rechnung getragen werden kann, wenn diese Körper ihren Zweck, den Bezugsrahmen festzulegen, erfüllen sollen. Umgekehrt bringt jede Anwendung der Erhaltungsgesetze von Impuls und Energie auf atomare Prozesse den Verzicht auf ins einzelne gehende raumzeitliche Koordinierung der Teilchen mit sich [vgl. Abb. 1].

Diese Umstände finden quantitativen Ausdruck in den Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen betreffend den wechselseitigen Spielraum in der Quantenmechanik für die Festlegung der kinematischen und dynamischen Variablen, die für die Definition eines Zustandes eines Systems in der klassischen Mechanik erforderlich sind. Die begrenzte Vertauschbarkeit der Symbole, durch welche solche Variable im Quantenformalismus dargestellt werden, entspricht eben der gegenseitigen Ausschließung der Versuchsanordnungen, die für ihre eindeutige Definition unentbehrlich sind. In diesem Zusammenhang handelt es sich ja nicht um eine Beschränkung der Meßgenauigkeit, sondern um eine Begrenzung der wohldefinierten Anwendung der raumzeitlichen Beschreibung und der Erhaltungsgesetze, die durch die notwendige Unterscheidung zwischen Meßgeräten und atomaren Objekten bedingt ist“ [8].

Einige Details der komplexen Komplementaritätsphilosophie Bohrs wurden in [2] bereits besprochen, so daß wir seine Sicht der Unbestimmtheitsrelation folgendermaßen zusammenfassen können:

1. Auch für Bohr bezieht sie sich auf einzelne Quantenobjekte.

2. Die Unbestimmtheitsrelationen geben einen objektiv in der Natur bestehenden Sachverhalt wieder. Nach Bohr ist es in der Quantenmechanik nicht möglich, einem Objekt Eigenschaften zuzuschreiben, ohne die Bedingungen anzugeben, unter denen diese Eigenschaften gemessen wurden bzw. überhaupt definiert sind: „Kein Ergebnis eines Experimentes über ein im Prinzip außerhalb des Bereiches der klassischen Physik liegenden Phänomen [kann] dahin gedeutet werden, daß es Aufschluß über unabhängige Eigenschaften der Objekte gibt; es ist vielmehr unlöslich mit einer bestimmten Situation verbunden, in deren Beschreibung auch die mit den Objekten in Wechselwirkung stehenden Meßgeräte als wesentliches Glied eingehen“ [9].

Nachzutragen bleibt noch, daß die Unbestimmtheitsrelation ihre endgültige mathematische Formulierung 1929-30 durch Robertson und Schrödinger erfuhr [12, 13]. Nach Robertson muß für zwei beliebige Observable A, B die Beziehung

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| \tag{1}$$

gelten. Sie zeigt, daß die Nichtvertauschbarkeit zweier Operatoren der formale Grund für die Gültigkeit der Unbestimmtheitsrelationen ist. Es muß betont werden, daß ΔA und ΔB in Gl.

(1) keine mehr oder weniger willkürlich festgelegten Unschärfen mehr sind (wie in den bisher diskutierten Gedankengängen), sondern sie sind mathematisch präzise als Standardabweichungen $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ definiert. Setzt man in (1) für A und B Ort und Impuls ein, so ergibt sich die endgültige Fassung der Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation:

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar. \tag{2}$$

In manchen Büchern findet man abweichende Zahlenfaktoren auf der rechten Seite von (2). In der Regel ist das auf eine unterschiedliche Definition der Größen Δx bzw. Δp zurückzuführen.

Die Unbestimmtheitsrelation in der Ensemble-Interpretation

Die heutzutage für viele Physiker maßgebliche Deutung der Quantenmechanik ist die Statistische (oder Ensemble-) Interpretation. Sie wurde in einem vorherigen Artikel bereits vorgestellt [3]. Da die Interpretation der Unbestimmtheitsrelation in der Statistischen Deutung von den bisher beschriebenen Auffassungen gänzlich abweicht, würde ohne sie unsere Diskussion unvollständig bleiben. Deswegen und wegen ihrer großen Klarheit und Verständlichkeit bringen wir hier eine knappe Wiederholung.

Die Wahrscheinlichkeitsaussagen der Quantenmechanik beziehen sich nach der Ensemble-Interpretation nicht auf Einzelobjekte, sondern auf Ensembles von identisch präparierten Quantensystemen [14, 15]. Der Begriff Ensemble bezeichnet eine Gesamtheit von Einzelobjekten, die unter identischen Bedingungen präpariert wurden. Ein anschauliches Beispiel liefert ein Atomstrahl, der so schwach ist, daß man die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen vernachlässigen kann. Der quantenmechanische Zustand (d. h. die Wellenfunktion) wird durch das Präparationsverfahren bestimmt, dem das Ensemble unterworfen wird. Damit ist eine experimentelle Anordnung aus makroskopischen Körpern gemeint, die dem Ensemble gewisse Eigenschaften aufprägt. Beispielsweise könnte man den Atomstrahl einen Geschwindigkeitsfilter passieren lassen und ihn so auf eine feste Geschwindigkeit (bzw. einen festen Impuls) präparieren.

Im allgemeinen legt ein Präparationsverfahren nicht das Ergebnis von Einzelmessungen fest, sondern entsprechend dem fundamental statistischen Charakter der Quantenmechanik nur Häufigkeitsverteilungen bestimmter Observablen. Die zentrale Aussage der Statistischen Interpretation ist nun, daß die quantenmechanisch berechneten Wahrscheinlichkeiten sich nur durch wiederholte Messungen an einem Ensemble bestimmen lassen. Dazu wiederholt man ein Experiment viele Male an einem Ensemble identisch präparierter Quantenobjekte und ermittelt die relativen Häufigkeiten der einzelnen Meßwerte.

Entsprechend verfährt man bei der Messung von anderen Observablen. Will man für die Heisenbergschen Relationen etwa die Häufigkeitsverteilungen von Ort und Impuls bestimmen, muß man ein irgendwie präpariertes Ensemble in zwei Teilensembles aufteilen. Am ersten führt man wiederholte Messungen des Orts durch. Anschließend werden am zweiten Teilensemble Impulsmessungen durchgeführt. Die dabei erhaltenen Meßwerte kann man statistisch auswerten, indem man z. B. die Mittelwerte von Ort und Impuls und ihre Standardabweichungen berechnet.

Nach der Statischen Interpretation bezieht sich die Unbestimmtheitsrelation genau auf eine solche Meßprozedur an einem unterteilten Ensemble. Die Größen Δx und Δp werden als Standardabweichungen interpretiert, die sich aus der statistischen Verteilung der wiederholten Messungen ergeben. Der begriffliche Inhalt der Heisenbergschen Relation läßt sich dann folgendermaßen ausdrücken: Es ist nicht möglich, ein Ensemble von Quantenobjekten so zu präparieren, daß die Standardabweichungen der separat vorgenommenen Orts- und Impulsmessungen $\Delta x \, \Delta p < \hbar/2$ erfüllen. Es ist hierbei ganz entscheidend, daß an einem einzelnen Quantenobjekt niemals Ort und Impuls gleichzeitig gemessen werden. So wird die oftmals geäußerte Vorstellung untergraben, daß der Ursprung der Unbestimmtheitsrelation in der gegenseitigen Störung gleichzeitiger Orts- und Impulsmessungen zu finden sei.

Um die Unterschiede zu den Interpretationen von Bohr und Heisenberg deutlicher werden zu lassen, fassen wir die Auffassung der Statistischen Interpretation zur Unbestimmtheitsrelation noch einmal zusammen:

1. Die Unbestimmtheitsrelation bezieht sich nicht auf einzelne Quantenobjekte, sondern auf ein Ensemble von identisch präparierten Systemen (also einen Zustand).

2. Sie geben eine objektive Tatsache wieder: die Unmöglichkeit, ein Ensemble so zu präparieren, daß $\Delta x \, \Delta p < \hbar/2$ gilt.

Klassifikation der verschiedenen Auffassungen

Bunge hat 1977 versucht, die verschiedenen Ansätze zur Deutung der Unbestimmtheitsrelationen systematisch zu erfassen. Auf diese Weise erhält man einen nützlichen Überblick über die Vielzahl der möglichen Positionen. Er unterscheidet drei Hauptkategorien, die er jeweils wieder unterteilt [1]. Wir geben seine Kategorieneinteilung hier wieder, kommentieren sie kurz und versuchen die obigen Positionen einzuordnen:

1. *Die Unbestimmtheiten sind Ungewißheiten.*
   Zwar besitzen Quantenobjekte zu jedem Zeitpunkt einen festen Ort und einen festen Impuls, wir sind aber nicht in der Lage, diese mit der nötigen Genauigkeit festzustellen. Man kann zwei Fälle unterscheiden:

   (a) Die Ungewißheiten weisen auf eine Unzulänglichkeit der Theorie hin. Eine bessere Theorie sollte also verborgene Parameter enthalten, deren Kenntnis die gleichzeitige Angabe von Ort und Impuls erlaubt. Ein Beispiel ist die Bohmsche Theorie [16], in der die Wellenfunktion die Bahnen der einzelnen Teilchen bestimmt.

   (b) Die Ungewißheiten entstehen durch eine mangelnde Auflösung der Meßgeräte Da Meßgeräte makroskopische Systeme sind, können sie keine einzelnen Eigenwerte der zu messenden Größen auflösen, sondern nur größere Intervalle. Dies entspricht der Auffassung von Δx und Δp als „Meßfehler". Ernsthaft wird man eine solche Position allerdings nicht vertreten wollen, denn das hieße, daß sich die Heisenbergschen Relationen umgehen ließen, wenn man nur Meßgeräte mit genügender Auflösung bauen könnte. Es gibt innerhalb der Quantenmechanik nicht nur keine Ursache, eine solche Entwicklung anzunehmen, sie würde dadurch sogar ernsthaft in Frage gestellt.

2. *Die Unbestimmtheiten treten allein beim Vorgangs des Messens auf.*
   Ort und Impuls können feste Werte haben, aber es ist prinzipiell nicht möglich, dies durch Messungen festzustellen, weil Messungen keinen besseren Aufschluß darüber gestatten als es die Unbestimmtheitsrelation erlaubt.

   (a) Die Unbestimmtheiten werden durch die Störungen verursacht, die das Meßgerät auf das zu messende Objekt ausübt. Diese Störungsvorstellung ist weit verbreitet und die Auffassung ist logisch haltbar. Man kann dagegen allerdings einwenden, daß die Formulierung der Unbestimmtheitsrelation in der Statistischen Interpretation zeigt, daß diese auch gilt (für das Ensemble), wenn an einem Einzelsystem nur eine der beiden Observablen gemessen wird (und eine dadurch verursachte mögliche Störung keinerlei weitere Auswirkungen hat).

(b) Die Unbestimmtheiten haben ihren Ursprung in der Unmöglichkeit, eine klare Trennung zwischen Meßgerät und gemessenem Objekt vorzunehmen. Nach Bunge ist dies der Standpunkt Bohrs. Die Darstellung seiner Auffassung, die oben gegeben wurde (s. auch [2]), sollte aber gezeigt haben, daß es der Bohrschen Interpretation nicht ganz gerecht würde, sie auf eine so verkürzte Form zu reduzieren.

3. *Die Unbestimmtheiten sind objektive Eigenschaften der quantenmechanischen* Objekte. Wieder unterscheidet Bunge zwei Varianten:

   (a) Sie sind ein Anzeichen für die Herrschaft des Zufalls im atomaren Bereich. Quantenobjekte verhalten sich nach probabilistischen Gesetzen. Dabei spielt es keine Rolle, ob sie beobachtet werden oder nicht. Viele Physiker würden dieser These zustimmen. Nach Bunges Ansicht vertrat Max Born diese Auffassung. Auch die Ensemble-Deutung würde man am ehesten hier einordnen.

   (b) Sie sind von einem sub-quantenmechanischen Substrat verursacht. Nach dieser Vorstellung verursachen ähnlich wie bei der Brownschen Bewegung die Wechselwirkungen des Quantensystems mit noch kleineren, nicht von der Quantenmechanik beschriebenen Objekten dessen statistische Zufallsbewegung. Heutzutage werden solche Hypothesen (die unter anderem von de Broglie stammen) kaum noch vertreten. Es kann damit schwerlich gelingen, die charakteristischen Merkmale der Quantenmechanik, wie etwa ihre Nichtlokalität, zu erklären.

Bunges Aufgliederung der verschiedenen möglichen Positionen schöpft die vielfältigen Möglichkeiten einer Interpretation der Unbestimmtheitsrelation keinesfalls vollständig aus. Die Ansichten Heisenbergs etwa lassen sich nicht ohne weiteres einordnen. Die obige Zusammenstellung sollte daher eher als Orientierungshilfe verstanden werden.

Gleichzeitige Messung von konjugierten Observablen

Häufig werden die Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen in dem Sinn interpretiert, daß Ort und Impuls nicht mit beliebiger Genauigkeit gleichzeitig angegeben werden können, weil zwei gleichzeitig durchgeführte Messungen sich gegenseitig beeinflussen. Gerade in Schulbüchern findet man sehr oft Formulierungen wie „... daß der Ort und die Geschwindigkeit eines Elektrons nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden können, sondern daß eine Steigerung in der Genauigkeit der Ortsmessung zwangsläufig die Geschwindigkeitsmessung unschärfer werden läßt und umgekehrt.“ Wie schon erwähnt trifft diese Auffassung den Kern der Sache nicht ganz. Dies zeigt das Gegenbeispiel der Ensemble-Interpretation, wo nur jeweils eine Observable pro Quantenobjekt gemessen werden muß.

Trotzdem ist es eine interessante Frage, ob gleichzeitige Messungen konjugierter Größen an ein und demselben Quantensystem möglich sind und welche fundamentalen Begrenzungen dabei auftreten. Historisch kam Margenau [17] auf das Problem zu sprechen, um die Vorstellung einer gegenseitigen Störung zu kritisieren. Etwa zu gleichen Zeit und unabhängig davon widmen sich Arthurs und Kelly [18] sowie She und Heffner [19] seiner Lösung.

Wenn man eine Größe wie Ort oder Impuls an einem Quantenobjekt messen will, müssen dazu Objekt und Meßgerät in Wechselwirkung treten, wie in Abb. 2a) gezeigt. Im einfachsten Modell, das man sich von einer Messung machen kann, wird der Zustand des Meßgerätes durch die Wechselwirkung so verändert (etwa durch die Bewegung eines Zeigers), daß man den Wert der gemessenen Observable nach der Messung eindeutig ablesen kann. Im allgemeinen wird sich das gemessene Objekt allerdings in einem Zustand befinden, in dem die zu messende Größe (z. B. der Impuls) keinen bestimmten Wert besitzt (mit anderen Worten: Das Objekt besitzt keine

Impulseigenschaft). In diesem Fall erhält man aus der häufigen Wiederholung der Messung an identisch präparierten Quantenobjekten eine statistische Verteilung der Meßwerte. Aus ihr kann man die gesuchte Impulsverteilung ablesen und Größen wie Mittelwert und Standardabweichung bestimmen.

Erweitert man die Situation auf die gleichzeitige Messung zweier Größen, sind natürlich zwei Meßgeräte notwendig, die jeweils einzeln mit dem Quantenobjekt wechselwirken müssen (vgl. Abb. 2b)). Eine Wechselwirkung zwischen den beiden Meßgeräten selbst muß dabei nicht bestehen. Zur Veranschaulichung kann man die gleichzeitige Messung von Ort und Impuls betrachten. Zur Ortsmessung kann man wie beim Heisenberg-Mikroskop Lichtquanten genügend kleiner Wellenlänge benutzen, während die Impulsmessung über den Doppler-Effekt erfolgen kann, wozu ein langer, monochromatischer Wellenzug erforderlich ist [6].

Am Ende der Messung werden beide Meßgeräte bestimmte Werte anzeigen, die wir mit X und P bezeichnen wollen. Das Quantenobjekt kann sich aber vor der Messung unmöglich sowohl eine Orts als auch eine Impulseigenschaft besessen haben (denn die gleichzeitige Präparation beider Größen ist nicht möglich). Infolgedessen können die Meßwerte X und P nicht als „der Ort“ bzw. „der Impuls“ des Objekts betrachtet werden. Die Werte X und P werden bei der Wiederholung der Messung an vielen identisch präparierten Systemen eine gewisse Streuung aufweisen. Aufschluß über die statistische Verteilung der gemessenen Werte erhält man, indem man die einzelnen Wertepaare wie in Abb. 3 in eine zweidimensionale X-P-Ebene einträgt. Durch Projektion auf die beiden Achsen erhält man eine X- und eine P-Verteilung, aus denen man wieder Mittelwerte $\bar{X}$, $\bar{P}$ und Standardabweichungen ΔX und ΔP bestimmen kann. Die theoretische Analyse zeigt nun, daß für das Produkt der beiden Standardabweichungen gilt:

$$\Delta X \, \Delta P \geq \hbar \tag{3}$$

Der Vergleich mit der Heisenbergschen Ungleichung (2) zeigt, daß sich die minimale Unbestimmtheit verdoppelt hat. Man kann dieses Ergebnis folgendermaßen interpretieren [20]: Die Hälfte der Ungleichung (3) stammt aus der Unbestimmtheit, die dem quantenmechanischen Zustand des gemessenen Objekts eigen ist und die durch die Heisenbergsche Relation (2) beschrieben wird. Die andere Hälfte wird durch die Wechselwirkung der beiden Detektoren mit dem Quantenobjekt verursacht, sie repräsentiert also den Einfluß der Meßgeräte.

In diesem Sinne ist die Aussage korrekt, daß sich gleichzeitige Messungen von Ort und Impuls gegenseitig beeinflussen. Das Beispiel zeigt jedoch, daß dies nicht zur Erklärung der Unbestimmtheitsrelationen herangezogen werden sollte, sondern daß dieser Effekt als ein zusätzlicher Beitrag hinzutritt. Es muß wohl nicht eigens betont werden, daß die Ungleichung (3) nicht den gleichen fundamentalen Status wie die Unbestimmtheitsrelation (2) beanspruchen kann, da sie nur aus einer speziellen Modellrechnung hergeleitet wurde.

In letzter Zeit wurde das Interesse an der gleichzeitigen Messung konjugierter Variabler dadurch verstärkt, daß es in der Quantenoptik gelungen ist, solche Messungen experimentell zu realisieren (s. z. B. [21]). Diese werden nicht an materiellen Teilchen durchgeführt, sondern an den Komponenten des quantenmechanischen Lichtfeldes. Hier ist die zum elektrischen Feld kanonisch konjugierte Variable das magnetische Feld. Sie erfüllen ähnliche Vertauschungsrelationen wie Ort und Impuls.

Eine Verfeinerung bei diesen Messungen stellt die vollständige Rekonstruktion der zweidimensionalen Verteilung aus Abb. 3 durch ein Verfahren dar, daß als „Quantentomographie“ bezeichnet wird. Beim Lichtfeld ist es möglich, nicht nur die kanonischen Variablen zu messen, sondern auch beliebige Linearkombinationen aus ihnen. Dies entspricht einem Schnitt durch die Verteilung, der unter einem bestimmten Winkel verläuft. Indem man viele verschiedene Schnitte durch die Verteilung legt (also verschiedene Linearkombinationen mißt), kann man sie mit denselben mathematischen Verfahren wie bei der medizinischen Computer-Tomographie rekonstruieren [22].

Die Probleme mit Winkel- und Phasenvariablen

Neben der Orts-Impuls-Relation werden oftmals Drehimpuls L_z und Drehwinkel ϕ zur Demonstration der Unbestimmtheits-Beziehungen benutzt. In Kugelkoordinaten ist die Darstellung von Drehimpulsoperator und Winkeloperator

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad \hat{\phi} = \phi,$$

und es gilt formal die gleiche Vertauschungsrelation wie für Ort und Impuls:

$$[\hat{\phi}, \hat{L}_z] = i\hbar.$$

Setzt man diese Gleichung in die allgemeine Fassung (1) der Unbestimmtheitsrelation ein, erhält man die Beziehung

$$\Delta L_z \, \Delta\phi \geq \frac{1}{2}\hbar. \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt (was korrekt ist), daß der z-Komponente des Drehimpulses und dem Drehwinkel nicht gleichzeitig bestimmte Werte zugeschrieben werden können. Betrachtet man die Relation aber für einen Zustand mit festem L_z, behauptet sie (was nicht stimmen kann), daß die Winkel-Unbestimmtheit gegen unendlich geht. Das Problem ist, daß eine Winkelvariable nur Werte zwischen 0 und 2π annehmen kann. Infolgedessen kann ihre Schwankung auch nicht größer als 2π sein. Die Relation (4) kann also nicht ganz korrekt sein.

Das Problem ist tiefgreifender als man zunächst vermutet, und eine ganz zufriedenstellende Lösung hat es bis heute nicht erfahren. Der oben benutzte „Winkeloperator“ $\hat{\phi}$ trägt der Periodizität der Winkelvariable nicht Rechnung und kann daher keine angemessene Beschreibung liefern. Es wurde daher vorgeschlagen, Operatoren einzuführen, die periodische Funktionen des Winkels „darstellen“ sollen. Eine Möglichkeit ist, von den Operatoren $\widehat{\sin}\phi$ und $\widehat{\cos}\phi$ ([23], s. auch [24]) oder $\widehat{\exp}(i\phi)$ [25] auszugehen. Erstere werden mit Hilfe der kartesischen Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{y}$ wie in der gewöhnlichen Trigonometrie definiert:

$$\widehat{\sin}\phi = \frac{\hat{y}}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}, \qquad \widehat{\cos}\phi = \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}.$$

Man beachte, daß $\widehat{\sin}\phi$ und $\widehat{\cos}\phi$ nicht als Funktionen eines Winkeloperators aufzufassen sind, sondern eigenständige Operatoren sind, die eine komplizierte Bezeichnung bekommen haben, um ihre Eigenschaften anzudeuten. Für sie gelten die Vertauschungsrelationen

$$[\widehat{\sin}\phi, \hat{L}_z] = i\,\widehat{\cos}\phi$$

$$[\widehat{\cos}\phi, \hat{L}_z] = i\,\widehat{\sin}\phi$$

Die Unbestimmtheitsrelationen lauten dann

$$\Delta L_z \, \Delta\mathrm{sin}\phi \geq \frac{1}{2}\hbar\langle\widehat{\cos}\phi\rangle \tag{5}$$

und eine entsprechende für $\widehat{\sin}\phi$. Die Interpretation von (5) ist zufriedenstellend: Wenn L_z einen festen Wert hat, ist der Winkel ganz unbestimmt, so daß $\langle\widehat{\cos}\phi\rangle = 0$ gilt. Ist der Winkel relativ gut bestimmt, ergibt sich im Grenzfall wieder die Relation (4), wie man durch eine Taylorentwicklung zeigen kann.

Aber auch diese Operatoren haben ihre Probleme, was man daran sieht, daß z. B. die Relation

$$(\widehat{\sin}\phi)^2 + (\widehat{\cos}\phi)^2 = 1$$

nicht gilt, die man von einer angemessenen Beschreibung einer Winkelvariable erwarten sollte.

Eine ganz ähnliche Situation liegt beim elektromagnetischen Feld vor. In der klassischen Physik beschreibt man eine elektromagnetische Welle durch

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \vec{k}\vec{x} + \Phi),$$

wobei Φ die Phase des Feldes ist und $\vec{E}_0^2$ proportional zur Intensität ist. In der Quantenmechanik führt man einen Operator $\hat{N}$ für die Photonenzahl ein, dessen Mittelwert (multipliziert mit der Energie eines Photons) die Intensität der Welle beschreibt. Es ist die Frage, ob man auch einen quantenmechanischen Phasenoperator $\hat{\Phi}$ einführen kann, der den klassischen Begriff der Phase einer Welle verallgemeinert.

Hierbei tauchen die gleichen Probleme auf wie oben (vgl. [26]): Heuristische Überlegungen legen die Vertauschungsrelation

$$[\hat{\Phi}, \hat{N}] = i\hbar$$

nahe, die wiederum zur Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta N \, \Delta\phi \geq \frac{1}{2}\hbar. \tag{6}$$

führt. Tatsächlich spielt diese Relation in der Lasertheorie auch eine wichtige Rolle. Sie besagt, daß die Zahl der Photonen und die Phase des Laserfeldes nicht gleichzeitig einen festen Wert annehmen können. Aus dem gleichen Grund wie oben – weil die Phase des Laserfeldes zwischen 0 und 2π liegen muß – kann sie aber nur näherungsweise richtig sein.

Zur Behebung der Schwierigkeit hat man auch für die Phase des Feldes Operatoren $\widehat{\sin}\Phi$ und $\widehat{\cos}\Phi$ eingeführt. Zusätzlich zu dem Problem, daß die Summe ihrer Quadrate nicht 1 ergibt, sind z. B. auch die Erwartungswerte von $\widehat{\sin}^2\Phi$ und $\widehat{\cos}^2\Phi$ im Vakuum nicht gleich 1/2, wie man das von einem Zustand ohne Vorzugsphase erwarten sollte.

Die formalen Schwierigkeiten konnten von Pegg und Barnett [27] teilweise behoben werden, die sich zunutze machten, daß es Zustände $|\theta\rangle$ gibt, die man als Zustände mit bestimmter Phase ansehen kann. Aus ihm konnten sie einen hermiteschen Phasenoperator konstruieren, der zufriedenstellende Eigenschaften besitzt. Allerdings erkauft man diese Vorzüge mit der mathematischen Subtilität, daß der Pegg-Barnett-Phasenoperator nur durch einen Grenzübergang definiert ist, der am Ende der Rechnung mit großer Sorgfalt durchgeführt werden muß.

Zusammenfassend kann man zum Thema Winkel- und Phasenoperator sagen, daß es zwar in grundsätzlichen Hinsicht sehr interessant ist. Die obige Diskussion sollte aber gezeigt haben, daß dem Verständnis große theoretischen und konzeptionellen Schwierigkeiten im Wege stehen. Von einer Behandlung des Themas im Schulunterricht sollte deshalb abgesehen, denn physikalisch fragwürdige Inhalte sollten höchstens in didaktisch gut begründeten Ausnahmefällen im Unterricht durchgenommen werden.

Die in fast allen Schulbüchern angeführte Relation zwischen Energie und Zeit wird im Folgebeitrag ausführlich diskutiert.

Literatur

[1] M. Bunge, *The Interpretation of Heisenberg's Inequalities*, in: H. Pfeiffer (Hrsg.): *Denken und Umdenken. Zu Werk und Wirkung von Werner Heisenberg*, München 1977, S. 146.

[2] R. Müller, B. Schmincke, H. Wiesner, *Atomphysik und Philosophie – Niels Bohrs Interpretation der Quantenmechanik*, Physik in der Schule, **34**, 165 (1996).

[3] H. Wiesner, R. Müller, *Die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik*, Physik in der Schule **34**, 343, 379 (1996).

[4] W. Jung, H. Wiesner, *Kontroverse Deutungen der Quantenphysik als Gegenstand des Physikunterrichts*, PdN-Ph. **33**, 276 (1984).

[5] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantenmechanischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. **43**, 172 (1927).

[6] W. Heisenberg, *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie*, Mannheim 1958; 1. Auflage 1930.

[7] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, New York 1974.

[8] N. Bohr, *Atomphysik und Philosophie – Kausalität und Komplementarität*, Beitrag zur "Philosophy in the Mid-Century", hrsg. von R. Klibansky, Florenz 1958; abgedruckt in [11].

[9] N. Bohr, *Erkenntnistheoretische Fragen in der Physik und die menschlichen Kulturen*, Ansprache beim internationalen Kongreß für Anthropologie und Ethnologie 1938; Nature **143**, 268 (1939); abgedruckt in [11].

[10] N. Bohr, *Diskussion mit Einstein über erkenntnistheoretische Probleme in der Atomphysik*, in: *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*, hrsg. von P. A. Schilpp, Stuttgart 1955; abgedruckt in [11].

[11] N. Bohr, *Atomphysik und menschliche Erkenntnis – Aufsätze und Vorträge aus den Jahren 1930 bis 1961*, Braunschweig 1985

[12] H. P. Robertson, *The uncertainty principle*, Phys. Rev. **34**, 163 (1929).

[13] E. Schrödinger, *Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip*, Berliner Berichte 1930, 296.

[14] L. E. Ballentine, *The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **42**, 358 (1970).

[15] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics*, Englewood Cliffs 1990.

[16] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables*, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).

[17] H. Margenau, L. Cohen, *Probabilities in quantum mechanics*, in: M. Bunge (Hrsg.), *Quantum theory and reality*, Berlin 1967, S. 71.

[18] E. Arthurs, J. L. Kelly, Bell System Tech. J. **44**, 725 (1965).

[19] C. Y. She, H. Heffner, *Simultaneous Measurement of Noncommuting Observables*, Phys. Rev. **152**, 1103 (1966).

[20] S. Stenholm, *Simultaneous Measurement of Conjugate Variables*, Annals of Physics **218**, 233 (1992).

[21] U. Leonhardt, H. Paul, *Simultaneous measurements of canonically conjugate variables in quantum optics*, J. Mod. Opt. **40**, 1745 (1993).

[22] K. Vogel, H. Risken, *Determination of Quasiprobability Distributions in Terms of Probability Distributions for the Rotated Quadrature Phase*, Phys. Rev. A 40, 2847 (1989).

[23] P. Carruthers, M. M. Nieto, *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **40**, 411, (1968).

[24] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford 1983.

[25] J. M. Lévy-Leblond, *Who is afraid of Nonhermitian Operators? A Quantum Description of Angle and Phase*, Annals of Physics **101**, 319 (1976).

[26] A. Schenzle, *Gibt es doch einen Phasenoperator in der Quantenmechanik?*, Phys. Bl. **45**, 84 (1989).

[27] D. T. Pegg, S. M. Barnett, *Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics*, Europys. Lett. **6**, 483 (1988).

Adressen der Autoren

Dr. Rainer Müller, Sektion Physik der Universität München, Theresienstr. 37, 80333 München.

Prof. Dr. Dr. Hartmut Wiesner, Lehrstuhl für Didaktik der Physik, Sektion Physik der Universität München, Schellingstr. 4, 80799 München.

Bildbeschriftungen

Abb. 1: Schematische Darstellung von Meßgeräten zur Messung von Ort und Impuls (nach [10]).

Abb. 2: a) Messung einer Größe am Quantenobjekt S. Das Meßgerät M muß dazu mit dem Objekt wechselwirken. b) Schema zur gleichzeitigen Messung konjugierter Observablen. Meßgerät M1 führt z. B. eine Ortsmessung durch, M2 eine Impulsmessung. Die Meßgeräte wechselwirken nicht untereinander, müssen aber zur Messung jeweils mit S in Wechselwirkung treten.

Abb. 3: Gleichzeitige Messung von Ort und Impuls. Die Meßwerte X und P werden in ein zwiedimensionales Diagramm eingetragen. Nach oftmaliger Wiederholung der Messung ergibt sich eine statistische Verteilung, aus der die Standardabweichungen ΔX und ΔP ermittelt werden können.